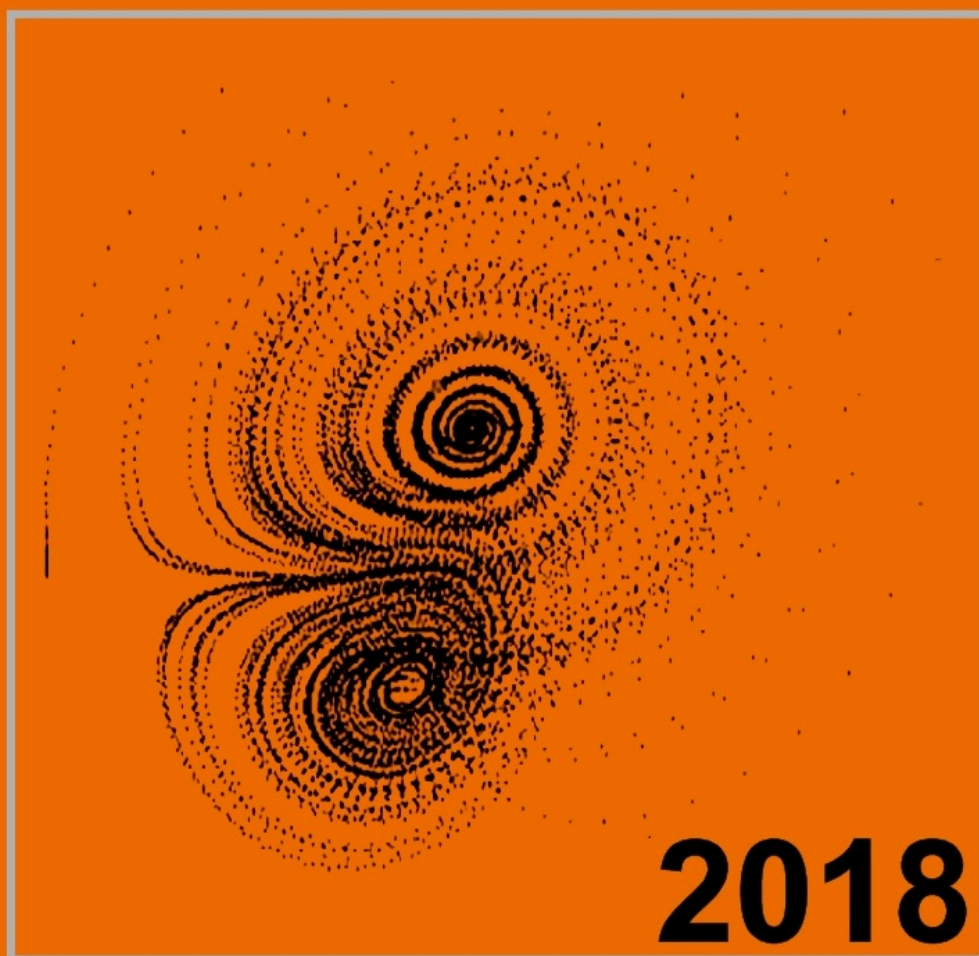


ISSN 0203-3755

# ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Том 8 (36), №2



УДК 517.958

## О малых движениях гидросистемы из трёх несмешивающихся жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд<sup>1</sup>

Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. E-mail: kopachevsky@list.ru

**Аннотация.** В данной работе изучается проблема малых движений гидросистемы “вязкоупругая жидкость-идеальная жидкость-идеальная жидкость”, заполняющих неподвижный сосуд. Методы, развитые в предыдущих работах авторов, посвящённых исследованию проблем малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости, а также систем идеальных жидкостей, позволяют получить результаты о разрешимости начально-краевой задачи для исследуемой проблемы.

**Ключевые слова:** вязкоупругая жидкость, идеальная жидкость, гидродинамическая система, ортопроектор, операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши.

## Small movements of partially dissipative hydrosystem in stationary containers

N. D. Kopachevsky, E. V. Syomkina

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** In the paper, we consider a problem on small motions of a system of viscoelastic and two ideal fluids in a stationary container. One of models of such viscoelastic fluid is Oldroid’s model. It is described, for example, in the book Eirich, F. R. Rheology. Theory and Applications. New York: Academic Press, 1956. It should be noted that the present paper based on the previous N. D. Kopachevsky works together with Azizov, T. Ya., Orlova L. D., Krein, S. G. Namely, problem on small movements of one viscoelastic fluid for generalized Oldroid’s model, small motions of a viscoelastic fluid in an open container, oscillations of a system of ideal fluids were investigated in these papers. The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to develop new approach and to prove the theorem on strong solvability for initial-boundary-value problem generated by a problem of small motions of a system of viscoelastic and two ideal fluids in an immovable container. This paper is organized as follows. In section 1 we formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance. In section 2 we choose the functional spaces generated by the problem for each fluid. For applying of method of orthogonal projection we need to choose orthogonal decomposition of corresponding spaces. After projection we get new statement of the problem without some trivial equations. Important part of section 2 is formulation

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (16-11-10125 “Операторные уравнения в функциональных пространствах и приложения к нелинейному анализу”, выполняемого в Воронежском госуниверситете).

of auxiliary problems which help us to make transition to the the Cauchy problem for the system of integro-differential equation in some Hilbert space. In section 3 we reduce this problem to a system of differential equation. This system can be rewrite as operator differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operators of this problem are studied in section 3 too. Section 4 is devoted to the existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial-boundary-value problem. This result based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in section 4 we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem. This means that external forces equal to zero and dependence by time for the unknown function has the form  $e^{-\lambda t}$ . Here we obtain the spectral problem for operator pencil. This pencil has similar properties like pencil associated with spectral problem generated by the problem on normal oscillations of a system of viscoelastic and ideal fluids.

**Keywords:** viscoelastic fluid, ideal fluid, hydrodynamic system, orthogonal projector, operator differential equation, Cauchy problem

**MSC 2010:** 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

## Введение

В этой работе изучается задача о малых движениях системы из трёх тяжёлых несмешивающихся однородных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя жидкость считается вязкоупругой, а остальные две идеальными. Случай, когда сосуд полностью заполнен системой из двух жидкостей, одна из которых является вязкоупругой, а другая идеальной, рассмотрен в работе [4]. В данной работе предполагается, что вязкоупругая жидкость удовлетворяет обобщённой модели Олдройта (см. [7],[8]). Вариант, когда неподвижный сосуд заполнен системой из двух вязкоупругих жидкостей, изучен в [2], а случай полного заполнения сосуда одной вязкоупругой жидкостью — в [10].

## 1. Постановка задачи. Закон баланса полной энергии системы

### 1.1. Постановка задачи

Рассмотрим неподвижный сосуд  $\Omega$ , полностью заполненный системой из трёх несмешивающихся жидкостей. Жидкости предполагаются тяжёлыми, и в силу этого действие капиллярных сил в этой задаче не учитывается. Область  $\Omega_1$ , нижняя по отношению к действию силы тяжести, заполнена несжимаемой вязкоупругой жидкостью обобщённой модели Олдройта (см., например, [7, 8, 11, 14]). В этой модели связь между тензором вязких напряжений и удвоенным тензором скоростей деформаций в вязкоупругой жидкости описывается не простейшим законом Гука, а линейным дифференциальным соотношением, где фигурируют производные порядка  $m \geq 1$  по времени как у тензора вязких напряжений, так и у тензора скоростей деформаций. Далее,  $\rho_1, \mu_1$  — соответственно плотность и динамический коэффициент вязкости вязкоупругой жидкости. Области  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  заполнены идеальными несжимаемыми жидкостями с плотностями  $\rho_2$  и  $\rho_3$ .

Обозначим через  $\vec{n}_k$  единичный вектор, нормальный к  $\partial\Omega_k$  и направленный вне  $\Omega_k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ). Через  $S_k$  обозначим часть стенки сосуда, граничащей с областью

$\Omega_k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ). Горизонтальную границу раздела между вязкоупругой и идеальной жидкостями в состоянии равновесия обозначим через  $\Gamma_1$ , а между идеальными жидкостями — через  $\Gamma_2$ . Введём систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , жёстко связанную с сосудом, таким образом, чтобы ось  $Ox_3$  была направлена против действия силы тяжести. Тогда ускорение гравитационного поля  $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ ,  $g > 0$ , а в состоянии покоя поля давлений в жидкостях выражаются по законам

$$P_{0,k}(x_3) = c_k - \rho_k g x_3, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (1.1)$$

где константы  $c_k$  определяются из условия равенства давлений на границах раздела  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ , при  $x_3 = 0$ .

Теперь перейдём к уравнениям, описывающим движение гидросистемы. Обозначим через  $\vec{u}_k$  поля скоростей жидкостей в  $\Omega_k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ), а через  $p_k(t, x)$  — отклонения полей давлений от их равновесных значений (см.(1.1)). Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил  $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$ ,  $x \in \Omega$ .

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид (см., например, [13, 14]):

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \mu_1 \Delta \vec{v}_1 + \rho_1 \vec{f}_1(t, x), \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (1.2)$$

$$\vec{v}_1(t, x) = \vec{u}_1(t, x) + \sum_{r=1}^m \alpha_r \int_0^t e^{-\beta_r(t-s)} \vec{u}_1(s, x) ds =: I_{0,1}(t) \vec{u}_1, \quad (1.3)$$

$$\rho_l \frac{\partial \vec{u}_l}{\partial t} = -\nabla p_l + \rho_l \vec{f}_l(t, x), \quad \operatorname{div} \vec{u}_l = 0 \quad (\text{в } \Omega_l), \quad l = 2, 3, \quad (1.4)$$

где  $\alpha_r \geq 0$ ,  $\beta_r > 0$ ,  $r = \overline{1, m}$ , — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкости обобщённой модели Олдройта,  $\vec{f}_k(t, x) := \vec{f}(t, x)|_{x \in \Omega_k}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , а  $\Delta$  — трёхмерный оператор Лапласа.

Для вязкоупругой жидкости, как известно, на твёрдой стенке  $S_1$  сосуда должно выполняться условие прилипания, т.е.

$$\vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad (1.5)$$

а для идеальных на поверхностях  $S_l$ ,  $l = 2, 3$ , — условия непротекания

$$\vec{u}_l \cdot \vec{n}_l = 0 \quad (\text{на } S_l), \quad l = 2, 3. \quad (1.6)$$

Будем описывать малые перемещения границ раздела между жидкостями с помощью функций вертикального отклонения

$$x_3 = \zeta_j(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \quad (1.7)$$

Тогда на  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ , должны выполняться кинематические условия

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial t} = \vec{u}_j \cdot \vec{n}_j =: \gamma_{n,j} \vec{u}_j = -\vec{u}_{j+1} \cdot \vec{n}_{j+1} =: -\gamma_{n,j+1} \vec{u}_{j+1}, \quad \vec{n}_j = \vec{e}_3 = -\vec{n}_{j+1}, \quad j = 1, 2, \quad (1.8)$$

а символом  $\gamma_{n,j}$ ,  $j = 1, 2$ , обозначена операция взятия нормального следа на  $\Gamma_j$ , т.е. следа нормальной компоненты поля скорости. Заметим ещё, что из условия сохранения объёма каждой из жидкостей имеем интегральные связи

$$\int_{\Gamma_j} \zeta_j d\Gamma_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (1.9)$$

Сформулируем теперь динамические условия на  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ . Они состоят в том, что на движущейся границе раздела векторное поле напряжений при переходе от одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на  $\Gamma_j$  приводят к следующим соотношениям: на  $\Gamma_j$  касательные напряжения (т.е. вдоль  $\Gamma_j$ ) изменяются непрерывно, а нормальные напряжения (т.е. вдоль оси  $Ox_3$ ) компенсируются гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_{q3}(\vec{v}_1) &= 0, \quad q = 1, 2; \\ [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-p_2] &= -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ p_2 - p_3 &= g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \quad (\text{на } \Gamma_2). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь  $\tau_{qr}(\vec{u}) := \frac{\partial u_q}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_q}$  ( $q, r = 1, 2, 3$ ) — удвоенный тензор скоростей деформаций.

Наконец, для искомым функций  $\vec{u}_k(t, x)$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , и  $\zeta_j(t, x_1, x_2)$ ,  $j = 1, 2$ , необходимо ещё задать начальные условия:

$$\begin{aligned} \vec{u}_k(0, x) &= \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad \vec{u}_j^0 \cdot \vec{n}_j \equiv -\vec{u}_{j+1}^0 \cdot \vec{n}_{j+1}, \quad x \in \Gamma_j, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = 1, 2, \\ \zeta_j(0, x) &= \zeta_j^0(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

## 1.2. Закон баланса полной энергии

Будем считать, что задача (1.2)-(1.11) имеет классическое решение, и выведем закон баланса полной энергии гидросистемы. Предварительно выпишем формулы Грина для векторных полей скоростей в областях  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$ . Для дважды

непрерывно дифференцируемых полей они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{u}_1) &:= \frac{1}{2} \mu_1 \int_{\Omega_1} \left( \sum_{q,r=1}^3 \tau_{qr}(\vec{\eta}_1) \overline{\tau_{qr}(\vec{u}_1)} \right) d\Omega_1 = \\ &= \int_{\Omega_1} \vec{\eta}_1 \cdot \overline{(-\mu_1 \Delta \vec{u}_1 + \nabla p_1)} d\Omega_1 + \int_{\Gamma_1} \sum_{q=1}^3 \eta_{1,q} \overline{(\mu_1 \tau_{q,3}(\vec{u}_1) - p_1 \delta_{q3})} d\Gamma_1, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\operatorname{div} \vec{\eta}_1 = \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{\eta}_1 = \vec{u}_1 \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad \vec{\eta}_1 = \sum_{q=1}^3 \eta_{1,q} \vec{e}_q,$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \vec{\eta}_2 \cdot \overline{\nabla p_2} d\Omega_2 &= - \int_{\Gamma_1} \eta_{2,3} \overline{p_2} d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \eta_{2,3} \overline{p_2} d\Gamma_2, \\ \int_{\Omega_3} \vec{\eta}_3 \cdot \overline{\nabla p_3} d\Omega_3 &= - \int_{\Gamma_2} \eta_{3,3} \overline{p_3} d\Gamma_2, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\operatorname{div} \vec{\eta}_l = \operatorname{div} \vec{u}_l = 0 \quad (\text{в } \Omega_l), \quad \vec{\eta}_l \cdot \vec{\eta}_l = \vec{u}_l \cdot \vec{\eta}_l \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_l), \quad l = 2, 3.$$

(В этих формулах учтено, что направление внешних нормалей на  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ , для областей  $\Omega_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , будет  $\vec{n}_j = \vec{e}_3 = -\vec{n}_{j+1}$ ,  $j = 1, 2$ .)

Умножим обе части (1.2) и (1.4) слева на  $\vec{u}_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , проинтегрируем по  $\Omega_k$  соответственно и сложим результаты; будем иметь (для вещественнозначных полей):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} d\Omega_k &= - \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \nabla p_k d\Omega_k + \mu_1 \int_{\Omega_1} \vec{u}_1 \cdot (\Delta \vec{v}_1) d\Omega_1 + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k. \end{aligned}$$

Используя формулы Грина (1.12), (1.13), а также граничные условия задачи (1.2)-(1.11), отсюда получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_k \right\} &= -\mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k + \\ &+ \int_{\Gamma_1} \sum_{q=1}^3 u_{1,q} (\mu_1 \tau_{q3}(\vec{u}_1) - (p_1 - p_2) \delta_{q3}) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} u_{2,3} (p_3 - p_2) d\Gamma_2. \end{aligned}$$

Учитывая ещё соотношения (1.9) и (1.10), окончательно приходим к выводу, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_k + g(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} |\zeta_1|^2 d\Gamma_1 + g(\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} |\zeta_2|^2 d\Gamma_2 \right\} =$$

$$-\mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) + \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k. \quad (1.14)$$

Это тождество есть закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Здесь в фигурных скобках стоит удвоенная полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия гидросистемы, а справа — мощность диссипативных вязкоупругих сил и мощность дополнительных внешних сил, действующих на систему. После интегрирования (1.14) по  $t$  в пределах от 0 до  $t$  получаем закон баланса полной энергии в интегральной форме, т.е. на произвольном отрезке времени  $(0, t)$ .

## 2. Метод ортогонального проектирования. Переход к системе операторных уравнений

### 2.1. Проектирование уравнений Эйлера

Воспользуемся далее разложением пространства векторных полей  $\vec{L}_2(\Omega_l)$  в ортогональную сумму (см. [3, с.113]):

$$\vec{L}_2(\Omega_l) = \vec{J}_0(\Omega_l) \oplus \vec{G}_{h,S_l}(\Omega_l) \oplus \vec{G}_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3,$$

$$\vec{J}_0(\Omega_l) := \{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_l) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega_l), \quad u_n = 0 \text{ (на } \partial\Omega_l) \},$$

$$\vec{G}_{h,S_l}(\Omega_l) := \{ \vec{v} = \nabla \varphi \in \vec{L}_2(\Omega_l) : \Delta \varphi = 0 \text{ (в } \Omega_l), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_l) \},$$

$$\vec{G}_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l) := \{ \vec{w} = \nabla \psi \in \vec{L}_2(\Omega_l) : \Delta \psi = 0 \text{ (в } \Omega_l), \quad \psi = 0 \text{ (на } \tilde{\Gamma}_l) \}.$$

Здесь  $\tilde{\Gamma}_2 := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $\tilde{\Gamma}_3 := \Gamma_2$ .

Введём ортопроекторы на соответствующие подпространства:  $P_{0,l}$ ,  $P_{h,S_l}$ ,  $P_{0,\tilde{\Gamma}_l}$ ,  $l = 2, 3$ .

Основываясь на разложении (2.1), применим метод ортогонального проектирования к уравнениям движения начально-краевой задачи (1.2)-(1.11). В силу условия соленоидальности, условия непротекания на твёрдых стенках  $S_l$  и условия сохранения объёма на свободных границах  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ , (так как жидкости несжимаемы) считаем, что

$$\vec{u}_l \in \vec{J}_0(\Omega_l) \oplus \vec{G}_{h,S_l}(\Omega_l) =: \vec{J}_{0,S_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3. \quad (2.1)$$

Поля  $\nabla p_l$ ,  $l = 2, 3$ , потенциальны и поэтому

$$\nabla p_l \in \vec{G}(\Omega_l) = \vec{G}_{h,S_l}(\Omega_l) \oplus \vec{G}_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3.$$

Представим поля  $\vec{u}_l$  и  $\nabla p_l$ ,  $l = 2, 3$ , в виде:

$$\vec{u}_l = \vec{w}_l + \nabla \Phi_l, \quad \vec{w}_l \in \vec{J}_0(\Omega_l), \quad \nabla \Phi_l \in \vec{G}_{h,S_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3; \quad (2.2)$$

$$\nabla p_l = \nabla \tilde{p}_l + \nabla \varphi_l, \quad \nabla \tilde{p}_l \in \vec{G}_{h,S_l}(\Omega_l), \quad \nabla \varphi_l \in \vec{G}_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l), \quad l = 2, 3. \quad (2.3)$$

Подставим эти представления в уравнения (1.4) для идеальных жидкостей и применим к ним ортопроекторы, отвечающие разложению (2.1). Получим:

$$\frac{\partial \vec{w}_l}{\partial t} = P_{0,l} \vec{f}_l \quad (\text{в } \Omega_l), \quad l = 2, 3, \quad (2.4)$$

$$\rho_l \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi_l = -\nabla \tilde{p}_l + \rho_l P_{h,S_l} \vec{f}_l \quad (\text{в } \Omega_l), \quad l = 2, 3, \quad (2.5)$$

$$\nabla \varphi_l = \rho_l P_{0,\tilde{\Gamma}_l} \vec{f}_l \quad (\text{в } \Omega_l), \quad l = 2, 3. \quad (2.6)$$

Из (2.4), с учётом начальных условий (1.11), сразу получаем

$$\vec{w}_l(t, x) = \int_0^t P_{0,l} \vec{f}_l(\tau, x) d\tau + P_{0,l} \vec{u}_l^0, \quad l = 2, 3.$$

Члены в уравнении (2.6) — это составляющие градиентов давлений в подпространстве  $\vec{G}_{0,\tilde{\Gamma}_l}(\Omega_l)$ ,  $l = 2, 3$ . Потенциал этого поля  $\varphi_l$  обращается в нуль на  $\tilde{\Gamma}_l$  и поэтому в граничных условиях не участвует. Далее соотношения (2.6) не рассматриваем.

Условимся называть решения уравнений (2.4), а также составляющие градиентов давлений из (2.6) — тривиальными решениями. Итак, основные уравнения, которые будем рассматривать для идеальных жидкостей, это уравнения (2.5).

## 2.2. Проектирование уравнения Навье-Стокса

Для области  $\Omega_1$  введём аналогичное разложение пространства векторных полей  $\vec{L}_2(\Omega_1)$  в ортогональную сумму (см. [3]):

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \quad \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1).$$

Введём ортопроекторы  $P_{0,S_1}$  и  $P_{01,\Gamma_1}$  на подпространства  $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$  и  $\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$  соответственно. В силу условия соленидальности и условия прилипания на  $S_1$  для  $\vec{u}_1$  считаем, что поле  $\vec{u}_1$  принадлежит пространству векторных полей с конечной скоростью диссипации энергии в жидкости:

$$\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) := \left\{ \vec{u}_1 \in \vec{H}^1(\Omega_1) : \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1) \right\} \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$



Здесь скалярное произведение определяется по формуле (см. (1.12))

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1)_{\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)} := E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \left( \sum_{q,r=1}^3 \tau_{qr}(\vec{u}_1) \overline{\tau_{qr}(\vec{v}_1)} \right) d\Omega_1.$$

Отметим, что  $\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$  плотно вложено в  $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ . Подействуем введенными операторами  $P_{0,S_1}$  и  $P_{01,\Gamma_1}$  на обе части уравнения для вязкоупругой жидкости (1.2), получим:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} &= -\nabla \tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1} \Delta \vec{v}_1 + \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \\ -\mu_1 P_{01,\Gamma_1} \Delta \vec{v}_1 + P_{01,\Gamma_1} \nabla p_1 &= \rho_1 P_{01,\Gamma_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь через  $\nabla \tilde{p}_1$  обозначено поле  $P_{0,S_1} \nabla p_1 =: \nabla \tilde{p}_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$  в силу разложения пространства  $\vec{L}_2(\Omega_1)$ . Потенциал поля  $P_{01,\Gamma_1} \nabla p_1$  в граничных условиях не участвует, так как обращается в нуль на  $\Gamma_1$ . Поэтому для вязкоупругой жидкости рассматриваем только уравнение (2.7).

### 2.3. Формулировка задачи после отделения тривиальных решений

Заметим, что в силу представлений (2.2) полей  $\vec{u}_l$ ,  $l = 2, 3$ , кинематические условия (1.8) можно записать в виде

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial t} = \gamma_{n,j} \vec{u}_j = \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial n_j} \quad (\text{на } \Gamma_j), \quad j = 1, 2.$$

В свою очередь динамические условия (1.10) в силу представлений (2.3) для  $\nabla p_l$ ,  $l = 2, 3$ , примут вид

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_{q3}(\vec{v}_1) &= 0, \quad q = 1, 2 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ [-\tilde{p}_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-\tilde{p}_2] &= -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ [\tilde{p}_2 - \tilde{p}_3] &= g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2 \quad (\text{на } \Gamma_2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введём ещё ортопроекторы  $\theta_j$  на  $L_{2,\Gamma_j} := L_2(\Gamma_j) \ominus \{1_{\Gamma_j}\}$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда итогом проведенных выше преобразований является следующая

**Теорема 1.** Пусть  $\vec{u}_k$ ,  $\nabla p_k$ ,  $k = \overline{1,3}$ ,  $\zeta_j$ ,  $j = 1, 2$ , — классическое решение начально-краевой задачи (1.2)-(1.11), тогда функции  $\vec{u}_1$ ,  $\nabla \tilde{p}_1$ ,  $\nabla \Phi_l$ ,  $\nabla \tilde{p}_l$ ,  $l = 2, 3$ ,  $\zeta_j$ ,  $j = 1, 2$ , являются решением следующей начально-краевой задачи:

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla \tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1} \Delta \vec{v}_1 + \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (2.9)$$

$$\operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad (2.10)$$

$$\rho_l \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi_l + \nabla \tilde{p}_l = \rho_l P_{h,S_1} \vec{f}_l \quad (\text{в } \Omega_l), \quad l = 2, 3, \quad (2.11)$$

$$\Delta\Phi_l = 0 \text{ (в } \Omega_l), \quad \frac{\partial\Phi_l}{\partial n_l} = 0 \text{ (на } S_l) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial\Phi_l}{\partial n_l} = -\frac{\partial\zeta_{l-1}}{\partial t} = -\gamma_{n,l-1}\vec{u}_{l-1} \text{ (на } \Gamma_{l-1}), \quad l = 2, 3. \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \mu_1\tau_{q3}(\vec{v}_1) &= 0, \quad q = 1, 2 \text{ (на } \Gamma_1), \\ [-\theta_1\tilde{p}_1 + \mu_1\tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-\theta_1\tilde{p}_2] &= -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta_1 \text{ (на } \Gamma_1), \\ [\theta_2\tilde{p}_2 - \theta_2\tilde{p}_3] &= g(\rho_2 - \rho_3)\zeta_2 \text{ (на } \Gamma_2), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1(0, x) = P_{0,S_1}\vec{u}_1^0(x) = \vec{u}_1^0(x), \quad x \in \Omega_1, \quad \nabla\Phi_l(0, x) = P_{h,S_l}\vec{u}_l^0(x), \quad x \in \Omega_l, \quad l = 2, 3 \\ \zeta_j(0, x) = \zeta_j^0(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

*Замечание 1.* Отметим, что введение ортопроекторов  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2$ , обусловлено стремлением избежать произвола в нормировке на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  для функций  $\tilde{p}_2$ . Действительно, в динамических условиях (2.8) функции  $\zeta_j \in L_{2,\Gamma_j}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\tau_{33}(\vec{v}_1) \in L_{2,\Gamma_1}$  (см.[3, с.114]), откуда следует, что

$$\int_{\Gamma_1} (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)d\Gamma_1 = 0, \quad \int_{\Gamma_2} (\tilde{p}_2 - \tilde{p}_3)d\Gamma_2 = 0.$$

Из определения ортопроекторов  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2$ , следует, что  $\tilde{p}_1 = \theta_1\tilde{p}_1 + c_1$ ,  $\tilde{p}_3 = \theta_2\tilde{p}_3 + c_3$ . Константы  $c_1$ ,  $c_3$  позволяют ввести однозначную нормировку для  $\tilde{p}_2$  на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :

$$c_1 = \frac{1}{|\Gamma_1|} \int_{\Gamma_1} \tilde{p}_2 d\Gamma_1, \quad c_3 = \frac{1}{|\Gamma_2|} \int_{\Gamma_2} \tilde{p}_2 d\Gamma_2.$$

#### 2.4. Вспомогательные краевые задачи и их операторы

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Вспомогательная задача I.

$$\begin{aligned} -P_{0,S_1}\Delta\vec{u} + \mu^{-1}\nabla p = \vec{f} \text{ (в } \Omega_1) \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \vec{u} = \vec{0} \text{ (на } S_1), \\ \mu_1\tau_{q3}(\vec{u}) = 0, \quad q = 1, 2, \quad -p + \mu\tau_{33}(\vec{u}) = 0 \text{ (на } \Gamma_1). \end{aligned}$$

Это так называемая первая вспомогательная задача С.Г. Крейна (см. [3, с.116]). Она имеет единственное обобщённое решение  $\vec{u} = A_1^{-1}\vec{f}$  для любого вектора  $\vec{f}$  из  $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ . Область определения  $\mathcal{D}(A_1)$  оператора  $A_1$  плотна в пространстве  $\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ , а  $\mathcal{D}(A_1^{1/2}) = \vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ . Оператор  $A_1^{-1}$  является положительным и компактным в  $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ .

Вспомогательная задача II.

$$\Delta p = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial p}{\partial n_1} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad p = \tau_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \int_{\Gamma_1} \tau_1 d\Gamma_1 = 0.$$

Это — известная задача Зарембы для уравнения Лапласа. Она имеет единственное решение (см. [3, с.45])  $p = G_1 \tau_1 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$  при  $\tau_1 \in H_{\Gamma_1}^{1/2}$ ,

$$H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) := \{\varphi \in H^1(\Omega_1) : \int_{\Gamma_1} \varphi d\Gamma_1 = 0\}, \quad \|\varphi\|_{H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)}^2 := \int_{\Omega_1} |\nabla \varphi|^2 d\Omega_1.$$

(Определение пространств  $H_{\partial\Omega}^{1/2}$ ,  $H_{\partial\Omega}^{-1/2}$  для областей  $\Omega$  с липшицевой границей  $\partial\Omega$ , а также соответствующие теоремы вложения и продолжения с границы см. в работе Gagliardo E. [12]).

Вспомогательная задача III.

$$\Delta \Phi = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_3} = 0 \quad (\text{на } S_3), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_3} = \psi_3 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \int_{\Gamma_2} \Phi d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} \psi_3 d\Gamma_2 = 0.$$

Это задача Неймана для уравнения Лапласа. Если  $\psi_3 \in \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}$ , то задача имеет единственное решение  $\Phi = V_3 \psi_3 \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_3)$ . Здесь символом  $\tilde{\phantom{x}}$  обозначен класс функций из  $H_{\Gamma_2}^{-1/2}$ , продолжимых нулём на всю границу  $\partial\Omega_3$  в классе  $H^{-1/2}(\partial\Omega_3)$  (см. [1, 9]). Введём по решению задачи III оператор:

$$\theta_2 \Phi|_{\Gamma_2} = \theta_2 \hat{C}_3 \psi_3 =: C_3 \psi_3, \quad \hat{C}_3 := \gamma_{\Gamma_2} V_3, \quad \gamma_{\Gamma_2} \psi_3 := \psi_3|_{\Gamma_2}. \quad (2.16)$$

Отметим, что  $C_3$  самосопряжённый, положительный и компактный оператор в  $L_{2,\Gamma_2}$ .

Вспомогательная задача IV.1.

$$\Delta \Phi_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2} = 0 \quad (\text{на } S_2 \cup \Gamma_2), \quad \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2} = \psi_1 \quad (\text{на } \Gamma_1),$$

$$\int_{\Gamma_1} \Phi_{21} d\Gamma_1 = \int_{\Gamma_1} \psi_1 d\Gamma_1 = 0.$$

Это снова задача Неймана для уравнения Лапласа. Если  $\psi_1 \in \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$ , то задача имеет единственное решение  $\Phi_{21} = V_{21} \psi_1 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_2)$ .

Вспомогательная задача IV.2.

$$\Delta \Phi_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n_2} = 0 \quad (\text{на } S_2 \cup \Gamma_1), \quad \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n_2} = \psi_2 \quad (\text{на } \Gamma_2),$$

$$\int_{\Gamma_2} \Phi_{22} d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} \psi_2 d\Gamma_2 = 0.$$

Это тоже задача Неймана для уравнения Лапласа. Если  $\psi_2 \in \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}$ , то задача имеет единственное решение  $\Phi_{22} = V_{22}\psi_2 \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_2)$ .

Введём по решению задач IV.1 и IV.2 операторы:

$$\begin{aligned} \theta_1 \Phi_{21}|_{\Gamma_1} &= \theta_1 \hat{C}_{11}\psi_1 =: C_{11}\psi_1, & \hat{C}_{11} &:= \gamma_{\Gamma_1}V_{21}, & \gamma_{\Gamma_1}\psi_1 &:= \psi_1|_{\Gamma_1}. \\ \theta_1 \Phi_{22}|_{\Gamma_1} &= \theta_1 \hat{C}_{12}\psi_2 =: C_{12}\psi_2, & \hat{C}_{12} &:= \gamma_{\Gamma_1}V_{22}, & \gamma_{\Gamma_1}\psi_2 &:= \psi_2|_{\Gamma_1}. \\ \theta_2 \Phi_{21}|_{\Gamma_2} &= \theta_2 \hat{C}_{21}\psi_1 =: C_{21}\psi_1, & \hat{C}_{21} &:= \gamma_{\Gamma_2}V_{21}, & \gamma_{\Gamma_2}\psi_1 &:= \psi_1|_{\Gamma_2}. \\ \theta_2 \Phi_{22}|_{\Gamma_2} &= \theta_2 \hat{C}_{22}\psi_2 =: C_{22}\psi_2, & \hat{C}_{22} &:= \gamma_{\Gamma_2}V_{22}, & \gamma_{\Gamma_2}\psi_2 &:= \psi_2|_{\Gamma_2}. \end{aligned}$$

Отметим, что компактные операторы  $C_{qr}$ ,  $q, r = 1, 2$  образуют самосопряжённую, положительную матрицу  $\{C_{qr}\}_{q,r=1}^2$  в  $L_{2,\Gamma_1} \oplus L_{2,\Gamma_2}$ .

Вспомогательная задача V.

$$\Delta p = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial p}{\partial n_2} = 0 \quad (\text{на } S_2 \cap \Gamma_1), \quad p = \tau_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \int_{\Gamma_2} \tau_2 d\Gamma_2 = 0.$$

Это, как и I, задача Зарембы для уравнения Лапласа. Она имеет единственное решение (см. [3, с.45])  $p = G_2\tau_2 \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_2)$  при  $\tau_2 \in H_{\Gamma_2}^{1/2}$ .

## 2.5. Вывод системы операторных уравнений

Переходя к формулировке исходной задачи (1.2)-(1.11) в операторной форме, представим поле  $\nabla \tilde{p}_1$  в виде  $\nabla \tilde{p}_1 = \nabla \tilde{p}_{11} + \nabla \tilde{p}_{12}$  и подберём поле  $\nabla \tilde{p}_{11}$  таким образом, чтобы поле  $\vec{v}_1$  являлось решением следующей краевой задачи

$$-P_{0,S_1}\Delta \vec{v}_1 + \mu_1^{-1}\nabla \tilde{p}_{11} = \mu_1^{-1} \left( -\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 - \nabla \tilde{p}_{12} \right) \quad (\text{в } \Omega_1) \quad (2.17)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{v}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad (2.18)$$

$$\mu_1 \tau_{q3}(\vec{v}_1) = 0, \quad q = 1, 2, \quad -\theta_1 \tilde{p}_{11} + \mu \tau_{33}(\vec{v}_1) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1). \quad (2.19)$$

Используя вспомогательную задачу I, заключаем, что краевая задача (2.17)-(2.19) имеет единственное обобщённое решение

$$\vec{v}_1 = \mu_1^{-1} A_1^{-1} \left( -\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 - \nabla \tilde{p}_{12} \right)$$

для правой части из  $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ . Тогда можно записать

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1 \vec{v}_1 + \nabla \tilde{p}_{12} = \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1). \quad (2.20)$$

Заметим, что при расщеплении условия для нормального напряжения на  $\Gamma_1$  из (2.14) осталось условие

$$\theta_1 \tilde{p}_{12} = \theta_1 \tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1).$$

Учитывая принадлежность  $\nabla \tilde{p}_{12} \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ , найдём, что потенциал  $\theta_1 \tilde{p}_{12}$  удовлетворяет вспомогательной задаче II при  $\tau_1 = \theta_1 \tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta_1$ . Поэтому можно считать, что

$$\tilde{p}_{12} = G_1(\theta_1 \tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta_1).$$

Оператор  $G_1$  ограниченно действует из пространства  $H_{\Gamma_1}^{1/2}$  в пространство  $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ .

Подставим последнее представление для градиента давления в (2.20), получим

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1 \vec{v}_1 + G_1 \theta_1 \tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2) G_1 \zeta_1 = \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1). \quad (2.21)$$

Далее, в силу принадлежности  $\nabla \Phi_2$  пространству  $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$  потенциал  $\Phi_2$  с помощью решений вспомогательных задач IV.1 и IV.2 можно представить в виде:

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} \quad \text{при } \psi_1 = -\gamma_{n,1} \vec{u}_1, \quad \psi_2 = \gamma_{n,2} \vec{u}_2.$$

Рассмотрим уравнения (2.11) для идеальных жидкостей. Из них следуют интегралы Коши-Лагранжа

$$\rho_l \frac{\partial \Phi_l}{\partial t} + \tilde{p}_l = F_l + c_l(t) \quad (\text{в } \Omega_l), \quad l = 2, 3. \quad (2.22)$$

где через  $F_l$  обозначены потенциалы полей  $\rho_l P_{h,S_l} \vec{f}_l$ , а  $c_l(t)$  — произвольные функции переменной  $t$ ,  $l = 2, 3$ . Рассмотрим эти уравнения на  $\Gamma_2$  и спроектируем на  $L_{2,\Gamma_2}$ , тогда динамическое условие (см. третье уравнение (2.14)) можно преобразовать к следующему виду:

$$\theta_2 \tilde{p}_2 = \theta_2 \tilde{p}_3 + g(\rho_2 - \rho_3)\zeta_2 = \rho_3 \theta_2 F_3 + \rho_3 \theta_2 \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} + g(\rho_2 - \rho_3)\zeta_2 \quad (\text{на } \Gamma_2). \quad (2.23)$$

Выразим теперь  $\theta_2 \Phi_3|_{\Gamma_2}$  с помощью представления (2.16) и оператора  $C_3$ :

$$\theta_2 \Phi_3|_{\Gamma_2} = -C_3 \gamma_{n,2} \vec{u}_2 \quad \text{на } \Gamma_2.$$

Тогда вместо (2.23) получим

$$\theta_2 \tilde{p}_2 = \rho_3 \theta_2 F_3 - \rho_3 \frac{\partial}{\partial t} C_3 \gamma_{n,2} \vec{u}_2 + g(\rho_2 - \rho_3)\zeta_2 \quad (\text{на } \Gamma_2).$$

Значит, согласно вспомогательной задаче V,

$$\tilde{p}_2|_{\Omega_2} = G_2 \left( \rho_3 \theta_2 F_3 - \rho_3 \frac{\partial}{\partial t} C_3 \gamma_{n,2} \vec{u}_2 + g(\rho_2 - \rho_3)\zeta_2 \right).$$

Выразим при  $l = 2$  функцию  $\tilde{p}_2$  из (2.22), тогда уравнение (2.21) можно переписать в виде:

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1 \vec{v}_1 + G_1 \theta_1 \left( \rho_2 F_2 - \rho_2 \frac{\partial}{\partial t} (C_{11} \gamma_{n,1} \vec{u}_1 + C_{12} \gamma_{n,2} \vec{u}_2) \right) + g(\rho_1 - \rho_2) G_1 \zeta_1 =$$

$$= \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1).$$

Далее для всех функций переменной  $t$  со значениями в гильбертовых пространствах их производные по  $t$  будем обозначать  $\frac{d}{dt}$  вместо  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

Проведенные в этом пункте рассуждения можно сформулировать в виде следующей леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $\vec{u}_1, \nabla \tilde{p}_1, \nabla \Phi_l, \nabla \tilde{p}_l, l = 2, 3, \zeta_j, j = 1, 2,$  — классическое решение начально-краевой задачи (2.9)-(2.15), тогда функции  $\vec{u}_k, k = 1, 2, \zeta_j, j = 1, 2$  являются решением следующей задачи Коши:

$$\frac{d}{dt} (\rho_1 \vec{u}_1 + \rho_2 (G_1 C_{11} \gamma_{n,1} \vec{u}_1 + G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \vec{u}_2)) + \mu_1 A_1 \vec{v}_1 + g(\rho_1 - \rho_2) G_1 \zeta_1 = \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 - \rho_2 G_1 \theta_1 F_2 \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dt} (\rho_2 (G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \vec{u}_1 + G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \vec{u}_2) + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \vec{u}_2) + g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 = \rho_2 G_2 \theta_2 F_2 - \rho_3 G_2 \theta_2 F_3, \quad (2.25)$$

$$\frac{d}{dt} (g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1) = g(\rho_1 - \rho_2) \gamma_{n,1} \vec{u}_1, \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt} (g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2) = g(\rho_2 - \rho_3) \gamma_{n,2} \vec{u}_2, \quad (2.27)$$

$$\vec{u}_k(0, x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \quad \zeta_j(0, x) = \zeta_j^0(x) \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \quad (2.28)$$

Введём операторы  $\hat{G}_1 := g(\rho_1 - \rho_2) G_1, \hat{G}_2 := g(\rho_2 - \rho_3) G_2.$  Тогда справедлива следующая

**Лемма 2.** Имеют место соотношения

$$\hat{G}_1^* = g(\rho_1 - \rho_2) \gamma_{n,1}, \quad \gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}).$$

$$\hat{G}_2^* = g(\rho_2 - \rho_3) \gamma_{n,2}, \quad \gamma_{n,2} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2); \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}).$$

**Доказательство.** См. доказательство леммы 6 из [2]. □

### 3. Преобразование задачи к стандартному виду

#### 3.1. Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

В задаче (2.24)-(2.28) введём новые искомые функции по формулам

$$\vec{w}_r(t) := \alpha_r^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_r(t-s)} \vec{u}_1(s) ds \in \vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1), \quad r = \overline{1, m}. \quad (3.1)$$

Тогда

$$\frac{d\vec{w}_r}{dt} = \alpha_r^{1/2}\vec{u}_1 - \beta_r\alpha_r^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_r(t-s)}\vec{u}_1(s)ds = \alpha_r^{1/2}\vec{u}_1 - \beta_r\vec{w}_r, \quad r = \overline{1, m}. \quad (3.2)$$

Теперь с учётом (3.1), (3.2) задача (2.24)-(2.28) переписывается в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ((\rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1}) \vec{u}_1 + \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \vec{u}_2) + \mu_1 A_1 \left( \vec{u}_1 + \sum_{r=1}^m \alpha_r \vec{w}_r \right) + g(\rho_1 - \rho_2) G_1 \zeta_1 = \\ = \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 - \rho_2 G_1 F_2 \\ \frac{d\vec{w}_r}{dt} - \alpha_r^{1/2} \vec{u}_1 + \beta_r \vec{w}_r = 0, \quad r = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt} (\rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \vec{u}_1 + (\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \vec{u}_2) + g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 = \rho_2 G_2 F_2 - \rho_3 G_2 F_3,$$

$$\frac{d}{dt} (g(\rho_1 - \rho_2) \zeta_1) - \hat{G}_1^* \vec{u}_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (g(\rho_2 - \rho_3) \zeta_2) - \hat{G}_2^* \vec{u}_2 = 0,$$

$$\vec{u}_k(0, x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \quad \zeta_j(0, x) = \zeta_j^0(x) \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2,$$

$$\vec{w}_r(0, x) = \vec{0}, \quad r = \overline{1, m}.$$

Коротко эта задача может быть записана в виде:

$$\mathcal{T} \frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}z + g(t), \quad z(0) = z^0, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{T} := \text{diag}\{\mathcal{C}, \mathcal{B}\}, \quad \mathcal{C} := \begin{pmatrix} \rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1} & \hat{0}^\tau & \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \\ \hat{0} & \hat{I} & \hat{0} \\ \rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} & 0 & \rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{B} := \text{diag}\{g(\rho_2 - \rho_1)I, g(\rho_3 - \rho_2)I\} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{G} \\ -\mathcal{G}^* & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & \hat{\alpha}^\tau & 0 \\ -\hat{\alpha} & \hat{\beta} & \hat{0} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} g(\rho_2 - \rho_1)G_1 & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} \\ 0 & g(\rho_3 - \rho_2)G_2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \hat{y} \\ \vec{u}_2 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 - \rho_2 G_1 F_2 \\ 0 \\ \rho_2 G_2 F_2 - \rho_3 G_2 F_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Здесь

$$A := \mu_1 A_1, \quad \hat{\alpha} := (\alpha_1^{1/2}, \alpha_2^{1/2}, \dots, \alpha_m^{1/2})^\tau, \quad \hat{\beta} := \text{diag}\{\beta_1 I, \beta_2 I, \dots, \beta_m I\}, \quad \vec{u}_2 = \nabla \Phi_{22}, \quad (3.9)$$

$$\hat{y} := (A^{1/2} \vec{w}_1, A^{1/2} \vec{w}_2, \dots, A^{1/2} \vec{w}_m)^\tau, \quad \hat{0} := \underbrace{(0, 0, \dots, 0)^\tau}_{m \text{ раз}}, \quad \hat{I}_m := \text{diag}\{\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \text{ раз}}\} \quad (3.10)$$

Операторная матрица  $\mathcal{A}$  задана на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A) \oplus \hat{\mathcal{D}}(A^{1/2}) \oplus W \oplus H_{\Gamma_1}^{1/2} \oplus H_{\Gamma_2}^{1/2}, \quad \hat{\mathcal{D}}(A^{1/2}) := \bigoplus_{r=1}^m \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad (3.11)$$

$$W := \left\{ \nabla \Phi_{22} \in \vec{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2) : (\vec{u}_1, \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_3)^\tau \in \vec{J}_{0,S}(\Omega), \vec{u}_1 \in \mathcal{D}(A), \right. \\ \left. \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = -\nabla \Phi_{22} \cdot \vec{n}_2 \in H_{\Gamma_1}^{1/2}, \nabla \Phi_{22} \cdot \vec{n}_2 = -\nabla \Phi_3 \cdot \vec{n}_3 \in H_{\Gamma_2}^{1/2} \right\},$$

и действует в пространстве  $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2) \oplus L_{2,\Gamma_1} \oplus L_{2,\Gamma_2}$ , где  $\hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1) := \bigoplus_{r=1}^m \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ ,  $\vec{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2) := \{\vec{v} = \nabla \varphi \in \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 (\Gamma_1)\}$ .

*Замечание 2.* Необходимо отметить, что задача (3.4) получена после дополнительной симметризации путём замены

$$\vec{w}_r = A^{-1/2} \vec{y}_r, \quad \vec{y}_r \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \quad r = \overline{1, m}.$$

Тогда из (3.3) имеем соотношения

$$\frac{d}{dt}(A^{-1/2} \vec{y}_r) = \alpha_r^{1/2} \vec{u}_1 - \beta_r A^{-1/2} \vec{y}_r, \quad r = \overline{1, m}, \quad (3.12)$$

и если  $\vec{u}_1(t)$ , — непрерывная по  $t$  функция со значениями в  $\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$ , а  $\vec{y}_r(t)$ ,  $r = \overline{1, m}$ , — со значениями в  $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ , то правая часть в (3.12) непрерывна по  $t$  со значениями в  $\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) = \mathcal{D}(A^{1/2})$ . Поэтому к обеим частям в (3.12) можно применить оператор  $A^{1/2}$ .

### 3.2. Свойства операторных коэффициентов

**Лемма 3.** *Оператор  $\mathcal{T}$  из (3.5)-(3.6) ограничен, самосопряжён и положительно определён.*

**Доказательство.** Свойство ограниченности следует из того, что ограничены все операторные коэффициенты матрицы  $\mathcal{T}$ . Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить ограниченность, например, оператора  $G_1 C_{11} \gamma_{n,1}$ . Он действует из  $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$  в  $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ . Действительно, для  $\vec{\xi} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$  элемент  $\gamma_{n,1} \vec{\xi} \in \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$ . С помощью вспомогательной задачи IV.1 найдём функцию  $\Phi_{21}$  при условии, что



$\psi_1 = \gamma_{n,1}\vec{\xi}$ . Тогда в силу свойств ограниченности операторов  $C_{11}$  и  $G_1$  оператор  $G_1 C_{11} \gamma_{n,1}$  ограничен, а его действие следующее:

$$G_1 C_{11} \gamma_{n,1} \vec{\xi} = G_1 \theta_1 \Phi_{21}|_{\Gamma_1} \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Найдём квадратичную форму оператора  $\mathcal{T}$  в комплексном гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . Для любого  $z \in \mathcal{H}$  имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}z, z)_{\mathcal{H}} = & \rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{u}_1|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_1} G_1 C_{11} \gamma_{n,1} \vec{u}_1 \cdot \overline{\vec{u}_1} d\Omega_1 + \sum_{r=1}^m \int_{\Omega_1} |\vec{y}_r|^2 d\Omega_1 + \\ & + \rho_2 \int_{\Omega_1} G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\vec{u}_1} d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \vec{u}_1 \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 + \rho_2 \int_{\Omega_2} G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 + \\ & + \rho_3 \int_{\Omega_2} G_2 C_3 \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 + g(\rho_2 - \rho_1) \int_{\Gamma_1} |\xi_1|^2 d\Gamma_1 + g(\rho_3 - \rho_2) \int_{\Gamma_2} |\xi_2|^2 d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Преобразуем второе и четвёртое слагаемые в (3.13), используя свойства решения вспомогательных задач IV.1, IV.2, операторов  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ , взаимную сопряжённость операторов  $G_1$  и  $\gamma_{n,1}$ , и свойства потенциала  $\Phi_{21}$ :

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_{\Omega_1} G_1 C_{11} \gamma_{n,1} \vec{u}_1 \cdot \overline{\vec{u}_1} d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_1} G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\vec{u}_1} d\Omega_1 &= \rho_2 \int_{\Gamma_1} C_{11} \gamma_{n,1} \vec{u}_1 \cdot \overline{\gamma_{n,1} \vec{u}_1} d\Gamma_1 + \\ + \rho_2 \int_{\Gamma_1} C_{12} \gamma_{n,1} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,1} \vec{u}_1} d\Gamma_1 &= \rho_2 \int_{\Gamma_1} \theta_1 \Phi_{21} \cdot \overline{(-\gamma_{n,1} \vec{u}_1)} d\Gamma_1 + \rho_2 \int_{\Gamma_1} \theta_1 \Phi_{22} \cdot \overline{(-\gamma_{n,1} \vec{u}_1)} d\Gamma_1 = \\ = \rho_2 \int_{\Gamma_1} \Phi_{21} \cdot \overline{-\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2}} d\Gamma_1 + \rho_2 \int_{\Gamma_1} \Phi_{22} \cdot \overline{-\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2}} d\Gamma_1 &= \rho_2 \int_{\Gamma_1} (\Phi_{21} + \Phi_{22}) \cdot \overline{-\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2}} d\Gamma_1. \end{aligned}$$

Аналогично с учётом свойств операторов  $C_{21}$  и  $C_{22}$ ,  $G_2$  преобразуем пятое и шестое слагаемые, получим:

$$\rho_2 \int_{\Omega_2} G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \vec{u}_1 \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 + \rho_2 \int_{\Omega_2} G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 = \rho_2 \int_{\Gamma_2} (\Phi_{21} + \Phi_{22}) \cdot \overline{\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n_2}} d\Gamma_2.$$

Кроме того, используя вспомогательную задачу III, преобразуем седьмое слагаемое в (3.13):

$$\rho_3 \int_{\Omega_2} G_2 C_3 \gamma_{n,2} \vec{u}_2 \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 = \rho_3 \int_{\Gamma_2} \Phi_3 \cdot \overline{\left(-\frac{\partial \Phi_3}{\partial n_2}\right)} d\Gamma_2$$

Тогда взамен (3.13) получим

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{T}z, z)_{\mathcal{H}} &= \rho_1 \int_{\Omega_1} |\vec{u}_1|^2 d\Omega_1 + \sum_{r=1}^m \int_{\Omega_1} |\vec{y}_r|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2 + \rho_3 \int_{\Omega_3} |\nabla \Phi_3|^2 d\Omega_3 + \\
 &+ g(\rho_2 - \rho_1) \int_{\Gamma_1} |\zeta_1|^2 d\Gamma_1 + g(\rho_3 - \rho_2) \int_{\Gamma_2} |\zeta_2|^2 d\Gamma_2 > 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

С учётом ограниченности оператора  $\mathcal{T}$  из (3.14) можно установить, что он само-сопряжён и положительно определён.  $\square$

Изучим теперь общие свойства оператора  $\mathcal{A}$  из (3.7), (3.11).

**Лемма 4.** *Операторная матрица  $\mathcal{A}$  допускает факторизацию в виде произведения трёх матриц с симметричным окаймлением средней матрицы:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & \hat{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I} & \tilde{\mathcal{G}}^+ \\ -\tilde{\mathcal{G}} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & 0 \\ 0 & \hat{I}_2 \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{G}}^+ &:= \begin{pmatrix} g(\rho_2 - \rho_1)A^{-1/2}G_1 & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} \\ 0 & g(\rho_3 - \rho_2)G_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{G}} := \begin{pmatrix} g(\rho_2 - \rho_1)G_1^*A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(\rho_3 - \rho_2)G_2^* \end{pmatrix} \\
 \tilde{\mathcal{A}} &:= \begin{pmatrix} A^{1/2} & \hat{0}^\tau & 0 \\ \hat{0} & \hat{I}_m & \hat{0} \\ 0 & \hat{0}^\tau & I \end{pmatrix}, \quad \tilde{I} := \begin{pmatrix} I & \hat{\alpha}^\tau & 0 \\ -\hat{\alpha} & \hat{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_2 := \text{diag}\{I, I\} \quad \square
 \end{aligned}$$

**Лемма 5.**

$$A^{-1/2}G_1 = (G_1^*A^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(G_1)},$$

причём замыкание по непрерывности оператора  $A^{-1/2}G_1$  совпадает с  $(G_1^*A^{-1/2})^*$ .

**Доказательство.** См. доказательство леммы 9 из [2].  $\square$

Из леммы 5 непосредственно следует следующий результат.

**Лемма 6.** *Справедливо соотношение  $\overline{\tilde{\mathcal{G}}^+} = \tilde{\mathcal{G}}^*$ ,  $\tilde{\mathcal{G}}^+ = \tilde{\mathcal{G}}^*|_{\mathcal{D}(G_1) \oplus \mathcal{D}(G_2)}$ .*

**Лемма 7.** *Операторная матрица  $\mathcal{A}$  из (3.7)-(3.11) является аккретивной в пространстве  $\mathcal{H}$ , т.е.*

$$\text{Re}(\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}. \quad \square$$

**Доказательство.** Действительно,

$$(\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}} = (A\vec{u}_1, \vec{u}_1)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + (\hat{\alpha}^\tau \hat{y}, \vec{u}_1)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + b_1(G_1\zeta_1, \vec{u}_1)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} - (\hat{\alpha}\vec{u}_1, \hat{y})_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} +$$

$$\begin{aligned}
& + (\hat{\beta}\hat{y}, \hat{y})_{\hat{\mathcal{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)} + b_2(G_2\zeta_2, \nabla\Phi_{22})_{\tilde{G}_{h,S_2}(\Omega_2)} - b_1(\gamma_{n,1}\vec{u}_1, \zeta_1)_{L_2,\Gamma_1} - b_2(\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22}, \zeta_2)_{L_2,\Gamma_2} = \\
& = (A\vec{u}_1, \vec{u}_1)_{\tilde{\mathcal{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)} + (\hat{\beta}\hat{y}, \hat{y})_{\hat{\mathcal{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)} + (\hat{\alpha}^\tau\hat{y}, \vec{u}_1)_{\hat{\mathcal{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)} - \overline{(\hat{\alpha}^\tau\hat{y}, \vec{u}_1)}_{\hat{\mathcal{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)} + \\
& b_1(\zeta_1, \gamma_{n,1}\vec{u}_1)_{L_2,\Gamma_1} - b_1\overline{(\zeta_1, \gamma_{n,1}\vec{u}_1)}_{L_2,\Gamma_1} + b_2(\zeta_2, \gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22})_{L_2,\Gamma_2} - b_2\overline{(\zeta_2, \gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22})}_{L_2,\Gamma_2},
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}z, z)_{\mathcal{H}} = (A\vec{u}_1, \vec{u}_1)_{\tilde{\mathcal{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)} + \sum_{r=1}^m \beta_r(y_r, y_r)_{\tilde{\mathcal{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)} \geq 0 \quad \square$$

Введём операторную матрицу

$$\mathcal{J}_a := \mathcal{J}_0 + a \operatorname{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I), \quad a > 0, \quad \mathcal{J}_0 := \begin{pmatrix} \tilde{I} & \tilde{\mathcal{G}} \\ -\tilde{\mathcal{G}}^* & \mathcal{O} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Тогда для  $\mathcal{J}_a$  выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(\mathcal{J}_a z, z)_{\mathcal{H}} \geq c \|z\|_{\mathcal{H}}^2, \quad c > 0. \quad (3.17)$$

Из (3.16) следует, что операторная матрица  $\mathcal{A}$  из (3.15) принимает вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} & = \operatorname{diag}(\tilde{\mathcal{A}}; \hat{I}_2) \mathcal{J}_a \operatorname{diag}(\tilde{\mathcal{A}}; \hat{I}_2) - a \operatorname{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I) =: \\
& =: \mathcal{A}_a - a \operatorname{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I).
\end{aligned} \quad (3.18)$$

При этом оператор  $\mathcal{A}_a$  представлен в виде произведения трёх сомножителей, каждый из которых имеет ограниченный обратный. Поэтому  $\mathcal{A}_a$  допускает расширение путём замыкания среднего сомножителя, и в итоге возникает максимальный равномерно аккретивный оператор.

**Лемма 8.** *Замыкание  $\bar{\mathcal{A}}_a$  оператора  $\mathcal{A}_a$  представляется в виде*

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{A}}_a & = \operatorname{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I) \bar{\mathcal{J}}_a \operatorname{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I), \\
\bar{\mathcal{J}}_a & = \begin{pmatrix} \tilde{I}_a & \tilde{\mathcal{G}}^* \\ -\tilde{\mathcal{G}} & a\hat{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{I}_a := \tilde{I} + a \operatorname{diag}\{0; \hat{0}; I\}
\end{aligned}$$

где  $\bar{\mathcal{J}}_a$  — равномерно аккретивный оператор, для которого выполнено свойство (3.17) (с заменой  $\mathcal{J}_a \rightarrow \bar{\mathcal{J}}_a$ ).

При этом

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a) & = \left\{ y = (\vec{u}_1; \hat{y}; \nabla\Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2)^\tau : \vec{u}_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), A^{1/2}\vec{u}_1 + \sum_{r=1}^m \alpha_r^{1/2} \vec{y}_r + \right. \\
& \left. + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}, \quad \mathcal{R}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \mathcal{H},
\end{aligned}$$

и оператор  $\bar{\mathcal{A}}_a$  действует на  $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a)$  по закону

$$\bar{\mathcal{A}}_a z = \begin{pmatrix} A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1) \\ -\hat{\alpha} A^{1/2}\vec{u}_1 + \hat{\beta} \hat{y} \\ a \nabla \Phi_{22} + g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 \\ -g(\rho_1 - \rho_2) G_1^* \vec{u}_1 + a \zeta_1 \\ -g(\rho_2 - \rho_3) G_2^* \nabla \Phi_{22} + a \zeta_2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

#### 4. Теорема о разрешимости задачи

Вернёмся к задаче (3.7)-(3.11) и перепишем её с учётом (3.18) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \frac{dz}{dt} &= -(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P})z + g(t), \quad z(0) = z^0 := (\vec{u}_1^0; \hat{0}; \vec{u}_2^0; \zeta_1^0; \zeta_2^0)^\tau, \\ z &= (\vec{u}_1; \hat{y}; \nabla \Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2)^\tau, \quad \mathcal{P} := \text{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I). \end{aligned}$$

Рассмотрим также аналогичную задачу с замкнутым максимальным аккретивным оператором:

$$\mathcal{T} \frac{dz}{dt} = -(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})z + g(t), \quad z(0) = z^0. \quad (4.1)$$

Оператор  $\mathcal{T}$  самосопряжённый, положительно определённый и ограниченный в  $\mathcal{H}$ , значит, для него существует оператор  $\mathcal{T}^{-1}$ , обладающий теми же свойствами. Тогда из (4.1) имеем:

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{T}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})z + \mathcal{T}^{-1}g(t), \quad z(0) = z^0. \quad (4.2)$$

Введём в  $\mathcal{H}$  эквивалентную норму по формуле

$$\langle z, z \rangle := (\mathcal{T}z, z)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{T}^{1/2}z, \mathcal{T}^{1/2}z)_{\mathcal{H}}.$$

Эквивалентность этой нормы стандартной норме следует из свойств оператора  $\mathcal{T}$ .

Легко проверить, что оператор  $\mathcal{T}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})$  будет максимальным аккретивным в новом скалярном произведении, и тогда  $-\mathcal{T}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})$  является генератором сжимающей  $C_0$ -полугруппы. Поэтому по теореме Филлипса (см. [5, с.166]) задача Коши (4.2) имеет единственное сильное решение на отрезке  $[0, T]$ , если выполнены следующие условия

$$z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a), \quad g(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}). \quad (4.3)$$

Из условий (4.3) получим соответствующие условия на начальные данные исходной задачи (1.2)-(1.11).

Так, из принадлежности элемента  $z^0$  области определения оператора  $\mathcal{A}$  следует, что

$$\vec{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \zeta_j^0 \in \mathcal{D}(G_j) = H_{\Gamma_j}^{1/2}, \quad j = 1, 2.$$

Аналогично получим условие для  $\vec{f}_k(t)$ :

$$\vec{f}_k(t) \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega_k)), \quad k = \overline{1, 3}.$$

**Определение 1.** Будем говорить, что исходная начально-краевая задача (1.2)-(1.11) имеет сильное решение  $\{\vec{u}_1(t); \vec{u}_2(t); \vec{u}_3(t); \zeta_1(t); \zeta_2(t)\}$  на отрезке  $[0, T]$ , если выполнены следующие условия:

1.  $\vec{u}_k(t) \in C^1([0, T]; \vec{J}_{0,S}(\Omega_k))$ ,  $k = \overline{1, 3}$ ;
2.  $\vec{v}_1(t) = I_{0,1}(t)\vec{u}_1(t)$  (см. (1.3)) обладает свойством  $\vec{v}_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A))$ ;
3.  $\zeta_j(t) \in C^1([0, T]; H_{\Gamma_j}^{1/2})$ ,  $j = 1, 2$ ;
4. для любого  $t \in [0, T]$  выполнена система уравнений (2.24)-(2.27), где все слагаемые в первом уравнении — элементы из  $C([0, T]; \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1))$ , во втором — элементы из  $C([0, T]; \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2))$ , а в третьем и четвертом — из  $C([0, T]; H_{\Gamma_1}^{1/2})$  и  $C([0, T]; H_{\Gamma_2}^{1/2})$  соответственно;
5. выполнены начальные условия (2.28). □

Сформулируем теперь теорему существования и единственности сильного решения задачи (1.2)-(1.11).

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия

$$\vec{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A), \quad \vec{u}_l \in \vec{H}^1(\Omega_l) \cap \vec{J}_{0,S_l}(\Omega_l), \quad \zeta_j^0 \in H_{\Gamma_j}^{1/2}, \quad j = 1, 2, \quad l = 2, 3.$$

$$\vec{f}_k(t) \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega_k)), \quad k = \overline{1, 3};$$

тогда начально-краевая задача (1.2)-(1.11), имеет единственное сильное решение на  $[0; T]$ .

**Доказательство.** Доказательство, основанное на обратном переходе от задачи Коши (4.2) к начально-краевой задаче (1.2)-(1.11) с использованием результатов лемм 2, 3-8, проводится по схеме доказательства теорем 2, 3 и 5 работы [2] и здесь не приводится. □

#### 4.1. К задаче о нормальных колебаниях гидросистемы

Рассмотрим теперь постановку задачи о малых нормальных движениях исследуемой гидросистемы, т.е. о таких решениях однородной задачи (4.1) с замкнутым основным оператором, которые зависят от  $t$  по закону

$$z(t) := (\vec{u}_1(t); \hat{y}(t); \nabla\Phi_{22}(t); \zeta_1(t); \zeta_2(t))^\tau = (\vec{u}_1; \hat{y}; \nabla\Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2)^\tau e^{-\lambda t},$$

где  $\lambda \in \mathbb{C}$  — комплексный декремент затухания, а  $(\vec{u}_1; \hat{y}; \nabla\Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2)^\tau$  — амплитудный элемент.

$$\begin{aligned} A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1) &= \lambda((\rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1})\vec{u}_1 + \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla\Phi_{22}), \\ -\alpha_r^{1/2} A^{1/2} \vec{u}_1 + \beta_r \vec{y}_r &= \lambda \vec{y}_r, \quad r = \overline{1, m}, \\ g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 &= \lambda(\rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \vec{u}_1 + (\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \nabla\Phi_{22}), \\ -G_1^* \vec{u}_1 &= \lambda \zeta_1, \\ -G_2^* \nabla\Phi_{22} &= \lambda \zeta_2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

В случае  $\lambda = 0$  приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1) &= \vec{0}, \\ \beta_r \vec{y}_r &= \alpha_r^{1/2} A^{1/2} \vec{u}_1, \quad r = \overline{1, m}, \\ G_2 \zeta_2 &= 0, \\ G_1^* \vec{u}_1 &= \vec{0}, \\ G_2^* \nabla \Phi_{22} &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Домножим скалярно третье соотношение на элемент  $\vec{u}_2 \in \vec{J}_{0, S_2}(\Omega_2)$ , будем иметь

$$0 = (G_2 \zeta_2, \vec{u}_2)_{\vec{L}_2(\Omega_2)} = \langle \zeta_2, \gamma_{n,2} \vec{u}_2 \rangle_{L_2, \Gamma_2},$$

откуда в силу произвольности  $\vec{u}_2$  следует, что  $\zeta_2 = 0$ . Аналогично из последних двух связей получаем, что  $\vec{u}_1 = \vec{0}$ ,  $\nabla \Phi_{22} = \vec{0}$ , тогда из второго соотношения следует, что  $\vec{y}_r = \vec{0}$ ,  $r = \overline{1, m}$ , и, наконец, из первого —

$$A^{1/2}(g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1) = \vec{0}.$$

Домножая это соотношение на  $(g(\rho_1 - \rho_2))^{-1}$ , а затем скалярно на элемент  $\vec{u}_1 \in \vec{J}_{0, S_1}(\Omega_1)$ , получим

$$0 = (A^{1/2}(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1, \vec{u}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \langle \zeta_1, G_1^* A^{-1/2} A^{1/2} \vec{u}_1 \rangle_{L_2, \Gamma_1} = \langle \zeta_1, \gamma_{n,1} \vec{u}_1 \rangle_{L_2, \Gamma_1}.$$

Отсюда можем заключить, что  $\zeta_1 = 0$  в силу произвольности элемента  $\vec{u}_1$ .

Таким образом, задача (4.5) имеет лишь тривиальное решение, т.е.  $\lambda = 0$  не является собственным значением задачи (4.4).

Рассмотрим ещё случай, когда  $\lambda = \beta_s$ ,  $s = \overline{1, m}$ . Вместо (4.4) теперь будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1) &= \beta_s((\rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1})\vec{u}_1 + \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}), \\ -\alpha_r^{1/2} A^{1/2} \vec{u}_1 + \beta_r \vec{y}_r &= \beta_s \vec{y}_r, \quad r = \overline{1, m}, \\ g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 &= \beta_s(\rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \vec{u}_1 + (\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \nabla \Phi_{22}), \\ G_1^* \vec{u}_1 &= \beta_s \zeta_1, \\ G_2^* \nabla \Phi_{22} &= \beta_s \zeta_2. \end{aligned}$$

Из второго соотношения при  $r = s$  заключаем, что  $\vec{u}_1 = \vec{0}$  в силу обратимости оператора  $A^{1/2}$ . Тогда из четвертого уравнения получим, что  $\zeta_1 = 0$ , а из второго при  $r \neq s$  — свойство  $\vec{y}_r = \vec{0}$ . Выразим из последнего соотношения  $\zeta_2$  и подставим в третье. Получим

$$(g(\rho_2 - \rho_3) \beta_s^{-1} G_2 G_2^* - \beta_s(\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \nabla \Phi_{22}) = \vec{0}. \tag{4.6}$$

Домножим (4.6) скалярно на элемент  $\nabla \Phi_{22} \in \vec{G}_{h, S_2, \Gamma_2}(\Omega_2)$ , получим

$$0 = g(\rho_2 - \rho_3) \beta_s^{-1} (G_2 G_2^* \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_{22})_{\vec{L}_2(\Omega_2)} - \tag{4.7}$$

$$-\beta_s \rho_2 (G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_{22})_{\bar{L}_2(\Omega_2)} - \beta_s \rho_3 (G_2 C_3 \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_{22})_{\bar{L}_2(\Omega_2)}.$$

Используя свойства операторов  $C_{22}$ ,  $C_3$  и  $G_2$  для каждого из слагаемых получим следующие соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} G_2 G_2^* \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 &= \int_{\Gamma_2} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}} d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} \left| \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} \right|^2 d\Gamma_2, \\ \int_{\Omega_2} G_2 C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\nabla \Phi_{22}} d\Omega_2 &= \int_{\Gamma_2} C_{22} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}} d\Gamma_2 = \\ &= - \int_{\Gamma_2} \theta_2 \Phi_{22} \cdot \overline{\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n}} d\Gamma_2 = - \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2, \\ \int_{\Omega_2} G_2 C_3 \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \nabla \Phi_{22} d\Omega_2 &= \int_{\Gamma_2} C_3 \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}} d\Gamma_2 = \\ &= - \int_{\Gamma_2} \theta_2 \Phi_3 \cdot \overline{\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n_2}} d\Gamma_2 = - \int_{\Gamma_2} \theta_2 \Phi_3 \cdot \overline{\frac{\partial \Phi_3}{\partial n_2}} d\Gamma_2 = - \int_{\Omega_3} |\nabla \Phi_3|^2 d\Omega_3 \end{aligned}$$

Подставляя эти результаты в (4.7) получим

$$0 = g(\rho_2 - \rho_3) \beta_s^{-1} \int_{\Gamma_2} \left| \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} \right|^2 d\Gamma_2 + \beta_s \rho_2 \int_{\Omega_2} |\nabla \Phi_{22}|^2 d\Omega_2 + \beta_s \rho_3 \int_{\Omega_3} |\nabla \Phi_3|^2 d\Omega_3,$$

откуда следует, что  $\nabla \Phi_{22} = \vec{0}$ , а значит и  $\zeta_2 = 0$ . С учётом этих равенств из первого уравнения приходим к выводу, что  $\vec{y}_s = \vec{0}$ , т.е.  $\lambda = \beta_s$ ,  $s = \overline{1, m}$ , тоже не является собственным значением задачи (4.4).

Опираясь на эти факты, преобразуем при  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \neq \beta_s$ ,  $s = \overline{1, m}$ , задачу (4.4) к спектральной проблеме, исключив  $\vec{y}_r$  и  $\zeta_j$ ,  $r = \overline{1, m}$ ,  $j = 1, 2$ . Имеем

$$\begin{aligned} \lambda \begin{pmatrix} \rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1} & \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \\ \rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} & \rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \nabla \Phi_{22} \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} g(\rho_1 - \rho_2) G_1 G_1^* & 0 \\ 0 & g(\rho_2 - \rho_3) G_2 G_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \nabla \Phi_{22} \end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix} A_1 \left( I - \sum_{r=1}^m \frac{\alpha_r}{\lambda - \beta_r} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \nabla \Phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Осуществляя ещё здесь замену

$$A^{1/2} \vec{u}_1 =: \vec{\varphi} \in \vec{J}_{0, S_1}(\Omega_1),$$

приходим к спектральной проблеме для элемента  $x(t) := (\vec{\varphi}; \nabla \Phi_{22})^\tau$

$$L(\lambda)x := \left( \text{diag}\{e_0(\lambda); 0\} - \lambda \text{diag}\{A^{1/2}; 0\} \tilde{C} \text{diag}\{A^{1/2}; 0\} - \lambda^{-1} \text{diag}\{b_1 Q Q^*; b_2 G_2 G_2^*\} \right) x = 0 \quad (4.8)$$

$$e_0(\lambda) := 1 + \sum_{r=1}^m \alpha_r (\beta_r - \lambda)^{-1}, \quad \tilde{C} := \begin{pmatrix} \rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1} & \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \\ \rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} & \rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \end{pmatrix},$$

в пространстве  $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2)$  для операторного пучка  $L(\lambda)$ .

Задачу (4.8) можно исследовать методами спектральной теории операторных пучков (см. [6]). В частности, можно установить, что спектр этой задачи дискретен, расположен в правой комплексной полуплоскости и состоит из шести ветвей собственных значений, которым отвечают пограничные волны на границе раздела  $\Gamma_1$ , поверхностные волны на  $\Gamma_2$ , внутренние диссипативные волны в области  $\Omega_1$ , а также диссипативные волны, обусловленные вязкоупругостью жидкости.

Подробно эти свойства решений спектральной задачи (4.8), а также свойства полноты и базисности её корневых (собственных и присоединённых) элементов будут изучены в другой работе.

### Список цитируемых источников

1. Агранович, М. С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей. // Успехи матем. наук. — 2002. — Т. 57, Вып. 5(347). — С. 3–78.

Agranovich, M. S. Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in smooth and non-smooth domains. Russian Mathematical Surveys, 57:5(347), 3–78 (2002).

2. Копачевский, Н. Д. О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд. // Динамические системы. — 2017. — Т.7(35), №1. — С. 109–145.

Kopachevsky, N. D. Small motions of two viscoelastic fluids in stationary containers. Dinamicheskie Sistemy, 7(35):1, 109–145 (2017).

3. Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуь Кан Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo Zuy Kan Operator methods in linear hydrodynamic. Evolutional and Spectral problems. Moscow: Nauka, 1989.

4. Копачевский, Н. Д., Сёмкина, Е. В. О малых движениях гидросистемы "вязкоупругая жидкость-идеальная жидкость", заполняющей неподвижный сосуд. // Динамические системы. — 2017. — Т.7(35), №3 — С. 207–228.

Kopachevsky, N. D., Syomkina, E. V. Small movements of hidrosystem in stationary containers. Dinamicheskie Sistemy, 7(35):3, 207–228 (2017).

5. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

Krein, S. G. Linear differential equations in a Banach space. Moscow: Nauka, 1967. (in Russian)

6. Маркус, А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: «Штиинца», 1986. — 260 с.

Marcus, A. S. Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils. Kishinyov: Shtiintsa, 1986. (in Russian)



7. *Милославский, А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде // *Успехи матем. наук.* — 1989. — Т.44, №4.  
Miloslavskiy, A. I. Spectrum of small oscillations of a viscoelastic fluid in an open vessel. *Uspehi Matem. Nauk*, 44:4 (1989). (in Russian)
8. *Милославский, А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды // *ДАН СССР.* — 1990. — Т. 309. — №3.— С. 532 — 536.  
Miloslavskij, A. I. The spectrum of small oscillations of a viscoelastic hereditary medium. *Sov. Math., Dokl.* 40, No. 3, 538-541 (1990).
9. *Agranovich, M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary. // *Russian Journal of Mathematical Physics* — 2008. — Vol. 15., No.2. — P. 146–155.
10. *Azizov, T. Ya., Kopachevskii, N. D., Orlova, L. D.* Evolution and Spectral Problems Related to Small Motions of Viscoelastic Fluid // *Proceedings of the St.-Petersburg Math. Society*, Vol. VI. AMS Translations (2) —2000. — Vol. 199. — P. 1–24.
11. *Eirich, F. R.* *Rheology. Theory and Applications.* — New York: Academic Press, 1956. — 761p.
12. *Gagliardo, E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova* — 1957. — Vol. 27. — P. 284–305.
13. *Kopachevsky, Nikolay D., Krein, Selim G.* *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics.* — Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.128) — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2001. — 384 p.
14. *Kopachevsky, Nikolay D., Krein, Selim G.* *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics..* — Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.146) — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2003. — 444 p.

*Получена 17.05.2018*

УДК 517.929

# Эффективные условия осцилляции решений разностных уравнений с несколькими запаздываниями<sup>1</sup>

К. М. Чудинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
Пермский государственный национальный исследовательский университет  
Пермь 614990. E-mail: [cyril@list.ru](mailto:cyril@list.ru)

**Аннотация.** Рассматриваются эффективные достаточные условия осцилляции решений разностных уравнений первого порядка с последствием в виде оценки снизу нижнего предела суммы коэффициентов на заданном семействе подмножеств дискретной полуоси. Прослеживается преемственность результатов такого типа от первых эффективных условий осцилляции решений дифференциальных уравнений с последствием и их дискретных аналогов до новейших достижений. Выделяются наиболее эффективные подходы к задаче и сравниваются достигнутые результаты по отношению к уравнениям с различными видами запаздываний. Доказывается новый признак осцилляции и показана его независимость от известных результатов.

**Ключевые слова:** разностное уравнение, последствие, осцилляция, эффективные условия.

## Effective conditions for the oscillation of solutions to difference equations with several delays

K. M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990,  
Perm State National Research University, Perm 614990.

**Abstract.** We consider a first-order linear difference equation with several variable delays. The subjects of our study are explicit sufficient conditions for all solutions of the equation to be oscillatory, in the form of an estimate from below for the lower limit of a sum of coefficients of the equation over a given class of subsets of the discrete semiaxis. We trace the history of results of the kind, from the first obtained in the 1940th explicit oscillation conditions for differential equations with aftereffect, and their discrete analogs obtained in the 1980th, to the best of contemporary known oscillation tests. We distinguish the most effective approaches to the problem, and compare the results achieved. We obtain a new explicit sharp oscillation test, show that it is independent of the known results, and give simple examples clarifying relationship between different oscillation conditions.

**Keywords:** delay difference equation, oscillation, effective test.

**MSC 2010:** 39A21

---

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (проект 1.5336.2017/8.9) при поддержке РФФИ (проект 18-01-00928).

## Введение

В статье [1] А. Д. Мышкиса заложены несколько принципов исследования асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений первого порядка с последействием. Некоторые из этих принципов переоткрыты в международной печати последних нескольких десятилетий, но потенциал работы [1], по-видимому, исчерпан еще далеко не полностью. В настоящей работе разрабатывается одно из направлений, указанных в [1] — получение условий осцилляции решений уравнений с последействием в явном виде — в терминах определяющих уравнение функций. Основным объектом нашего исследования являются разностные уравнения с последействием (delay difference equations), ставшие объектом систематических исследований международного математического сообщества только в последней четверти XX в. Теория осцилляции решений таких уравнений является одним из основных направлений этих исследований. В настоящее время количество публикуемых работ, посвященных эффективному в указанном выше смысле достаточным условиям осцилляции решений разностных уравнений с последействием увеличивается с каждым годом.

Чтобы определить предмет нашего исследования, приведем следующие хорошо известные факты.

**Теорема 1** ([1], [2]). Пусть функции  $p$  и  $\tau$  определены и непрерывны на полуоси  $[0, +\infty)$ ,  $p(t) \geq 0$ ,  $\tau(t) \leq t$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) \rightarrow +\infty$  и

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau(t)}^t p(s) ds > \frac{1}{e}.$$

Тогда все решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) + p(t)x(\tau(t)) = 0, \quad t \geq 0, \quad (0.1)$$

осциллируют.

Далее для  $n \in \mathbb{Z}$  полагаем  $\mathbb{N}_n = \{\nu \in \mathbb{Z} \mid \nu \geq n\}$ ,  $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ .

**Теорема 2** ([3], [4]). Пусть для функций  $p: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\tau: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  имеем  $p(n) \geq 0$ ,  $\tau(n) \leq n-1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(n) \rightarrow +\infty$  и

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) > \frac{1}{e}.$$

Тогда все решения разностного уравнения с запаздывающим аргументом

$$\Delta x(n) + p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (0.2)$$

осциллируют.

Обобщения теорем 1 и 2 для уравнений с несколькими запаздываниями

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^m p_k(t)x(\tau_k(t)) = 0, \quad t \geq 0, \quad (0.3)$$

$$\Delta x(n) + \sum_{k=1}^m p_k(n)x(\tau_k(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (0.4)$$

при условии учета в равной мере всех запаздываний, встречает существенные трудности, см. [5].

В настоящей работе мы исследуем условия осцилляции решений уравнения (0.4), явно выраженные в виде оценки нижнего предела сумм коэффициентов уравнения по заданному семейству подмножеств области определения решения — дискретной полуоси.

Определим основные формальности.

Положим  $b = \min\{\tau_k(i) \mid i \in \mathbb{N}_0, k = \overline{1, m}\}$ . Решением уравнения (0.4) называется функция  $x: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что для некоторой начальной функции  $\varphi: \{b, \dots, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  при условии  $x(n) = \varphi(\nu)$ ,  $\nu = \overline{b, 0}$ , выполняются равенства (0.4). Очевидно, что для любой начальной функции уравнение (0.4) имеет единственное решение.

Решение  $x = x(n)$  уравнения (0.4) называется *осциллирующим*, если для любого  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  найдется  $n_1 \in \mathbb{N}_{n_0}$ , такое что  $x(n_0)x(n_1) \leq 0$ . Назовем уравнение (0.4) *осциллирующим*, если все его решения осциллируют.

В первом разделе статьи отметим несколько важных вех недолгой истории исследований осцилляции решений разностных уравнений с последствием. Во втором разделе мы доказываем новый признак осцилляции для уравнения (0.4). Третий раздел посвящен сравнению разных подходов к исследуемым вопросам и полученных результатов.

## 1. Некоторые известные условия осцилляции

Рассмотрим известные условия осцилляции, применимые к разным случаям уравнения (0.4).

Пусть  $p \in \mathbb{R}$  и  $r \in \mathbb{N}_1$ . Как хорошо известно (см., напр., [6]), уравнение

$$\Delta x(n) + px(n-r) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

является осциллирующим, если и только если

$$p > \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}. \quad (1.1)$$

Пусть теперь  $p = p(n)$ . Рассмотрим неумлучшаемые достаточные условия осцилляции решений уравнения с одним постоянным запаздыванием

$$\Delta x(n) + p(n)x(n-r) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.2)$$

Известно [6], что уравнение (1.2) является осциллирующим, если

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p(n) > \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}. \quad (1.3)$$

В работе [7] было показано, что значение коэффициента  $p(n)$  в неравенстве (1.3) можно заменить средним значением на промежутке длины  $r$ : уравнение (1.2) является осциллирующим, если  $p_k(n) \geq 0$  и

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-r}^{n-1} p(i) > \left( \frac{r}{r+1} \right)^{r+1}.$$

Для уравнения с несколькими постоянными запаздываниями

$$\Delta x(n) + \sum_{k=1}^m p_k(n)x(n-r_k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.4)$$

имеет место следующее обобщение последнего результата.

**Теорема 3** ([8]). Пусть  $p_k(n) \geq 0$  и

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \left( \frac{r_k+1}{r_k} \right)^{r_k+1} \sum_{i=n+1}^{n+r_k} p_k(i) > 1.$$

Тогда уравнение (1.4) является осциллирующим.

**Следствие 1.** Пусть  $p_k(n) \geq 0$  и

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \sum_{i=n+1}^{n+r_k} p_k(i) > \frac{1}{e}. \quad (1.5)$$

Тогда уравнение (1.4) является осциллирующим.

Теорема 3 и следствие 1 являются дискретными аналогами полученного ранее признака осцилляции решений дифференциального уравнения с несколькими постоянными запаздываниями [9].

В связи с вышесказанным укажем следующий не привлечший к себе широкого внимания результат.

**Теорема 4** ([10]). Пусть  $r_k \in \mathbb{N}_1$  и  $p_k(n) \geq 0$ ,  $k = \overline{1, m}$ , и

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{(r_k+1)^{r_k+1}}{r_k^{r_k}} p_k(n) > 1.$$

Тогда уравнение (1.4) является осциллирующим.

Выше указано, что в случае  $m = 1$  теорема 4 очевидным образом следует из теоремы 3. Однако, как будет показано ниже, в общем случае теоремы 3 и 4 независимы.

Рассмотрим обобщения следствия 1 для уравнения (0.4) с несколькими переменными запаздываниями.

**Теорема 5** ([11]). Пусть  $p_k(n) \geq 0$ ,  $\tau_k(n) \leq n - 1$ ,  $\tau(n) = \max\{\tau_k(n) \mid k = \overline{1, m}\}$  и

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} \sum_{k=1}^m p_k(i) > \frac{1}{e}.$$

Тогда уравнение (0.4) является осциллирующим.

Очевидный недостаток последнего результата состоит в том, что влияние больших запаздываний на наличие осцилляции не учитывается в полной мере. Для уравнений (0.4) с большими различиями запаздываний такие признаки осцилляции довольно грубы: в частности, если  $\tau_k(n) \equiv n$  для некоторого  $k$ , то теорема 5 полностью теряет силу.

Опубликованное в [12] и цитируемое в нескольких последующих работах утверждение, что при условиях  $p_k(n) \geq 0$ ,  $\tau_k(n) \leq n - 1$  и  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m p_k(n) > 0$  неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \sum_{i=\tau_k(n)}^{n-1} p_k(i) > \frac{1}{e}$$

влечет осцилляцию всех решений уравнения (0.4), является неверным — см. контр-пример в [5]. Более того, упомянутые выше результаты из [8] и [9] в некоторых недавних обзорах цитируются неверно: их авторы не замечают, что если поменять нижний и верхний пределы во внутренней сумме неравенства (1.5) на  $n - r_k$  и  $n - 1$  соответственно, то смысл утверждения изменится (хотя в случае  $m = 1$  такая замена, очевидно, допустима).

Обобщение следствия 1 для уравнения с переменными запаздываниями с сохранением для каждого коэффициента  $p_k$  своего множества суммирования имеет следующий вид.

**Теорема 6** ([13]). Положим  $E_k(n) = \{i \geq n \mid \tau_k(i) \leq n - 1\}$ . Пусть

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \sum_{i \in E_k(n)} p_k(i) > \frac{1}{e}.$$

Тогда уравнение (0.4) является осциллирующим.

## 2. Новые условия осцилляции

Теоремы 1 и 2 и их обобщения для уравнений с несколькими запаздываниями естественно назвать *интегральными* условиями осцилляции: в основном неравенстве коэффициенты уравнения суммируются по заданному множеству аргументов. На этом пути для уравнений (0.3) и (0.4) до недавнего времени были известны только грубые результаты типа теоремы 5 и ее непрерывных аналогов.

Однако возможен другой подход. Среди известных условий осцилляции решений уравнения (0.3) особняком стоит следующий результат.

**Теорема 7** ([14]). *Если  $p_k(t) \geq 0$ ,  $\tau_k(t) \leq t$ , функции  $r_k(t) = t - \tau_k(t)$  ограничены и*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m p_k(t)r_k(t) > \frac{1}{e},$$

*то все решения уравнения (0.3) осциллируют.*

Это условие осцилляции можно назвать *точечным*, противопоставляя его интегральным условиям. Некоторые обобщения такого подхода на уравнения с распределенным запаздыванием имеются в работе [15].

Докажем дискретный аналог теоремы 7.

**Теорема 8.** *Пусть  $p_k(n) \geq 0$ ,  $\tau_k(n) \leq n-1$ , функции  $r_k(n) = n - \tau_k(n)$  ограничены и*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m p_k(n)r_k(n) > \frac{1}{e}. \quad (2.1)$$

*Тогда все решения уравнения (0.4) осциллируют.*

*Доказательство.* Пусть условия теоремы выполнены. Тогда найдутся числа  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  и  $K > \frac{1}{e}$ , такие что для всех  $n \in \mathbb{N}_{n_0}$  имеем

$$\sum_{k=1}^m p_k(n)r_k(n) \geq K, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.2)$$

Предположим, что некоторое решение  $x = x(n)$  уравнения (0.4) не осциллирует. Без ограничения общности положим, что  $x(n) > 0$  для  $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ .

Обозначим  $\xi(n) = \frac{x(n)}{x(n+1)}$ . В силу уравнения (0.4), условия  $p_k(n) \geq 0$  и ограниченности запаздываний можно также без ограничения общности считать, что  $\xi(n) \geq 1$  для  $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ .

Покажем, что из сделанного предположения следует, что  $\xi(n) \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , но это свойство функции  $\xi$  противоречит условию теоремы. Приведенное ниже рассуждение является по сути очередной вариацией на тему рассуждения для дифференциального уравнения (0.1) из статьи [2], которое явилось основой доказательств многих условий осцилляции.

Из условия (2.1) получаем, что

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m p_k(n) = P > 0. \quad (2.3)$$

По условию теоремы найдется  $R \in \mathbb{N}_1$ , такое что  $r_k(n) \leq R$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Для  $n \in \mathbb{N}_{n_0+R}$  имеем

$$\xi(n) = \left( 1 - \sum_{k=1}^m p_k(n) \frac{x(n - r_k(n))}{x(n)} \right)^{-1} \geq \left( 1 - \sum_{k=1}^m p_k(n) \right)^{-1},$$

следовательно,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi(n) \geq (1 - P)^{-1} > 1.$$

Зафиксируем числа  $c > 1$  и  $n_1 \in \mathbb{N}_{n_0}$ , такие что для всех  $n \in \mathbb{N}_{n_1}$  имеем  $\xi(n) \geq c$ . В силу уравнения (0.4) имеем

$$\frac{1}{\xi(n)} = 1 - \sum_{k=1}^m p_k(n) \xi(n - r_k(n)) \cdot \dots \cdot \xi(n - 1). \quad (2.4)$$

Следовательно,

$$\xi(n) \geq \left( 1 - \sum_{k=1}^m p_k(n) c^{r_k(n)} \right)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}_{n_1+R}.$$

Учитывая, что для  $\alpha \in \mathbb{R}$  имеем  $e^\alpha \geq e\alpha$ , и условие (2.2), получаем

$$\sum_{k=1}^m p_k(n) c^{r_k(n)} = \sum_{k=1}^m p_k(n) e^{\ln c \cdot r_k(n)} \geq e \ln c \sum_{k=1}^m p_k(n) r_k(n) \geq \ln c \cdot eK,$$

откуда

$$\xi(n) \geq (1 - \ln c \cdot eK)^{-1} \geq \exp(\ln c \cdot eK) = c^{eK}, \quad n \in \mathbb{N}_{n_1+R}.$$

Таким образом, если  $\xi(n) \geq c > 1$  для всех  $n \in \mathbb{N}_{n_1}$ , то  $\xi(n) \geq c^{eK}$  для всех  $n \in \mathbb{N}_{n_1+R}$ , где  $K > \frac{1}{e}$ . Очевидно, из этого следует, что для любого  $N > 0$  найдется такое  $n_N \in \mathbb{N}_0$ , что  $\xi(n) \geq N$  для всех  $n \in \mathbb{N}_N$ .

Но тогда из равенства (2.4) получаем, что

$$\sum_{k=1}^m p_k(n) \xi(n - r_k(n)) \cdot \dots \cdot \xi(n - 1) \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^m p_k(n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

что противоречит соотношению (2.3), следующему из условий теоремы.  $\square$



### 3. Сравнение подходов и результатов

Покажем, что ни одна из теорем 6 и 8 не является следствием другой, более того, ни одна из теорем 3 и 4 — сужений теорем 6 и 8 соответственно на случай постоянных запаздываний — не является следствием другой. Для этого рассмотрим уравнение

$$\Delta x(n) + p_1(n)x(n-1) + p_2(n)x(n-2) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.1)$$

*Пример 1.* Положим  $r_1(n) \equiv r_1 = 1$ ,  $r_2(n) \equiv r_2 = 2$ ,

$$p_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{e}, & n = 2\nu; \\ \frac{1}{5e}, & n = 2\nu + 1; \end{cases} \quad p_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{10e}, & n = 2\nu; \\ \frac{1}{2e}, & n = 2\nu + 1; \end{cases} \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^2 p_k(n)r_k(n) &= \min \left( \frac{1}{e} \cdot 1 + \frac{1}{10e} \cdot 2, \frac{1}{5e} \cdot 1 + \frac{1}{2e} \cdot 2 \right) = \frac{6}{5e} > \frac{1}{e}; \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=n+1}^{n+r_k} p_k(n) &= \min \left( \frac{1}{e}(10+1+5), \frac{1}{e}(5+2+1) \right) = \frac{4}{5e} < \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Таким образом, по теореме 8 уравнение (3.1) является осциллирующим, но теорема 6 не позволяет установить это.

*Пример 2.* Положим

$$p_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{10e}, & n = 3\nu; \\ \frac{1}{e}, & n = 3\nu + 1; \\ \frac{1}{10e}, & n = 3\nu + 2; \end{cases} \quad p_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{e}, & n = 3\nu; \\ \frac{1}{10e}, & n = 3\nu + 1; \\ \frac{1}{10e}, & n = 3\nu + 2; \end{cases} \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^2 p_k(n)r_k(n) &= \min \left( \frac{1}{10e} + \frac{1}{e} \cdot 2, \frac{1}{e} + \frac{1}{10e} \cdot 2, \frac{1}{10e} + \frac{1}{10e} \cdot 2 \right) = \frac{3}{10e} < \frac{1}{e}; \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=n+1}^{n+r_k} p_k(n) &= \min \left( \frac{1+10+1}{10e}, \frac{10+1+1}{10e}, \frac{1+1+10}{10e} \right) = \frac{6}{5e} > \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Таким образом, по теореме 6 уравнение (3.1) является осциллирующим, но теорема 8 не позволяет установить это.

Обратим внимание еще на одну идею получения условий осцилляции в терминах параметров уравнения. В работах [16], [17], [18] для интегральных условий осцилляции уравнений (0.3) и (0.4) в виде не нижнего, как в настоящей работе, а верхнего предела интеграла или суммы коэффициентов успешно применен итерационный подход: строится последовательность оценок коэффициентов уравнения,

такая что каждая из оценок уточняет предыдущую; если некоторая итерация дает справедливое неравенство, то уравнение является осциллирующим. Обзор достижений в этом направлении по отношению к уравнению (0.4) и некоторые новые результаты см. в работе [19].

В нескольких работах последних трех лет предприняты попытки применить итерационный подход для получения интегральных условий осцилляции в виде оценки нижнего предела функции от коэффициентов. Так, в работе [20] предлагается уточнить теорему 2, сделав первый шаг последовательности итераций; именно, утверждается, что если  $p(n) \geq 0$ ,  $\delta(n) = \max\{\tau(i) \mid i = \overline{0, n}\}$  и

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=\delta(n)}^{n-1} p(i) \prod_{j=\tau(j)}^{\delta(n)-1} \frac{1}{1-p(j)} > \frac{1}{e},$$

то уравнение (0.2) является осциллирующим. Следующий пример показывает, что это утверждение неверно.

*Пример 3.* Уравнение

$$\Delta x(n) + \frac{4}{27}x(n-2) = 0$$

по критерию (1.1) не является осциллирующим, однако

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-2}^{n-1} p(i) \prod_{j=i-2}^{n-3} \frac{1}{1-4/27} = \frac{4}{27} \left( \left( \frac{27}{23} \right)^2 + \frac{27}{23} \right) = \frac{200}{529} > \frac{1}{e}.$$

Аналогичная ошибка по отношению к уравнению (0.3) совершена в статье [21] (последовательность итераций предъявлена полностью). Возможность исправить ошибку рассмотрена в работе [22]. Ограничимся здесь выводами по отношению к уравнению (0.4), аналогичными некоторым из выводов, сделанных в [22] для уравнения (0.3).

Справедливо следующее утверждение. Положим  $\rho(n) = \min\{r_k(i) \mid i = \overline{0, n}, k = \overline{1, m}\}$ . Пусть  $p_k(n) \geq 0$  и  $\sum_{k=1}^m p_k(n) < 1$  для всех  $n \in \mathbb{N}_0$  (если последнее неравенство нарушается для сколь угодно больших  $n$ , то уравнение (0.4) является осциллирующим) и

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-\rho(n)}^{n-1} \sum_{k=1}^m p_k(i) \frac{1}{\prod_{l=n-r_k(i)}^{n-\rho(i)-1} (1 - \sum_{k=1}^m p_j(l))} > \frac{1}{e}.$$

Тогда уравнение (0.4) является осциллирующим.

Это первая итерация уточнения теоремы 5, последовательность итераций может быть продолжена. Таким образом, итерационный подход к признакам осцилляции в виде оценки нижнего предела в принципе применим. Однако на момент написания данной работы автору неизвестно, существуют ли уравнения вида (0.4), для которых применение итерационного уточнения теоремы 5 дает лучшие результаты, чем применение как теоремы 6, так и теоремы 8.

## Список цитируемых источников

1. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Матем. сб. — 1951. — Т.28(70), №3. — С. 641–658.
2. *Коплатадзе, Р. Г., Чантурия Т. А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравн. — 1982. — Т.18, №8. — С. 1463–1465.
3. *Zhang, B. G., Tian, C. J.* Nonexistence and existence of positive solutions for difference equations with unbounded delay // Comput. Math. Appl. — 1998. — V.36, No.1. — P. 1–8.
4. *Chatzarakis, G. E., Koplatadze, R., Stavroulakis, I. P.* Optimal oscillation criteria for the first order difference equations with delay argument // Pacific J. Math. — 2008. — V.235. — P. 15–33.
5. *Чудинов, К. М.* О точных достаточных признаках осцилляции решений линейных дифференциальных и разностных уравнений первого порядка // Изв. вузов. Матем. — 2018. — №5. — С. 93–98.
6. *Erbe, L. H., Zhang, B. G.* Oscillation of discrete analogues of delay equations // Differential Integral Equations. — 1989. — V.2, No.3. — P. 300–309.
7. *Ladas, G., Philos, Ch. G., Sficas, Y. G.* Sharp conditions for the oscillation of delay difference equations // J. Appl. Math. Simulation. — 1989. — V.2. — P. 101–11.
8. *Tang, X. H., Yu, J. S.* Oscillation of difference equations // Comp. Math. Appl. — 1999. — V.37. — P. 11–20.
9. *Li, B.* Oscillation of first order delay differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — V.124, No.12. — P. 3729–3737.
10. *Tang Q. G., Deng Y. B.* Oscillation of difference equations with several delays // Hunan Daxue Xuebao. — 1998. — V.25, No.2. — P. 1–3. (Chinese)
11. *Berezansky, L., Braverman, E.* On existence of positive solutions for linear difference equations with several delays // Adv. Dyn. Syst. Appl. — 2006. — V.1, No.1. — P. 29–47.
12. *Chatzarakis, G. E., Pinelas S., Stavroulakis, I. P.* Oscillations of difference equations with several deviated arguments // Aequationes Math. — 2014. — V.88, No. 1-2. — P. 105–123.
13. *Chudinov, K.M.* Sharp explicit oscillation conditions for difference equations with several delays // Georgian Math. J. — 2018. — In print.
14. *Hunt, B. R., Yorke, J. A.* When all solutions of  $x' = \sum q_i(t)x(t - T_i(t))$  oscillate // J. Differential Equations. — 1984. — V.53. — P. 139–145.
15. *Berezansky, L., Braverman, E.* On oscillation of equations with distributed delay // Z. Anal. Anwend. — 2001. — V.20, No.2. — P. 489–504.
16. *Koplatadze, R., Kvinikadze, G.* On the oscillation of solutions of first-order delay differential inequalities and equations // Georgian Math. J. — 1994. — V.1. — P. 675–685.
17. *Braverman E., Karpuz, B.* On oscillation of differential and difference equations with non-monotone delays // Appl. Math. Comput. — 2011. — V.218, No. 7. — P. 3880–3887.
18. *Braverman E., Chatzarakis, G. E., Stavroulakis, I. P.* Iterative oscillation tests for difference equations with several non-monotone arguments // J. Difference Equ. Appl. — 2015. — V.21, No. 9. — P. 854–874.

19. Чудинов, К. М. О новых подходах к получению условий осцилляции решений разностных уравнений с последствием // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения. — Пермь: Изд-во Пермск. национальн. исслед. политехнич. ун-та, 2018. — С. 277–286.
20. Chatzarakis, G. E., Öcalan, Ö. Oscillations of difference equations with non-monotone arguments // Appl. Math. Comput. — 2015. — V.258. — P. 60–66.
21. Braverman E., Chatzarakis, G. E., Stavroulakis, I. P. Iterative oscillation tests for differential equations with several non-monotone arguments // Adv. Difference Equ. — 2016. — 2016:87. — 18 p. — DOI 10.1186/s13662-016-0817-3
22. Чудинов, К. М., Малыгина, В. В. Об осцилляции линейных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями // Вестник Пермск. ун-та. Математика. Механика. Информатика. — 2017. — Вып. 4(39). — С. 11–18.

Получена 15.05.2018



УДК 517.955.8

# Асимптотическое поведение на бесконечности решений неоднородного уравнения внутренних волн

**Е. В. Никитенко**

Рубцовский индустриальный институт (филиал)  
ФГБОУ ВО “Алтайский государственный технический  
университет им. И. И. Ползунова”,  
Рубцовск 658207. *E-mail*: evnikit@mail.ru

**Аннотация.** В работе исследуется асимптотическое поведение на бесконечности решений задачи Коши для неоднородного уравнения внутренних волн со специальной правой частью. Указан явный вид предельной функции и получена оценка на скорость сходимости.

**Ключевые слова:** уравнение внутренних волн, задача Коши, асимптотическое поведение решений на бесконечности.

## Asymptotic behavior at infinity of solutions to the inhomogeneous equation of internal waves

**E. V. Nikitenko**

Rubtsovsk Industrial Institute,  
Polzunov Altai State Technical University,  
Rubtsovsk 658207.

**Abstract.** In this paper we investigate the asymptotic behavior at infinity of solutions the Cauchy problem for the inhomogeneous equation of internal waves with a special right-hand side. We specify the explicit form of the limit function and estimate the rate of convergence.

**Keywords:** equation of internal waves, Cauchy problem, asymptotic behavior of solutions at infinity.

**MSC 2010:** 35C20, 35C15

## 1. Введение

В работе рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения внутренних волн

$$\begin{aligned} \Delta u_{tt} + \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} &= e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0, \quad x \in R^n, \quad n \geq 3, \\ u|_{t=0} &= \varphi_1(x), \\ u_t|_{t=0} &= \varphi_2(x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа по  $x$ , функции  $f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in S(R^n)$ ,  $\lambda \geq 0$  — параметр. Установлены асимптотические оценки при  $t \rightarrow \infty$  решений  $u(t, x, \lambda)$  в зависимости от параметра  $\lambda$ .

Решение данной задачи однозначно определяется в классе функций, убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  [3]. При выводе асимптотических оценок используется вариант метода стационарной фазы, изложенного в [4]. Полученные результаты обобщают ранее полученные оценки в работе [2].

Среди последних работ, посвященных изучению асимптотических свойств решений уравнений, не разрешенных относительно старшей производной отметим работу [1], в которой рассматривалась задача Коши для неоднородного уравнения Соболева

$$\begin{aligned} \Delta u_{tt} + u_{x_n x_n} &= e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0, \quad x \in R^n, \quad n \geq 3, \\ u|_{t=0} &= \varphi_1(x), \\ u_t|_{t=0} &= \varphi_2(x), \end{aligned}$$

где  $f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in S(R^n)$ ,  $\lambda > 0$  — параметр. В данной работе были установлены асимптотические разложения при  $t \rightarrow \infty$  решений  $u(t, x, \lambda)$  в зависимости от значений параметра  $\lambda$ .

## 2. Формулировка результатов

Сформулируем основные результаты об асимптотическом поведении решений задачи Коши (1.1) при  $t \rightarrow \infty$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda > 1$ , тогда на любом компакте  $K \subset R^n$  для решения задачи (1.1) имеет место оценка

$$\max_{x \in K} |u(t, x, \lambda) + e^{i\lambda t} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(|\xi'|^2 - \lambda^2|\xi|^2)} d\xi| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1, \quad (2.1)$$

где  $|\xi'|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2$ ,  $c(K, \lambda) > 0$  — константа, зависящая от  $K$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $f$  и  $\lambda$ .

**Теорема 2.** Пусть  $0 \leq \lambda \leq 1$ , тогда на любом компакте  $K \subset R^n$  справедлива асимптотическая оценка

$$\max_{x \in K} \left| \left( \sum_{i=1}^{n-1} D_{x_i}^2 - \lambda^2 \Delta \right) u(t, x, \lambda) - e^{i\lambda t} f(x) \right| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1, \quad (2.2)$$

$c(K, \lambda) > 0$  — константа, зависящая от  $K$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $f$  и  $\lambda$ .

### 3. Вывод асимптотических оценок

*Доказательство теоремы 1.*

Разобьем задачу (1.1) на две подзадачи:

$$\begin{aligned} \Delta v_{tt} + \sum_{i=1}^{n-1} v_{x_i x_i} &= e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0, \quad x \in R^n \quad (n \geq 3), \\ v|_{t=0} &= 0, \\ v_t|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $f(x) \in S(R^n)$ ,  $\lambda \geq 0$  — параметр.

$$\begin{aligned} \Delta w_{tt} + \sum_{i=1}^{n-1} w_{x_i x_i} &= 0, \quad t > 0, \quad x \in R^n \quad (n \geq 3), \\ w|_{t=0} &= \varphi_1(x), \\ w_t|_{t=0} &= \varphi_2(x), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in S(R^n)$ .

Используя интегральное преобразование Фурье нетрудно проверить, что решение задачи (3.1) при  $\lambda > 1$  и решение задачи (3.2) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(t, x, \lambda) &= v^1(t, x, \lambda) + v^2(t, x, \lambda) + v^3(t, x, \lambda) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} e^{ix\xi} \frac{i\lambda|\xi|\hat{f}(\xi)}{(|\xi'|^2 - \lambda^2|\xi|^2)|\xi'|} \sin\left(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\right) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(|\xi'|^2 - \lambda^2|\xi|^2)} \cos\left(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\right) d\xi \\ &\quad - e^{i\lambda t} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(|\xi'|^2 - \lambda^2|\xi|^2)} d\xi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} w(t, x) &= w^1(t, x) + w^2(t, x) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} e^{ix\xi} \frac{|\xi|\hat{\varphi}_2(\xi)}{|\xi'|} \sin\left(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\right) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} e^{ix\xi} \hat{\varphi}_1(\xi) \cos\left(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\right) d\xi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом, решение задачи Коши (1.1) при  $\lambda > 1$  имеет вид

$$u(t, x, \lambda) = v(t, x, \lambda) + w(t, x). \quad (3.5)$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности.



Для решения  $w(t, x)$  задачи Коши (3.2), согласно [4, стр. 207], на любом компакте  $K \subset R^n$  выполнена оценка

$$\max_{x \in K} |w(t, x)| \leq \frac{c(K)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1, \quad (3.6)$$

$c(K) > 0$  — константа, зависящая от  $K, \varphi_1, \varphi_2$ .

Найдем оценку для решения  $v(t, x, \lambda)$  задачи Коши (3.1)

Рассмотрим вначале функцию  $v^1(t, x, \lambda)$ . Переходя к сферическим координатам

$$\xi_n = \rho \cos \theta_1, \quad \xi_{n-1} = \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad \dots, \quad \xi_1 = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1}, \quad (3.7)$$

и учитывая, что якобиан преобразования имеет вид

$$J = \rho^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \phi(\theta_2, \dots, \theta_{n-1}),$$

получим

$$\begin{aligned} v^1(t, x, \lambda) &= \frac{i\lambda}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_0^\infty \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} \rho^{n-3} e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{\sin^{n-3} \theta_1}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \phi(\theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \\ &\quad \times \sin(t \sin \theta_1) \hat{f}(\xi(\rho, \theta)) d\theta d\rho. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующий интеграл при  $t \gg 1$

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\pi e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{\sin^{n-3} \theta_1}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \sin(t \sin \theta_1) \hat{f}(\xi(\rho, \theta)) d\theta_1 \\ &= \left( \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}} + \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}}^\pi \right) e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{\sin^{n-3} \theta_1}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \sin(t \sin \theta_1) \hat{f}(\xi(\rho, \theta)) d\theta_1 = J_1^1 + J_1^2 + J_1^3. \end{aligned}$$

Так как оба интеграла  $J_1^1, J_1^3$  оцениваются по одной схеме, то рассмотрим, например,  $J_1^1$ . Используя тождество

$$\sin(t \sin \theta_1) = \frac{-1}{t \cos \theta_1} D_{\theta_1} \cos(t \sin \theta_1)$$

и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} J_1^1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{-\sin^{n-3} \theta_1}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2) t \cos \theta_1} D_{\theta_1} \cos(t \sin \theta_1) \hat{f}(\xi(\rho, \theta)) d\theta_1 \\ &= e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{-\cos(t \sin \theta_1) \sin^{n-3} \theta_1}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2) t \cos \theta_1} \hat{f}(\xi(\rho, \theta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{\cos(t \sin \theta_1)}{t} \left[ \frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho, \theta) \hat{f}(\xi(\rho, \theta)) \sin^{n-3} \theta_1}{\cos \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \right. \\
& \left. + \frac{\sin^{n-2} \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta))}{\cos^2 \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} + \frac{1}{\cos \theta_1} D_{\theta_1} \left( \frac{\hat{f}(\xi(\rho, \theta)) \sin^{n-3} \theta_1}{\sin^2 \theta_1 - \lambda^2} \right) \right] d\theta_1 = J_1^{1,1} + J_1^{1,2}.
\end{aligned}$$

В силу того, что при достаточно больших  $t$  выполнено неравенство

$$|\cos \theta_1| \geq \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right], \quad (3.8)$$

получим

$$|J_1^{1,1}| \leq \frac{c(\rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Очевидно, что для первого и третьего слагаемых в  $J_1^{1,2}$  при достаточно больших  $t$  справедливы следующие оценки

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{\cos(t \sin \theta_1)}{t} \frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho, \theta) \hat{f}(\xi(\rho, \theta)) \sin^{n-3} \theta_1}{\cos \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} d\theta_1 \right| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}},$$

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{\cos(t \sin \theta_1)}{t} \frac{1}{\cos \theta_1} D_{\theta_1} \left( \frac{\hat{f}(\xi(\rho, \theta)) \sin^{n-3} \theta_1}{\sin^2 \theta_1 - \lambda^2} \right) d\theta_1 \right| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}.$$

Оценим второе слагаемое в  $J_1^{1,2}$ . Имеем

$$\left( \int_0^{\frac{\pi}{2} - \delta} + \int_{\frac{\pi}{2} - \delta}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} \right) e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{\cos(t \sin \theta_1)}{t} \frac{\sin^{n-2} \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta))}{\cos^2 \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} d\theta_1 = J_1^{1,2,1} + J_1^{1,2,2},$$

где  $\delta > 0$  - достаточно маленькое фиксированное число такое, что

$$|\cos \theta_1| \geq \frac{\frac{\pi}{2} - \theta_1}{2}, \quad \theta_1 \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right]. \quad (3.9)$$

Очевидно, что

$$|J_1^{1,2,1}| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{t}, \quad t \gg 1.$$

По аналогии с [4, стр. 187] имеем

$$|J_1^{1,2,2}| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Таким образом,

$$|J_1^1| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Аналогично получаем, что

$$|J_1^3| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Учитывая, что  $\lambda > 1$ , имеем следующую оценку

$$|J_1^2| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Таким образом, для функции  $v^1(t, x, \lambda)$  получено неравенство:

$$\max_{x \in K} |v^1(t, x, \lambda)| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1. \quad (3.10)$$

Оценим функцию  $v^2(t, x, \lambda)$ , по той же схеме, что и функцию  $v^1(t, x, \lambda)$ . Переходя к сферическим координатам (3.7) получим

$$v^2(t, x, \lambda) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_0^\infty \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} \rho^{n-3} e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{\sin^{n-2} \theta_1}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \phi(\theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \\ \times \cos(t \sin \theta_1) \hat{f}(\xi(\rho, \theta)) d\theta d\rho.$$

Рассмотрим следующий интеграл при  $t \gg 1$

$$J_2 = \int_0^\pi e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{\sin^{n-2} \theta_1 \cos(t \sin \theta_1)}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \hat{f}(\xi(\rho, \theta)) d\theta_1 \\ = \left( \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}} + \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}}^\pi \right) e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{\sin^{n-2} \theta_1 \cos(t \sin \theta_1)}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \hat{f}(\xi(\rho, \theta)) d\theta_1 = J_2^1 + J_2^2 + J_2^3.$$

Так как интегралы  $J_2^1$  и  $J_2^3$  оцениваются по одной схеме, то рассмотрим, например,  $J_2^2$ . Используя тождество

$$\cos(t \sin \theta_1) = \frac{1}{t \cos \theta_1} D_{\theta_1} \sin(t \sin \theta_1)$$

и интегрируя по частям, имеем

$$J_2^1 = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta)} \frac{\sin^{n-2} \theta_1}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2) t \cos \theta_1} D_{\theta_1} \sin(t \sin \theta_1) \hat{f}(\xi(\rho, \theta)) d\theta_1$$

$$\begin{aligned}
&= e^{ix\xi(\rho,\theta)} \frac{\sin^{n-2} \theta_1 \sin(t \sin \theta_1)}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)t \cos \theta_1} \hat{f}(\xi(\rho, \theta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} \\
&\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta)} \frac{\sin(t \sin \theta_1)}{t} \left[ \frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho, \theta) \sin^{n-2} \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta))}{\cos \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin^{n-1} \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta))}{\cos^2 \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} + \frac{1}{\cos \theta_1} D_{\theta_1} \left( \frac{\sin^{n-2} \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta))}{\sin^2 \theta_1 - \lambda^2} \right) \right] d\theta_1 = J_2^{1,1} + J_2^{1,2}.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (3.8) получим, что

$$|J_2^{1,1}| \leq \frac{c(\rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Очевидно, что для первого и третьего слагаемых в  $J_2^{1,2}$  при достаточно больших  $t$  справедливы следующие оценки

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta)} \frac{\sin(t \sin \theta_1)}{t} \frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho, \theta) \sin^{n-2} \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta))}{\cos \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} d\theta_1 \right| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \\
&\left| \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta)} \frac{\sin(t \sin \theta_1)}{t \cos \theta_1} D_{\theta_1} \left( \frac{\sin^{n-2} \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta))}{\sin^2 \theta_1 - \lambda^2} \right) d\theta_1 \right| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}.
\end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое в  $J_2^{1,2}$ . Имеем

$$\left( \int_0^{\frac{\pi}{2} - \delta} + \int_{\frac{\pi}{2} - \delta}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} \right) e^{ix\xi(\rho,\theta)} \frac{\sin(t \sin \theta_1)}{t} \frac{\sin^{n-1} \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta))}{\cos^2 \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} d\theta_1 = J_2^{1,2,1} + J_2^{1,2,2},$$

где  $\delta > 0$  — достаточно маленькое фиксированное число такое, что выполняется оценка (3.9). Очевидно, как и ранее имеем

$$|J_2^{1,2,1}| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{t}, \quad |J_2^{1,2,2}| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Следовательно,

$$|J_2^1| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Аналогично получаем, что

$$|J_2^3| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Учитывая, что  $\lambda > 1$  имеем следующую оценку

$$|J_2^2| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Таким образом, для функции  $v^2(t, x, \lambda)$  получено неравенство:

$$\max_{x \in K} |v^2(t, x, \lambda)| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1. \quad (3.11)$$

Следовательно, из представления (3.5) в силу неравенств (3.6), (3.10) и (3.11) вытекает оценка (2.1). Теорема доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Применим к решению (3.5) задачи Коши (1.1) оператор  $[\sum_{i=1}^{n-1} D_{x_i}^2 - \lambda^2 \Delta]$ . Тогда результат можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n-1} D_{x_i}^2 - \lambda^2 \Delta\right) u(t, x, \lambda) = & \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} e^{ix\xi} \frac{\lambda|\xi| \hat{f}(\xi)}{i|\xi'|} \sin\left(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\right) d\xi \\ & - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) \cos\left(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\right) d\xi \\ & - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} e^{ix\xi} \frac{|\xi| \hat{\varphi}_2(\xi)}{|\xi'|} (|\xi'|^2 - \lambda^2 |\xi|^2) \sin\left(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\right) d\xi \\ & - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} e^{ix\xi} \hat{\varphi}_1(\xi) (|\xi'|^2 - \lambda^2 |\xi|^2) \cos\left(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\right) d\xi + e^{i\lambda t} f(x). \end{aligned}$$

Первое и третье слагаемые в правой части оцениваются по той же схеме, что  $v^1(t, x, \lambda)$ , а второе и четвертое слагаемые — по той же схеме, что  $v^2(t, x, \lambda)$  для случая  $\lambda > 1$ . Поэтому, по аналогии с предыдущим, получаем оценку (2.2).

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

### Список цитируемых источников

1. Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В. Асимптотическое поведение на бесконечности решений неоднородного уравнения Соболева // Сибирский математический журнал (принято в печать).

Bondar L. N., Demidenko G. V. Asymptotic behavior at infinity of solutions to the inhomogeneous Sobolev equation // Siberian Mathematical Journal (accepted for printing). (in Russian)

2. Никитенко Е. В. Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения внутренних волн // Динамические системы. — 2017. — Т. 7(35), № 4. — С. 387–393.

Nikitenko E. V. Asymptotic properties of solutions to the inhomogeneous equation of internal waves. Dynamical Systems, 7(35), 387-393 (2017). (in Russian)

3. *Секерж-Зенькович С. Я.* Теорема единственности и явное представление решения задачи Коши для уравнения внутренних волн // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 256, № 2. — С. 320–324.

Sekerzh-Zen'kovich S. Ya. (1981). A uniqueness theorem and an explicit representation of the solution of the Cauchy problem for the equation of internal waves. *Sov. Phys., Dokl.*, 26, 21–23.

4. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. — Новосибирск: Наука, 1984.

Uspenskii S. V., Demidenko G. V., Perepelkin V. G. (1984). Imbedding theorems and applications to differential equations. *Novosibirsk: Nauka.* (in Russian)

*Получена 26.05.2018*



УДК 532.5.031

## О взаимном влиянии дрейфа Стокса и неустойчивости Кельвина-Гельмгольца

А. А. Очиров, Д. Ф. Белоножко

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль 150003. E-mail: belonozhko@mail.ru

**Аннотация.** В работе представлено обобщение аналитической методики по расчету скорости дрейфовых смещений жидких частиц на горизонтальной границе раздела двух идеальных жидких сред, возмущенной волновым пакетом Стокса, в условиях реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Получены аналитические выражения для скорости горизонтального дрейфового движения, инициированного волновым пакетом Стокса, распространяющимся по границе раздела двух идеальных жидкостей.

**Ключевые слова:** неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, дрейф Стокса, волновой пакет Стокса, капиллярно-гравитационная волна.

## On the mutual influence of the Stokes drift and the Kelvin-Helmholtz instability

A. A. Ochirov, D. F. Belonozhko

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

**Abstract.** A generalization of the analytical asymptotic technique for calculating the mass transport velocity under conditions of realization of the Kelvin-Helmholtz instability is presented in the paper. Analytical expressions for the drift velocity initiated by the propagation of the simplest Stokes wavepacket along the interface of two ideal immiscible liquids are obtained. Attention to a new property of the Kelvin-Helmholtz instability that has not been investigated before is drawn. This property cannot be revealed in frame of the Euler's description.

**Keywords:** Kelvin-Helmholtz instability, Stokes drift, Stokes wavepacket, capillary-gravity wave.

**MSC 2010:** 76E05, 76E17,

### 1. Введение

При наличии тангенциального скачка поля скоростей на поверхности раздела двух идеальных несмешивающихся жидкостей, в системе могут возникнуть условия, способствующие развитию неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Эти условия легко определяются из дисперсионного уравнения

$$\omega = \frac{kU_0\rho' + \sqrt{k(-kU_0^2\rho\rho' + k^2\gamma(\rho + \rho') + g(\rho^2 - \rho'^2))}}{(\rho + \rho')}, \quad (1)$$

связывающего круговую частоту волнового движения  $\omega$  с волновым числом  $k$  и другими параметрами задачи. Если тангенциальный скачок скоростей  $U_0$  превышает некоторое критическое значение, то частота  $\omega$  оказывается комплексной,



свидетельствуя о том, что граница раздела становится неустойчивой по отношению к сколь угодно малому по амплитуде волновому возмущению длины волны  $\lambda = 2\pi/k$ . При традиционном рассмотрении в равновесном состоянии нижняя более плотная жидкость с плотностью  $\rho$  считается неподвижной, а верхняя с плотностью  $\rho' < \rho$  — движущейся поступательно с постоянной горизонтальной скоростью  $U_0$  (без трения о поверхность раздела, ввиду идеальности обеих жидкостей). В уравнении (1) учтено, что поверхность раздела обладает капиллярными свойствами, характеризующимися коэффициентом межфазного поверхностного натяжения  $\gamma$ .

Как правило, задачу формулируют в эйлеровом представлении, в котором векторы поля скоростей сопоставляются фиксированным точкам неподвижной системы координат. Однако, записанное в такой форме решение задачи не позволяет установить взаимосвязь между дрейфовым движением, инициированным распространением волнового возмущения по границе раздела, и значением тангенциального скачка скорости на поверхности раздела. В отличие от переменных Эйлера, переменные Лагранжа описывают поле скоростей, сопоставленное индивидуализированным своими начальными координатами жидким частицам, и это позволяет проследить за перемещением каждой индивидуальной жидкой частички. Впервые дрейфовое движение, порожденное волновым возмущением, было предсказано Дж. Г. Стоксом. Он показал, что периодическая гравитационная волна, распространяющаяся по свободной горизонтальной поверхности идеальной жидкости, инициирует не только хорошо известное циклическое движение жидких частиц, но и медленное среднее течение вдоль направления распространения волны — «дрейф Стокса». Стокс получил известное выражение для скорости горизонтального дрейфового массопереноса [1]:

$$U_{drift} = \zeta^2 k \omega e^{-2kd}. \quad (2)$$

Эта скорость пропорциональна квадрату амплитуды волнового движения  $\zeta$  и экспоненциально убывает с глубиной  $d$ .

Современные наблюдения за волнами, индуцированными ураганным ветром (ураганом Исаак) в Мексиканском заливе [2], показали, что дрейф Стокса оказывает значительное влияние на направление и скорость переноса вещества в условиях сильных ветровых воздействий. В работе [5] исследовалось дрейфовое движение, инициированное простейшей бегущей волной, распространяющейся вдоль границы раздела двух идеальных жидкостей на начальных этапах развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. В исследовании [3] обсуждалось влияние поверхностного электрического заряда на скорость массопереноса, возникающего из-за распространения по свободной поверхности идеальной жидкости волнового пакета Стокса. В [4] рассматривалось совместное влияние на скорость дрейфа двух дестабилизирующих свободную поверхность факторов: поверхностного электрического заряда и тангенциального разрыва скоростей на границе раздела идеальных жидкостей. В настоящей работе с помощью аналитической методики [6], позволяющей корректно перейти от эйлерова описания поля скоростей к переменным Лагранжа, рассматривается обобщение решенной в работе [5] задачи. В отличие от [5],

где в качестве причины дрейфового движения рассматривалась простейшая периодическая волна, в настоящей работе возмущение границы раздела берется в виде волнового пакета Стокса, состоящего из двух капиллярно-гравитационных волн близких длин.

## 2. Математическая формулировка задачи

Рассмотрим две несмешивающиеся идеальные полубесконечные жидкости, заполняющие верхнее и нижнее полупространства декартовой системы координат  $Oxyz$  с осью  $Oz$ , направленной вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести  $\mathbf{g}$ . Будем считать, что плоскость  $Oxy$  расположена вдоль невозмущенной поверхности раздела: нижняя жидкость с плотностью  $\rho$  неподвижна, а более легкая верхняя жидкость с плотностью  $\rho' < \rho$  движется в положительном направлении оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $U_0$ . Пусть по границе раздела вдоль оси  $Ox$  распространяется волновой пакет Стокса, состоящий из двух капиллярно-гравитационных волн одинаковой амплитуды  $\zeta$  и волновыми числами  $k^+ = k + \Delta k$  и  $k^- = k - \Delta k$ , отличающимися на малую величину  $2\Delta k \ll k$ . Поверхность раздела сред характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения  $\gamma$ . Амплитуда волнового движения  $\zeta$  считается малой по сравнению с длиной несущей волны  $\lambda = 2\pi/k$ . Для простоты движение будем считать независимым от горизонтальной координаты  $y$ .

Для корректного учета граничных условий на возмущенной границе раздела идеальных жидкостей  $z = \xi \equiv \xi(x, t)$  используется методика, предложенная в [6]: сначала поле скоростей рассчитывается в переменных Эйлера, а затем по специальной методике выполняется переход к представлению в форме Лагранжа.

Математическая формулировка задачи расчета гидродинамических потенциалов в верхней  $\varphi'$  и нижней  $\varphi$  средах имеет вид:

$$z > \xi : \quad \Delta\varphi' = 0; \quad P' = p_0 - \rho'gz - \rho'\partial_t\varphi' - \frac{\rho'}{2} [(\partial_x\varphi' + U_0)^2 + (\partial_z\varphi')^2]; \quad (3)$$

$$z = \xi : \quad \partial_t\xi + \partial_x\xi\partial_x\varphi = \partial_z\varphi; \quad \partial_t\xi + (\partial_x\varphi' + U_0)\partial_x\xi = \partial_z\varphi';$$

$$P - P' = -\gamma\partial_{xx}\xi (1 + (\partial_x\xi)^2)^{-3/2}; \quad (4)$$

$$z < \xi : \quad \Delta\varphi = 0; \quad P = p_0 - \rho gz - \rho\partial_t\varphi - \frac{\rho}{2} [(\partial_x\varphi)^2 + (\partial_z\varphi)^2]; \quad (5)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla\varphi' \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla\varphi \rightarrow 0. \quad (6)$$

Здесь  $P$  и  $P'$  — гидродинамические давления в нижней и верхней жидкостях соответственно,  $p_0$  — постоянная составляющая внешнего давления (например, атмосферное давление в системе вода-воздух  $p_0$ ).

Задача решалась методом разложения по малому параметру  $\varepsilon = \zeta k$ , пропорциональному отношению амплитуды волн, составляющих пакет, к длине несущей волны  $\lambda$ . Поскольку дрейф Стокса — явление второго порядка малости по ампли-

туде волнового движения, то решение имеет смысл искать с той же точностью:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \varphi_1 \\ \varphi'_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3). \quad (7)$$

Разлагая с необходимой точностью в ряд по  $z$  функции, входящие в граничные условия (4), несложно переформулировать их в соотношения на уровне  $z = 0$  [6], [7] и, используя разложения (7), перейти от (3)-(6) к задачам первого и второго порядков малости.

Математическая формулировка задачи первого по  $\varepsilon$  порядка малости имеет вид:

$$z > 0 : \quad \Delta\varphi'_1 = 0; \quad z < 0 : \quad \Delta\varphi_1 = 0; \quad (8)$$

$$z = 0 : \quad \partial_t \xi_1 - \partial_z \varphi_1 = 0; \quad \partial_t \xi_1 + U_0 \partial_x \xi_1 - \partial_z \varphi'_1 = 0; \quad (9)$$

$$g\xi_1 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_1 + \rho' \partial_t \varphi'_1 + \rho' U_0 \partial_x \varphi'_1 + \gamma \partial_x \xi_1 = 0; \quad (10)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \varphi'_1 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_1 \rightarrow 0. \quad (11)$$

Задача второго по  $\varepsilon$  порядка малости описывается соотношениям:

$$z > 0 : \quad \Delta\varphi'_2 = 0; \quad z < 0 : \quad \Delta\varphi_2 = 0; \quad (12)$$

$$z = 0 : \quad \begin{aligned} \partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 &= \xi_1 \partial_{zz} \varphi_1 - \partial_x \varphi_1 \xi_1; \\ \partial_t \xi_2 + U_0 \partial_x \xi_2 - \partial_z \varphi'_2 &= \xi_1 \partial_{zz} \varphi'_1 - \partial_{xx} \varphi'_1 \partial_{xx} \xi_1; \\ g\xi_2 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_2 + \rho' \partial_t \varphi'_2 + \rho' U_0 \partial_x \varphi'_2 + \gamma \partial_x \xi_2 &= \rho \xi_1 \partial_{zt} \varphi_1 + \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} + \frac{\rho}{2} ((\partial_x \varphi_1)^2 + (\partial_z \varphi_1)^2) - \rho' \xi_1 \partial_{zt} \varphi'_1 - \frac{\rho'}{2} ((\partial_x \varphi'_1)^2 + (\partial_z \varphi'_1)^2 + 2U_0 \xi_1 \partial_{xx} \varphi'_1); \\ z \rightarrow \infty : \quad \nabla \varphi'_2 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Последовательное решение сначала задачи первого порядка малости (8)-(11), а затем задачи второго порядка малости (12)-(14) приводит к аналитическим выражениям, описывающим компоненты эйлерова поле скоростей во втором приближении по  $\varepsilon$ .

### 3. Решение задачи

Решение задачи первого порядка малости (8)-(11) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \zeta \cos(\omega^+ t - k^+ x) + \zeta \cos(\omega^- t - k^- x) \\ \varphi_1 &= -\zeta \exp(k^+ z) \frac{\omega^+}{k^+} \sin(\omega^+ t - k^+ x) - \zeta \exp(k^- z) \frac{\omega^-}{k^-} \sin(\omega^- t - k^- x) \\ \varphi'_1 &= -\zeta \exp(-k^+ z) \frac{k^+ U_0 - \omega^+}{k^+} \sin(\omega^+ t - k^+ x) - \\ &\quad - \zeta \exp(-k^- z) \frac{k^- U_0 - \omega^-}{k^-} \sin(\omega^- t - k^- x). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $\omega^\pm = \omega \pm \Delta\omega = \omega \pm V_g \Delta k$  ( $V_g = \partial\omega/\partial k$  — групповая скорость), а частота  $\omega$  определяется дисперсионным уравнением (1).

Анализ дисперсионного уравнения (1) показывает, что круговая частота  $\omega$  является действительным числом при выполнении условия:

$$U_0 \leq U_{cr} = \sqrt{\frac{k^2 \gamma (\rho + \rho') + g (\rho^2 - \rho'^2)}{k \rho \rho'}}, \quad (16)$$

что соответствует волновому движению с постоянной амплитудой. В случае, когда  $U_0 > U_{cr}$ , круговая частота  $\omega$  принимает комплексные значения. Это означает, что в решении (15) амплитуды возмущения  $\xi$  и гидродинамических потенциалов становятся пропорциональными  $\propto \exp(Im(\omega)t)$ . Это соответствует движению с экспоненциально нарастающей во времени амплитудой — начальную стадию неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Стоит отметить, что критическая скорость верхней среды, реализующая неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, минимальна  $U_0 = U_{cr}^{min}$  для длины волны, соответствующей наиболее «чувствительному» к дестабилизирующему воздействию волновому числу

$$k_{min} = \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')}{\gamma}}.$$

Об устойчивом движении можно говорить только при выполнении условия  $U_0 \leq U_{cr}^{min} = U_{cr}(k_{min})$ . В противном случае даже при сколь угодно малом превышении  $U_0 > U_{cr}^{min}$  в спектре волн имеются волновые возмущения с экспоненциально растущей амплитудой.

Проанализируем выражение для отклонения границы раздела  $\xi_1$  от равновесного положения. Используя известные тригонометрические преобразования, его можно свести к виду [8]:

$$\xi_1 = 2\zeta \cos(\omega t - kx) \cos(\Delta\omega t - \Delta kx). \quad (17)$$

Согласно (17) в задаче естественным образом выделяются разные масштабы времени: период несущей волны  $T = 2\pi/\omega$  характеризует быстрые изменения амплитуды, а период огибающей волнового пакета  $\tau = 2\pi/\Delta\omega \gg T$  — медленные.

Подставив (15) в правые части (13) получим граничные условия для задачи второго порядка малости при  $z = 0$ :

$$\partial_t \xi_2 - \partial_z \varphi_2 = -2\zeta^2 \Delta k \omega e^{Im(\omega)t} \sin(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + \zeta^2 \Pi(t);$$

$$\begin{aligned} \partial_t \xi_2 + U_0 \partial_x \xi_2 - \partial_z \varphi_2' &= 2\zeta^2 e^{Im(\omega)t} \times \\ &\times (U_0^2 \Delta k^2 \rho' - 2U_0 \Delta k \Delta \omega \rho' + \Delta \omega^2 \rho' - \Delta \omega^2 \rho) \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + \zeta^2 \Pi(t); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} g\xi_2(\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_2 + \rho' \partial_t \varphi_2' + \rho' U_0 \partial_x \varphi_2' + \gamma \partial_x \xi_2 &= \\ = 2\zeta^2 (kU \Delta k - \Delta k \omega) e^{Im(\omega)t} \sin(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + \zeta^2 \Pi(t). \end{aligned}$$

Здесь  $\Pi(t)$  — быстро меняющиеся со временем циклические выражения (характерное время их изменения равно  $T$ ). Такого же рода слагаемые возникали и в задаче с простейшей периодической волной в качестве возмущения границы раздела [6]. Согласно [6] они не влияют на скорость среднего горизонтального дрейфа, поэтому в (18) в явном виде выписаны только медленно меняющиеся слагаемые, которых в модели [6] не было. Для дальнейшего анализа достаточно решить «усеченную» задачу второго порядка малости без учета слагаемых, обозначенных  $\Pi(t)$ . Соответствующее решение для компонент поля скоростей в нижней  $u_d$  и верхней  $u'_d$  жидкостях имеют вид:

$$u_d = 2\zeta^2 \Delta k e^{2z\Delta k + Im(\omega)t} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) \times \\ \times \frac{2kU_0(V_g - U_0)V_g\Delta k\rho' - (g(\rho + \rho') + 2V_g\Delta k(-U_0\rho' + V_g\rho' - V_g\rho))\omega}{g(\rho + \rho')} \quad (19)$$

$$u'_d = 2\zeta^2 \Delta k e^{-2z\Delta k + Im(\omega)t} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) \times \\ \times \frac{g(\rho + \rho')(kU_0 - \omega) - 2(U_0 - V_g)\Delta k(kU_0\rho'(U_0 - V_g) - (U_0\rho' - V_g\rho' + V_g\rho)\omega)}{g(\rho + \rho')} \quad (20)$$

Соотношения (15), (19), (20) представляют части эйлеровой скорости течения, через которые, как будет показано далее, вычисляется дрейфовая составляющая лагранжевой скорости, с которой перемещается индивидуальная жидкая частичка, начавшая движение при  $t = 0$  из точки с координатами  $(x, z)$ . Причем, если выполнено условие  $U_0 \leq U_{cr}^{min}$ , то множитель  $\exp(Im(\omega)t)$  обращается в единицу, гарантируя отсутствие нарастания амплитуды волнового движения.

Существует известная формула перехода от эйлеровой скорости  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_x + v(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_z$  к скорости в переменных Лагранжа  $\mathbf{V}_L(\mathbf{r}, t) = u_L(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_x + v_L(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_z$ . С точностью до второго порядка малости по амплитуде волнового движения соотношение, выражающее эту связь, выглядит следующим образом [9],[10],[11]:

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t) + \left( \left( \int_0^t \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, \tau) d\tau \right) \cdot \nabla \right) \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t) \quad (21)$$

Здесь  $\mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t)$  — эйлерова скорость течения в первом приближении по амплитуде волны, являющаяся решением линеаризованной задачи (в нашем случае — задачи (8) —(11)), а  $\mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t)$  — поправка второго порядка малости (в данной ситуации определяемая решением задачи (12) —(14)).

Формула (21) является приближенной, справедливой в квадратичном приближении по амплитуде волны и только для случая малых смещений жидкой частички относительно начального положения. Дело в том, что при выводе (21) использовалось разложение по малому параметру — отклонению частицы от начального положения [12]. В связи со сказанным, имеется серьезное ограничение на

область применимости (21): за любое конечное время  $t$  частичка жидкости должна смещаться от своего начального положения на расстояние, не превышающее амплитуду волны. Поэтому, прежде, чем применять (21) к полю скоростей в области  $z > 0$ , необходимо трансформировать формулы, описывающие эйлерово поле скоростей в верхней среде, движущейся со скоростью  $U_0$  в перемещающуюся вместе с ней систему отсчета (учитывая при этом эффект Доплера), и только после этого посредством (21) переходить к лагранжевым переменным. Возвращение в неподвижную систему координат  $Oxyz$  не представляет никакого труда. Описанная процедура имеет некоторые расчетные нюансы, подробно описанные в работе [6]. Методика, предложенная в [6], позволяет перейти от эйлеровых компонент скоростей (15), (19), (20) к их Лагранжевому представлению. Выделяя медленно меняющиеся со временем слагаемые, аналогично тому, как это делалось при решении задачи второго порядка малости, получим выражения для скорости дрейфа в верхней  $U'_{drift}$  и нижней  $U_{drift}$  средах:

$$U'_{drift} = \zeta^2 e^{-2k^+z + Im(\Omega)t} (kRe(\Omega) + \Delta kRe(\Omega) + k\Delta\omega) + \\ + \zeta^2 e^{-2k^-z + Im(\Omega)t} (kRe(\Omega) - \Delta kRe(\Omega) - k\Delta\omega) + \\ + 2\zeta^2 kRe(\Omega) e^{-2kz + Im(\Omega)t} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + u'_d + U_0; \quad (22)$$

$$U_{drift} = \zeta^2 e^{2k^+z + Im(\omega)t} (kRe(\omega) + \Delta kRe(\omega) + k\Delta\omega) + \\ + \zeta^2 e^{2k^-z + Im(\omega)t} (kRe(\omega) - \Delta kRe(\omega) - k\Delta\omega) + \\ + 2\zeta^2 kRe(\omega) e^{2kz + Im(\omega)t} \cos(2\Delta\omega t - 2\Delta kx) + u_d. \quad (23)$$

Здесь  $\Omega = \omega - kU_0$  — частота циклического движения частичек верхней жидкости, участвующей в общем горизонтальном перемещении со скоростью  $U_0$ .

#### 4. Анализ решения

Анализ выражений (22) и (23) показывает, что скорость поступательного движения верхней жидкости  $U_0$  существенно по-разному влияет на скорость дрейфового движения в нижней  $U_{drift}$  и в верхней  $U'_{drift}$  жидкостях. В нижней жидкости дрейф направлен всегда в сторону распространения волнового пакета вне зависимости от величины  $U_0$ . С увеличением тангенциального разрыва скоростей до значений  $U_0 > U_{cr}$  реализуются условия неустойчивости: амплитуда отклонения границы раздела от равновесного положения экспоненциально растет со временем. То же самое происходит со скоростью горизонтального дрейфового движения в нижней жидкости. Этот результат повторяет вывод, полученный в [5]. Главное отличие состоит в том, что скорость смещения жидких частиц, рассчитанная по формуле (23), благодаря модуляции амплитуды волны, оказывается примерно вдвое меньше, чем в случае дрейфа, вызванного простейшей бегущей волной [5].

Гораздо интереснее выглядит зависимость дрейфа в верхней жидкости от скорости  $U_0$ . При малых значениях  $U_0$  дрейф верхней жидкости сонаправлен с дрейфом в нижней ( $U'_{drift} = U_{drift}$  при  $U_0 = 0$ ). С увеличением значения  $U_0$  модуль скорости дрейфа верхней жидкости быстро уменьшается, обращаясь в нуль, когда  $U_0$  близка по значению к фазовой скорости  $U_{ph}$  несущей волны. Жидкие частицы в этих условиях прекращают циклическое движение и участвуют только в поступательном горизонтальном переносе с фазовой скоростью несущей волны. При движении верхней жидкости со скоростью  $U_{ph} < U_0 < U_{cr}$  дрейфовая добавка направлена противоположно распространению волнового пакета. С превышением скорости поступательного движения верхней жидкости критического значения  $U_0 > U_{cr}$ , амплитуда циклических движений жидких частиц начинает экспоненциально расти со временем, также как и скорость дрейфового движения: сонаправленного с распространением волны в нижней жидкости и направленная навстречу ей — в верхней. Этот результат аналогичен полученному в исследованиях [5] и [6]. Отличие заключается в количественной оценке скорости дрейфовых смещений: также как и в докритическом случае, из-за модуляции амплитуды волны, значение скорости добавочных к основному сдвиговому течению встречных дрейфовых потоков оказываются примерно вдвое меньше, чем в ситуации с возмущением в виде простейшей синусоидальной волны [5].

## 5. Заключение

Основные закономерности дрейфовых движений индивидуальных жидких частиц, связанных с распространением волнового пакета капиллярно-гравитационных волн вдоль горизонтальной границы раздела двух идеальных полубесконечных жидкостей на начальных этапах развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца остаются такими же, как и для дрейфа, генерируемого простейшей бегущей волной. В частности, инициированная поверхностным возмущением дрейфовая добавка к основному потоку в верхней жидкости направлена навстречу дрейфу, который порождается тем же возмущением в нижней жидкости: по разные стороны поверхности раздела генерируются дрейфовые течения, стремящиеся скомпенсировать тангенциальный скачок скорости, ставший причиной развития неустойчивости. При этом, возмущение в виде волнового пакета Стокса порождает дрейфовые движения, скорость которых примерно вдвое меньше, чем у аналогичных течений, вызванных распространением простейшей периодической волны не испытывавшей пространственной модуляции. Кроме того, скорости добавочных дрейфовых течений периодичны по времени с периодом огибающей волнового пакета. Обнаруженные новые свойства неустойчивости Кельвина-Гельмгольца связаны исключительно с характером движения индивидуальных жидких частиц и наиболее отчетливо проявляются только при анализе явления в лагранжевых переменных.

## Список цитируемых источников

1. *Stokes, G. G.* On the theory of oscillatory waves // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. — 1847. — Т.8. — P. 441-455.
2. *Curcic M., Chen S. S., Özgökmen T. M.* Hurricane-induced ocean waves and stokes drift and their impacts on surface transport and dispersion in the Gulf of Mexico // Geophysical Research Letters. — 2016. — Т.43, №6. — С. 2773-2781.
3. *Белонозжко Д. Ф., Очиров А. А.* О дрейфовых свойствах волнового пакета, распространяющегося по заряженной поверхности жидкости // Электронная обработка материалов. — 2014. — Т. 50. — №. 4. — С. 35-41.  
*Belonozhko D. F., Ochirov A. A.* On the drift properties of a wave packet propagating along a charged surface of a liquid // Surface Engineering and Applied Electrochemistry. — 2014. — Т. 50. — №. 4. — С. 317 — 322.
4. *Белонозжко Д. Ф., Очиров А. А.* О волновом массопереносе вдоль заряженной жидкой поверхности, обдуваемой диэлектрической средой // Электронная обработка материалов. — 2016. — Т. 52. — №. 1. — С. 91 — 97.  
*Belonozhko D. F., Ochirov A. A.* On wave mass transfer along charged surface blown by dielectric medium // Surface Engineering and Applied Electrochemistry. — 2016. — Т. 52. — №. 1. — С. 92 — 98.
5. *Белонозжко Д. Ф., Очиров А. А.* О дрейфовом течении вблизи горизонтальной поверхности раздела двух жидкостей в условиях реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца // Динамические системы. — 2015. — Т. 5. — №3-4. — С. 215 — 223.
6. *Белонозжко Д. Ф., Очиров А. А.* О массопереносе, порожденном волновым возмущением поверхности тангенциального разрыва поля скоростей // Журнал технической физики. — 2018. — Т. 88. — №. 5. — С. 675 — 683.  
*Belonozhko D. F., Ochirov A. A.* Mass Transfer Induced by a Wave Perturbation on the Surface of the Velocity Field Tangential Discontinuity // Technical Physics. — 2018. — Т. 63. — №. 5. — С. 653 — 661.
7. *Левич, В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. 2-е изд. — М.: ГИФМЛ, 1959. — 699 с.
8. *Островский, Л. А., Потапов, А. И.* Введение в теорию модулированных волн. — М.: Физматлит, 2003. — 400 с.
9. *Ле Блон, П., Майсек, Л.* Волны в океане Ч.1. — М.: Мир, 1981. — 480 с  
*Le Blon, P., Mysak, L.* Waves in Ocean. — Amsterdam: Elsevier, 1978. — 602 с
10. *Филлипс, О. М.* Динамика верхнего слоя океана. — Гидрометеиздат, 1980.  
*Phillips, O. M.* The Dynamics of the Upper Ocean. — Cambridge University Press., 1977. — 336 с
11. *Longuet-Higgins, M. S.* Mass transport in water waves // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. — 1953. — Т. 245. — №. 903. — С. 535 — 581.
12. *Siddiqui M. H. K., Loewen M. R.* Characteristics of the wind drift layer and microscale breaking waves // Journal of Fluid Mechanics. — 2007. — Т. 573. — С. 417 — 456.

Получена 21.05.2018





УДК 517.938

# О структуре пространства орбит каскадов Морса-Смейла сферы<sup>1</sup>

Е. Я. Гуревич, А. С. Смирнова

Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики,  
Нижний Новгород 603005. E-mail: egurevich@hse.ru, assmirnova\_8@edu.hse.ru

**Аннотация.** В работе рассматривается класс диффеоморфизмов Морса-Смейла на сфере размерности четыре и выше, для которых инвариантные многообразия различных седловых периодических точек не пересекаются. Динамика произвольного такого диффеоморфизма может быть представлена как динамика “источник-сток”, где “сток” (“источник”) является связным объединением одномерного и нульмерного неустойчивых (устойчивых) инвариантных многообразий периодических точек. Изучается структура пространства орбит, принадлежащих области притяжения “стока” (области отталкивания “источника”) и топология вложения в него сепаратрис седловых периодических точек коразмерности 1.

**Ключевые слова:** Каскады Морса-Смейла, пространство орбит, топологическая сопряженность, динамические системы Морса-Смейла.

## On the structure of orbit space of Morse-Smale cascades on the sphere $S^n$

E. Ya. Gurevich, A. S. Smirnova

National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod 603005.

**Abstract.** In this paper, we consider the class of Morse-Smale diffeomorphisms on a sphere of dimension four and higher, for which the invariant manifolds of different saddle periodic points do not intersect. The dynamics of an arbitrary such diffeomorphism can be represented as a “sink-source” dynamics, where “sink” (“source”) is a connected union of one-dimensional and zero-dimensional unstable (stable) invariant manifolds of periodic points. The structure of the space of orbits belonging to the region of attraction of the “sink” (the repulsion region of the “source”) and the topology of the embedding of separatrices of saddle periodic points of codimension 1 are studied.

**Keywords:** Morse-Smale cascades, orbit space, topological conjugacy, Morse-Smale dynamical systems.

**MSC 2010:** 37D15

### 1. Введение и формулировка результатов

Динамические системы, называемые сейчас системами Морса-Смейла, были введены С. Смейлом в 1960 г. в качестве претендента на класс всех структурно устойчивых систем в размерности, большей двух. Условия, выделяющие

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 17-11-01041) и в рамках выполнения программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 году (проект Т-95)

этот класс, были сформулированы по аналогии с необходимыми и достаточными условиями грубости потоков на плоскости, найденными А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным в 1937 году. Вскоре сам С. Смейл понял, что многомерные структурно-устойчивые системы устроены значительно сложнее и могут обладать счетным множеством гиперболических периодических траекторий. Однако, изучение систем Морса-Смейла является актуальной задачей, имеющей как самостоятельный интерес (для описания детерминированных процессов в естествознании), так и с точки зрения теории бифуркаций (для понимания переходных процессов).

Напомним, что диффеоморфизм  $f$  на замкнутом многообразии  $M^n$  называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество  $\Omega_f$  состоит из конечного числа гиперболических периодических точек и инвариантные многообразия периодических точек пересекаются трансверсально (см., например, [12] для знакомства с основными понятиями, которые используются в определении).

Задача топологической классификации систем Морса-Смейла берет начало в классических работах Е. А. Леонтович и А. Г. Майера, посвященных классификации потоков на двумерной сфере с конечным числом особых траекторий. В работах М. Пейшото, А. А. Ошемкова, В. В. Шарко, Я. Л. Уманского и С. Ю. Пилюгина решалась аналогичная задача для потоков Морса-Смейла на многообразиях размерности 2, 3 и выше, а в работах А. Н. Безденежных, В. З. Гринеса, Х. Бонатти, Р. Ланжевена, О. В. Починки, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведева, Е. В. Жужомы — для каскадов Морса-Смейла на многообразиях размерности 2 и выше (см. для ссылок обзор [5] и работу [2]).

Отметим, что для диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях в настоящий момент получена полная топологическая классификация (О. В. Починка, В. З. Гринес, Х. Бонатти, Ф. Лауденбах). В размерности четыре и выше классификация получена лишь для частных случаев систем. В работе [2] получен полный топологический инвариант для класса  $G$  диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на сфере  $S^n$  размерности  $n \geq 4$ . В работе [4] установлено, что инвариант, введенный в работе [2], можно существенно упростить для случая, когда неблуждающее множество диффеоморфизмов Морса-Смейла состоит только из неподвижных точек, сведя проблему классификации рассмотренных диффеоморфизмов к комбинаторной задаче. В настоящей работе делается первый шаг к описанию динамики диффеоморфизмов из класса  $G$  на комбинаторном языке, а именно, уточняется топология вложения сепаратрис коразмерности 1 в объемлющее многообразие. Точный результат заключается в теореме 1, формулировка которой приводится после введения необходимых понятий.

Пусть  $\Omega_f^i$  — множество всех периодических точек диффеоморфизма  $f \in G$ , размерность неустойчивого многообразия которых равна  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Представим сферу  $S^n$  в виде объединения попарно непересекающихся мно-

жеств

$$A_f = \left( \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^1} W_\sigma^u \right) \cup \Omega_f^0, R_f = \left( \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^{n-1}} W_\sigma^s \right) \cup \Omega_f^n, V_f = S^n \setminus (A_f \cup R_f). \quad (1.1)$$

Из [10] следует, что множества  $A_f, R_f, V_f$  связные, причем множество  $A_f$  является аттрактором,  $R_f$  — репеллер диффеоморфизма  $f^2$ , а множество  $V_f$  состоит из блуждающих орбит, идущих от  $R_f$  к  $A_f$ .

Обозначим через  $\widehat{V}_f = V_f/f$  пространство орбит ограничения диффеоморфизма  $f$  на  $V_f$ , через  $p_f : V_f \rightarrow \widehat{V}_f$  — естественную проекцию. В силу [17] (Теорема 3.5.7, Предложение 3.6.7)  $p_f$  является накрытием, а пространство  $\widehat{V}_f$  является многообразием.

Обозначим через  $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$  гомоморфизм, заданный следующим образом. Пусть  $\hat{c} \subset \widehat{V}_f$  — не гомотопная нулю петля в  $\widehat{V}_f$  и  $[\hat{c}] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$  — её гомотопический класс  $\hat{c}$ . Выберем произвольную точку  $\hat{x} \in \hat{c}$ , обозначим через  $p_f^{-1}(\hat{x})$  ее полный прообраз и зафиксируем точку  $\tilde{x} \in p_f^{-1}(\hat{x})$ . Так как  $p_f$  является накрывающим отображением, то существует единственный путь  $\tilde{c}(t)$ , начинающийся в точке  $\tilde{x}(\tilde{c}(0) = \tilde{x})$  и накрывающий петлю  $\hat{c}$  (то есть такой, что  $p_f(\tilde{c}(t)) = \hat{c}$ ). Тогда существует такой номер  $n \in \mathbb{Z}$ , что  $\tilde{c}(1) = f^n(\tilde{x})$ . Положим  $\eta_f([\hat{c}]) = n$ . Из [6, Глава 18] следует, что гомоморфизм  $\eta_f$  является эпиморфизмом.

Напомним, что *устойчивой (неустойчивой) сепаратрисой* седловой точки  $\sigma$  называется компонента связности множества  $W_\sigma^s \setminus \sigma$  ( $W_\sigma^u \setminus \sigma$ ). Для произвольной периодической точки  $\sigma \in \Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$  обозначим через  $m_\sigma$  ее период, через  $l_\sigma$  ее сепаратрису размерности  $(n - 1)$ , положим  $\hat{l}_\sigma = p_f(l_\sigma)$  и обозначим через  $e_* : \pi_1(\hat{l}_\sigma) \rightarrow \pi_1(\widehat{V}_f)$  эпиморфизм, индуцированный включением  $e : \hat{l}_\sigma \rightarrow \widehat{V}_f$ .

Будем говорить, что седловая точка  $\sigma \in \Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$  периода  $m_\sigma$  имеет тип ориентации  $+1$  ( $-1$ ), если ограничение  $f^{m_\sigma}|_{W_\sigma^u}$  сохраняет (меняет) ориентацию  $W_\sigma^u$ .

Напомним, что  $n$ -шаром ( $n$ -диском) называется многообразие  $B^n$ , гомеоморфное стандартному шару  $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ . Открытым  $n$ -шаром ( $n$ -диском) называется многообразие, гомеоморфное внутренности  $\mathbb{B}^n$  и сферой  $S^{n-1}$  называется многообразие, гомеоморфное границе  $S^{n-1}$  шара  $\mathbb{B}^n$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f \in G$ . Тогда

1. многообразию  $\widehat{V}_f$  гомеоморфно прямому произведению  $S^{n-1} \times S^1$ ;
2. если множество  $\Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$  содержит точку  $\sigma$  отрицательного типа ориентации, то такая точка только одна и многообразие  $\hat{l}_\sigma$  гомеоморфно обоб-

---

<sup>2</sup>Множество  $A$  называется аттрактором диффеоморфизма  $f : M^n \rightarrow M^n$ , если существует замкнутая окрестность  $U \subset M^n$  множества  $A$  такая, что  $f(U) \subset \text{int } U$  и  $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$ . Множество  $R$  называется репеллером диффеоморфизма  $f$ , если оно является аттрактором для диффеоморфизма  $f^{-1}$ .

ценной бутылке Клейна<sup>3</sup>;

3. для любой точки  $\sigma \in \Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$  положительного типа ориентации  $\eta_{f_*} = t_\sigma \mathbb{Z}$  и многообразии  $\hat{l}_\sigma$  делит  $\hat{V}_f$  на две компоненты связности таких, что замыкание по крайней мере одной из них гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

## 2. Вспомогательные определения и факты

### 2.1. Свободные и разрывные действия группы преобразований

Напомним некоторые вспомогательные сведения о свойствах группы преобразований  $\{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$ , являющейся бесконечной циклической группой, действующей свободно и разрывно на некотором топологическом (вообще говоря, некомпактном) многообразии  $X$  и порожденной гомеоморфизмом  $g : X \rightarrow X$ .

Группа  $\mathcal{G}$  действует на многообразии  $X$ , если задано отображение  $\zeta : \mathcal{G} \times X \rightarrow X$ , обладающее следующими свойствами:

1)  $\zeta(e, x) = x$  для всех  $x \in X$ , где  $e$  — нейтральный (единичный) элемент группы  $\mathcal{G}$ ;

2)  $\zeta(g, \zeta(h, x)) = \zeta(gh, x)$  для всех  $x \in X$  и  $g, h \in \mathcal{G}$ .

Группа  $\mathcal{G}$  действует *свободно* на многообразии  $X$ , если для любых различных  $g, h \in \mathcal{G}$  и любой точки  $x \in X$  выполняется неравенство  $\zeta(g, x) \neq \zeta(h, x)$ .

Группа  $\mathcal{G}$  действует *разрывно* на многообразии  $X$ , если для каждого компактного подмножества  $K \subset X$  множество элементов  $g \in \mathcal{G}$  таких, что  $\zeta(g, K) \cap K \neq \emptyset$  — конечно.

Будем обозначать через  $X/g$  пространство орбит действия группы  $\{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$  и через  $p_{X/g} : X \rightarrow X/g$  естественную проекцию. В силу [17, Теорема 3.5.7, Предложение 3.6.7] естественная проекция  $p_{X/g} : X \rightarrow X/g$  является накрывающим отображением, а пространство  $X/g$  является многообразием.

Обозначим через  $\eta_{X/g} : \pi_1(X/g) \rightarrow \mathbb{Z}$  гомоморфизм, определенный следующим образом. Пусть  $\hat{c} \subset X/g$  — не гомотопная нулю петля в  $X/g$  и  $[\hat{c}] \in \pi_1(X/g)$  — класс гомотопической эквивалентности петли  $\hat{c}$ . Выберем произвольную точку  $\hat{x} \in \hat{c}$ , обозначим через  $p_{X/g}^{-1}(\hat{x})$  полный прообраз точки  $\hat{x}$  и зафиксируем точку  $\tilde{x} \in p_{X/g}^{-1}(\hat{x})$ . Так как  $p_{X/g}$  — накрытие, то существует единственный путь  $\tilde{c}(t)$  с началом в точке  $\tilde{x}$  ( $\tilde{c}(0) = \tilde{x}$ ), накрывающий петлю  $\hat{c}$  (то есть такой, что  $p_{X/g}(\tilde{c}(t)) = \hat{c}$ ). Поэтому существует элемент  $n \in \mathbb{Z}$  такой, что  $\tilde{c}(1) = f^n(\tilde{x})$ . Положим  $\eta_{X/g}([\hat{c}]) = n$ . Из [6] (гл. 18) следует, что гомоморфизм  $\eta_{X/g}$  является эпиморфизмом.

В силу [6, Теорема 5.5] (см. также [7, Предложения 1.2.3, 1.2.4]) справедливо следующее утверждение.

<sup>3</sup>Определение обобщенной бутылки Клейна дается в разделе 2.2

**Утверждение 1.** Пусть  $X, Y$  — связные топологические многообразия и  $g : X \rightarrow X, h : Y \rightarrow Y$  — гомеоморфизмы такие, что группы  $\{g^n, n \in \mathbb{Z}\}, \{h^n, n \in \mathbb{Z}\}$  действуют свободно и разрывно на  $X, Y$  соответственно. Тогда:

- 1) Если  $\varphi : X \rightarrow Y$  — гомеоморфизм, сопрягающий гомеоморфизмы  $h$  и  $g$ , то отображение  $\widehat{\varphi} : X/g \rightarrow Y/h$ , заданное формулой  $\widehat{\varphi} = p_{Y/h} \varphi p_{X/g}^{-1}$ , является гомеоморфизмом; кроме того,  $\eta_{X/g} = \eta_{Y/h} \varphi_*$ , где  $\varphi_* : \pi_1(X/g) \rightarrow \pi_1(Y/h)$  — гомоморфизм, индуцированный отображением  $\varphi$ .
- 2) Если  $\widehat{\varphi} : X/g \rightarrow Y/h$  — гомеоморфизм такой, что  $\eta_{X/g} = \eta_{Y/h} \varphi_*$ , и  $\hat{x} \in X/g, \tilde{x} \in p_{X/g}^{-1}(\hat{x}), y = \widehat{\varphi}(\hat{x}), \tilde{y} \in p_{Y/h}^{-1}(y)$ , то существует единственный гомеоморфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$ , сопрягающий гомеоморфизм  $g$  и  $h$  и такой, что  $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{y}$ .

## 2.2. Канонические многообразия, связанные с гиперболическими неподвижными точками

Пусть  $a_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \nu \in \{-1, +1\}$  — линейное отображение евклидова пространства, заданное формулой

$$a_\nu(x_1, \dots, x_n) = \left( \nu \frac{1}{2} x_1, \frac{1}{2} x_2, \dots, \frac{1}{2} x_n \right). \quad (2.1)$$

Для каждой периодической точки  $p$  диффеоморфизма Морса - Смейла  $f : M^n \rightarrow M^n$  обозначим через  $\mathcal{O}_p$  её орбиту, через  $q_p$  — размерность ее неустойчивого многообразия и через  $\nu_p$  — тип ориентации.

В силу [12, предложение 2.1.1] верно следующее утверждение.

**Предложение 1.** Пусть  $f : M^n \rightarrow M^n$  — диффеоморфизм Морса - Смейла, имеющий периодическую гиперболическую точку  $p$ . Тогда существует гомеоморфизм  $\Psi : W_p^u \setminus p \rightarrow \mathbb{R}^{q_p} \setminus \{O\}$ , удовлетворяющий условию  $f^{m_p}|_{W_p^u \setminus p} = \Psi^{-1} a_{\nu_p} \Psi|_{W_p^u \setminus p}$ .

Положим  $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ . Фактор-пространство  $\mathbb{K}_{+1}^n = \mathbb{R}_0^n / a_{+1}$  диффеоморфно прямому произведению  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ . В дальнейшем будем отождествлять  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  с  $\mathbb{K}_{+1}^n$ . Фактор-пространство  $\mathbb{K}_{-1}^n = \mathbb{R}_0^n / a_{-1}$  будем называть *стандартной обобщенной  $n$ -мерной бутылкой Клейна*. Многообразие, гомеоморфное  $\mathbb{K}_{-1}^n$ , будем называть *обобщенной бутылкой Клейна*. Каноническая проекция  $p_{a_{-1}} : \mathbb{R}_0^n \rightarrow \mathbb{K}_{-1}^n$  индуцирует на  $\mathbb{K}_{-1}^n$  структуру неориентируемого локально тривиального расслоения над  $\mathbb{S}^1$  со слоем  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Отсюда следует, что  $\mathbb{K}_{-1}^n$  является неориентируемым многообразием. Так как  $\mathbb{R}_0^n$  является для  $\mathbb{K}_{-1}^n$  универсальным накрытием, то фундаментальная группа  $\pi_1(\mathbb{K}_{-1}^n)$  изоморфна группе  $\mathbb{Z}$  (см. [6, следствие 19.4]).

Положим  $V_p^u = W_p^u \setminus p$  и  $\widehat{V}_p^u = V_p^u / f$ . Тогда из утверждения 1 и предложения 1 вытекает следующее утверждение.

**Предложение 2.** Фактор-пространство  $\widehat{V}_p^u$  гомеоморфно  $\mathbb{K}_{\nu_p}^{q_p}$ .

Обозначим через  $b_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\nu \in \{+1, -1\}$ , линейный автоморфизм евклидова пространства, определенный формулой

$$b_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \nu 2x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{2}x_{n-1}, \nu \frac{1}{2}x_n \right) \quad (2.2)$$

. Начало координат  $O$  является единственной неподвижной точкой автоморфизма  $b_\nu$ , причем  $O$  является гиперболической седловой неподвижной точкой, устойчивое многообразие которой  $W_O^s$  совпадает с гиперплоскостью  $x_1 = 0$ , а неустойчивое многообразие  $W_O^u$  совпадает с осью  $Ox_1$ .

Положим  $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1\}$ ,  $U_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = 0\}$ ,  $N^u = U \setminus U_0$ ,  $N^s = U \setminus Ox_1$ ,  $\widehat{N}_\nu^s = N^s/b_\nu$ ,  $\widehat{N}_\nu^u = N^u/b_\nu$ .

Пространство  $\widehat{N}_\nu$  будем называть *канонической окрестностью многообразия*  $\mathbb{K}_\nu^{n-1}$ . Непосредственно из определения вытекает следующее утверждение.

### Предложение 3.

1. Многообразии  $\widehat{N}_{+1}^u$  состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомеоморфна прямому произведению  $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .
2. Многообразии  $\widehat{N}_{-1}^u$  гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .
3. Многообразии  $\widehat{N}_{+1}^s$  диффеоморфно прямому произведению  $\mathbb{K}_{+1}^{n-1} \times [-1, 1]$ .
4. многообразии  $\widehat{N}_{-1}^s$  является трубчатой окрестностью нулевого сечения неориентируемого одномерного векторного расслоения над  $\mathbb{K}_-^{n-1}$ , граница  $\partial\widehat{N}_-$  диффеоморфна  $\mathbb{K}_+^{n-1}$ , причем если  $i_* : \pi_1(\partial\widehat{N}_-) \rightarrow \pi_1(\widehat{N}_-)$  — гомоморфизм, индуцированный включением, то  $\eta_{\widehat{N}_-}(i_*(\pi_1(\partial\widehat{N}_-))) = 2\mathbb{Z}^4$

<sup>4</sup>Напомним, что *локально тривиальным расслоением* называется четверка  $\xi = \{E, B, Y, \pi\}$  где  $E, B, Y$  — топологические пространства,  $\pi : E \rightarrow B$  — непрерывное отображение такое, что многообразие  $B$  допускает открытое покрытие  $\{U\}$ , для каждого элемента которого  $U \in \{U\}$  существует гомеоморфизм  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times Y$  такой, что если  $p_1 : U \times Y \rightarrow U$  — проекция на первый сомножитель ( $p_1(x, y) = x$ ), то  $\pi|_{\pi^{-1}(U)} = p_1\varphi|_{\pi^{-1}(U)}$ . Пространства  $E, B$  и  $Y$  называются *пространством, базой* и *слоем* локально тривиального расслоения соответственно, пара  $(U, \varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times Y)$  — *картой*,  $\{(U, \varphi)\}$  — *атласом локально тривиального расслоения*, максимальный атлас называется его *структурой*. Каждому замкнутому пути  $\lambda \subset B$  с началом и концом в точке  $x$  соответствует гомотопический класс гомеоморфизмов  $T_\lambda : \xi_x \rightarrow \xi_x$ , индуцированный координатными преобразованиями при обходе петли, который называется *преобразованием монодромии*.

*Векторным расслоением размерности  $n$*  называется локально тривиальное расслоение  $\xi = \{E, B, \mathbb{R}^n, \pi\}$  такое, что для любых двух карт  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  с множествами  $U, V$ , имеющими непустое пересечение в точке  $x$ , выполняется следующее условие: если  $\varphi_x = p_2\varphi|_{\pi^{-1}(x)}$ ,  $\psi_x = p_2\psi|_{\pi^{-1}(x)}$ , то отображение  $\psi_x^{-1}\varphi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  линейно (здесь  $p_2 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — проекция на второй сомножитель). Слои  $\xi_x = \pi^{-1}(x)$  над точкой  $x \in B$  наделяются такой структурой векторного пространства, по отношению к которой отображение  $\psi_x : \xi_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  является изоморфизмом векторных пространств. Нулевым сечением векторного расслоения называется образ  $\zeta(B) \subset E$  отображения  $\zeta : B \rightarrow E$ , сопоставляющее точке  $x \in B$  нуль пространства  $\xi_x$ .

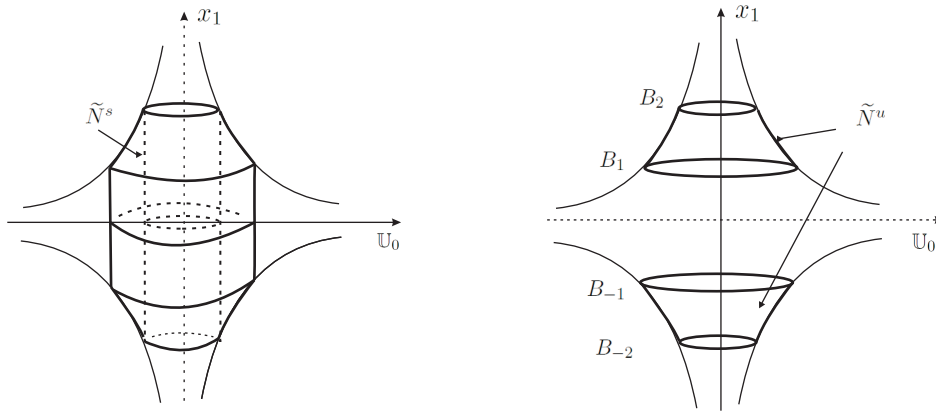


Рис. 1. Фундаментальные области  $\tilde{N}^s, \tilde{N}^u$  действия диффеоморфизма  $b_{+1}$  на множества  $\mathbb{N}^s, \mathbb{N}^u$

На рисунке 1 изображены окрестности  $\mathbb{N}^s, \mathbb{N}^u$  и фундаментальные области  $\tilde{N}^s = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^s | \frac{1}{4} \leq x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}, \tilde{N}^u = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | |x_1| \in [1, 2]\}$  действия ограничения диффеоморфизма  $b_{+1}$  на соответствующие окрестности<sup>5</sup>. Положим  $\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \frac{1}{4} \leq x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ . Множество  $\mathbb{N}^s$  является объединением гиперплоскостей  $\mathcal{L}_t = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^s | x_1^2(x_2^2 + \dots + x_n^2) = t^2\}, t \in [-1, 1]$ . Тогда фундаментальная область  $\tilde{N}_{+1}^s$  является объединением пар колец  $\mathcal{K}_t = \mathcal{L}_t \cap \mathcal{C}, t \in [-1, 1]$  и пространство  $\hat{\mathbb{N}}_{+1}^s$  может быть получено из  $\tilde{N}^s$  склеиванием компонент связности границы каждого кольца при помощи диффеоморфизма  $b_{+1}$ . Множество  $\tilde{N}^u$  состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомеоморфна прямому произведению  $\mathbb{B}^{n-1} \times [0, 1]$ . Пространство  $\hat{\mathbb{N}}_{+1}^u$  может быть получено из  $\tilde{N}^u$  склеиванием диска  $B_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | x_1 = 1\}$  с диском  $B_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | x_1 = 2\}$  и диска  $B_{-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | x_1 = -1\}$  с диском  $B_{-2} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | x_1 = -2\}$  при помощи диффеоморфизма  $b_{+1}$ .

Фундаментальной областью действия диффеоморфизма  $b_{-1}$  на множество  $\mathbb{N}^u$  является множество  $\tilde{N}_{-1}^u = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | |x_1| \in [1, 4]\}$ . Пространство  $\hat{\mathbb{N}}_{-1}^u$  может быть получено из  $\tilde{N}_{-1}^u$  склеиванием диска  $B_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | x_1 = 1\}$  с диском  $B_4 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | x_1 = 4\}$  при помощи диффеоморфизма  $b_{-1}$ . Структура векторного расслоения в пространстве орбит  $\hat{\mathbb{N}}_{-1}^s$  определяется естественной проекцией одномерного слоения множества  $\mathbb{N}^s$  прямыми, параллельными оси  $Ox_1$ . Это расслоение неориентируемо, поскольку преобразование монодромии, соответствующее петле  $p_{a_\nu}(l_\nu)$ , где  $l_\nu$  — отрезок оси  $Ox_1$ , соединяющий точку  $(0, \dots, 0, 1)$  с точкой  $(0, \dots, 1/2)$ , является меняющим ориентацию.

В силу [12, теорема 2.1.2] (см. также [3, Proposition 4.3]) справедливо следующее предложение.

<sup>5</sup>Фундаментальной областью действия группы  $G$  на множество  $X$  называется замкнутое множество  $D_G \subset X$ , содержащее подмножество  $\tilde{D}_G$  со следующими свойствами: 1)  $cl \tilde{D}_G = D_G$ ; 2)  $g(\tilde{D}_G) \cap \tilde{D}_G = \emptyset$  для любого  $g \in G$ , отличного от нейтрального элемента; 3)  $\bigcup_{g \in G} g(\tilde{D}_G) = X$ .



**Предложение 4.** Для любого диффеоморфизма  $f \in G$  существует система попарно непересекающихся окрестностей  $\{N_\sigma, \sigma \in \Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}\}$  таких, что для любой окрестности  $N_\sigma$  существует гомеоморфизм  $\chi_\sigma : N_\sigma \rightarrow \mathbb{U}$ , удовлетворяющий следующему соотношению:

- 1) если  $q_\sigma = 1$ , то  $\chi_\sigma f^{m_\sigma}|_{N_\sigma} = b_{\nu_\sigma} \chi_\sigma|_{N_\sigma}$ ,
- 2) если  $q_\sigma = n - 1$ , то  $\chi_\sigma f^{m_\sigma}|_{N_\sigma} = b_{\nu_\sigma}^{-1} \chi_\sigma|_{N_\sigma}$ .

Будем называть окрестность  $N_\sigma$ , введенную в предложении 4, *линеаризирующей*.

### 3. Доказательство основного результата

В этом разделе приводится доказательство теоремы 1, разбитое на несколько частей, оформленных как леммы.

Приведенное ниже вспомогательное предложение описывает основные свойства диффеоморфизмов из класса  $G$ . Первые два утверждения являются следствиями классических результатов теории систем Морса-Смейла, см., например, [15, Теорема 2.3], [12, Теорема 2.1], второе следует из [11, Теорема 1.3, Предложение 3.2] (см. также [3, Proposition 4.2]), третье является следствием из [9], [8], см. также [1, Лемма 3.2].

**Предложение 5.** Пусть  $f \in G$ . Тогда:

1.  $S^n = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^s = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^u$ ;
2. множество седловых периодических точек состоит из точек, размерность неустойчивых многообразий которых равна 1 или  $(n - 1)$ ;
3. для любой точки  $p \in \Omega_f^1$  замыкание  $cl l_p^u$  компоненты связности  $l_p^u$  множества  $W_p^u \setminus p$  является объединением  $l_p^u \cup p \cup \omega$ , где  $\omega \in \Omega_f^0$  — стоковая точка, устойчивое многообразие которой содержит  $l_p^u$ ; замыкание  $cl W_\sigma^s$  устойчивого многообразия состоит из  $W_\sigma^s$  и единственной источниковой точки  $\alpha \in \Omega_f^n$  такой, что  $W_\sigma^s \setminus \sigma \subset W_\alpha^u$ ;
4. для любой седловой точки  $\sigma \in \Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$  замыкание ее инвариантного многообразия размерности  $(n - 1)$  является цилиндрически вложенной сферой<sup>6</sup>.

Докажем вначале, что пространство орбит  $\widehat{V}_f$  гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

Обозначим через  $m_f$  минимальное натуральное число такое, что все периодические точки и сепаратрисы седловых периодических точек диффеоморфизма  $f$  являются неподвижными для диффеоморфизма  $f^{m_f}$ .

Из [3, Лемма 3.1] следует справедливость следующего утверждения.

<sup>6</sup>Сфера  $S^{n-1} \subset M^n$  называется цилиндрически вложенной в многообразие  $M^n$ , если существует топологическое вложение  $h : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow M^n$  такое, что  $h(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$ .

**Предложение 6.**  $\widehat{V}_{f^{m_f}}$  гомеоморфно  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

Следующее важное утверждение доказано в [13]<sup>7</sup>.

**Утверждение 2.** Пусть  $\tau : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ ,  $n \geq 4$ , — инволюция, не имеющая неподвижных точек. Тогда фактор-пространство  $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)/\tau$  гомеоморфно одному из четырех многообразий:  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ , неориентируемому расслоению  $\mathbb{S}^{n-1} \tilde{\times} \mathbb{S}^1$  над окружностью со слоем  $\mathbb{S}^{n-1}$ , прямому произведению  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}P^{n-1}$  или связной сумме  $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n$ .

**Лемма 1.**  $\widehat{V}_f$  гомеоморфно  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

*Доказательство.* Из предложения 6 следует, что пространство  $V_f$  гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ , следовательно, является универсальным накрытием для  $\widehat{V}_f$ . Тогда, в силу [6, следствие 19.4], фундаментальная группа  $\pi_1(\widehat{V}_f)$  изоморфна группе  $\{f^n\} \cong \mathbb{Z}$ , следовательно, изоморфна группе  $\mathbb{Z}$ . Так как  $f$  — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, то  $\widehat{V}_f$  ориентируемо.

Определим отображение  $\tau_{m_f} : \widehat{V}_{f^{m_f}} \rightarrow \widehat{V}_{f^{m_f}}$  соотношением  $\tau_{m_f} = p_{m_f} f p_{m_f}^{-1}$ , где  $p_{m_f} : V_f \rightarrow \widehat{V}_{f^{m_f}}$  — естественная проекция<sup>8</sup>. Тогда  $\tau^{m_f} = id$  и  $\widehat{V}_f = \widehat{V}_{f^{m_f}}/\tau_{m_f}$ .

Если  $m_f = 2$ , то из утверждения 2 непосредственно следует требуемый факт. Пусть  $m_f > 2$  и  $r$  — такое число, что  $2^r \leq m_f < 2^{r+1}$ . Положим  $g_r = f^{2^r}$ .

Обозначим через  $\xi : \widehat{V}_{f^{m_f}} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  произвольный гомеоморфизм. Пусть  $S_0^{n-1} \subset V_f$  — сфера такая, что  $\xi p_{f^{m_f}} = \mathbb{S}^{n-1} \times \{z\}$ , где  $z \in \mathbb{S}^1$  — произвольная фиксированная точка. Тогда  $f^i(S_0^{n-1}) \cap S_0^{n-1} = \emptyset$  для любого  $i \geq m_f$ , в частности,  $g_r(S_0^{n-1}) \cap S_0^{n-1} = \emptyset$ . Из теоремы о кольце следует, что множество  $K \subset V_f$ , ограниченное сферами  $S_0^{n-1}, g_r(S_0^{n-1})$ , гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$ , поэтому пространство орбит  $\widehat{V}_{g_r}$  гомеоморфно  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ . Применяя аргументы, аналогичные приведенным выше и утверждение 2, получим, что пространство орбит  $\widehat{V}_{g_{r-1}}$  гомеоморфно  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ . Если  $r = 1$ , то  $g^{r-1} = f$  и доказательство закончено. Если  $r > 1$ , то продолжая процесс, за  $r - 1$  шагов придем к требуемому утверждению. □

Докажем второе утверждение теоремы 1.

**Лемма 2.** Множество  $\Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$  содержит не более одной точки  $\sigma$  отрицательного типа ориентации, и многообразие  $\widehat{l}_\sigma$  гомеоморфно обобщенной бутылке Клейна.

*Доказательство.* Предположим, что множество  $\Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$  содержит точку  $\sigma$  отрицательного типа ориентации периода  $m_\sigma$ . Для определенности предположим,

<sup>7</sup> Аналогичное утверждение для случая  $n = 3$  доказано в [16].

<sup>8</sup> Под  $p_{m_f}^{-1}(y)$  понимается полный прообраз точки  $y$ , то есть множество всех точек  $x \in V_f$  таких, что  $y = p_{f^m}(x)$ .

что  $\sigma \in \Omega_f^1$ . В силу предложения 4 существует окрестность  $N_\sigma$  и гомеоморфизм  $\chi_\sigma : N_\sigma \rightarrow \mathbb{U}$  такие, что  $f^{m_\sigma}|_{N_\sigma} = \chi_\sigma^{-1}b_\sigma\chi_\sigma|_{N_\sigma}$ , поэтому одномерные сепаратрисы точки  $\sigma$  имеют период  $2m_\sigma$ . Замыкание устойчивого многообразия точки  $\sigma$  является локально-плоско вложенной  $(n-1)$ -сферой, делящей сферу  $S^n$  на два открытых  $n$ -шара  $B_1, B_2$ , каждый из которых содержит одну одномерную сепаратрису точки  $\sigma$ . Поэтому  $f^{m_\sigma}(B_1) = B_2, f^{m_\sigma}(B_2) = B_1$ . Отсюда следует, что любая периодическая точка, лежащая в шаре  $B_1 (B_2)$  имеет период, кратный  $2m_\sigma$ . Предположим, что имеется еще одна точка  $\sigma_*$  отрицательного типа ориентации с периодом  $m_{\sigma_*}$ . Так как  $\sigma_* \subset B_1 \cup B_2$ , то существует целое  $n$  такое, что  $m_{\sigma_*} = n2r_\sigma$ . Применяя к точке  $\sigma_*$  рассуждения, сделанные для точки  $\sigma$ , получим, что существует целое  $k$  такое, что  $m_\sigma = 2kr_{\sigma_*} = 4knm_\sigma$ , откуда  $4nk = 1$ , что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что множество седловых точек диффеоморфизма  $f$  содержит не более одной точки отрицательного типа ориентации. Тогда, если такая точка имеется, ее период равен 1, и, в силу предложения 2, соответствующее ей многообразие  $\hat{l}_\sigma$  гомеоморфно обобщенной бутылке Клейна.  $\square$

Докажем третье утверждение теоремы 1.

Пусть  $M^n, N^k$  — многообразия (возможно, с непустым краем) такие, что группы  $\pi_1(M^n), \pi_1(N^k)$  изоморфны группе  $\mathbb{Z}$  и  $N^k$  — топологическое подмногообразие многообразия  $M^n$ . Будем называть многообразие  $N^k$   *$m$ -существенным*, если включение  $e_{N^k} : N^k \rightarrow M^n$  индуцирует гомоморфизм  $e_{\gamma_*} : \pi_1(N^k) \rightarrow \pi_1(M^n)$  такой, что  $e_{\gamma_*}(\pi_1(N^k)) = m\pi_1(M^n)$ . Будем называть  *$m$ -существенное многообразие  $\beta$* , гомеоморфное окружности  $S^1$ ,  *$m$ -существенным узлом*.

Пусть  $\beta \in M^n$  —  $m$ -существенный узел и  $h : \mathbb{B}^{n-1} \times S^1 \rightarrow M^n$  — топологическое вложение такое, что  $h(\{O\} \times S^1) = \beta$ . Многообразие  $N_\beta = h(\mathbb{B}^{n-1} \times S^1)$  будем называть *трубчатой окрестностью узла  $\beta$* .

Следующее предложение доказывается аналогично [3, Propositions 5.1, 5.3].

**Предложение 7.** Пусть  $M^n$  — либо  $S^{n-1} \times S^1$ , либо  $\mathbb{B}^{n-1} \times S^1$ ,  $\beta, \beta' \in M^n$  —  $m$ -существенные узлы,  $N_\beta, N_{\beta'}$  — их трубчатые окрестности. Тогда:

1. существует гомеоморфизм  $\psi : M^n \rightarrow M^n$  такой, что  $\psi(\beta) = \beta'$ ;
2. множества  $M^n \setminus \text{int } N_\beta, M^n \setminus \text{int } N_{\beta'}$  гомеоморфны.

Следующее утверждение доказано в [14, Theorem 2].

**Утверждение 3.** Пусть  $\psi : S^{n-2} \times S^1 \rightarrow S^{n-2} \times S^1$  — произвольный гомеоморфизм. Тогда существует гомеоморфизм  $\Psi : \mathbb{B}^{n-1} \times S^1 \rightarrow \mathbb{B}^{n-1} \times S^1$  такой, что  $\Psi|_{S^{n-2} \times S^1} = \psi|_{S^{n-2} \times S^1}$ .

**Следствие 1.** Пусть  $M^n$  — либо  $S^{n-1} \times S^1$ , либо  $\mathbb{B}^{n-1} \times S^1$ ,  $Q$  — многообразие, полученное удалением из  $M^n$  внутренней трубчатой окрестности  $N_\beta \in M^n$   $m$ -существенного узла и вклеиванием  $\mathbb{B}^{n-1} \times S^1$  по произвольному меняющему естественную ориентацию края гомеоморфизму  $\varphi : \partial N_\beta \rightarrow S^{n-2} \times S^1$ . Тогда  $Q$  гомеоморфно  $M^n$ .

*Доказательство.* Положим  $N' = M^n \setminus \text{int } N_\beta$ , тогда  $Q = N' \cup_\varphi \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  и для любого подмножества  $X \in N' \cup \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  определена проекция  $\pi : X \rightarrow Q$ . Положим  $\psi = \varphi^{-1}\pi^{-1}|_{\pi(\mathbb{B}^{n-2} \times \mathbb{S}^1)}$ . Согласно предложению 3 гомеоморфизм  $\psi$  может быть продолжен до гомеоморфизма  $\Psi : \pi(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \rightarrow N_\beta$ . Тогда отображение  $H : Q \rightarrow M^n$ , определенное как  $H(x) = \pi^{-1}(x) = x$  для любой точки  $x \in \pi(\text{int } N')$ , и  $H(x) = \Psi(x)$  для любой точки  $x \in \pi(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ , является искомым гомеоморфизмом.  $\square$

**Лемма 3.** Для любой точки  $\sigma \in \Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$  положительного типа ориентации  $\eta_f e_* = m_\sigma \mathbb{Z}$  и многообразии  $\hat{l}_\sigma$  делит  $\hat{V}_f$  на две компоненты связности таких, что замыкание по крайней мере одной из них гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

*Доказательство.* Пусть  $\sigma \in \Omega_f^1$  — седловая периодическая точка положительного типа ориентации периода  $r_\sigma$ . Из предложений 1,2 и определения эпиморфизма  $\eta_f$  следует, что многообразие  $\hat{l}_\sigma$  гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  и  $\eta_f e_* = m_\sigma \mathbb{Z}$ . Покажем, что многообразие  $\hat{l}_\sigma$  делит  $\hat{V}_f$  на две компоненты связности и замыкание по крайней мере одной из них гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

Обозначим через  $|\Omega_f^i|$  количество всех точек, составляющих множество  $\Omega_f^i$ .

Из предложения 5 следует, что замыкание устойчивого многообразия любой точки  $\sigma \in \Omega_f^1$  делит сферу  $S^n$  на два шара, поэтому: 1) одномерные сепаратрисы точки  $\sigma$  содержатся в устойчивых многообразиях двух различных стоковых точек; 2) совокупность всех замыканий устойчивых многообразий точек из множества  $\Omega_f^1$  делит сферу  $S^n$  на  $|\Omega_f^1| + 1$  компонент связности, каждая из которых содержит в точности одну стоковую точку, следовательно  $|\Omega_f^0| = |\Omega_f^1| + 1$ ; 3) если у диффеоморфизма  $f$  имеется седловая точка отрицательного типа ориентации, то она делит аттрактор  $A_f$  на два симметричных подмножества периода 2.

Кроме того, из предложения 5 следует, что аттрактор  $A_f$  является носителем связного графа, вершинами которого являются стоковые периодические точки, а ребрами — неустойчивые многообразия седловых точек из множества  $\Omega_f^1$ . Из соотношения  $|\Omega_f^0| = |\Omega_f^1| + 1$  следует, что этот граф является деревом, и аттрактор  $A_f$  не содержит подмножеств, гомеоморфных окружности. Кроме того, найдется по крайней мере одна стоковая вершина  $\omega$ , в бассейне которой лежит в точности одна неустойчивая одномерная сепаратриса седловой периодической точки. Обозначим эту точку через  $\sigma$  и через  $l_-, l_+$  ее одномерные сепаратрисы. Пусть  $l_+ \subset W_\omega^s$ .

Возможны 2 случая: 1) множество  $\Omega_f^1$  состоит только из точек положительного типа ориентации; 2) множество  $\Omega_f^1$  содержит точку  $\sigma_*$  (возможно, совпадающую с  $\sigma$ ) отрицательного типа ориентации.

Рассмотрим случай 1). Тогда  $m_\sigma = m_\omega$ , а совокупность  $cl W_{\sigma}^s$  замыканий устойчивых многообразий седловых периодических точек, составляющих орбиту точки  $\sigma$ , делит сферу  $S^{n-1}$  на  $m_\sigma + 1$  компонент связности, составляющих два  $f$ -инвариантных множества  $D_+ = W_{\sigma}^s$  и  $D_- = S^{n-1} \setminus cl D_+$ . Так как аттрактор  $A_f$  одномерный и удаление одномерного множества из многообразия размерности  $n >$

2 не увеличивает числа компонент связности, то проекция  $\hat{l}_\sigma$  множества  $W_{\mathcal{O}_\sigma}^s \setminus \mathcal{O}_\sigma$  делит  $\hat{V}_f$  на две компоненты связности  $\hat{D}_+ = p_f(D_+ \setminus A_f)$  и  $\hat{D}_- = p_f(D_- \setminus A_f)$ .

Покажем, что замыкание  $cl \hat{D}_+ = \hat{D}_+ \cup \hat{l}_\sigma$  множества  $\hat{D}_+$  гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

Пусть  $N_\sigma$  — линеаризующая окрестность седловой точки  $\sigma$ , положим  $N_\sigma^s = N_\sigma \setminus W_\sigma^s$ ,  $N_\sigma^u = N_\sigma \setminus W_\sigma^u$ ,  $\hat{N}_\sigma^s = N_\sigma^s/f$ ,  $\hat{N}_\sigma^u = N_\sigma^u/f$  и обозначим через  $\hat{N}_{\sigma,+}^u$  компоненту связности множества  $\hat{N}_\sigma^u$ , имеющую непустое пересечение с множеством  $\hat{D}_+$ . Из предложений 3,4 следует, что множество  $cl \hat{D}_+ \cap \hat{N}_\sigma^s$  гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ , поэтому множество  $cl \hat{D}_+$  гомеоморфно множеству  $\hat{D}_+ \setminus int \hat{N}_\sigma^s$ . Отметим, что  $\hat{D}_+ \setminus int \hat{N}_\sigma^s = \hat{V}_{\mathcal{O}_\omega}^s \setminus int \hat{N}_{\sigma,+}^u$ . Из определения эпиморфизма  $\eta_{X/g}$  следует, что пространство  $\hat{V}_{\mathcal{O}_\omega}^s$  гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ , а дуга  $\hat{l}_+ = p_{\hat{V}_{\mathcal{O}_\omega}^s}(\mathcal{O}_{l_+})$  вложена в  $\hat{V}_{\mathcal{O}_\omega}^s$  таким образом, что отображение включения индуцирует изоморфизм групп  $\pi_1(\hat{l}_+)$ ,  $\pi_1(\hat{V}_{\mathcal{O}_\omega}^s)$ . Из предложения 7 следует, что замыкание дополнения до произвольной замкнутой трубчатой окрестности дуги  $p_{\hat{V}_{\omega_0}}(l_+)$  в  $\hat{V}_\omega$  гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ , откуда следует, что множество  $\hat{D}_+ \setminus int \hat{N}_\sigma^s$ , а, следовательно, и множество  $cl \hat{D}_+$  гомеоморфно  $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

Если множество точек  $\Omega_f^1$  не исчерпывается орбитой точки  $\sigma$ , то положим  $A'_f = A_f \setminus W_{\mathcal{O}_\sigma}^u$ ,  $V'_f = (\bigcup_{p \in A'_f} V_p^s) \setminus \bigcup_{q \in A'_f} V_q^u$ . Тогда  $V'_f \cup \bigcup_{r \in \mathcal{O}_\omega} V_r^s = V_f \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{O}_\sigma} V_p^s \cup \bigcup_{p \in \mathcal{O}_\sigma} V_p^u = V_f \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{O}_\sigma} int N_p^s \cup \bigcup_{p \in \mathcal{O}_\sigma} N_p^u$ , и  $\hat{V}'_f = V'_f/f = \hat{V}_f \setminus int \hat{N}_\sigma^s \cup_\varphi \hat{N}_\sigma^u$ , где  $\varphi : \partial \hat{N}_\sigma^s \rightarrow \partial \hat{N}_\sigma^u$  — гомеоморфизм, определяемый формулой  $\varphi = p_{\hat{N}_\sigma^u} p_{\hat{N}_\sigma^s}^{-1}|_{\partial \hat{N}_\sigma^s}$ .

Положим  $\hat{N}_{\sigma,-}^u = \hat{N}_\sigma^u \setminus \hat{N}_{\sigma,+}^u$ ,  $Q_- = \hat{D}_- \setminus int \hat{N}_\sigma^s \cup_\varphi \hat{N}_{\sigma,-}^u$ ,  $Q_+ = (\hat{D}_+ \setminus int \hat{N}_\sigma^s) \cup_\varphi \hat{N}_{\sigma,+}^u$ . Тогда  $\hat{V}'_f = Q_+ \cup Q_-$ . По определению  $Q_+ = (W_{\mathcal{O}_\omega}^s \setminus \mathcal{O}_\omega)/f$ , следовательно, гомеоморфно  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ . В силу следствия 1  $Q_-$  также гомеоморфно  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

Так как множество  $A'_f$  является связным аттрактором и носителем связного графа, являющегося деревом, то найдется стоковая точка  $\omega' \subset A'_f$ , для которой существует единственная точка  $\sigma' \in A'_f$ , чья одномерная сепаратриса принадлежит  $W_{\omega'}^s$ . Применим к точке  $\sigma'$  те же рассуждения, что и для точки  $\sigma$ , и получим, что множество  $p_{Q_-}(V_{\sigma'}^s)$  делит  $Q_-$  на две компоненты связности, замыкание по крайней мере одной из которых, обозначим ее  $\hat{D}'_+$ , гомеоморфно  $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .

Если  $\hat{D}'_+ \subset \hat{D}_-$ , то  $\hat{l}_{\sigma'}$  ограничивает в  $\hat{V}_f$  множество  $\hat{D}'_+$  и утверждение доказано для точки  $\sigma'$ . Если  $\hat{D}'_+ \cap \hat{D}_+ \neq \emptyset$ , то  $\hat{l}_{\sigma'}$  ограничивает в  $\hat{V}_f$  множество, полученное из  $\hat{D}'_+$  удалением внутренности трубчатой окрестности  $m_\sigma$  — существенного узла  $\hat{N}_{\sigma,-}^s$  и вклеиванием гомеоморфного этой окрестности множества. Тогда, в силу следствия 1 проекция  $\hat{l}_{\sigma'}$  также ограничивает в  $\hat{V}_f$  множество, гомеоморфно  $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ . Если множество  $\Omega_f^1$  не исчерпывается орбитами точек  $\sigma, \sigma'$ , продолжим процесс деления аттрактора  $A_f$  и через конечное число шагов получим требуемое утверждение. Доказательство для точек  $\sigma \in \Omega_f^{n-1}$  проводится аналогично переходом от

$f$  к  $f^{-1}$ .

Рассмотрим случай 2). В этом случае множество  $cl W_{\sigma_*}^s$  делит сферу  $S^n$  на две компоненты связности  $D_*$ ,  $f(D_*)$  периода 2. Аналогично доказательству леммы 1, показывается, что пространство орбит  $\widehat{D}_* = (D_* \setminus (A_f \cap R_f)) / f$  гомеоморфно  $S^{n-1} \times S^1$ . Положим  $A_f^* = A_f \setminus W_{\sigma_*}^s$ ,  $V_f^* = (\bigcup_{p \in A_f^*} V_p^s) \setminus \bigcup_{q \in A_f^*} V_q^u$ ,  $\widehat{V}_f^* = V_f^* / f$ . Так как  $V_f \setminus W_{\sigma_*}^s$  гомеоморфно  $V_f \setminus int N_{\sigma_*}^s$ , то  $\widehat{V}_f \setminus l_{\sigma_*}$  гомеоморфно  $\widehat{V}_f \setminus int \widehat{N}_{\sigma_*}^u$ . Поскольку  $V_f \setminus int N_{\sigma_*}^s = (D_* \setminus (A_f \cap R_f)) \setminus int N_{\sigma_*}^u$ , то ввиду предложений 3,7, многообразие  $\widehat{V}_f \setminus int \widehat{N}_{\sigma_*}^s$  гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{B}^{n-1} \times S^1$ . Теперь, применяя рассуждения из рассмотрения случая 1), получим требуемое утверждение.  $\square$

### Список цитируемых источников

1. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С.* Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех // Труды СВМО. — 2008. — 261(1). — С. 59–83.

Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Medvedev V. S. Peixoto graph of Morse-Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension greater than three. Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova 261(1), 59-83 (2008).

2. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С.* О топологической классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис на многообразиях размерности большей 3 // Труды математического института им. В. А. Стеклова — 2010. — 270. — С. 62–86.

Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Medvedev V. S. Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with one-dimensional set of unstable separatrices. Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova 270, 62-86 (2010). (in Russian)

3. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Починка О. В.* О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток // Математический сборник. — 2016. — 71. — С. 164.

Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Pochinka O. V. On embedding of multidimensional Morse-Smale diffeomorphisms in topological flows. Russian Mathematical Surveys 71, 164 (2016).

4. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Починка О. В.* Комбинаторный инвариант для каскадов Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на сфере  $S^n$ ,  $n \geq 4$  // Математические заметки — 2019. (в печати)

Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Pochinka O. V. Combinatorial invariant for Morse-Smale cascades without heteroclinic intersections on the sphere  $S^n$ ,  $n \geq 4$ . Mathematical Notes (2019). (in press)

5. *Гринес В. З., Починка О. В.* Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях // УМН. — 2013. — 68(1). — С. 129–188.

Grines V. Z., Pochinka O. V. Morse-Smale cascades on 3-manifolds. Russian Mathematical Surveys 68(1), 129-188 (2013).

6. *Kosnevski Ch.* Начальный курс алгебраической топологии — Москва: Мир, 1983 — С. 304.  
Ch. ,Kosnevsky The first course of algebraic topology. Moscow: Mir (1983)
7. *Bonatti Ch., Grines V. Z., Pochinka O. V.* Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds. Proc. Steklov Inst. Math. 3(250), 1-46 (2005).
8. *Brown M.* Locally Flat Embeddings of Topological Manifolds. Annals of Mathematics Second Series 75(2), 331-341 (1962).
9. *Cantrell J. C.* Almost locally flat sphere  $S^{n-1}$  in  $S^n$ . Proceeding of the American Mathematical society 15(4), 574-578 (1964).
10. *Grines V. Z., Zhuzhoma E. V., Medvedev T. V., Pochinka O. V.* Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms. Tr. Mat. Inst. Steklova 271( Differentsial'nye Uravneniya i Topologiya. II), 111-133 (2010).
11. *Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V.* Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections. Journal of Mathematical Sciences 208(208), 81-90 (2015).
12. *Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Pochinka O. V.* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Switzerland Springer International Publishing, 295, 2016.
13. *Jahren B., Kwasik S.* Free involutions on  $S^1 \times S^n$ . Math. Ann. 351(2), 281-303 (2011).
14. *Max N.* Homeomorphisms of  $S^n \times S^1$ . Bull. Amer. Math. Soc. 73(6), 939-942 (1967).
15. *Smale S.* Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc. 73(6), 747-817 (1967).
16. *Tollefson J.* Involutions on  $S^1 \times S^2$  and other 3-manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 183, 139-152 (1973).
17. *Thurston W.* Three-Dimensional Geometry and Topology. Princeton University Press 1, 1997.

Получена 08.05.2018

УДК 517.98

## Малые движения идеальной стратифицированной жидкости, частично покрытой крошеным и упругим льдом

Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского  
Симферополь, 295007, e-mail: *tsvetdo@gmail.com*

**Аннотация.** Изучается задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, частично покрытой крошеным и упругим льдом. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомерные частицы некоторого вещества. Упругий лед моделируется упругой пластиной. Используя метод ортогонального проектирования граничных условий на подвижной поверхности и введения вспомогательных задач, исходная начально-краевая задача сводится к равносильной задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

**Ключевые слова:** стратифицированная жидкость, крошенный лед, упругий лед, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.

## Small motions of an ideal stratified fluid partially covered with crumbling and elastic ice

D. O. Tsvetkov

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** We study the problem on small motions of ideal stratified fluid with a free surface, partially covered with crumbling and elastic ice. Under the crumbled ice we understand that on the free surface float heavy particles of some substance, and that these particles do not interact (or the interaction is small enough to be neglected) when the free surface oscillates. Elastic ice is modelled by an elastic plate. Using method of orthogonal projecting the boundary conditions on the moving surface and the introduction of auxiliary problems of the original initial-boundary value problem is reduced to the equivalent Cauchy problem for a differential equation of second order in some Hilbert space. We find sufficient existence conditions for a strong (with respect to the time variable) solution of the initial-boundary value problem describing the evolution of the specified hydrodynamics system.

**Keywords:** crumbling ice, elastic ice, differential equation in Hilbert space, accretive operator, strong solution.

**MSC 2010:** 35D05, 34K30

## Введение

В связи с новыми потребностями прикладных наук возрос интерес к изучению динамических характеристик жидкостей, обладающих разными специфическими



свойствами. К таким жидкостям, в частности, относятся стратифицированные и флотирующие жидкости. Этот интерес обусловлен не только практическими потребностями, но и теоретическим содержанием возникающих здесь проблем. Во многих случаях математические модели таких проблем существенно нелинейны и поддаются исследованию лишь численными методами. Однако ряд интересных и полезных задач можно рассматривать в рамках линейных моделей, приводящих к нетрадиционным начально-краевым задачам. Это, безусловно, определяет самостоятельный математический интерес к таким проблемам.

Настоящая статья является продолжением работ [4, 5], в которых были начаты исследования начально-краевых задач динамики стратифицированной жидкости покрытой льдом. А именно, были рассмотрены задачи о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , где  $\Gamma_1$  — участок «чистой воды»,  $\Gamma_2$  — участок либо «крошеного льда», либо «упругого льда». Получены условия, при которых существует сильные по времени решения начально-краевых задач, описывающих эволюцию данных гидросистем. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весо-мые частицы некоторого вещества (см., например, [1]). Упругий лед моделируется упругой пластиной, близкая по математической постановке задача о колебаниях однородной жидкости в контейнере с упругим дном рассматривалась ранее в монографии [2]. Таким образом, остался не исследован случай, когда свободная поверхность состоит из участков крошеного и упругого льда.

## 1. Математическая формулировка задачи

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность  $\rho_0$  которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси  $Ox_3$ :  $\rho_0 = \rho_0(x_3)$ , частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область  $\Omega$ , ограниченную твердой стенкой  $S$  и свободной поверхностью  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , где  $\Gamma_1$  — участок «крошеного льда»,  $\Gamma_2$  — участок «упругого льда». Обозначим через  $\rho_1$  — поверхностную плотность крошеного льда, через  $\rho_2$  — поверхностную плотность упругого льда. Предположим, что начало  $O$  декартовой системы координат  $Ox_1x_2x_3$  выбрано на свободной равновесной поверхности  $\Gamma$ , которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести  $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ , где  $\vec{e}_3$  — орт оси  $Ox_3$ . Предполагаем далее, что твердая стенка  $S \subset \partial\Omega$  является липшицевой поверхностью, причем  $\partial S = \partial\Gamma$  — липшицева кривая.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N_{min}^2 \leq N^2(x_3) \leq N_{max}^2 = N_0^2 < \infty, \quad N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0, \quad (1.1)$$

Функцию  $N(x_3)$  называют частотой Вьяйсяля-Брента, или частотой плавучести.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через  $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ , поле скорости в жидкости,  $p = p(t, x)$  —

отклонение поля давлений от равновесного давления  $P_0 = P_0(x_3)$ ,  $\rho = \rho(t, x)$  — отклонения поля плотности от исходного поля  $\rho_0(x_3)$ , а через  $\zeta = \zeta(t, \hat{x})$  ( $\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$ ) — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости  $\Gamma(t)$  от  $\Gamma$  по нормали  $\vec{n}$ . Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (см. [4, 5]):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3) \left( -\nabla p - g\rho \vec{e}_3 \right) + \vec{f}(t, x) \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на } S), \quad u_n = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0, \quad (1.4)$$

$$p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad p = K\zeta + \rho_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (\text{на } \Gamma_2)$$

$$\vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0, x) = \rho^0(x) \quad (x \in \Omega), \quad \zeta(0, \hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma). \quad (1.5)$$

Записывая второй закон Ньютона для частиц крошеного льда и линеаризуем его, получим динамическое условие (1.4) на  $\Gamma_1$  (см. подробнее [5]).

Линейный дифференциальный оператор  $K$ , заданный дифференциальным выражением (см. [4]):

$$K\zeta := d\Delta_2^2 \zeta + \rho_0(0)g\zeta \quad (1.6)$$

на области определения

$$\mathcal{D}(K) = \left\{ \zeta \in C^4(\overline{\Gamma_2}) \mid \zeta = \partial\zeta/\partial\nu = 0 \text{ (на } \gamma_2), \ M\zeta = N\zeta = 0 \text{ (на } \partial\Gamma_2 \setminus \gamma_2) \right\}, \quad (1.7)$$

где  $d > 0$  — коэффициент жесткости льда,  $\Delta_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ .

Считаем, что на линии  $\gamma_2 := \overline{\Gamma_2} \cap \overline{S}$  контакта упругого льда с твердой стенкой  $S$  выполнены условия жесткого закрепления льда как упругой пластинки  $\zeta = 0$ ,  $\partial\zeta/\partial\nu = 0$  (на  $\gamma_2$ ), где  $\vec{\nu}$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Gamma_2$  (расположенный, очевидно, в плоскости  $Ox_1x_2$ ). Далее, очевидно, что на остальной части границы  $\partial\Gamma_2 \setminus \gamma_2$  области  $\Gamma_2$ , где упругий лед соприкасается с участком крошеного льда, поперечная сила и момент силы на кромке упругого льда должны равняться нулю. Математически эти условия записываются в следующем виде (см. [6, с. 270]):

$$M\zeta = 0, \quad N\zeta = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma_2 \setminus \gamma_2), \quad \text{где } M\zeta = \sigma\Delta_2\zeta + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \nu^2},$$

$$N\zeta = -\frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta_2\zeta) + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \nu_1 \nu_2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} (\nu_1^2 - \nu_2^2) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \nu_1 \nu_2 \right),$$

$\nu_i$  —  $i$ -я координата единичного вектора внешней нормали  $\vec{\nu}$  к границе  $\partial\Gamma_2$ ,  $\vec{s}$  — вектор касательной к  $\partial\Gamma_2$ , а  $\sigma$  — так называемая постоянная Пуассона, характеризующая упругую пластинку. Константа  $\sigma$  удовлетворяет неравенствам (см. [6, с. 424]):  $0 \leq \sigma < 1$ .

В начально-краевой задаче (1.2) — (1.5) можно исключить одну искомую функцию — поле плотности  $\rho(t, x)$ , если ввести взамен поля скорости  $\vec{u}(t, x)$  поле малых смещений частиц жидкости  $\vec{v}(t, x)$ , связанное с  $\vec{u}(t, x)$  соотношениями

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega). \quad (1.8)$$

Тогда придем к связи

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= -\nabla \rho_0 \cdot \vec{v}(t, x) + f_0(x) = -\rho'_0(x_3)v_3(t, x) + f_0(x), \\ f_0(x) &:= \rho(0, x) + \rho'_0(x_3)v_3(0, x), \quad v_3 := \vec{v} \cdot \vec{e}_3, \end{aligned} \quad (1.9)$$

и к уравнениям для  $\vec{v}(t, x)$  и  $p(t, x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} &= -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\ \psi_0(x) &= \vec{f}(t, x) - gf_0(x)\vec{e}_3/\rho_0(x_3). \end{aligned} \quad (1.10)$$

С учетом сказанного перепишем исходную задачу (1.2) — (1.5) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} &= -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &=: v_n = 0 \quad (\text{на } S), \quad \int_{\Gamma} v_3 d\Gamma = 0, \\ p &= g\rho_0(0)v_3 + \rho_1 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad p = Kv_3 + \rho_2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \quad (\text{на } \Gamma_2), \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(0, x) &= \vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x), \quad \vec{v}(0, x) = \vec{v}^0(x), \\ v_3(0, \hat{x}) &= \zeta(0, \hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Начально-краевая задача (1.11) содержит лишь две искомые функции: векторное поле  $\vec{v}(t, x)$  и скалярное поле давлений  $p(t, x)$ . По решению  $\vec{v}(t, x)$  задачи (1.11) решения  $\vec{u}(t, x)$  и  $\rho(t, x)$  задачи (1.2) — (1.5) можно найти по формулам (1.8) и (1.9).

## 2. Проектирование уравнений движения

Начально-краевую задачу (1.11) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (1.11) на ортогональные подпространства (см. [2]). Свяжем с функцией  $\rho_0$  гильбертово пространство  $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$  вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)} d\Omega. \quad (2.1)$$

Как следует из (1.1), для  $\rho = \rho_0(x_3)$  справедливы неравенства

$$0 < m \leq \rho_0 \leq M < \infty,$$

обеспечивающие эквивалентность норм, определенных по закону (2.1) и обычным скалярным произведением в  $\vec{L}_2(\Omega)$ .

Обозначим через  $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$  подпространство  $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ , которое получается замыканием в норме  $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$  множества гладких функций

$$\{ \vec{v} \in \vec{C}^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), v_n = 0 \text{ (на } \partial\Omega) \}.$$

В качестве других подпространств возьмем подпространства

$$\begin{aligned} \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) = \{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{v} = \rho_0^{-1} \nabla p, v_n = 0 \text{ (на } S), \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0 \}. \end{aligned}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) = \{ \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{w} = \rho_0^{-1} \nabla \varphi, \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma) \}.$$

**Лемма 1.** *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0). \quad (2.2)$$

Доказательство леммы повторяет доказательство аналогичного утверждения для пространства  $\vec{L}_2(\Omega)$ , когда в (2.2)  $\rho_0(x_3) = \operatorname{const}$  (см. [2], с. 106).

Будем считать  $\vec{v}(t, x)$  и  $\rho_0^{-1} \nabla p(t, x)$  функциями переменной  $t$  со значениями в  $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ , тогда в силу уравнений и граничных условий (1.11), ортогонального разложения (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \vec{v}(t, x) \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0), \\ \rho_0^{-1} \nabla p(t, x) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{G}(\Omega, \rho_0). \end{aligned}$$

Поэтому при каждом  $t$  будем разыскивать их в виде

$$\begin{aligned} \vec{v}(t, x) = \vec{w}(t, x) + \rho_0^{-1} \nabla \Phi(t, x), \quad \vec{w}(t, x) \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0), \quad \rho_0^{-1} \nabla \Phi(t, x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \\ \rho_0^{-1} \nabla p(t, x) = \rho_0^{-1} \nabla p_1(t, x) + \rho_0^{-1} \nabla p_2(t, x), \quad (2.3) \\ \rho_0^{-1} \nabla p_1(t, x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \quad \rho_0^{-1} \nabla p_2(t, x) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0). \end{aligned}$$

Обозначим через  $P_0$ ,  $P_{h,S}$  и  $P_{0,\Gamma}$  ортопроекторы на подпространства  $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$ ,  $\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ ,  $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0)$  соответственно. Тогда, подставляя (2.3) в первое уравнение (1.11) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0 \left[ N^2(x_3) \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_0 \psi_0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_0^{-1} \nabla \Phi) + \rho_0^{-1} \nabla p_1 + P_{h,S} \left[ N^2(x_3) \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_{h,S} \psi_0, \quad (2.5)$$

$$\rho_0^{-1} \nabla p_2 + P_{0,\Gamma} \left[ N^2(x_3) \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_{0,\Gamma} \psi_0. \quad (2.6)$$

Из соотношения (2.6) следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым  $\rho_0^{-1}\nabla p_2$ , определяется лишь полем вертикального смещения  $v_3$  и начальными условиями, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничного условия с соответствующей заменой  $p \rightarrow p_1$ , так как  $p = p_1 + p_2$ ,  $p_2 = 0$  (на  $\Gamma$ ).

Для перехода от (2.4), (2.5) к системе уравнений с двумя искомыми функциями введем новые элементы:

$$P_{h,S} \left[ N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right] := \rho_0^{-1} \nabla \Psi, \quad P_{h,S} \left[ N^2(x_3) \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right] := \rho_0^{-1} \nabla \eta. \quad (2.7)$$

Тогда (2.5) дает интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + p_1 + \Psi + \eta - F = c(t) \quad (\text{в } \Omega), \quad (2.8)$$

где  $c(t)$  – произвольная функция времени,  $P_{h,S} \psi_0 = \rho_0^{-1} \nabla F$ .

Рассмотрим (2.8) на  $\Gamma_1$  и воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} p_1 &= g \rho_0(0) v_3 + \rho_1 \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = g \rho_0(0) \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) = \\ &= g \rho_0(0) \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) = g \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \rho_1 \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) \quad (\text{на } \Gamma_1); \end{aligned}$$

получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \rho_0 \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_1). \quad (2.9)$$

Аналогично, получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + K \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_2). \quad (2.10)$$

Соотношения (2.9) и (2.10) вместе с (2.4) дают уравнения для определения двух искоемых функций  $\vec{w}(t, x)$  и  $\Phi(t, x)$ , при этом учитываются связи (2.7). Таким образом, начально-краевую задачу (1.11) перепишем в виде:

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0 \left[ N^2(x_3) \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_0 \psi_0 \quad (\text{в } \Omega),$$

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial \Omega),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \rho_0 \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + K \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\
\int_{\Gamma} \Phi \, d\Gamma &= 0, \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \, d\Gamma = 0, \\
\frac{\partial}{\partial t} w(0, x) &= P_0 \vec{w}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} (0, \hat{x}) \right)_{\Gamma} = [(P_{h,S} \vec{w}^0(x)) \cdot \vec{n}]_{\Gamma}, \\
\vec{w}(0, x) &= P_0 \vec{v}^0, \quad \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} (0, \hat{x}) \right)_{\Gamma} = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

### 3. Переход к системе дифференциально-операторных уравнений

Напомним, что отклонение  $v_3|_{\Gamma} = \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3 \right)_{\Gamma}$  частиц подвижной поверхности должно удовлетворять условию сохранения объема жидкости при колебаниях:

$$\int_{\Gamma} v_3 \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \left( \rho_0^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \, d\Gamma = 0 \implies \int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \, d\Gamma = 0,$$

так как  $w_3|_{\Gamma} = 0$ ,  $\rho_0^{-1}|_{\Gamma} = \text{const}$ . Это же условие является необходимым условием разрешимости задачи Неймана

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi) &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\
\rho_0^{-1}(0) \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} &= \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \psi \, d\Gamma = 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Функцию  $\psi = \rho_0^{-1}(0)(\partial\Phi/\partial x_3)|_{\Gamma}$ , будем рассматривать как элемент пространства  $H = L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\}$ , и искать в виде пары функций  $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ , где  $\psi_1 = \psi|_{\Gamma_1}$  и  $\psi_2 = \psi|_{\Gamma_2}$ , то есть функций, заданных на соответствующих областях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

Рассмотрим следующие подпространства пространства  $H$ :

$$\begin{aligned}
H_1 &:= \{(\psi_1; \psi_2) \mid \psi_1 \in L_2(\Gamma_1) \ominus \{1_{\Gamma_1}\}, \psi_2 \equiv 0\}, \\
H_2 &:= \{(\psi_1; \psi_2) \mid \psi_2 \in L_2(\Gamma_2) \ominus \{1_{\Gamma_2}\}, \psi_1 \equiv 0\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что пространства  $H_1$  и  $H_2$  ортогональны относительно скалярного произведения в  $L_2(\Gamma)$ . Тогда пространство  $H$  можно разложить в ортогональную сумму трех пространств:

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3, \tag{3.2}$$

где  $H_3$  есть одномерное подпространство пространства  $H$ , натянутое на вектор  $\hat{\varphi}$ :

$$H_3 = \{\hat{v} \mid \hat{v} = \alpha \hat{\varphi}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \hat{\varphi} = (\text{mes } \Gamma_2; -\text{mes } \Gamma_1)\}.$$

Введем действующие в пространстве  $H$  ортопроекторы  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  на подпространства  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$  соответственно. Они будут действовать по следующим правилам:

$$P_1 u = (u_1 - \tilde{u}_1; 0), \quad P_2 u = (0; u_2 - \tilde{u}_2), \quad (3.3)$$

$$\tilde{u}_i = (\text{mes } \Gamma_i)^{-1} \int_{\Gamma_i} u_i d\Gamma_i, \quad P_3 u = (I - P_1 - P_2) u = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2).$$

Для удобства дальнейших построений введем подпространство  $\widehat{H}_2 := H_2 \oplus H_3$ , тогда

$$H = H_1 \oplus \widehat{H}_2. \quad (3.4)$$

Отметим, что  $\widehat{P}_2$  на подпространство  $\widehat{H}_2$  действует по закону  $\widehat{P}_2 u = P_2 u + P_3 u = (\tilde{u}_1; u_2)$ .

С учетом сказанного, граничные условия в (2.11) на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  можно записать покомпонентно в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\rho_0 \psi_1 + \rho_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + K\psi_2 + \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_2).$$

Спроектируем пару уравнений (3.5) на подпространства ортогонального разложения (3.4). Для этого предварительно выделим явно элемент из подпространства  $H_1$  (для обозначения среднего интегрального значения функции, заданной на  $\Gamma$  или ее части, снова будем использовать знак " $\widetilde{\phantom{x}}$ ", см. (3.3)):

$$\frac{\partial^2 (\widetilde{\Phi|_{\Gamma_1}})}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \Phi|_{\Gamma_1} - \widetilde{\Phi|_{\Gamma_1}} \right] + g\rho_0 \tilde{\psi}_1 + g\rho_0 (\psi_1 - \tilde{\psi}_1) + \rho_1 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_1}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\psi_1 - \tilde{\psi}_1) + (\Psi - \tilde{\Psi}) + \tilde{\Psi} + (\eta - \tilde{\eta}) + \tilde{\eta} = (F - \tilde{F}) + \tilde{F} + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_1). \quad (3.6)$$

Здесь элементы  $(g\rho_0(\psi_1 - \tilde{\psi}_1); 0)$  и  $(\rho_1(\partial^2/\partial t^2)(\psi_1 - \tilde{\psi}_1); 0)$  являются функциями переменной  $t$  со значениями в  $H_1$ . Далее, элемент  $(\rho_1(\partial^2 \tilde{\psi}_1/\partial t^2); \rho_2(\partial^2 \psi_2/\partial t^2))$  принадлежит подпространству  $\widehat{H}_2 \oplus \{1_\Gamma\}$ . Значит, проекцию на  $\widehat{H}_2$  можно представить в следующем виде:

$$A_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\tilde{\psi}_1; \psi_2) := \widehat{P}_2 \left( \rho_1 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_1}{\partial t^2}; \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \right) = \left( \rho_1 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_1}{\partial t^2} - c_1; \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - c_1 \right). \quad (3.7)$$

Из условия ортогональности функции  $1_\Gamma$  получаем:

$$c_1 = \alpha_1 \left( \rho_1 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_1}{\partial t^2} \right) + \alpha_2 \left( \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \right),$$

$$\alpha_1 := \frac{\text{mes } \Gamma_1}{\text{mes } \Gamma_1 + \text{mes } \Gamma_2}, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \frac{\text{mes } \Gamma_2}{\text{mes } \Gamma_1 + \text{mes } \Gamma_2}, \quad 0 < \alpha_1 < 1.$$

Аналогично с элементом  $(g\rho_0\tilde{\psi}_1; K\psi_2)$ . Для него имеем:

$$A_2(\tilde{\psi}_1; \psi_2) := \widehat{P}_2(g\rho_0\tilde{\psi}_1; K\psi_2) = (g\rho_0\tilde{\psi}_1 - c_2; K\psi_2 - c_2), \quad (3.8)$$

$$c_2 = \alpha_1(g\rho_0\tilde{\psi}_1) + \alpha_2(\widehat{K\psi_2}), \quad \alpha_1 = 1 - \alpha_2 = \frac{\text{mes } \Gamma_1}{\text{mes } \Gamma_1 + \text{mes } \Gamma_2}.$$

Введем обозначения:

$$P_H(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}) = (F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}) = P_1(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}) + \widehat{P}_2(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}) =$$

$$= (F|_{\Gamma_1} - \widehat{(F|_{\Gamma_1})}; 0) + (\widehat{(F|_{\Gamma_1})}; F|_{\Gamma_2}) =: f_1 + \widehat{f}_2.$$

$$P_H(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}) = (\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}) = P_1(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}) + \widehat{P}_2(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}) =$$

$$= (\Psi|_{\Gamma_1} - \widehat{(\Psi|_{\Gamma_1})}; 0) + (\widehat{(\Psi|_{\Gamma_1})}; \Psi|_{\Gamma_2}) =: \Psi_1 + \widehat{\Psi}_2.$$

$$P_H(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}) = (\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}) = P_1(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}) + \widehat{P}_2(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}) =$$

$$= (\eta|_{\Gamma_1} - \widehat{(\eta|_{\Gamma_1})}; 0) + (\widehat{(\eta|_{\Gamma_1})}; \eta|_{\Gamma_2}) =: \eta_1 + \widehat{\eta}_2.$$

Будем считать слагаемые функциями  $t$  со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве. Поэтому, заменяя производные  $\partial/\partial t$  на  $d/dt$ , окончательно после проектирования системы (3.6), получаем:

$$g\rho_0(\psi_1 - \tilde{\psi}_1; 0) + \rho_1 \frac{d^2}{dt^2}(\psi_1 - \tilde{\psi}_1; 0) + \frac{d^2}{dt^2}(\Phi|_{\Gamma_1} - \widehat{(\Phi|_{\Gamma_1})}; 0) +$$

$$+ (\Psi|_{\Gamma_1} - \widehat{(\Psi|_{\Gamma_1})}; 0) + (\eta|_{\Gamma_1} - \widehat{(\eta|_{\Gamma_1})}; 0) = (F|_{\Gamma_1} - \widehat{(F|_{\Gamma_1})}; 0), \quad (3.9)$$

$$A_1 \frac{d^2}{dt^2}(\tilde{\psi}_1; \psi_2) + A_2(\tilde{\psi}_1; \psi_2) + \frac{d^2}{dt^2}(\widehat{(\Phi|_{\Gamma_1})}; \Phi|_{\Gamma_2}) +$$

$$+ (\widehat{(\Psi|_{\Gamma_1})}; \Psi|_{\Gamma_2}) + (\widehat{(\eta|_{\Gamma_1})}; \eta|_{\Gamma_2}) = (\widehat{(F|_{\Gamma_1})}; F|_{\Gamma_2}). \quad (3.10)$$

Пусть  $u_1(t) := (\psi_1 - \tilde{\psi}_1; 0) \in H_1$  и  $\widehat{u}_2(t) := (\tilde{\psi}_1; \psi_2) \in \widehat{H}_2$ , с учетом обозначений, перепишем (3.9) — (3.10) в виде

$$g\rho_0 u_1 + \rho_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{d^2}{dt^2}(\Phi|_{\Gamma_1} - \widehat{(\Phi|_{\Gamma_1})}; 0) + \Psi_1 + \eta_1 = f_1, \quad (3.11)$$

$$A_1 \frac{d^2 \widehat{u}_2}{dt^2} + A_2 \widehat{u}_2 + \frac{d^2}{dt^2}(\widehat{(\Phi|_{\Gamma_1})}; \Phi|_{\Gamma_2}) + \widehat{\Psi}_2 + \widehat{\eta}_2 = \widehat{f}_2. \quad (3.12)$$

Представим в (3.11) — (3.12) слагаемые, содержащие элемент  $\Phi$ , в виде операторной матрицы, действующей на вектор-столбец  $(u_1; \widehat{u}_2)^t$ . Для этого рассмотрим  $\Phi|_{\Omega}$  в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (3.13)$$



где  $\Phi_1|_\Omega$  – решение (первой) вспомогательной задачи

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi_1) &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = 0, \\ \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} &= \psi_1 - \tilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \end{aligned} \quad (3.14)$$

а  $\Phi_2|_\Omega$  – решение (второй) вспомогательной задачи

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi_2) &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \int_\Gamma \Phi_2 d\Gamma = 0, \\ \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} &= \tilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} = \psi_2 \quad (\text{на } \Gamma_2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Граничные условия на  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  в задачах (3.14) и (3.15) соответствуют условиям

$$\rho_0^{-1}(0) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} = u_1 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \rho_0^{-1}(0) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} = \hat{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma), \quad (3.16)$$

причем выполнены необходимые условия разрешимости этих задач (см., например, [2, с. 46]).

Введем оператор  $T_1$ , который ставит в соответствие функции  $u_1 = P_1 \psi \in H_1$  решение задачи (3.14):  $\Phi_1 = \Phi_1|_\Omega = T_1(\psi_1 - \tilde{\psi}_1; 0) = T_1 P_1 \psi = T_1 u_1$ .

Рассмотрим теперь значения функции  $\Phi_1$  на границе  $\Gamma$ . Введем оператор следа на границе  $\Gamma$ :  $\gamma(\Phi_1|_\Omega) := \Phi_1|_\Gamma$  и представим функцию  $\Phi_1|_\Gamma$  в виде суммы ее проекций на подпространства  $H_1$  и  $\hat{H}_2$ :  $\Phi_1|_\Gamma = P_1 \gamma T_1 P_1 \psi + \hat{P}_2 \gamma T_1 P_1 \psi =: C_{11} u_1 + C_{21} u_1$ .

Введем оператор  $T_2$ , который ставит в соответствие функции  $\hat{u}_2 = \hat{P}_2 \psi \in \hat{H}_2$  решение задачи (3.15):  $\Phi_2 = \Phi_2|_\Omega = T_2(\tilde{\psi}_1; \psi_2) = T_2 \hat{P}_2 \psi = T_2 \hat{u}_2$ .

Снова рассмотрим значения функции  $\Phi_2$  на границе  $\Gamma$  и представим функцию  $\Phi_2|_\Gamma$  в виде суммы проекций этой функции на подпространства  $H_1$  и  $\hat{H}_2$ :

$$\Phi_2|_\Gamma = P_1 \gamma T_2 \hat{P}_2 \psi + \hat{P}_2 \gamma T_2 \hat{P}_2 \psi =: C_{12} \hat{u}_2 + C_{22} \hat{u}_2.$$

С учетом сказанного, имеем

$$\begin{pmatrix} \left( \Phi|_{\Gamma_1} - \widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})}; 0 \right) \\ \left( \widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})}; \Phi|_{\Gamma_2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Введем ряд обозначений

$$\begin{aligned} \Psi_1 &=: B_{21} u_1, \quad \tilde{\Psi}_2 =: B_{31} \hat{u}_2, \quad \rho_0^{-1} \nabla \Psi_1 = \rho_0^{-1} \nabla \hat{\Psi}_2 = P_{h,S} \left[ N^2(x_3) w_3 \vec{e}_3 \right], \\ \eta_1 &=: B_{22} u_1, \quad \rho_0^{-1} \nabla \eta_1 = P_{h,S} \left[ N^2(x_3) ((U_1 u_1) \vec{e}_3) \vec{e}_3 \right], \\ \hat{\eta}_2 &=: B_{33} \hat{u}_2, \quad \rho_0^{-1} \nabla \hat{\eta}_2 = P_{h,S} \left[ N^2(x_3) ((U_2 \hat{u}_2) \vec{e}_3) \vec{e}_3 \right], \end{aligned}$$

$$B_{11}\vec{w} := P_0 \left[ N^2(x_3)w_3\vec{e}_3 \right], \quad B_{12}u_1 := P_0 \left[ N^2(x_3) ((U_1u_1)\vec{e}_3) \vec{e}_3 \right].$$

$$B_{13}\hat{u}_2 := P_0 \left[ N^2(x_3) ((U_2\hat{u}_2)\vec{e}_3) \vec{e}_3 \right].$$

Здесь через  $U_i$  ( $i = 1, 2$ ) обозначен оператор, который посредством решения вспомогательной задачи (см. (3.14), (3.15)) ставит в соответствие элементам  $u_1, \hat{u}_2$  функцию  $\rho_0^{-1}\nabla\Phi_i \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$  ( $i = 1, 2$ ).

Перепишем первое уравнение (2.11) и систему уравнений (3.11) – (3.12), с учетом обозначений, в виде системы уравнений, которая в векторно-матричной форме принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ f \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$$A = N_1 + C := \begin{pmatrix} \rho_1 I_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad N_2 = \text{diag}(\rho_0 g I_1; A_2), \quad (3.19)$$

$$\hat{B}_{11} = B_{11}, \quad \hat{B}_{12} = \begin{pmatrix} B_{12} & B_{13} \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_{21} = \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_{22} = \begin{pmatrix} B_{22} & 0 \\ 0 & B_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{pmatrix}, \quad u = (u_1; \hat{u}_2)^t, \quad f = (f_1; \hat{f}_2)^t, \quad (3.20)$$

$I_0, I_1$  единичные операторы в  $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$  и  $H_1$  соответственно.

Начальные условия задачи (2.11) – (2.13) порождают начальные условия для уравнения (3.18):

$$(\vec{w}^0; u^0)^t = (\vec{w}(0); u(0))^t, \quad (\vec{w}^1; u^1)^t = (\vec{w}'(0); u'(0))^t, \quad (3.21)$$

$$\vec{w}(0) = P_0\vec{v}^0, \quad u(0) = (P_1\zeta^0; \hat{P}_2\zeta^0)^t, \quad \vec{w}^1(0) = P_0\vec{u}^0,$$

$$u^1(0) = (P_1((P_{h,S}\vec{u}^0) \cdot \vec{n}); \hat{P}_2((P_{h,S}\vec{u}^0) \cdot \vec{n}))^t.$$

Итогом рассмотрения задачи (2.11) – (2.13) в этом параграфе является

**Теорема 1.** *Начально-краевая задача (2.11) – (2.13) равносильна задаче Коши (3.18) – (3.21) для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H$ .*

**Лемма 2.** *Оператор  $\mathcal{C}$  (см. (3.19)) самосопряженный компактный и положительный оператор, действующий в пространстве  $H = H_1 \oplus \hat{H}_2$ .*

Оператор  $\mathcal{B}$  (см. (3.20)) самосопряженный ограниченный и неотрицательный оператор, действующий в пространстве  $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H$ .

Оператор  $K : \mathcal{D}(K) \subset L_2(\Gamma_2) \rightarrow L_2(\Gamma_2)$  (после расширения по Фридрихсу) — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор.

Данные утверждения доказаны в леммах 5, 6 и теореме 1 из [4].

**Лемма 3.** Оператор  $N_2$  (см. (3.19)) на области определения

$$\mathcal{D}(N_2) = H_1 \oplus \mathcal{D}(A_2), \quad \mathcal{D}(A_2) = \{(\tilde{\psi}_1; \psi_2) \in \hat{H}_2 \mid \psi_2 \in \mathcal{D}(K)\}, \quad (3.22)$$

является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором.

*Доказательство.* Рассмотрим  $A_2$  введенный в (3.8).

Для  $\forall u, v \in \mathcal{D}(\hat{A}_2) \subset \hat{H}_2$ ,  $u = (\tilde{u}_1; u_2)$ ,  $v = (\tilde{v}_1; v_2)$ , в силу самосопряженности оператора ортогонального проектирования  $\hat{P}_2$  и оператора  $K$ , имеем:

$$\begin{aligned} (A_2 u, v) &= \left( \hat{P}_2(\rho_0 g \tilde{u}_1; K u_2); (\tilde{v}_1; v_2) \right) = \left( (\rho_0 g \tilde{u}_1; K u_2); \hat{P}_2(\tilde{v}_1; v_2) \right) = \\ &= ((\rho_0 g \tilde{u}_1; K u_2); (\tilde{v}_1; v_2)) = (\rho_0 g \tilde{u}_1; \tilde{v}_1)_{H_3} + (K u_2; v_2)_{H_2} = \\ &= (\tilde{u}_1; \rho_0 g \tilde{v}_1)_{H_3} + (u_2; K v_2)_{H_2} = ((\tilde{u}_1; u_2); (\rho_0 g \tilde{v}_1; K v_2)) = \\ &= \left( \hat{P}_2(\tilde{u}_1; u_2); (\rho_0 g \tilde{v}_1; K v_2) \right) = \left( (\tilde{u}_1; u_2); \hat{P}_2(\rho_0 g \tilde{v}_1; K v_2) \right) = (u; A_2 v), \end{aligned}$$

откуда следует, что оператор  $A_2$  — самосопряженный.

Далее имеем:

$$(A_2 u, u) = (\rho_0 g \tilde{u}_1; \tilde{u}_1)_{H_3} + (K u_2; u_2)_{H_2} \geq \min(c; \rho g) \|u\|_{\hat{H}_2}^2, \quad (3.23)$$

где  $(K u_2, u_2)_{H_2} \geq c \|u_2\|_{H_2}^2$ , а значит,  $A_2$  — положительно определенный оператор в  $\hat{H}_2$ . Тогда и для оператора  $N_2 = \text{diag}(\rho_0 g I_1; A_2)$  эти свойства сохраняются, то есть оператор  $N_2$  — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, и следовательно, ограниченно обратим. Обратный  $N_2^{-1}$  при этом является положительным оператором.  $\square$

Изучим свойства оператора  $N_1$ , который имеет вид (см. (3.18)):

$$N_1 = \text{diag}(\rho_1 I_1, A_1), \quad A_1 \hat{u}_2 = (\rho_1 \tilde{\psi}_1 - c_1; \rho_2 \psi_2 - c_1), \quad (3.24)$$

см. подробнее (3.7). Опираясь на представления оператора  $A_1$ , учитывая связь между  $\tilde{\psi}_1$  и  $\tilde{\psi}_2$ :  $\tilde{\psi}_1 \text{mes} \Gamma_1 + \tilde{\psi}_2 \text{mes} \Gamma_2 = 0$ , имеем:

$$\begin{aligned} (A_1 \hat{u}_2, \hat{u}_2)_{\hat{H}_2} &= \left( (\rho_1 \tilde{\psi}_1 - c_1; \rho_2 \psi_2 - c_1); (\tilde{\psi}_1; \psi_2) \right)_{\hat{H}_2} = \\ &= \left( \rho_1 \tilde{\psi}_1 - c_1; \tilde{\psi}_1 \right)_{H_3} + (\rho_2 \psi_2 - c_1; \psi_2)_{H_2} = \rho_1 \int_{\Gamma_1} |\tilde{\psi}_1|^2 d\Gamma_1 + \rho_2 \int_{\Gamma_2} |\psi_2|^2 d\Gamma_2 \geq \\ &\geq k \cdot \|\hat{u}_2\|_{\hat{H}_2}, \quad k := \min(\rho_1, \rho_2). \end{aligned}$$

Из полученного результата следует

**Лемма 4.** Для  $A_1$  и  $N_1$  из (3.24) справедливы оценки:

$$k_1 \widehat{I} \leq A_1 \leq k_2 \widehat{I}, \quad k_1 := \min(\rho_1, \rho_2) > 0, \quad +\infty > k_2 := \max(\rho_1, \rho_2) \geq k_1 > 0,$$

$k_1 I \leq N_1 \leq k_2 I$ , где  $\widehat{I}$  и  $I$  единичные операторы в  $\widehat{H}_2$  и  $H$  соответственно.

#### 4. Теорема существования сильного решения

**Определение 1.** Сильным (по переменной  $t$ ) решением задачи (1.2) — (1.5) на промежутке  $[0, T]$  назовем набор функций  $\vec{u}(t, x)$ ,  $p(t, x)$ ,  $\rho(t, x)$ ,  $\zeta(t, \hat{x})$ , для которых выполнены следующие условия:

1.  $\rho(t) \in C^1([0, T]; \mathfrak{L}(\Omega))$ , где  $\mathfrak{L}_2(\Omega)$  — гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением  $(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2 \int_{\Omega} [\rho_0(x_3) N^2(x_3)]^{-1} \varphi(x) \overline{\psi(x)} d\Omega$ ,  $\vec{u}(t) \in C^1([0, T]; \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0))$ ,  $\rho_0^{-1} \nabla p \in C([0, T]; \vec{G}(\Omega, \rho_0))$  и при любом  $t \in [0, T]$  справедливо уравнение (1.2);

2.  $u_n = \partial \zeta / \partial t \in C([0, T]; H)$ ; выполнены граничные условия на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :

$$p = g\rho_0\zeta + \rho_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \in C([0, T]; L_2(\Gamma_1)), \quad p = K\zeta + \rho_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \in C([0, T]; L_2(\Gamma_2)),$$

где все слагаемые являются непрерывными по  $t$  функциями со значениями в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $L_2(\Gamma_2)$  соответственно; а также выполнены начальные условия (1.5).

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия

$$\vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0), \quad \rho^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega), \quad f(t) \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)),$$

$$\zeta^0 \in L_2(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta^0 d\Gamma = 0, \quad \zeta^0|_{\Gamma_2} \in \mathcal{D}(K),$$

$$\zeta^1 := [(P_{h,S} \vec{u}^0(x)) \cdot \vec{n}]_{\Gamma} \in L_2(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta^1 d\Gamma = 0, \quad \zeta^1|_{\Gamma_2} \in \mathcal{D}(K^{1/2}).$$

Тогда задача (1.2) — (1.5) имеет единственное сильное по  $t$  решение.

*Доказательство.* Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда задача Коши (3.18), (3.21) имеет единственное сильное по  $t$  решение, что следует из теоремы 2 работы [3]. Дальнейшее доказательство основано на обратном переходе от задачи Коши (3.18), (3.21) к начально-краевой задаче (2.11) — (2.13), а затем к задаче (1.2) — (1.5).  $\square$

#### Список цитируемых источников

1. Габов, С. А., Сवेशников, А. Г. Математические задачи динамики флотирующей жидкости // Итоги науки и техники, сер. Мат. анализ. — 1990. — Т.28. — С. 3–86.  
 Gabov, S. A., Sveshnikov, A. G. Problems in the dynamics of flotation liquids. Journal of Soviet Mathematics 54, No.4, 979–1041 (1991).

2. *Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго, Зуи Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.  
Korachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo, Zuy Can. Operator methods in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)
3. *Копачевский, Н. Д., Цветков, Д. О.* Задача Коши, порожденная колебаниями стратифицированной жидкости, частично покрытой льдом // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — Т.38, №1 — С. 31–39.  
Korachevsky, N. D., Tsvetkov, D. O. Cauchy problem generated by oscillations of stratified fluid partially closed by ice. ТЖСМ 38, No.1, 31-39 (2018). (in Russian)
4. *Цветков, Д. О.* Малые движения идеальной стратифицированной жидкости, частично покрытой упругим льдом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т.28, №3 — С. 328–347.  
Tsvetkov, D. O. Small motions of an ideal stratified fluid partially covered with elastic ice. Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science 28, No.3, 328-347 (2018). (in Russian).
5. *Цветков, Д. О.* Колебания стратифицированной жидкости, частично покрытой крошечным льдом // Известия вузов. Математика. — 2018. — Т.62, №12. — С. 70–85.  
Tsvetkov, D. O. Oscillations of stratified liquid partially covered by crumpling ice. Russian Mathematics 62, No.12, 70-85 (2018).
6. *Rektorys, K.* Variational methods in mathematics, science and engineering (2th ed.). D. Reidel Publishing Company, 1980.

Получена 21.04.2016

УДК 517.968

## Интегральные уравнения типа криволинейной свертки на замкнутом контуре со степенными ядрами

**А. И. Песчанский**

Севастопольский государственный университет  
Севастополь, 299053. *peschansky\_sntu@mail.ru*

**Аннотация.** Построена теория разрешимости интегральных уравнений первого рода типа криволинейной свертки на замкнутом контуре в комплексной плоскости, как с внешними, так и внутренними коэффициентами. Ядра уравнений зависят от отношения аргументов и имеют слабую степенную особенность. Доказана нетеровость операторов, соответствующих уравнениям, как операторов, действующих из пространства суммируемых функций в пространство дробных интегралов типа криволинейной свертки. Решения уравнений получены в замкнутой форме в результате сведения их к краевой задаче Римана и обращению оператора криволинейной свертки со степенным ядром.

**Ключевые слова:** криволинейная свертка со степенным ядром, нетеровость интегрального уравнения первого рода, оператор дробного интегрирования на замкнутой кривой, решение в замкнутой форме.

## Integral equations of curvilinear convolution type over the circumference with power kernels

**A. I. Peschansky**

Sevastopol State University, Sevastopol.

**Abstract.** The theory of solvability of integral equations of first kind of curvilinear convolution type over the circumference in the complex plane with both external and internal coefficients is constructed. Kernels of equations are the functions of arguments' ratio and have a weak power singularity. The Noetherian property of operators, corresponding the equations, as the operators acting from the space of summable functions into the space of fractional integrals of curvilinear convolution type. The closed-form solutions of equations are obtained as a result of their reduction to the boundary Riemann problem and inversion of the operator of curvilinear convolution with a power kernel.

**Keywords:** curvilinear convolution with a power kernel, Noetherian property of an integral equation of first kind, the operator of fractional integration over the circumference, a closed-form solution.

**MSC 2010:** 45E10

## Введение

Систематическое исследование интегральных уравнений первого рода со слабой особенностью в ядре началось по инициативе Ф. Д. Гахова, начиная примерно с 1960 года. Особое внимание при этом было уделено уравнениям, решение которых можно получить в замкнутой форме. Изложение основных результатов и исторических сведений можно найти в монографиях [1, 2], книгах [3, 4]. Отметим, что в большей степени изучены уравнения на прямой и на отрезке, в меньшей степени — уравнения на замкнутом контуре в комплексной области. Решение в замкнутой форме некоторых обобщенных уравнений Абеля, в том случае, когда они задаются на произвольной гладкой дуге, приводится в [5-7]. В данной работе предлагается постановка нетеровости и решение в квадратурах ранее не исследованных уравнений типа криволинейной свертки на замкнутом контуре со слабой степенной особенностью в ядрах. Аналитический метод их решения сводится к последовательному решению характеристического сингулярного уравнения с ядром Коши и обращению оператора криволинейной свертки со степенным ядром.

## 1. Интегральное уравнение с внешними коэффициентами

Пусть  $\Gamma$  — простая гладкая замкнутая ориентированная кривая на комплексной плоскости с параметрическим уравнением:  $y = y(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ ,  $s$  — дуговая абсцисса,  $l$  — длина  $\Gamma$ . Контур  $\Gamma$  разбивает плоскость на две области:  $G^+$  ( $0 \in G^+$ ) и  $G^-$ . Рассмотрим на этом контуре в пространстве  $L_p(\Gamma)$ ,  $1 < p < \infty$ , интегральное уравнение с внешними коэффициентами

$$\frac{a(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{(1-t/\tau)^\alpha} \frac{d\tau}{\tau} + \frac{b(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{(1-\tau/t)^\alpha} \frac{d\tau}{t} = g(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$  принадлежат классу  $H^\lambda(\Gamma)$  функций, удовлетворяющих на  $\Gamma$  условию Гельдера с показателем  $\lambda$ . Если обозначить  $F_{\alpha,1}^\pm$  интегральные операторы с ядрами, содержащими степенную функцию, т. е.

$$(F_{\alpha,1}^+ f)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{(1-t/\tau)^\alpha} \frac{d\tau}{\tau}, \quad (F_{\alpha,1}^- f)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{(1-\tau/t)^\alpha} \frac{d\tau}{t},$$

то уравнение (1) в операторной форме примет вид

$$(A_1 f)(t) \equiv a(t)(F_{\alpha,1}^+ f)(t) + b(t)(F_{\alpha,1}^- f)(t) = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (2)$$

Операторы  $F_{\alpha,1}^\pm$  являются примерами операторов криволинейной свертки, введенной Ю. И. Черским [8]. В силу свойств операторов  $F_{\alpha,1}^\pm$  для  $A_1$  справедливо представление

$$A_1 = (aP^+ + bP^-) F_{\alpha,1},$$

где  $F_{\alpha,1} = F_{\alpha,1}^+ + F_{\alpha,1}^-$ , а  $P^\pm = 1/2(I \pm S)$  — проекционные операторы, связанные с сингулярным интегральным оператором с ядром Коши

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma,$$

$I$  — тождественный оператор.

Таким образом, решение уравнения (1) сводится к решению характеристического сингулярного уравнения с ядром Коши и обращению оператора криволинейной свертки.

Поскольку оператор  $A_1$  уравнения (2) вполне непрерывный и не является нормально разрешимым в пространстве  $L_p(\Gamma)$ , то для исследования (2) применяется метод нормализации оператора с незамкнутой областью значений, общая идея которого развита в [3, 9]. Пространство, в котором задана правая часть уравнения, надлежащим образом сужается. В случае уравнения (2) таким сужением является пространство  $L_p^\eta(\Gamma)$  дробных интегралов типа криволинейной свертки [10], которое вводится следующим образом:

$$L_p^\eta(\Gamma) = \left\{ g \mid g = F_\eta \phi, \phi \in L_p(\Gamma), 0 < \eta < 1, 1 < p < \infty, \|g\|_{L_p^\eta} = \|\phi\|_{L_p} \right\},$$

$$F_\eta = F_\eta^+ + F_\eta^-,$$

$$F_\eta^+ \phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(1, 1; 1 + \eta; \frac{t}{\tau}\right) \phi(\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

$$F_\eta^- \phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(1, 1; 1 + \eta; \frac{\tau}{t}\right) \phi(\tau) \frac{d\tau}{t}.$$

Здесь под  $F(1, 1; 1 + \eta; \frac{t}{\tau})$  ( $t, \tau \in \Gamma$ ) понимается граничное значение на  $\Gamma$  ветви гипергеометрической функции Гаусса, определяемой в окрестности  $z = 0$  рядом

$$F\left(1, 1; 1 + \eta; \frac{z}{\tau}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n}{(1 + \eta)_n} \left(\frac{z}{\tau}\right)^n, \quad (\tau \in \Gamma),$$

$(\alpha)_n$  — символ Похгаммера, определяемый равенствами  $(\alpha)_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $(\alpha)_0 = 1$ . Под  $F(1, 1; 1 + \eta; \frac{t}{\tau})$  ( $t, \tau \in \Gamma$ ) понимается граничное значение на  $\Gamma$  аналогично выбранной ветви функции  $F(1, 1; 1 + \eta; \frac{z}{z})$  ( $z \in G^-$ ).

В статье автора [10] дано описание пространства  $L_p^\eta(\Gamma)$  в терминах модифицированных производных Маршо

$$D_\eta = D_\eta^+ + D_\eta^-, D_\eta^\pm g = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} D_\eta^{\varepsilon^\pm} g,$$



где  $D_{\eta}^{\varepsilon\pm}$  — усеченные модифицированные производные Маршо

$$D_{\eta}^{\varepsilon+} g \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\varepsilon(t)}} \frac{\tau g(\tau) - t g(t)}{(1 - t/\tau)^{1+\eta}} \frac{d\tau}{\tau^2}, \quad D_{\eta}^{\varepsilon-} g \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\varepsilon(t)}} \frac{g(\tau) - g(t)}{(1 - \tau/t)^{1+\eta}} \frac{d\tau}{t},$$

$\Gamma_{\varepsilon(t)}$  — часть кривой  $\Gamma$ , оставшаяся после удаления из нее дуги с концами  $t_2 = y(s_0 - \varepsilon)$ ,  $t_1 = y(s_0 + \varepsilon)$  и содержащая точку  $t = y(s_0)$ .

**Теорема [10].** Для того, чтобы функция  $g(t)$  принадлежала пространству  $L_p^{\eta}(\Gamma)$ ,  $0 < \eta < 1$ , необходимо и достаточно, чтобы  $g \in L_p^{\eta}(\Gamma)$  и в  $L_p(\Gamma)$  существовали пределы  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_{\eta}^{\varepsilon\pm} g$ . Если эти условия выполняются, то имеет место равенство  $\phi = D_{\eta} g$ .

В частности, если функция  $g$  принадлежит пространству Гельдера  $H^{\lambda}(\Gamma)$ , то  $g$  принадлежит  $L_p^{\eta}(\Gamma)$ ,  $\lambda > \eta$ .

Вернемся к решению уравнения (2). С помощью свойств оператора криволинейной свертки доказывается, что оператор  $F_{\alpha,1}$  осуществляет изоморфизм пространств  $L_p(\Gamma)$  и  $L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$ . Кроме этого, при  $\lambda > 1 - \alpha$  оператор  $aP^+ + bP^-$  действует инвариантно в пространстве  $L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$ . Поэтому для разрешимости уравнения (1) необходимо, чтобы  $g \in L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$ . Относительно новой неизвестной функции  $\phi(t) = (F_{\alpha,1}f)(t)$  уравнение (2) является характеристическим сингулярным

$$(aP^+ + bP^-)\phi(t) = g(t). \quad (3)$$

Как известно [1], условия  $a(t), b(t) \neq 0$ , обеспечивают нетеровость оператора  $aP^+ + bP^-$  в пространстве  $L_p(\Gamma)$ , а его индекс  $\chi_1$  равен индексу Коши функции  $b(t)a^{-1}(t)$ . В случае  $\chi_1 \geq 0$  уравнение (3) безусловно разрешимо, а при  $\chi_1 < 0$  — необходимы и достаточны условия разрешимости

$$\int_{\Gamma} g(t) Z^{-1}(t) t^{k-1} dt = 0, \quad k = 1, \dots, -\chi_1.$$

Решение дается формулой

$$2\phi = (a + b)g - (a - b)Z S Z^{-1}g + \sum_{k=1}^{\chi_1} c_k \phi_k, \quad (4)$$

где  $Z(t)$  — предельное значение канонической функции соответствующей краевой задачи Римана,  $\{2\phi_k(t) = [a(t) - b(t)] Z(t) t^{k-1}\}_{k=1}^{\chi_1}$  — базис ядра оператора  $aP^+ + bP^-$ ,  $c_k$  — произвольные постоянные;  $c_k = 0$  при  $\chi_1 < 0$  (не ограничивая общности, полагаем  $a(t)b(t) = 1$ ).

Функция  $\phi(t)$  определяется по функции  $g(t)$  с помощью операторов, действующих инвариантно в пространстве  $L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$ . Поэтому, если  $g \in L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$ , то и

$\phi \in L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$ . Тогда, как известно [11], оператор  $aP^+ + bP^-$  является нетеровым в этом пространстве, т. е.  $aP^+ + bP^- \in \Phi(L_p^{1-\alpha}(\Gamma))$ .

Решение  $f(t)$  уравнения (1) определяется по решению  $\phi(t)$  уравнения (3) с помощью производной Маршо  $f = D_{1-\alpha}\phi$ . Кроме этого, решение  $f(t)$  может быть определено с помощью обращения оператора криволинейной свертки:  $f = F_{\alpha,1}^{-1}\phi$ , где

$$(F_{\alpha,1}^{-1}\phi)(t) = \frac{1}{2\pi i \alpha} \left( \alpha + t \frac{d}{dt} \right) \int_{\Gamma} F(1, 1; \alpha + 1; \frac{t}{\tau}) \phi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} - \frac{1}{2\pi i \alpha} \left( 1 - \alpha + t \frac{d}{dt} \right) \int_{\Gamma} F(1, 1; \alpha + 1; \frac{\tau}{t}) \phi(\tau) \frac{d\tau}{t}. \quad (5)$$

Используя свойства композиции Адамара [12] и оператора дробного интегрирования Римана-Лиувилля аналитической функции, для оператора  $F_{\alpha,1}^{-1}\phi$  можно получить представление

$$(F_{\alpha,1}^{-1}\phi)(t) = \left( \alpha + t \frac{d}{dt} \right) \int_0^t \left( 1 - \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} (P^+\phi)(\tau) \frac{d\tau}{t} - \left( 1 - \alpha + t \frac{d}{dt} \right) \int_t^\infty \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} (P^-\phi)(\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

где в качестве контура интегрирования в первом интеграле берется любая дуга, лежащая в области  $G^+$ , а контур интегрирования во втором интеграле лежит в области  $G^-$ . Проведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $a(t), b(t) \in H^\lambda(\Gamma)$ ,  $\lambda > \{1 - \alpha\}$ ;  $a(t), b(t) \neq 0, t \in \Gamma$ . Тогда  $A_1 \in \Phi[L_p(\Gamma), L_p^{1-\alpha}(\Gamma)]$ . Индекс оператора  $Ind A_1 = \chi_1 = ind[b(t)a^{-1}(t)]$ ;  $d$  — характеристика оператора  $A_1$  имеет вид  $(\chi_1, 0)$  при  $\chi_1 \geq 0$ ;  $(0, \chi_1)$  при  $\chi_1 < 0$ . Решения уравнения (1) строятся в квадратурах по формулам (4) и (5).

## 2. Интегральное уравнение с внутренними коэффициентами

Рассмотрим в пространстве  $L_p(\Gamma)$ ,  $1 < p < \infty$ , уравнение с внутренними коэффициентами

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{c(\tau)f(\tau)}{(1 - t/\tau)^\alpha} \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d(\tau)f(\tau)}{(1 - \tau/t)^\alpha} \frac{d\tau}{t} = g(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in \Gamma \quad (6)$$

или в операторной форме

$$(A_2 f)(t) \equiv F_{\alpha,1}^+(c(t)f(t)) + F_{\alpha,1}^-(d(t)f(t)) = g(t), \quad t \in \Gamma.$$

Предположим, что коэффициенты  $c(t)$ ,  $d(t)$  непрерывны и  $c(t) \neq 0$ ,  $d(t) \neq 0$ ,  $t \in \Gamma$ . Уравнение (6) решается по той же схеме, что и уравнение (1). Для оператора  $A_2$  имеет место представление

$$A_2 = F_{\alpha,1} (P^+cI + P^-dI).$$

Решение уравнения (6) сводится к последовательному решению уравнения

$$F_{\alpha,1}\psi = g$$

и уравнения

$$(P^+cI + P^-dI) f = \psi. \quad (7)$$

Если  $g \in L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$ , то  $\psi(t) = (F_{\alpha,1}^{-1}g)(t) (\in L_p(\Gamma))$ .

Как известно [1], в случае  $\chi_2 = \text{ind}[d(t)c^{-1}(t)] \geq 0$  уравнение (7) безусловно разрешимо, а при  $\chi_2 < 0$  — необходимы и достаточны условия разрешимости

$$\int_{\Gamma} \psi(t) [d(t) - c(t)] Z_1(t) t^{k-1} dt = 0, \quad k = \overline{1, -\chi_2},$$

где  $Z_1(t)$  — предельное значение канонической функции соответствующей задачи Римана (не ограничивая общности считаем, что  $d(t)c(t) = 1$ ). Решения даются формулой

$$2f = (c + d)\psi - Z_1^{-1} S(c - d)Z_1\psi + \sum_{k=1}^{\chi_2} b_k f_k, \quad (8)$$

где  $\{f_k(t) = Z_1^{-1}(t) t^{k-1}\}_{k=1}^{\chi_2}$  — базис ядра оператора  $P^+cI + P^-dI$ , постоянные  $b_k = 0$  при  $\chi_2 \leq 0$ .

**Теорема 2.** Если  $c(t), d(t) \in C(\Gamma)$ ;  $c(t), d(t) \neq 0$ ,  $t \in \Gamma$ , то  $A_2 \in \Phi[L_p(\Gamma), L_p^{1-\alpha}(\Gamma)]$ . Индекс оператора  $\text{Ind}A_2 = \chi_2 = \text{ind}[d(t)c^{-1}(t)]$ ;  $d$  — характеристика оператора  $A_2$  имеет вид  $(\chi_2, 0)$  при  $\chi_2 \geq 0$ ;  $(0, \chi_2)$  при  $\chi_2 < 0$ . Решения уравнения (6) строятся в квадратурах по формулам (5) и (8).

## Заключение

С помощью метода нормализации оператора с незамкнутым образом построена теория разрешимости уравнений первого рода на замкнутом контуре с внешними и внутренними коэффициентами, ядра которых зависят от отношения аргументов и имеют слабую степенную особенность. Решения уравнений удалось получить в замкнутой форме в результате сведения этих уравнений к краевой задаче Римана и обращению оператора криволинейной свертки со степенным ядром. Аналогичным образом исследуются интегральные уравнения типа криволинейной свертки на замкнутом контуре, ядра которых содержат гипергеометрическую функцию Гаусса и зависят от отношения аргументов.

## Список цитируемых источников

1. Галов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

2. *Плецинский Н. Б.* Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре. — Казанский федеральный университет, 2018. — 160 с.
3. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. — Gordon and Breach Science, 1993. — 1006 p.
4. *Полянин, А. Д.* Интегральные уравнения в 2 ч. Часть 1. — М.: Юрайт, 2018. — 369 с. Часть 2. — М.: Юрайт, 2018. — 238 с.
5. *Сакалюк К. Д.* Обобщенное уравнение Абеля // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131. — № 4. — С. 748–751.
6. *Peters A. S.* Some integral equations related to Abel's equation and the Hilbert transform // Comm. Pure and Appl. Math. — 1969. — Т. 22. — № 4. — P. 539–560.
7. *Чумаков В. Ф., Васильев И. Л.* Интегральные уравнения типа Абеля на замкнутом контуре // Вестник Белорусск. гос. ун-та. — 1980, сер. 1. — № 2. — С. 40–44.
8. *Песчанский А. И., Черский Ю. И.* Интегральное уравнение с криволинейными свертками на замкнутом контуре // Укр. матем. журн. — 1984. — Т. 36. — № 3. — С. 335–340.
9. *Хайкин М. И.* О регуляризации операторов с незамкнутой областью значений // Изв. вузов. Математика. — 1970. — № 8. — С. 118–123.
10. *Песчанский А. И.* Об описании пространства дробных интегралов типа криволинейной свертки // Известия вузов. Математика. — 1989. — № 7(326). — С. 29–39.
11. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. — М.: Мир, 1979. — 494 с.
12. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. — М.: Мир, 1967. — 240 с.

Получена 11.04.2018

## РЕФЕРАТЫ

УДК 517.958

Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, Е. В. СЁМКИНА. **О малых движениях гидросистемы из трёх несмешивающихся жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд** (русский) // *Динамические системы*, 2018. — Том 8(36), №2. — С. 103–126.

В данной работе изучается проблема малых движений гидросистемы “вязкоупругая жидкость-идеальная жидкость-идеальная жидкость”, заполняющих неподвижный сосуд. Методы, развитые в предыдущих работах авторов, посвящённых исследованию проблем малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости, а также систем идеальных жидкостей, позволяют получить результаты о разрешимости начально-краевой задачи для исследуемой проблемы.

**Ключевые слова:** вязкоупругая жидкость, идеальная жидкость, гидродинамическая система, ортопроектор, операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши.

Библиогр. 14 назв.

УДК 517.929

К. М. ЧУДИНОВ. **Эффективные условия осцилляции решений разностных уравнений с несколькими запаздываниями** (русский) // *Динамические системы*, 2018. — Том 8(36), №2. — С. 127–137.

Рассматриваются эффективные достаточные условия осцилляции решений разностных уравнений первого порядка с последствием в виде оценки снизу нижнего предела суммы коэффициентов на заданном семействе подмножеств дискретной полуоси. Прослеживается преемственность результатов такого типа от первых эффективных условий осцилляции решений дифференциальных уравнений с последствием и их дискретных аналогов до новейших достижений. Выделяются наиболее эффективные подходы к задаче и сравниваются достигнутые результаты по отношению к уравнениям с различными видами запаздываний. Доказывается новый признак осцилляции и показана его независимость от известных результатов.

**Ключевые слова:** разностное уравнение, последствие, осцилляция, эффективные условия.

Библиогр. 22 назв.

УДК 517.955.8

Е. В. НИКИТЕНКО. **Асимптотическое поведение на бесконечности решений неоднородного уравнения внутренних волн** (русский) // *Динамические системы*, 2018. — Том 8(36), №2. — С. 139–147.

В работе исследуется асимптотическое поведение на бесконечности решений задачи Коши для неоднородного уравнения внутренних волн со специальной правой частью. Указан явный вид предельной функции и получена оценка на скорость сходимости.

**Ключевые слова:** уравнение внутренних волн, задача Коши, асимптотическое поведение решений на бесконечности.

Библиогр. 4 назв.

УДК 532.5.031

А. А. ОЧИРОВ, Д. Ф. БЕЛОНОЖКО. **О взаимном влиянии дрейфа Стокса и неустойчивости Кельвина-Гельмгольца** (русский) // *Динамические системы*, 2018. — Том 8(36), №2. — С. 149–157.

В работе представлено обобщение аналитической методики по расчету скорости дрейфовых смещений жидких частиц на горизонтальной границе раздела двух идеальных жидких

сред, возмущенной волновым пакетом Стокса, в условиях реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Получены аналитические выражения для скорости горизонтального дрейфового движения, инициированного волновым пакетом Стокса, распространяющимся по границе раздела двух идеальных жидкостей.

**Ключевые слова:** неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, дрейф Стокса, волновой пакет Стокса, капиллярно-гравитационная волна.

Библиогр. 12 назв.

УДК 517.938

Е. Я. ГУРЕВИЧ, А. С. СМЕРНОВА. **О структуре пространства орбит каскадов Морса-Смейла сферы** (русский) // *Динамические системы*, 2018. — Том 8(36), №2. — С. 159–172.

В работе рассматривается класс диффеоморфизмов Морса-Смейла на сфере размерности четыре и выше, для которых инвариантные многообразия различных седловых периодических точек не пересекаются. Динамика произвольного такого диффеоморфизма может быть представлена как динамика “источник-сток”, где “сток” (“источник”) является связным объединением одномерного и нульмерного неустойчивых (устойчивых) инвариантных многообразий периодических точек. Изучается структура пространства орбит, принадлежащих области притяжения “стока” (области отталкивания “источника”) и топология вложения в него сепаратрис седловых периодических точек коразмерности 1.

**Ключевые слова:** Каскады Морса-Смейла, пространство орбит, топологическая сопряженность, динамические системы Морса-Смейла.

Ил. 1. Библиогр. 17 назв.

УДК 517.98

Д. О. ЦВЕТКОВ. **Малые движения идеальной стратифицированной жидкости, частично покрытой крошеным и упругим льдом** (русский) // *Динамические системы*, 2018. — Том 8(36), №2. — С. 173–186.

Изучается задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, частично покрытой крошеным и упругим льдом. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомерные частицы некоторого вещества. Упругий лед моделируется упругой пластиной. Используя метод ортогонального проектирования граничных условий на подвижной поверхности и введения вспомогательных задач, исходная начально-краевая задача сводится к равносильной задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

**Ключевые слова:** стратифицированная жидкость, крошенный лед, упругий лед, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.968

А. И. ПЕСЧАНСКИЙ. **Интегральные уравнения типа криволинейной свертки на замкнутом контуре со степенными ядрами** (русский) // *Динамические системы*, 2018. — Том 8(36), №2. — С. 187–193.

Построена теория разрешимости интегральных уравнений первого рода типа криволинейной свертки на замкнутом контуре в комплексной плоскости, как с внешними, так и внутренними

коэффициентами. Ядра уравнений зависят от отношения аргументов и имеют слабую степенную особенность. Доказана нетеровость операторов, соответствующих уравнениям, как операторов, действующих из пространства суммируемых функций в пространство дробных интегралов типа криволинейной свертки. Решения уравнений получены в замкнутой форме в результате сведения их к краевой задаче Римана и обращению оператора криволинейной свертки со степенным ядром.

**Ключевые слова:** криволинейная свертка со степенным ядром, нетеровость интегрального уравнения первого рода, оператор дробного интегрирования на замкнутой кривой, решение в замкнутой форме.

Библиогр. 12 назв.

## ABSTRACTS

MSC 2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

N. D. KOPACHEVSKY, E. V. SYOMKINA. **Small movements of partially dissipative hydrosystem in stationary containers** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.2, 103–126 (2018).

In the paper, we consider a problem on small motions of a system of viscoelastic and two ideal fluids in a stationary container. One of models of such viscoelastic fluid is Oldroyd's model. It is described, for example, in the book Eirich, F. R. *Rheology. Theory and Applications*. New York: Academic Press, 1956. It should be noted that the present paper based on the previous N. D. Kopachevsky works together with Azizov, T. Ya., Orlova L. D., Krein, S. G. Namely, problem on small movements of one viscoelastic fluid for generalized Oldroyd's model, small motions of a viscoelastic fluid in an open container, oscillations of a system of ideal fluids were investigated in these papers. The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to develop new approach and to prove the theorem on strong solvability for initial-boundary-value problem generated by a problem of small motions of a system of viscoelastic and two ideal fluids in an immovable container. This paper is organized as follows. In section 1 we formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance. In section 2 we choose the functional spaces generated by the problem for each fluid. For applying of method of orthogonal projection we need to choose orthogonal decomposition of corresponding spaces. After projection we get new statement of the problem without some trivial equations. Important part of section 2 is formulation of auxiliary problems which help us to make transition to the Cauchy problem for the system of integro-differential equation in some Hilbert space. In section 3 we reduce this problem to a system of differential equation. This system can be rewrite as operator differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operators of this problem are studied in section 3 too. Section 4 is devoted to the existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial-boundary-value problem. This result based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in section 4 we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem. This means that external forces equal to zero and dependence by time for the unknown function has the form  $e^{-\lambda t}$ . Here we obtain the spectral problem for operator pencil. This pencil has similar properties like pencil associated with spectral problem generated by the problem on normal oscillations of a system of viscoelastic and ideal fluids.

**Keywords:** viscoelastic fluid, ideal fluid, hydrodynamic system, orthogonal projector, operator differential equation, Cauchy problem

Ref. 14.

MSC 2010: 39A21

K. M. CHUDINOV. **Effective conditions for the oscillation of solutions to difference equations with several delays** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.2, 127–137 (2018).

We consider a first-order linear difference equation with several variable delays. The subjects of our study are explicit sufficient conditions for all solutions of the equation to be oscillatory, in the form of an estimate from below for the lower limit of a sum of coefficients of the equation over a given class of subsets of the discrete semiaxis. We trace the history of results of the kind, from the first obtained in the 1940th explicit oscillation conditions for differential equations with aftereffect, and their discrete analogs obtained in the 1980th, to the best of contemporary known oscillation tests. We distinguish the most effective approaches to the problem, and compare the results achieved. We



obtain a new explicit sharp oscillation test, show that it is independent of the known results, and give simple examples clarifying relationship between different oscillation conditions.

**Keywords:** delay difference equation, oscillation, effective test.

Ref. 22.

MSC 2010: 35C20, 35C15

E. V. NIKITENKO. **Asymptotic behavior at infinity of solutions to the inhomogeneous equation of internal waves** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.2, 139–147 (2018).

In this paper we investigate the asymptotic behavior at infinity of solutions the Cauchy problem for the inhomogeneous equation of internal waves with a special right-hand side. We specify the explicit form of the limit function and estimate the rate of convergence.

**Keywords:** equation of internal waves, Cauchy problem, asymptotic behavior of solutions at infinity.

Ref. 4.

MSC 2010: 76E05, 76E17,

A. A. OCHIROV, D. F. BELONOZHKO. **On the mutual influence of the Stokes drift and the Kelvin-Helmholtz instability** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.2, 149–157 (2018).

A generalization of the analytical asymptotic technique for calculating the mass transport velocity under conditions of realization of the Kelvin-Helmholtz instability is presented in the paper. Analytical expressions for the drift velocity initiated by the propagation of the simplest Stokes wavepacket along the interface of two ideal immiscible liquids are obtained. Attention to a new property of the Kelvin-Helmholtz instability that has not been investigated before is drawn. This property cannot be revealed in frame of the Euler's description.

**Keywords:** Kelvin-Helmholtz instability, Stokes drift, Stokes wavepacket, capillary-gravity wave.

Ref. 12.

MSC 2010: 37D15

E. YA. GUREVICH, A. S. SMIRNOVA. **On the structure of orbit space of Morse-Smale cascades on the sphere  $S^n$**  (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.2, 159–172 (2018).

In this paper, we consider the class of Morse-Smale diffeomorphisms on a sphere of dimension four and higher, for which the invariant manifolds of different saddle periodic points do not intersect. The dynamics of an arbitrary such diffeomorphism can be represented as a “sink-source” dynamics, where “sink” (“source”) is a connected union of one-dimensional and zero-dimensional unstable (stable) invariant manifolds of periodic points. The structure of the space of orbits belonging to the region of attraction of the “sink” (the repulsion region of the “source”) and the topology of the embedding of separatrices of saddle periodic points of codimension 1 are studied.

**Keywords:** Morse-Smale cascades, orbit space, topological conjugacy, Morse-Smale dynamical systems.

Fig. 1. Ref. 17.

MSC 2010: 35D05, 34K30

D. O. TSVETKOV. **Small motions of an ideal stratified fluid partially covered with crumbling and elastic ice** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.2, 173–186 (2018).

We study the problem on small motions of ideal stratified fluid with a free surface, partially covered with crumbling and elastic ice. Under the crumbled ice we understand that on the free surface float

heavy particles of some substance, and that these particles do not interact (or the interaction is small enough to be neglected) when the free surface oscillates. Elastic ice is modelled by an elastic plate. Using method of orthogonal projecting the boundary conditions on the moving surface and the introduction of auxiliary problems of the original initial-boundary value problem is reduced to the equivalent Cauchy problem for a differential equation of second order in some Hilbert space. We find sufficient existence conditions for a strong (with respect to the time variable) solution of the initial-boundary value problem describing the evolution of the specified hydrodynamics system.

**Keywords:** crumbling ice, elastic ice, differential equation in Hilbert space, accretive operator, strong solution.

Ref. 6.

MSC 2010: 45E10

A. I. PESCHANSKY. **Integral equations of curvilinear convolution type over the circumference with power kernels** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.2, 187–193 (2018).

The theory of solvability of integral equations of first kind of curvilinear convolution type over the circumference in the complex plane with both external and internal coefficients is constructed. Kernels of equations are the functions of arguments' ratio and have a weak power singularity. The Noetherian property of operators, corresponding the equations, as the operators acting from the space of summable functions into the space of fractional integrals of curvilinear convolution type. The closed-form solutions of equations are obtained as a result of their reduction to the boundary Riemann problem and inversion of the operator of curvilinear convolution with a power kernel.

**Keywords:** curvilinear convolution with a power kernel, Noetherian property of an integral equation of first kind, the operator of fractional integration over the circumference, a closed-form solution.

Ref. 12.

Подписано в печать 07.06.2018. Формат 60x84/8.  
Усл. печ. л. 11,39. Тираж 50 экз. Заказ № НП/237. Бесплатно.  
Дата выхода в свет 06.12.2018.  
Отпечатано в управлении редакционно-издательской  
деятельности КФУ имени В. И. Вернадского  
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7.