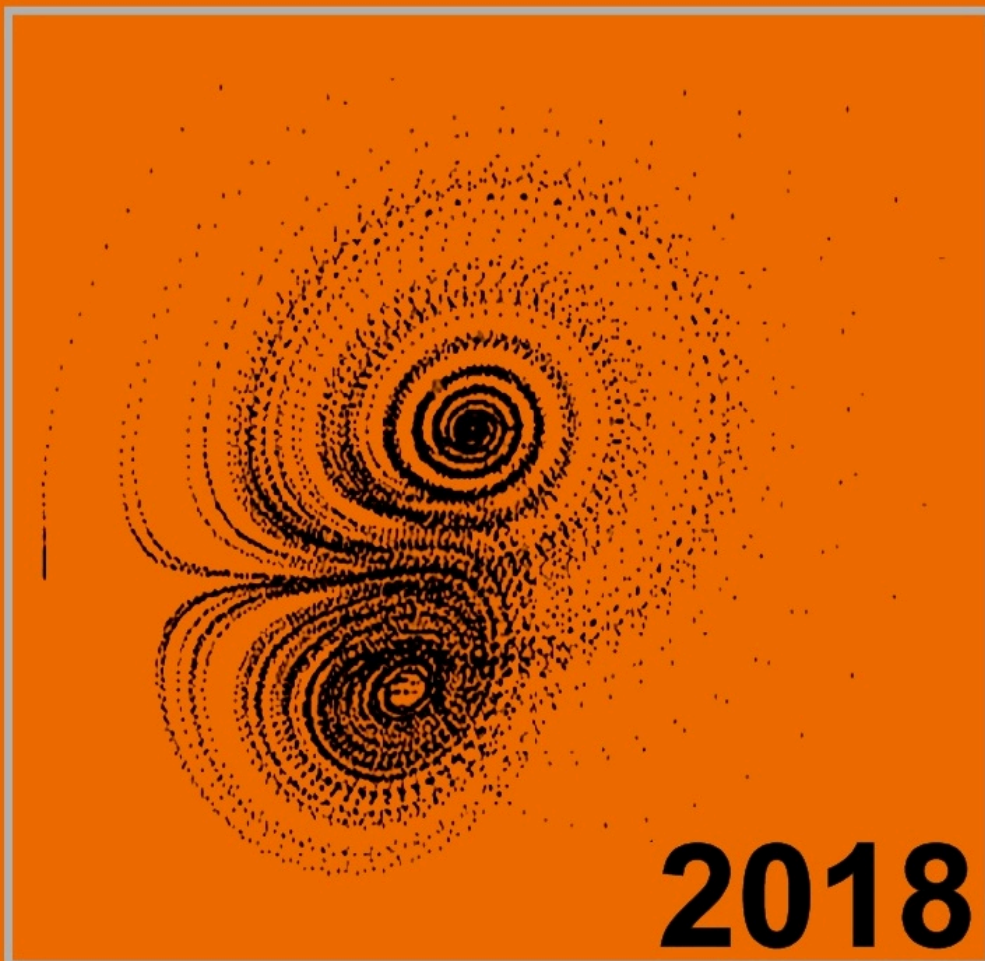


ISSN 0203-3755

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Том 8 (36), №1



2018

УДК 517.947

Локальные оценки решений второй краевой задачи для уравнения Соболева¹

Г. В. Демиденко*, Е. А. Ломакина**

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090. E-mail: demidenk@math.nsc.ru

**Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090. E-mail: kekropius@gmail.com

Аннотация. Рассматривается вторая краевая задача в цилиндрической области для двумерного уравнения Соболева. Установлены внутренние оценки решений при больших t .

Ключевые слова: вторая краевая задача, уравнение Соболева, соболевские пространства.

Local estimates of solutions to the second boundary value problem for the Sobolev equation

G. V. Demidenko, E. A. Lomakina

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University,
Novosibirsk 630090.

Abstract. We consider the second boundary value problem in a cylindrical domain for the two-dimensional Sobolev equation. We establish internal estimates of solutions for large t .

Keywords: the second boundary value problem, Sobolev equation, Sobolev spaces.

MSC 2010: 35G15

Памяти Сергея Львовича Соболева

Введение

В настоящей работе мы рассматриваем вторую краевую задачу в цилиндрической области $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in G \subset \mathbb{R}^2\}$ для двумерного уравнения Соболева

$$\begin{cases} \Delta u_{tt} + u_{x_2 x_2} = 0, & (t, x) \in Q, \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x), \\ u_t|_{t=0} = \varphi_2(x), \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} u_{tt} + u_{x_2} \cos(\nu, x_2)\right)|_{\partial G} = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (0.1)$$

¹Работа выполнена при частичной поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05132041).

где G — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, ν — внешняя нормаль к ∂G . Целью работы является получение оценок решений краевой задачи (0.1) при $t \gg 1$.

Уравнение вида (0.1) появилось в работе С. Л. Соболева [6] при изучении малых колебаний вращающейся идеальной жидкости. В этой работе была изучена разрешимость краевых задач для системы

$$v_t + [\omega, v] + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0 \quad (0.2)$$

и уравнения

$$\Delta u_{tt} + u_{x_n x_n} = 0, \quad (0.3)$$

которые в литературе называются системой и уравнением Соболева, соответственно, а также поставлен ряд новых задач математической физики. В частности, задача о поведении решений краевых задач для системы (0.2) и уравнения (0.3) при $t \rightarrow \infty$ (см. [6], [7]).

Отметим, что оценки решений первой краевой задачи в цилиндрической области для уравнения Соболева при $t \gg 1$ были получены в работах [1], [3], [4].

1. Формулировка основных результатов

В этом параграфе мы приведем основные результаты, полученные в работе. В дальнейшем будем предполагать, что область G является звездной относительно некоторого круга.

Теорема 1. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — функции из класса $W_2^m(G)$, $m \geq 2$ — целое. Тогда в любой внутренней подобласти $G' \subset \overline{G'} \subset G$ для решения $u(t, x)$ краевой задачи (0.1), удовлетворяющего условию

$$\int_G u(t, x) dx = 0, \quad (1.1)$$

имеет место оценка

$$\| D_t^l u(t, x), W_2^m(G') \| \leq c_1 + c_2 t^{m-1}, \quad l \geq 2, \quad (1.2)$$

где константы $c_1, c_2 > 0$ зависят от $G', G, \varphi_1, \varphi_2$ и не зависят от t .

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для решения задачи (0.1), удовлетворяющего условию (1.1), справедливо неравенство

$$\| D_t^l u(t, x), W_2^s(G') \| \leq c_1 + c_2 t^{s-1}, \quad l \geq 2, \quad (1.3)$$

где $s = m - \theta$, $0 < \theta < 1$, константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от t .

Теорема 2. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — функции из класса $W_2^2(G)$. Тогда в любой внутренней подобласти $G' \subset \overline{G'} \subset G$ для решения задачи (0.1), удовлетворяющего условию (1.1), для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ имеет место оценка

$$\max_{G'} |u_{tt}(t, x)| \leq c_1 + c_2(\varepsilon)t^\varepsilon, \quad (1.4)$$

где константы $c_1, c_2(\varepsilon) > 0$ не зависят от t .

Замечание. Из теоремы 2 вытекает, что вторая производная по t решения краевой задачи (0.1), удовлетворяющего условию (1.1), не может иметь степенной рост при $t \rightarrow \infty$.

2. Внутренние оценки

В это параграфе мы докажем теоремы 1, 2.

Прежде всего отметим, что если $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ — функции из класса $W_2^m(G)$, из работы [6] вытекает существование решения краевой задачи (0.1):

$$u(t, x) \in C^k(R_+; W_2^m(G)), \quad k \in \mathbb{N},$$

при этом в случае выполнения условия ортогональности (1.1), решение — единственное.

Для получения оценок (1.2) введем “промежуточную” подобласть G'' :

$$\overline{G'} \subset G'' \subset \overline{G''} \subset G$$

и рассмотрим вспомогательную функцию $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 \leq \chi(x) \leq 1$ такую, что

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in G' \\ 0, & x \notin G'' \end{cases}.$$

Тогда для функции $v(t, x) = u(t, x)\chi(x)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} (\Delta D_t^2 + D_{x_2}^2)v(t, x) &= 2\nabla\chi(x)\nabla D_t^2 u(t, x) + 2D_{x_2}\chi(x)D_{x_2}u(t, x) + \\ &+ \Delta\chi(x)D_t^2 u(t, x) + D_{x_2}^2\chi(x)u(t, x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отметим, что $v(t, x) = 0$ при всех $t > 0$ в некоторой приграничной полосе области G .

Обозначим правую часть в (2.1) через $F(t, x)$. Докажем, что при всех $t > 0$ справедлива оценка

$$\| F(t, x), L_2(G) \| \leq c_1 + c_2 t, \quad (2.2)$$

где c_1, c_2 — константы.

При доказательстве (2.2) мы будем использовать законы сохранения энергии [6], [7] для задачи (0.1):

$$E_l(t) = \frac{1}{2} \int_G (|\nabla D_t^l u(t, x)|^2 + |D_{x_2} D_t^{l-1} u(t, x)|^2) dx \equiv E_l(0), \quad l \geq 1, \quad (2.3)$$

и неравенство Пуанкаре, справедливое для функций из соболевского пространства $W_2^1(G)$, определенных в областях, звездных относительно круга:

$$\| v(x), L_2(G) \| \leq c \left(\left| \int_G v(x) dx \right| + \| \nabla v(x), L_2(G) \| \right), \quad (2.4)$$

где константа $c > 0$ не зависит от $v(x)$ (см., например, [5]).

Из тождества для интеграла энергии (2.3), очевидно, имеем

$$\int_G |\nabla u_t(t, x)|^2 dx \leq c^1 \leq 2E_1(0), \quad (2.5)$$

$$\int_G |D_{x_2} u(t, x)|^2 dx \leq c^1 \leq 2E_1(0), \quad (2.6)$$

а в силу неравенства Пуанкаре (2.4)

$$\|u_t, L_2(G)\| \leq c \left(\left| \int_G u_t dx \right| + \|\nabla u_t, L_2(G)\| \right).$$

Отсюда, учитывая условия ортогональности (1.1), из оценки (2.5) получаем

$$\int_G |u_t(t, x)|^2 dx \leq \hat{c}. \quad (2.7)$$

Из этого неравенства в силу формулы Ньютона–Лейбница имеем также

$$\|u(t, x), L_2(G)\| \leq c^3 + c^4 t, \quad t > 0. \quad (2.8)$$

Повторяя подобные рассуждения, для любого $l \geq 2$ получим следующие оценки

$$\int_G |\nabla D_t^l u(t, x)|^2 dx \leq c_l^1, \quad (2.9)$$

$$\int_G |D_{x_2} D_t^{l-1} u(t, x)|^2 dx \leq c_l^1, \quad (2.10)$$

$$\int_G |D_t^l u(t, x)|^2 dx \leq c_l^1, \quad t > 0. \quad (2.11)$$

В силу определения функции $F(t, x)$ из оценок (2.5)–(2.11) непосредственно вытекает неравенство (2.2).

Проводя аналогичные рассуждения, получим также следующие оценки

$$\|D_t^l F(t, x), L_2(G)\| \leq c, \quad l \geq 1, \quad t > 0, \quad (2.12)$$

где $c > 0$ — константа.

Перейдем к доказательству оценок (1.2) при $m = 2$. Для этого продифференцируем по t равенство (2.1), тогда

$$(\Delta D_t^3 + D_{x_2}^2 D_t)v(t, x) = D_t F(t, x), \quad (t, x) \in Q. \quad (2.13)$$

А затем умножим полученное равенство на функцию $\Delta D_t^2 v(t, x)$ и проинтегрируем по области G

$$\int_G \Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v dx + \int_G D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \int_G D_t F \cdot \Delta D_t^2 v dx.$$

Рассмотрим отдельно первый интеграл слева. Имеем

$$\int_G \Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v dx = D_t \int_G \Delta D_t^2 v \cdot \Delta D_t^2 v dx - \int_G \Delta D_t^2 v \cdot \Delta D_t^3 v dx,$$

то есть

$$\int_G \Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \frac{1}{2} D_t \| \Delta D_t^2 v, L_2(G) \|^2.$$

Рассмотрим теперь второй интеграл:

$$\int_G D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \int_G D_{x_2} (D_{x_2} D_t v \cdot \Delta D_t^2 v) dx - \int_G D_{x_2} D_t v \cdot D_{x_2} \Delta D_t^2 v dx.$$

Первый интеграл справа в силу определения $v(t, x)$ и формулы Гаусса – Остроградского равен нулю. Тогда

$$\begin{aligned} \int_G D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx &= - \int_G D_{x_2} D_t v \cdot D_{x_2} \Delta D_t^2 v dx \\ &= - \int_G \operatorname{div} (D_{x_2} D_t v \cdot D_{x_2} \nabla D_t^2 v) dx + \int_G D_{x_2} \nabla D_t v \cdot D_{x_2} \nabla D_t^2 v dx. \end{aligned}$$

Первый интеграл справа также равен нулю. Отсюда

$$\int_G D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \frac{1}{2} D_t \| D_{x_2} \nabla D_t v, L_2(G) \|^2.$$

После всех преобразований имеем

$$\frac{1}{2} D_t (\| \Delta D_t^2 v, L_2(G) \|^2 + \| D_{x_2} \nabla D_t v, L_2(G) \|^2) = \int_G D_t F \cdot \Delta D_t^2 v dx.$$

Проинтегрируем это равенство по t , тогда

$$\begin{aligned} \| \Delta D_t^2 v, L_2(G) \|^2 + \| D_{x_2} \nabla D_t v, L_2(G) \|^2 &= 2 \int_0^t \int_G D_\tau F \cdot \Delta D_\tau^2 v dx d\tau + \\ &+ \| \Delta D_t^2 v|_{t=0}, L_2(G) \|^2 + \| D_{x_2} \nabla D_t v|_{t=0}, L_2(G) \|^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отсюда

$$\| \Delta D_t^2 v(t, x), L_2(G) \|^2 \leq c + 2 \int_0^t \| D_\tau F, L_2(G) \| \| \Delta D_\tau^2 v, L_2(G) \| d\tau.$$

Поэтому, учитывая неравенство (2.12), получим

$$\| \Delta D_t^2 v(t, x), L_2(G) \|^2 \leq c + \tilde{c} \int_0^t \| \Delta D_\tau^2 v, L_2(G) \| d\tau,$$

где $c, \tilde{c} > 0$ — константы. Вводя обозначение

$$A(t) = \| \Delta D_t^2 v(t, x), L_2(G) \|,$$

перепишем это неравенство в виде:

$$A^2(t) \leq c + \tilde{c} \int_0^t A(\tau) d\tau.$$

Нетрудно показать, что из этого неравенства вытекает оценка

$$A(t) \leq c_1 + c_2 t, \tag{2.15}$$

где $c_1, c_2 > 0$ — константы.

Для этого введем обозначение

$$B(t) = c + \tilde{c} \int_0^t A(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} B(t) = \tilde{c} A(t).$$

Так как $A^2(t) \leq B(t)$, то $A(t) \leq \sqrt{B(t)}$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} B(t) \leq \tilde{c} \sqrt{B(t)}.$$

Поскольку $c, \tilde{c} > 0$, $A(t) \geq 0$, то $B(t) > 0$ при $t \geq 0$, поэтому разделив наше неравенство на $\sqrt{B(t)}$, получим

$$2 \frac{d}{dt} \sqrt{B(t)} \leq \tilde{c}.$$

Отсюда

$$2(\sqrt{B(t)} - \sqrt{B(0)}) \leq \tilde{c}t.$$

Тогда $\sqrt{B(t)} \leq c_1 + c_2t$ и неравенство (2.15) доказано.

Итак,

$$\| \Delta D_t^2 v(t, x), L_2(G) \| \leq c_1 + c_2t, \quad t > 0. \quad (2.16)$$

Из этого неравенства можно получить оценки всех вторых производных функции $D_t^2 v(t, x)$ по пространственным переменным

$$\| D_{x_i x_j}^2 D_t^2 v(t, x), L_2(G) \| \leq c_1 + c_2t, \quad t > 0. \quad (2.17)$$

Действительно, поскольку $v(t, x) = 0$ при $x \notin G''$, то, продолжая функцию $v(t, x)$ нулем на все \mathbb{R}^2 и сохраняя обозначения, из (2.16) получим

$$\| \Delta D_t^2 v(t, x), L_2(\mathbb{R}^2) \| \leq c_1 + c_2t, \quad t > 0.$$

Из равенства Парсеваля следует, что

$$\| |\xi|^2 D_t^2 \hat{v}(t, \xi), L_2(\mathbb{R}^2) \| \leq c_1 + c_2t, \quad t > 0.$$

Отсюда при любых i, j

$$\| \xi_i \xi_j D_t^2 \hat{v}(t, \xi), L_2(\mathbb{R}^2) \| \leq c_1 + c_2t, \quad t > 0,$$

и вновь, используя равенство Парсеваля и свойства преобразования Фурье, получим оценку

$$\| D_{x_i x_j}^2 D_t^2 v(t, x), L_2(\mathbb{R}^2) \| \leq c_1 + c_2t, \quad t > 0,$$

которая влечет (2.17).

На основании определения функции $v(t, x)$ при $x \in G'$ справедливо равенство: $u(t, x) = v(t, x)$. Поэтому из неравенств (2.9), (2.11), (2.17) получаем оценку (1.2) при $m = 2, l = 2$. Неравенство (1.2) при $l > 2$ доказывается аналогичным образом.

Отметим, что, используя неравенство (2.16), из (2.14) можно получить оценку

$$\| D_{x_2} \nabla D_t v(t, x), L_2(G) \| \leq c_3 + c_4t, \quad t > 0. \quad (2.18)$$

Действительно, из (2.14) имеем

$$\| D_{x_2} \nabla D_t v(t, x), L_2(G) \|^2 \leq c + 2 \int_0^t \| D_\tau F, L_2(G) \| \| \Delta D_\tau^2 v, L_2(G) \| d\tau.$$

Тогда, учитывая неравенства (2.12) и (2.16), получим

$$\| D_{x_2} \nabla D_t v(t, x), L_2(G) \|^2 \leq c + \tilde{c} \int_0^t (c_1 + c_2\tau) d\tau.$$

Отсюда следует (2.18).

Аналогичным образом доказывается оценка

$$\| D_{x_2} \nabla D_t^l v(t, x), L_2(G) \| \leq c_3 + c_4 t, \quad t > 0, \quad l > 1.$$

Докажем теперь неравенство (1.2) при $m = 3$. Для этого вначале применим оператор Лапласа к равенству (2.13):

$$(\Delta^2 D_t^3 + \Delta D_{x_2}^2 D_t) v(t, x) = \Delta D_t F(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (2.19)$$

и умножим на функцию $\Delta D_t^2 v(t, x)$. Тогда после интегрирования по области G получим

$$\int_G \Delta \Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v dx + \int_G \Delta D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \int_G \Delta D_t F \cdot \Delta D_t^2 v dx.$$

Вначале рассмотрим первый интеграл слева. Имеем

$$\int_G \Delta \Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v dx = \int_G \operatorname{div} (\nabla \Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v) dx - \int_G \nabla \Delta D_t^3 v \cdot \nabla \Delta D_t^2 v dx.$$

Используя формулу Гаусса – Остроградского и учитывая, что $v(t, x) = 0$ при $x \notin G''$, получим

$$\int_G \Delta \Delta D_t^3 v \cdot \Delta D_t^2 v dx = -\frac{1}{2} D_t \| \nabla \Delta D_t^2 v, L_2(G) \|^2.$$

Рассмотрим теперь второй интеграл:

$$\begin{aligned} \int_G \Delta D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx &= \int_G D_{x_2} (D_{x_2} \Delta D_t v \cdot \Delta D_t^2 v) dx \\ &\quad - \int_G D_{x_2} \Delta D_t v \cdot D_{x_2} \Delta D_t^2 v dx. \end{aligned}$$

Первый интеграл справа в силу формулы Гаусса – Остроградского равен нулю. Поэтому

$$\int_G \Delta D_{x_2}^2 D_t v \cdot \Delta D_t^2 v dx = -\frac{1}{2} D_t \| D_{x_2} \Delta D_t v, L_2(G) \|^2.$$

После этих преобразований получим равенство

$$-\frac{1}{2} D_t (\| \nabla \Delta D_t^2 v, L_2(G) \|^2 + \| D_{x_2} \Delta D_t v, L_2(G) \|^2) = \int_G \Delta D_t F \cdot \Delta D_t^2 v dx.$$

Представим интеграл справа в виде

$$\int_G \Delta D_t F \cdot \Delta D_t^2 v dx = \int_G \operatorname{div} (\nabla D_t F \cdot \Delta D_t^2 v) dx - \int_G \nabla D_t F \cdot \nabla \Delta D_t^2 v dx$$

Применяя формулу Гаусса – Остроградского, отсюда получим

$$\frac{1}{2} D_t (\| \nabla \Delta D_t^2 v, L_2(G) \|^2 + \| D_{x_2} \Delta D_t v, L_2(G) \|^2) = \int_G \nabla D_t F \cdot \nabla \Delta D_t^2 v dx.$$

Интегрируя это равенство по t , имеем

$$\begin{aligned} & \| \nabla \Delta D_t^2 v, L_2(G) \|^2 + \| D_{x_2} \Delta D_t v, L_2(G) \|^2 = \\ & = 2 \int_0^t \int_G \nabla D_\tau F \cdot \nabla \Delta D_\tau^2 v dx d\tau + \| \nabla \Delta D_t^2 v|_{t=0}, L_2(G) \|^2 + \\ & + \| D_{x_2} \Delta D_t v|_{t=0}, L_2(G) \|^2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Отсюда

$$\| \nabla \Delta D_t^2 v(t, x), L_2(G) \|^2 \leq c + 2 \int_0^t \| \nabla D_\tau F, L_2(G) \| \| \nabla \Delta D_\tau^2 v, L_2(G) \| d\tau.$$

Отметим, что в силу определения функции $F(t, x)$ из оценок (2.5), (2.7), (2.9)–(2.11), (2.17), (2.18) вытекает неравенство

$$\| \nabla D_t F(t, x), L_2(G) \| \leq c_1 + c_2 t, \quad t > 0.$$

Тогда

$$\| \nabla \Delta D_t^2 v(t, x), L_2(G) \|^2 \leq c + 2 \int_0^t (c_1 + c_2 \tau) \| \nabla \Delta D_\tau^2 v, L_2(G) \| d\tau.$$

Вводя обозначение

$$A(t) = \| \nabla \Delta D_t^2 v(t, x), L_2(G) \|,$$

перепишем это неравенство в виде

$$A^2(t) \leq c + 2 \int_0^t (c_1 + c_2 \tau) A(\tau) d\tau.$$

Покажем, что отсюда вытекает оценка

$$A(t) \leq c_3 + c_4 t^2, \quad (2.21)$$

где $c_3, c_4 > 0$ — константы.

По аналогии с доказательством (2.15) введем обозначение

$$B(t) = c + 2 \int_0^t (c_1 + c_2 \tau) A(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} B(t) = 2(c_1 + c_2 t) A(t),$$

а так как $A^2(t) \leq B(t)$, то $A(t) \leq \sqrt{B(t)}$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} B(t) \leq 2(c_1 + c_2 t) \sqrt{B(t)}.$$

Поскольку $B(t) > 0$, $t > 0$, то, разделив наше неравенство на $\sqrt{B(t)}$, получим

$$\frac{d}{dt} \sqrt{B(t)} \leq (c_1 + c_2 t).$$

Отсюда

$$\sqrt{B(t)} - \sqrt{B(0)} \leq c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2},$$

а поскольку $A(t) \leq \sqrt{B(t)}$, то получаем (2.21), т. е.

$$\| \nabla \Delta D_t^2 v(t, x), L_2(G) \| \leq c_3 + c_4 t^2. \quad (2.22)$$

Учитывая эту оценку из (2.20), можно получить неравенство

$$\| D_{x_2} \Delta D_t^2 v(t, x), L_2(G) \| \leq c_1 + c_2 t^2, \quad t > 0.$$

Отметим, что из оценки (2.22) вытекает также неравенство

$$\| D_{x_i x_j x_k}^3 D_t^2 v(t, x), L_2(G) \| \leq c_3 + c_4 t^2, \quad t > 0. \quad (2.23)$$

Для доказательства этого достаточно повторить рассуждения, как при выводе (2.17).

В силу определения функции $v(t, x)$ из неравенств (2.9), (2.11), (2.17), (2.23) вытекает оценка (1.2) при $m = 3$, $l = 2$. Неравенство (1.2) при $l > 2$ доказывается аналогично.

Анализируя схему рассуждений при доказательстве оценок (1.2) при $m = 2$, $m = 3$, нетрудно указать алгоритм, следуя которому, можно доказать оценки (1.2) при любых $m \geq 4$. А именно, нужно рассматривать два случая: $m = 2k$ и $m =$

$2k + 1$, и проводить все оценки последовательно. В случае, когда $m = 2k$, нужно к равенству (2.13) вначале применить оператор Δ^{k-1} , а затем полученное равенство умножить на функцию $\Delta^k D_t^2 v(t, x)$ скалярно в $L_2(G)$ и проводить рассуждения, аналогичные как при $m = 2$.

В случае, когда $m = 2k + 1$, нужно к равенству (2.13) вначале применить оператор Δ^k , а затем полученное равенство умножить на функцию $\Delta^k D_t^2 v(t, x)$ скалярно в $L_2(G)$ и проводить рассуждения, аналогичные как при $m = 3$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия. Пусть $l_1 > l_2 \geq 0$, $\theta \in (0, 1)$. Для любой функции $v(x) \in W_2^{l_1}(G)$ справедливо интерполяционное неравенство (см., например, [2])

$$\|v, W_2^{(1-\theta)l_1 + \theta l_2}(G)\| \leq \|v, W_2^{l_1}(G)\|^{(1-\theta)} \|v, W_2^{l_2}(G)\|^\theta.$$

Отсюда, учитывая оценку (1.2), получаем (1.3).

Следствие доказано.

Доказательство теоремы 2. Напомним, что для пространств Соболева – Слободского также справедлива теорема вложения $W_2^l(G) \subset C(\bar{G})$ при $2l > n$. Поэтому оценка (1.4) вытекает непосредственно из неравенства (1.3).

Теорема 2 доказана.

Список цитируемых источников

1. Демиденко Г. В. Оценки при $t \rightarrow \infty$ решения одной задачи С. Л. Соболева // Сиб. мат. журн. — 1984. — Т. 25, № 2. — С. 112–120.
Demidenko G. V. Estimates for $t \rightarrow \infty$ of the solutions to a problem of Sobolev. Siberian Math. J., 25, No. 2, 257–264 (1984).
2. Демиденко Г. В. Пространства Соболева и обобщенные решения. — Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.
Demidenko G. V. Sobolev Spaces and Generalized Solutions. Novosibirsk: Publishing Office of the Novosibirsk State University, 2015. (in Russian)
3. Капитонов Б. В. Теория потенциалов для уравнений малых колебаний вращающейся жидкости // Мат. сб. — 1979. — Т. 109, № 4. — С. 607–628.
Kapitonov B. V. Potential theory for the equation of small oscillations of a rotating fluid. Mathematics of the USSR – Sbornik, 37, No. 4, 559–579 (1980).
4. Сказка В. В. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ смешанных задач для одного уравнения математической физики // Сиб. мат. журн. — 1981. — Т. 22, № 1. — С. 129–143.
Skazka V. V. Asymptotic estimates for $t \rightarrow \infty$ of mixed problems for an equation of mathematical physics. Siberian Math. J., 22, No. 1, 95–106 (1981).
5. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1962. — Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1988.
Sobolev S. L. Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. Providence: Amer. Math. Soc. (Math. Monogr.; Vol. 7), 1963.

Sobolev S. L. Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik. Berlin: Akademie-Verlag, 1964.

Sobolev S. L. Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. Providence: Amer. Math. Soc. (Math. Monogr.; Vol. 90), 1991.

6. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18, № 1. — С. 3–50.

Sobolev S. L. On a new problem of mathematical physics. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 18, No. 1, 3–50 (1954). (in Russian)

7. *Соболев С. Л.* Избранные труды. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал “Гео” Изд-ва СО РАН. — Т. I, 2003. — Т. II, 2006.

Sobolev S. L. Selected Works. Vol. I. Equations of Mathematical Physics, Computational Mathematics, and Cubature Formulas. New York, NY: Springer, 2006.

Sobolev, S.L. Selected Works. Vol. II. Functional Analysis, Partial Differential Equations. Novosibirsk: IM SB RAS, “Geo”, 2006. (in Russian)

Получена 10.02.2018

MSC 2010: 37D15

Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces¹

V. Kruglov

Higher School of Economics

Nizhny Novgorod *E-mail:kruglovslava21@mail.ru*

Abstract. The class of C^1 -smooth gradient-like flows (Morse flows) on closed surface is the subclass of the Morse-Smale flows class, which are rough. Their non-wandering set consists of a finite number of hyperbolic fixed points and a finite number of hyperbolic limit cycles, and they does not have trajectories connecting saddle points. It is well known that the topological equivalence class of a Morse-Smale flow on a surface can be described combinatorially, for example, by the directed Peixoto graph, or by the Oshemkov-Sharko molecule. However, the description of the class of the topological conjugacy of such a system already requires the introduction of continuous invariants (moduli), corresponding to the periods of limit cycles at least. Thus, one class of the equivalence contains continuum classes of the topological conjugacy. Gradient-like flows are Morse-Smale flows without limit cycles. In this paper we prove that gradient-like flows on a closed surface are topologically conjugate iff they are topologically equivalent.

Keywords: gradient-like flow, Morse-Smale flow, conjugacy, equivalence, homeomorphism

1. Introduction and formulation of results

In 1937 A. Andronov and L. Pontryagin published the classical paper [1], in which they considered a system of differential equations

$$\dot{x} = v(x), \tag{1.1}$$

where $v(x)$ is a C^1 -vector field given on a disc bounded by a curve without a contact in the plane and found a roughness criterion for the system (1.1). They established that on the plane the rough system is exactly system whose non-wandering set consists of finite number of hyperbolic fixed points and hyperbolic limit cycles and which does not have trajectories connecting saddle points. Such systems were called *Morse-Smale systems* when in 1967 S. Smale generalised such systems to multidimensional case in [8]. If a Morse-Smale system does not have limit cycles, then it is called as *Morse system* or *gradient-like system*.

The present paper is devoted to the classification of Morse flows on a closed surfaces S .

¹The author was partially supported by Russian Science Foundation (project 17-11-01041), except the local conjugation which was an output of the research project “Topology and Chaos in Dynamics of Systems, Foliations and Deformation of Lie Algebras (2018)” which is a part of the Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE).

Let us recall that two flows f^t and $f^{t'}$ on surface S are called *topologically equivalent* if there exists a homeomorphism $h: S \rightarrow S$ mapping trajectories of one flow into trajectories of another preserving directions of moving. Flows f^t and $f^{t'}$ on surface S are called *topologically conjugate* if there exists a homeomorphism $h: S \rightarrow S$ such that $h \circ f^t = f^{t'} \circ h$ for every real t .

It is well known that the topological equivalence class of the Morse-Smale flow on surface can be described combinatorially, for example, by the directed Peixoto graph, or by the Oshemkov-Sharko molecule. In more details.

The directed Peixoto graph introduced by him in 1971 in [6] for arbitrary Morse-Smale flow on a closed surface, is the generalisation of the Leontovich-Mayer scheme, introduced in [2] (1937) and [3] (1955) for flows on the plane (but not only Morse-Smale). Their approach is based on the ideas of Poincaré-Bendixon to pick a set of specially chosen trajectories so that their relative position fully determines the qualitative decomposition of the phase space of the flow into the trajectories. The Peixoto graph's vertices bijectively correspond to fixed points and limit cycles of the flow, its edges correspond to the connected components of the invariant manifolds of fixed points and closed trajectories without the points and the trajectories itself (see Fig. 1). To be a complete topological invariant such graphs contain the specially chosen subgraphs as well.

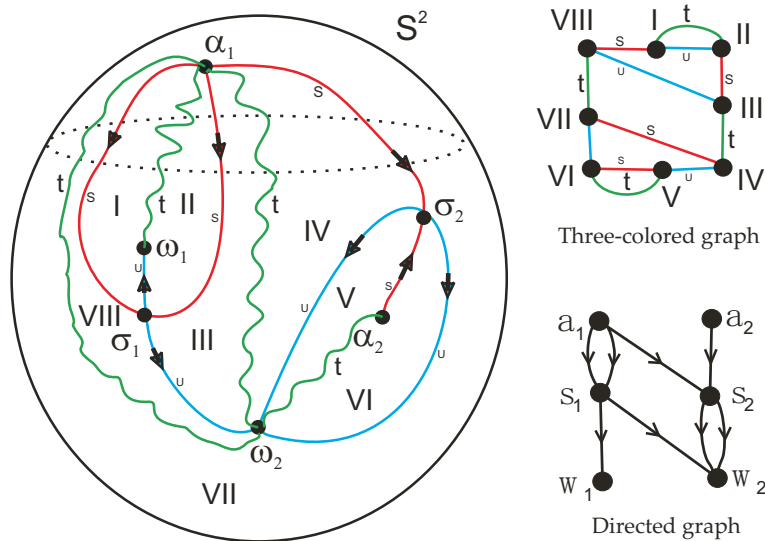


Fig. 1. An example of a gradient-like flow on a sphere S^2 , its Peixoto's directed graph and its Oshemkov-Sharko's three-colour graph

However, in 1998 Oshemkov and Sharko in [4] found that the Peixoto's graph is not complete for all Morse-Smale flows, especially it does not always distinguish the difference between two types of decompositions into trajectories for a domain bounded by two limit cycles of the flow. For Morse flows they introduced the new complete invariant – *three-colour graph*, its vertices correspond to the so-called triangular domains, restricted by two saddle separatrices and one usual trajectory which are

called *sides*, and these sides correspond to coloured edges of the graph, side of each type corresponds to the edge of the certain colour. Then Oshemkov and Sharko in the same work took three-colour graphs and elementary domains with simple behaviour as atoms and constructed with these atoms *the molecules*, and proved that such molecules are surely complete topological invariant for Morse-Smale flows on surfaces.

A description of the class of the topological conjugacy of Morse-Smale flows, in a difference with the equivalence, requires an introduction of continuous invariants (moduli), corresponding with the periods of the limit cycles at least. Thus, one class of the equivalence contains continuum classes of the topological conjugacy. In this paper we show that for gradient-like systems these classes are coincide, namely we prove the following fact.

Theorem 1. *If two gradient-like flows on a closed surface are topological equivalent then they are topologically conjugate.*

2. Necessary facts and statements

Definition 1. A map h of a metric space (X, ρ_X) to a metric space (Y, ρ_Y) is called *Lipschitz*, if there is some positive constant L called as *Lipschitz constant* such that $\rho_Y(h(x), h(y)) \leq L \cdot \rho_X(x, y)$ for all $x, y \in X$.

Let $\tilde{C}^0(\mathbb{R}^n)$ be the Banach space of bounded continuous maps from \mathbb{R}^n to \mathbb{R}^n with uniform norm $\|u\| = \sup\{\|u(x)\| : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Proposition 1 ([5], Ch. 2, Lemma 4.3). Let $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a hyperbolic isomorphism. Then there exists a value $\varepsilon > 0$ such that for every $\varphi_1, \varphi_2 \in \tilde{C}^0(\mathbb{R}^n)$ with the Lipschitz constant less or equal than ε there is an unique continuous map $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ of the form

$$h = I + u,$$

where I is the identity map and $u \in \tilde{C}^0(\mathbb{R}^n)$, such that

$$h(\phi + \varphi_1) = (\phi + \varphi_2)h.$$

Moreover h is a homeomorphism.

Proposition 2 ([5], Ch. 2, Lemma 4.9). Let $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a C^r -vector field with the equilibrium point 0. Then for every $\varepsilon > 0$ there exists a C^r -vector field $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ and neighborhoods $U \subset V$ of 0 such that:

- 1) $G = F$ on U and $G = DF_0$ outside V ;
- 2) G is Lipschitz and generates a flow g^t on \mathbb{R}^n of the form

$$g^t = \phi^t + \varphi^t,$$

where ϕ^t is a flow generated by the vector field DF_0 , $\varphi^t \in \tilde{C}^0(\mathbb{R}^n)$ for all $t \in [-2, 2]$, φ^1 has the Lipschitz constant less than ε and $D\varphi_0^1 = 0$.

Now let M^n be a C^r -smooth n -manifold.

Lemma 1. *Let $F: M^n \rightarrow M^n$ be a C^r -vector field with the hyperbolic equilibrium point p . Then there exists a neighbourhood U of the point p where the flow f^t generated by F is topologically conjugated to the flow ϕ^t generated by DF_p .*

Proof. As the problem is local, and there exists some local map (V, θ) , where $U \subset V$, $\theta: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ is homeomorphism and $\theta(p) = 0$, let us think that $M^n = \mathbb{R}^n$ and $p = 0$.

As 0 is the hyperbolic equilibrium point of F then $\phi = \phi^1$ is the hyperbolic isomorphism of \mathbb{R}^n . Let ε be a constant from Proposition 1 for ϕ and G be the vector field from Proposition 2 for F and ε . Then the flows f^t and g^t generated by F and G , accordingly, are coincide on U and, hence, they are topologically conjugate on U . Using an idea of the proof of Theorem 4.10 from Ch. 2 of [5], let us show that the flow ϕ^t is topologically conjugate to g^t in \mathbb{R}^n .

By Propositions 1 and 2 there exists an unique homeomorphism $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ being in a finite distance from the identity map such that $hg = \phi h$. Let

$$H = \int_0^1 \phi^{-t} h g^t dt.$$

This map is continuous and, by Proposition 2, is in a finite distance from the identity map. Let us show that $\phi^s H = H g^s$ for all $s \in \mathbb{R}$, all we need for this is to consider the segment from 0 to 1, because it is fundamental. Let us take and fix some s from $[0, 1]$. We have

$$\phi^{-s} H g^s = \phi^{-s} \left(\int_0^1 \phi^{-t} h g^t dt \right) g^s = \int_0^1 \phi^{-(t+s)} h g^{t+s} dt.$$

Let $u = t + s - 1$, then

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi^{-(t+s)} h g^{t+s} dt &= \int_{-1+s}^s \phi^{-u-1} h g^{u+1} du = \\ &= \int_{-1+s}^0 \phi^{-u} \phi^{-1} h g^1 g^u du + \int_0^s \phi^{-u-1} h g^{u+1} du. \end{aligned}$$

Let $v = u+1$ in the first sum and $v = u$ in the second one and recall that $\phi^{-1} h g^1 = h$. It gives us the formula

$$\phi^{-s} H g^s = \int_0^s \phi^{-v} h g^v du + \int_s^1 \phi^{-v} h g^v du = H.$$

It implies that H is the continuous map being in a finite distance from the identity map and conjugating the flow ϕ^t with g^t . As $h g^1 = \phi^1 h$ and $H g^1 = \phi^1 H$, uniqueness of solving of this equation gives $h = H$. \square

Proposition 3 ([7], Ch. 4, Theorem 7.1). Let A and B be two $n \times n$ real matrices such that all the eigenvalues of A and B have nonzero real part and the dimension of the direct sum of all the eigenspaces with negative (and, obviously, positive too) real part is the same for A and B . Then the two flows generated by the vector fields $\dot{x} = Ax$ and $\dot{x} = Bx$ are topologically conjugate.

3. The proof of the main theorem

Let S be a closed surface and $f^t: S \times \mathbb{R} \rightarrow S$ be a C^1 gradient-like flow. Then for every wandering trajectory ℓ of f^t there are exactly two different fixed points p, q of f^t such that the boundary of the trajectory has the form

$$\text{cl}(\ell) \setminus \ell = \{p, q\}$$

and the trajectory is directed from p to q . In this case we will denote the trajectory by $\ell_{p,q}$ assuming that the trajectory is directed from p to q .

Let f^t and f'^t be topologically equivalent C^1 gradient-like flows, i.e. there is a homeomorphism $h: S \rightarrow S$ mapping trajectories of f^t into trajectories of f'^t preserving orientation. It implies that h maps the fixed points of f^t to the fixed points of f'^t , what we will denote by $p' = h(p)$ for a fixed point p of f^t . Then

$$h(\ell_{pq}) = \ell'_{p'q'}$$

for every wandering trajectory ℓ_{pq} of f^t .

By Lemma 1 and Proposition 3 there are neighbourhoods $u_p, u_{p'}$ of p, p' respectively such that $f^t|_{u_p}, f'^t|_{u_{p'}}$ are topologically conjugated by a homeomorphism $h_p: u_p \rightarrow u_{p'}$.

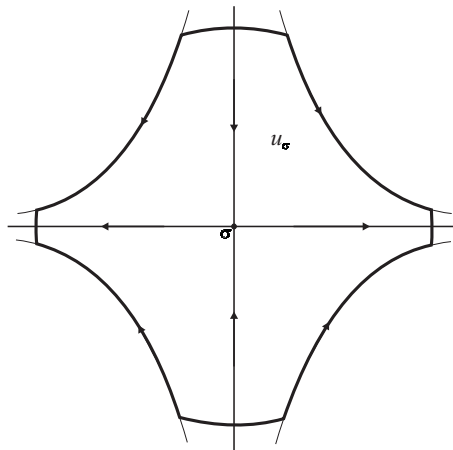


Fig. 2. Neighbourhood u_σ

Let σ be a saddle point of f . Without loss of generality we will assume that the neighborhood u_σ has a form as on Figure 2, $u_{\sigma'} = h_\sigma(u_\sigma)$ and a map $h^{-1}h_\sigma$ preserves

separatrix of σ . For a point $x \in S$ denote by \mathcal{O}_x (\mathcal{O}'_x) the orbit of the flow f^t (f'^t) passing through the point x . Let

$$V_\sigma = \bigcup_{x \in \text{cl}(u_\sigma)} \mathcal{O}_x, \quad V_{\sigma'} = \bigcup_{x \in \text{cl}(u_{\sigma'})} \mathcal{O}'_x.$$

Let us extend h_σ up to a homeomorphism $h_{V_\sigma} : V_\sigma \rightarrow V_{\sigma'}$ by the following rule (see Fig. 3). For a point $z \in (V_\sigma \setminus \text{cl}(u_\sigma))$ let $\{z_0\} = \mathcal{O}_z \cap \partial u_\sigma$ and $f^{t_z}(z_0) = z$ for $t_z \in \mathbb{R}$, then

$$h_{V_\sigma}(z) = f'^{t_z}(h_\sigma(z_0)).$$

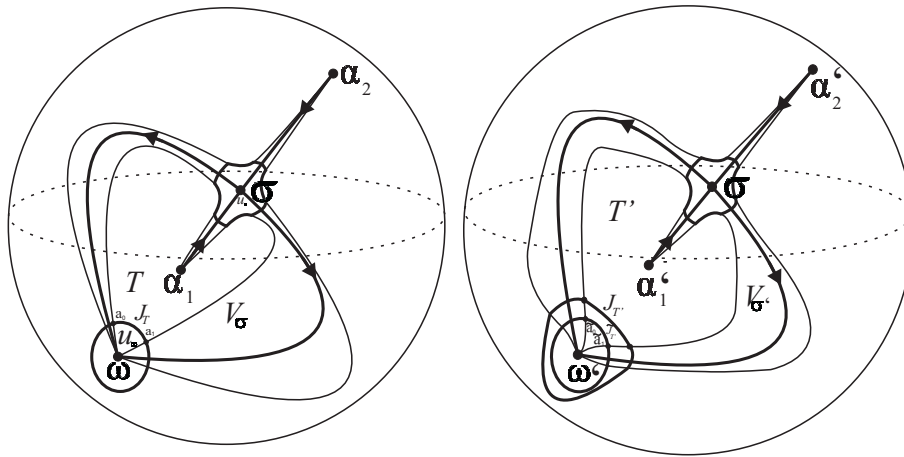


Fig. 3. Main constructions for f^t (on the left sphere) and for f'^t (on the right sphere)

Let V (V') be a union of all V_σ ($V_{\sigma'}$) and $h_V : V \rightarrow V'$ be a homeomorphism composed by h_{V_σ} .

To extend the homeomorphisms h_V up to ambient conjugating homeomorphism note that the closure T of any connected component of the set $S \setminus (V \cup \Omega_{f^t})$ belongs to the basin of a sink ω . As $h^{-1}h_\sigma$ preserves separatrix of σ then there is the closure $T' \subset W_{\omega'}^s$ of an unique connected component of the set $S \setminus (V' \cup \Omega_{f'^t})$ such that $h(T) \cap T' \neq \emptyset$. Let us extend h_V to T by conjugating homeomorphism h_T .

By Lemma 1 flows $f^t|_{u_\omega}$ and $f'^t|_{u_{\omega'}}$ are conjugate by means of ψ_ω and $\psi_{\omega'}$ respectively to some linear flows in some neighbourhood of 0 on the plane. Let γ_0 be some closed curve without a contact, transversally crossing all trajectories of the linear flows, and let $\gamma = \psi_\omega^{-1}(\gamma_0)$, $\gamma' = \psi_{\omega'}^{-1}(\gamma_0)$. So we correctly constructed a closed curve without a contact around ω and ω' .

Let $J_T = \gamma \cap T$ and let a_0, a_1 be the endpoints of the arc J_T . Then there are saddle points σ_0, σ_1 (possible $\sigma_0 = \sigma_1$) such that $a_i \in (J_T \cap V_{\sigma_i}), i = 0, 1$. Similarly the arc $\tilde{J}_{T'} = \gamma' \cap T'$ is bounded by the points \tilde{a}_0, \tilde{a}_1 belonging to $V_{\sigma'_0}, V_{\sigma'_1}$, accordingly. Let $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ so that $f'^{t_i}(\tilde{a}_i) = h_V(a_i), i = 0, 1$ and $\rho : \tilde{J}_{T'} \rightarrow [0, 1]$ be a homeomorphism such that $\rho(\tilde{a}_i) = i, i = 0, 1$. Let

$$J_{T'} = \{f'^{t_z}(\tilde{z}) \mid \tilde{z} \in \tilde{J}_{T'}, t_z = t_0 + (t_1 - t_0)\rho(\tilde{z})\}.$$

Define an arbitrary homeomorphism $h_J: J_T \rightarrow J_{T'}$ so that $h_J(a_i) = h_V(a_i), i = 0, 1$. Then every point z in T is uniquely defined by the point $z_0 = \mathcal{O}_z \cap J_T$ and the value $t_z \in \mathbb{R}$ such that $f^{t_z}(z_0) = z$. Let us define a homeomorphism $h_T: T \rightarrow T'$ by the formula

$$h_T(f^{t_z}(z_0)) = f^{t_z}(h_J(z_0)).$$

Let us define the conjugating homeomorphism $h_c: S \rightarrow S$ so that $h_c|_V = h_V, h_c|_T = h_T$ and $h_c|_{\Omega_{f^t}} = h|_{\Omega_{f^t}}$. Thus the conjugating homeomorphism is constructed and Theorem is proved.

Acknowledgements.

The author is grateful to Vyacheslav Grines for statement of the problem and Olga Pochinka for attentive reading of the manuscript.

References

1. *Andronov A. A., Pontryagin L. S.* (1937). Rough systems (in Russian), Doklady Akademii nauk SSSR 14, No.5, 247-250.
2. *Leontovich E. A., Mayer A. G.* (1937). About trajectories determining qualitative structure of sphere partition into trajectories (in Russian), Doklady Akademii nauk SSSR 14, No.5, 251-257.
3. *Leontovich E. A., Mayer A. G.* (1955). About scheme determining topological structure of partition into trajectories (in Russian), Doklady Akademii nauk SSSR 103, No.4, 557-560.
4. *Oshemkov A. A., Sharko V. V.* (1998). About classification of Morse-Smale flows on 2-manifolds (in Russian), Matematicheskiy sbornik 189, No.8, 93-140.
5. *Palis J., De Melo W.* (1982). Geometric theory of dynamical systems. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag.
6. *Peixoto M.* (1971). On the classification of flows on two-manifolds. Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador, Brasil.
7. *Robinson C.* (1995). Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo.
8. *Smale S.* (1967). Differentiable dynamical systems, Bulletin of the American Mathematical Society 73, No.6, 747-817.

Получена 05.03.2018

УДК 531.36+531.384

К задаче о движении тела вращения по сфере¹

А. С. Кулешов, Д. С. Зуева

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Москва 119991. E-mail: kuleshov@mech.math.msu.su, dariakhramova.z@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача о качении без проскальзывания динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной сфере. Предполагается, что приложенные к твердому телу силы, имеют приложенную к центру масс G тела равнодействующую, направленную к центру O опорной сферы и зависящую только от расстояния между точками G и O . В этом случае решение задачи сводится к интегрированию системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент ω_3 и n угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии и на нормаль к опорной сфере соответственно. Изучается вопрос: при каком условии на форму поверхности катящегося тела уравнение, которому удовлетворяет ω_3 , интегрируется методом разделения переменных отдельно от других уравнений.

Ключевые слова: тело вращения; качение по сфере; интегрируемость в явном виде.

Motion of a Rotationally Symmetric Body on a Sphere

A. S. Kuleshov, D. S. Zueva

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991.

Abstract. The problem of rolling without sliding of a rotationally symmetric rigid body on a sphere is considered. The rolling body is assumed to be subjected to the forces, the resultant of which is directed from the center of mass G of the body to the center O of the sphere, and depends only on the distance between G and O . In this case the solution of this problem is reduced to solving the system of two first order linear differential equations over the projections ω_3 and n of the angular velocity of the body onto its axis of symmetry and onto the normal to the sphere respectively. The problem of determination of the shape of the rolling body for which the equation for ω_3 can be solved by separation of variables is studied.

Keywords: rotationally symmetric body; body rolling on a sphere; integrability.

MSC 2010: 70F25; 70E18; 70E40

Введение

Задача о качении без скольжения динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной поверхности является одной из

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты No. 16-01-00338 и No. 17-01-00123.

классических задач механики неголономных систем. В 1897 году С. А. Чаплыгин в работе [1] установил, что в случае качения тяжелого тела вращения по горизонтальной плоскости решение соответствующей задачи сводится к интегрированию системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух компонент угловой скорости тела. В той же работе [1] был исследован вопрос: при каком условии на форму поверхности катящегося тела и распределение масс в нем одно из двух линейных уравнений первого порядка (относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии) интегрируется отдельно от других уравнений методом разделения переменных. Было установлено, что соответствующее уравнение интегрируется методом разделения переменных в случае, когда катящееся по плоскости тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар, центр масс которого не совпадает с геометрическим центром, но лежит на оси динамической симметрии.

В 1910 году П. В. Воронца в работе [2] показал, что рассуждения С. А. Чаплыгина переносятся на случай качения тела вращения по поверхности сферы, если приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс G тела, направленную к центру O опорной сферы и зависящую только от расстояния между точками G и O . В этом случае задача также сводится к интегрированию системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии и на нормаль к поверхности сферы.

В данной работе изучается задача о качении тела вращения по поверхности сферы при условиях П. В. Воронца. Получена система двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, к интегрированию которой приводится решение задачи. Исследован вопрос, при каком условии на форму поверхности катящегося тела и распределение масс в нем линейное уравнение первого порядка на компоненту угловой скорости тела в проекции на ось динамической симметрии интегрируется отдельно от других уравнений методом разделения переменных. Таким образом, в работе полностью исследована задача, аналогичная той, что была решена С. А. Чаплыгиным в работе [1] для случая движения тяжёлого тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

1. Общая постановка задачи о качении тела вращения по сфере. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о качении динамически симметричного тела, ограниченно-го поверхностью вращения, по абсолютно шероховатой сфере радиуса R_1 . Следуя работе П. В. Воронца [2], введем четыре системы координат (в скобках указаны единичные векторы осей):

$Ox_1y_1z_1$ ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) — неподвижная система координат с началом в центре опорной сферы;

$Gxyz$ ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) — система координат, жестко связанная с движущимся твердым телом; ее начало выбрано в центре масс G движущегося тела, а оси направлены по главным осям инерции;

$Puvn (\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_n)$ — подвижная система координат с началом в точке контакта P тела с опорной сферой и осями, направленными по касательным к координатным линиям и по нормали к поверхности тела;

$Pu_1v_1n_1 (\mathbf{e}_{u_1}, \mathbf{e}_{v_1}, \mathbf{e}_{n_1})$ — подвижная система координат, оси которой направлены по касательным к координатным линиям и по нормали к опорной сфере.

Положение точки контакта P на поверхности S тела определяется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{GP} = x(u, v) \mathbf{e}_1 + y(u, v) \mathbf{e}_2 + z(u, v) \mathbf{e}_3,$$

где u и v — гауссовы криволинейные координаты точки P на поверхности S . Коэффициенты первых двух квадратичных форм поверхности S катящегося тела обозначим E, F, G и L, M, N соответственно. Будем считать, что координатные линии на поверхности совпадают с ее линиями кривизны, поэтому $F = 0, M = 0$.

Сферическая поверхность S_1 , по которой движется твердое тело, задается уравнениями:

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \overrightarrow{OP} = x_1 \mathbf{e}_x + y_1 \mathbf{e}_y + z_1 \mathbf{e}_z = R_1 \sin u_1 \cos v_1 \mathbf{e}_x + R_1 \sin u_1 \sin v_1 \mathbf{e}_y + R_1 \cos u_1 \mathbf{e}_z,$$

где u_1 и v_1 — гауссовы криволинейные координаты точки P на сфере S_1 . Для единичных базисных векторов $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_{u_1}, \mathbf{e}_{v_1}, \mathbf{e}_{n_1}$ имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_u &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial u}, & \mathbf{e}_v &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial v}, & \mathbf{e}_n &= \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v; \\ \mathbf{e}_{u_1} &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_1}{\partial u_1}, & \mathbf{e}_{v_1} &= \frac{1}{R_1 \sin u_1} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_1}{\partial v_1}, & \mathbf{e}_{n_1} &= \mathbf{e}_{u_1} \times \mathbf{e}_{v_1}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Взаимная ориентация систем координат $Gxyz$ и $Puvn$ определяется при помощи матрицы направляющих косинусов, задаваемых таблицей

| | | | |
|-----|----------|----------|----------|
| | x | y | z |
| u | c_{11} | c_{12} | c_{13} |
| v | c_{21} | c_{22} | c_{23} |
| n | c_{31} | c_{32} | c_{33} |

причем коэффициенты c_{ij} являются функциями только переменных u и v и в явном виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, & c_{12} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u}, & c_{13} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u}; & c_{31} &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right), \\ c_{21} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, & c_{22} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, & c_{23} &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v}; & c_{32} &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right), \\ c_{33} &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Следуя Воронцу [2], будем определять положение тела гауссовыми координатами u, v, u_1, v_1 , и углом θ между осями Pu и Pv_1 . Предположим, что тело катится по опорной сфере без проскальзывания. Это условие приводит к тому, что на систему накладываются две неголономные связи, имеющие вид:

$$R_1 \dot{u}_1 = -\sqrt{E} \dot{u} \sin \theta + \sqrt{G} \dot{v} \cos \theta, \quad R_1 \dot{v}_1 \sin u_1 = \sqrt{E} \dot{u} \cos \theta + \sqrt{G} \dot{v} \sin \theta. \quad (1.2)$$

Пусть векторы скорости \mathbf{w} центра масс G и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела задаются в системе координат $Gxyz$ компонентами w_1, w_2, w_3 и $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно. Из условия того, что точка касания P тела находится в мгновенном покое, получим формулы, связывающие компоненты векторов \mathbf{w} и $\boldsymbol{\omega}$:

$$w_1 + \omega_2 z - \omega_3 y = 0, \quad w_2 + \omega_3 x - \omega_1 z = 0, \quad w_3 + \omega_1 y - \omega_2 x = 0, \quad (1.3)$$

а для компонент $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ вектора $\boldsymbol{\omega}$ справедливы следующие формулы (см. [2]):

$$\omega_1 = c_{11} \tau \dot{v} + c_{21} \sigma \dot{u} + c_{31} n, \quad \omega_2 = c_{12} \tau \dot{v} + c_{22} \sigma \dot{u} + c_{32} n, \quad \omega_3 = c_{13} \tau \dot{v} + c_{23} \sigma \dot{u} + c_{33} n, \quad (1.4)$$

$$\tau = -\left(\frac{N}{G} - \frac{1}{R_1}\right) \sqrt{G}, \quad \sigma = \left(\frac{L}{E} - \frac{1}{R_1}\right) \sqrt{E}, \quad (1.5)$$

$$n = -\dot{\theta} + \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial E}{\partial v} \dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u} \dot{v} \right) - \dot{v}_1 \cos u_1.$$

Будем предполагать, что силы, действующие на твердое тело, имеют потенциал, и что потенциальная энергия V зависит лишь от координат u и v точки касания P . Такой случай будет иметь место, например, когда приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс G тела, направленную к центру O сферы и зависящую только от расстояния точек G и O друг от друга. Итак, пусть $V = V(u, v)$.

Пусть $\Theta = \Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n)$ — кинетическая энергия системы, вычисленная с учетом неголономных связей (1.2) и соотношений (1.3)-(1.4). Она вычисляется по стандартной формуле

$$2\Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n) = m(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) + A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2,$$

где m — масса движущегося тела, а A_1, A_2 и A_3 — его главные центральные моменты инерции. Данное выражение можно переписать следующим образом:

$$2\Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n) = K_{33} n^2 + 2(K_{13} \dot{u} + K_{23} \dot{v}) n + K_{11} \dot{u}^2 + 2K_{12} \dot{u} \dot{v} + K_{22} \dot{v}^2, \quad (1.6)$$

причем на основании формул (1.3)-(1.5) можно сделать вывод, что коэффициенты K_{ij} являются функциями переменных u и v . Если мы обозначим через ρ и ε расстояния от центра масс G тела до точки касания P и до касательной плоскости к поверхности S в точке P

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varepsilon = xc_{31} + yc_{32} + zc_{33},$$

то мы можем записать уравнения движения тела в таком виде (см. [2]):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial \Theta}{\partial u} &= \sqrt{EG} \left(\frac{LN}{EG} - \frac{1}{R_1^2} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial n} \dot{v} + \frac{\sqrt{E}}{R_1} \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}} n - m\rho \frac{\partial \rho}{\partial u} n^2 - \\ &\quad - m\varepsilon \sqrt{EG} \left(\frac{N}{G} - \frac{1}{R_1} \right) n \dot{v} - \frac{\partial V}{\partial u}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial \Theta}{\partial v} &= -\sqrt{EG} \left(\frac{LN}{EG} - \frac{1}{R_1^2} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial n} \dot{u} + \frac{\sqrt{G}}{R_1} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{u}} n - m\rho \frac{\partial \rho}{\partial v} n^2 + \\ &\quad + m\varepsilon \sqrt{EG} \left(\frac{L}{E} - \frac{1}{R_1} \right) n \dot{u} - \frac{\partial V}{\partial v}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} \right) &= -\frac{\sqrt{G}}{R_1} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{u}} \dot{v} - \frac{\sqrt{E}}{R_1} \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}} \dot{u} + m\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \rho}{\partial v} \dot{v} \right) n - m\varepsilon \frac{LG - NE}{\sqrt{EG}} \dot{u} \dot{v}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Присоединяя к этим уравнениям последнее из уравнений (1.5), а также уравнения связей (1.2), получим систему шести уравнений, из которой определяются все неизвестные $u, v, n, \theta, u_1, v_1$ как функции времени.

Предположим теперь, что твердое тело, катящееся по сфере, является телом вращения, то есть его моменты инерции A_1 и A_2 относительно осей Gx и Gy равны между собой ($A_1 = A_2$), а поверхность S , ограничивающая твердое тело, является поверхностью вращения вокруг оси Gz :

$$x = f(u) \cos v, \quad y = f(u) \sin v, \quad z = g(u). \quad (1.8)$$

В этом случае кинетическая энергия тела, вычисляемая по формуле (1.6), в явном виде запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} 2\Theta(\dot{u}, \dot{v}, u, v, n) &= K_{11} \dot{u}^2 + K_{22} \dot{v}^2 + K_{33} n^2 + 2K_{23} \dot{v} n, \\ K_{11} &= (A_1 + Mf^2 + Mg^2) (f'^2 + g'^2) \left(\frac{g''f' - f''g'}{(f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{R_1} \right)^2, \\ K_{22} &= \frac{A_1 f'^2 + A_3 g'^2 + M(gf' - fg')^2}{f'^2 + g'^2} \left(\frac{g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} - \frac{f}{R_1} \right)^2, \\ K_{33} &= \frac{A_1 g'^2 + A_3 f'^2 + M(ff' + gg')^2}{f'^2 + g'^2}, \\ K_{23} &= \frac{M(gf' - fg')(ff' + gg') - (A_3 - A_1) f'g'}{f'^2 + g'^2} \left(\frac{g'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} - \frac{f}{R_1} \right). \end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначена производная по u . Очевидно, что все коэффициенты K_{ij} будут функциями только переменной u . Справедливы также следующие соотношения:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial v} = 0.$$

В этом случае два последних уравнения системы (1.7) дают:

$$\frac{d}{dt} (K_{23}n + K_{22}\dot{v}) = (c_1n + k_1\dot{v}) \dot{u}, \quad \frac{d}{dt} (K_{33}n + K_{23}\dot{v}) = (c_2n + k_2\dot{v}) \dot{u}, \quad (1.9)$$

где коэффициенты K_{22} , K_{23} , K_{33} , c_1 , c_2 , k_1 , k_2 являются функциями только переменной u . Кроме того, в выражениях (1.4) для компонент угловой скорости ω_1 , ω_2 и ω_3 будем иметь $c_{23} = 0$, откуда следует, что

$$\dot{v} = \frac{1}{c_{13}\tau} \omega_3 - \frac{c_{33}}{c_{13}\tau} n, \quad (1.10)$$

причем коэффициенты при переменных ω_3 и n также будут функциями только переменной u . Переходя в уравнениях (1.9) к новой независимой переменной u , приведем эти уравнения к виду

$$\begin{aligned} \frac{K_{22}}{c_{13}\tau} \frac{d\omega_3}{du} + \left(K_{23} - \frac{K_{22}c_{33}}{c_{13}\tau} \right) \frac{dn}{du} &= d_1n + s_1\omega_3, \\ \frac{K_{23}}{c_{13}\tau} \frac{d\omega_3}{du} + \left(K_{33} - \frac{K_{23}c_{33}}{c_{13}\tau} \right) \frac{dn}{du} &= d_2n + s_2\omega_3, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где d_1 , s_1 , d_2 , s_2 – функции, зависящие от u . Таким образом, решение задачи сводится к интегрированию системы двух линейных уравнений первого порядка (1.11) относительно компонент угловой скорости n и ω_3 . Если найти общее решение этой системы уравнений, то задача сводится к квадратурам.

2. Простейшие случаи интегрирования уравнений движения

Разрешим систему уравнений (1.11) относительно производных и приведем ее к виду:

$$\frac{dn}{du} = a_1n + a_2\omega_3, \quad \frac{d\omega_3}{du} = b_1n + b_2\omega_3. \quad (2.1)$$

Выясним, каким должен быть вид поверхности, ограничивающей тело, чтобы второе из уравнений (2.1) интегрировалось методом разделения переменных. Соответствующее условие записывается в виде $b_1 = 0$. В явном виде оно может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{d^2g}{du^2} \frac{df}{du} - \frac{d^2f}{du^2} \frac{dg}{du} \right) f R_1 - \left(\left(\frac{df}{du} \right)^2 + \left(\frac{dg}{du} \right)^2 \right) \left(f \sqrt{\left(\frac{df}{du} \right)^2 + \left(\frac{dg}{du} \right)^2} + R_1 \frac{dg}{du} \right) \right] \times \\ &\times \left(f \sqrt{\left(\frac{df}{du} \right)^2 + \left(\frac{dg}{du} \right)^2} - R_1 \frac{dg}{du} \right) \sqrt{\left(\frac{df}{du} \right)^2 + \left(\frac{dg}{du} \right)^2} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, второе из уравнений (2.1) интегрируется разделением переменных, если поверхность, ограничивающая твердое тело, удовлетворяет уравнению

$$f \sqrt{\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2} - R_1 \frac{dg}{du} = 0, \quad (2.2)$$

или уравнению

$$\left(\frac{d^2g}{du^2} \frac{df}{du} - \frac{d^2f}{du^2} \frac{dg}{du}\right) f R_1 - \left(\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2\right) \left(f \sqrt{\left(\frac{df}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2} + R_1 \frac{dg}{du}\right) = 0. \quad (2.3)$$

Рассмотрим сначала уравнение (2.2). Полагая в нем $f(u) = R_1 u$, приведем его к виду

$$u \sqrt{R_1^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2} - \frac{dg}{du} = 0. \quad (2.4)$$

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$g(u) = -R_1 \sqrt{1 - u^2} + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная интегрирования. Таким образом, поверхность катящегося тела в данном случае удовлетворяет уравнению

$$f^2 + (g - C_1)^2 = R_1^2,$$

то есть катящееся тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар того же радиуса, что и радиус опорной сферы. Центр масс этого шара в общем случае не совпадает с геометрическим центром, а отстоит от него на расстояние C_1 вдоль оси динамической симметрии.

Теперь рассмотрим уравнение (2.3). Полагая в нем $f(u) = R_1 u$, приведем его к виду

$$R_1^2 u \frac{d^2g}{du^2} - \left(R_1^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2\right) \left(\frac{dg}{du} + u \sqrt{R_1^2 + \left(\frac{dg}{du}\right)^2}\right) = 0. \quad (2.5)$$

Общее решение уравнения (2.5) имеет вид

$$g(u) = \int \frac{R_1 v (C_1 R_1^2 + \ln v) dv}{\sqrt{1 - (C_1 R_1^2 + \ln v)^2 v^2}} + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные интегрирования. Полагая $C_1 R_1^2 = 1$, представим уравнение поверхности в параметрическом виде:

$$f(u) = R_1 u, \quad g(u) = R_1 \int \frac{v(1 + \ln v) dv}{\sqrt{1 - v^2(1 + \ln v)^2}} + C_2. \quad (2.6)$$

На Рис. 1 представлен общий вид поверхности, задаваемой параметрически уравнениями (2.6) при $R_1 = 1$ и $C_2 = 0$.

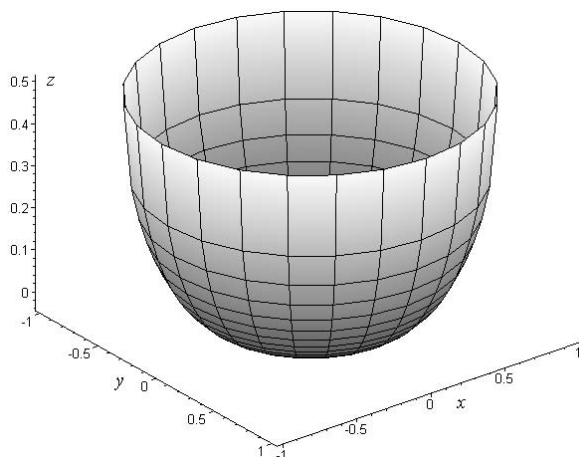


Рис. 1.

Таким образом, нами полностью исследован вопрос о том, какой должна быть форма поверхности, ограничивающей твердое тело, чтобы второе из уравнений (2.1) для него интегрировалось разделением переменных. В этом случае твердое тело либо является неоднородным динамически симметричным шаром того же радиуса, что и радиус опорной сферы, либо имеет форму, задаваемую соотношениями (2.6).

Список цитируемых источников

1. Чаплыгин, С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии — 1897. — Т. 9, Вып. 1. — С. 10–16.

Chaplygin, S. A. On a motion of a heavy body of revolution on a horizontal plane. Regul. Chaotic Dyn. 7, 119–130 (2002).

2. Воронетц, П. В. К задаче о движении твердого тела, катящегося без скольжения по данной поверхности под действием данных сил // Киевские Университетские Известия. — 1910. — Т. 50, Вып. 10. — С. 101–111.

Woronetz, P. V. On the problem of the motion of a rigid body rolling without sliding on a given surface under the influence of given forces. Kievskie Universitetskie Izvestija. 50, 101–111 (1910). (Russian)

Получена 23.02.2018

УДК 539.3

Собственные формы прямоугольной ортотропной призмы при различных видах симметрии

А. Д. Ляшко, В. Н. Чехов

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: knightla@yandex.ru*

Аннотация. В статье получены новые аналитические представления решения задачи для установившихся колебаний прямоугольной ортотропной призмы для четырех видов симметрии. По сравнению с другими известными аналитическими представлениями для данных представлений существенным образом упрощен анализ регулярности соответствующих бесконечных систем и применимость метода улучшенной редукции для численных оценок её решения. Для каждого вида симметрии указано счетное множество элементарных собственных частот и собственных форм колебаний, которые соответствуют известным модам Ламе для изотропных призм. Вычислены первые собственные частоты и соответствующие собственные формы колебаний для квадратной ортотропной призмы.

Ключевые слова: установившиеся колебания ортотропной призмы, метод суперпозиции, регулярная бесконечная система линейных алгебраических уравнений, собственные частоты ортотропной прямоугольной призмы, аналитическое представление решения, улучшенный метод редукции.

Eigenforms of rectangular orthotropic prism for the different forms of symmetry

A. D. Lyashko, V. N. Chekhov

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In this paper new analytical presentations of the solutions for steady-state oscillations of orthotropic rectangular prism is found for four forms of symmetry. These presentations significantly simplify the regularity analysis and application of the improved reduction method. Countable sets of the elementary eigenforms for rectangular orthotropic prism that correspond to Lamé modes for isotropic prism are found for each type of symmetry. First eigenfrequencies and eigenforms are found numerically for square orthotropic prism.

Keywords: steady-state oscillations of orthotropic rectangular prism, superposition method, regular infinite system of linear algebraic equations, eigenfrequencies of rectangular orthotropic prism, analytical presentation of solution, the improved reduction method.

MSC 2010: 65N25, 74E10, 74H05, 74H10, 74H30, 74H45

Введение

Ортотропные прямоугольные пластинки и призмы являются одними из наиболее распространенных современных элементов конструкций. Результаты и обзоры исследований динамического поведения ортотропных тонких пластин и прямоугольных призм представлены в работах [5, 6, 7, 8, 9, 10]. Наиболее распространенными методами, применяемыми в данной задаче являются вариационный метод Рэлея-Ритца [8], а также различные варианты метода суперпозиции [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14]. Метод суперпозиции в классическом варианте приводит к оценкам решений бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. В статике для изгиба прямоугольных пластин удачный вариант метода суперпозиции был предложен С.П. Тимошенко в 1936 году [3, 4, 16]. На распространение данного варианта повлияло существование нулевого предела для решения соответствующей бесконечной системы и «практическая» сходимость метода простой редукции. Применение метода суперпозиции к задаче о плоской деформации и плоском напряженном состоянии [1, 2, 9, 10, 12, 13, 14] приводит к системам, решения которых стремятся к ненулевым константам. Теория бесконечных систем позволяет достаточно точно оценить предел решения и аналитически просуммировать все ряды в представлении решения, а также определить собственные частоты и собственные формы колебаний. В статьях [12, 13, 14] представление решения строилось таким образом, чтобы оно при подстановке единичного решения соответствующей бесконечной системы суммировалось элементарным образом, что облегчало исследование и решение получаемых бесконечных систем. В данной статье предлагаются представления решения для задачи о колебании прямоугольной ортотропной призмы для всех видов симметрий, обладающие данным свойством.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о плоской деформации прямоугольной ортотропной призмы $(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]$. Плоскости упругой симметрии совпадают с плоскостями координат. Дифференциальные уравнения движения призмы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Перемещения и напряжения связаны обобщенным законом Гука согласно [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2} \sigma_{yy}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2} \sigma_{yy}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{G_{1,2}} \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь E_1, E_2, E_3 — модули Юнга для растяжения-сжатия вдоль главных направлений упругости x, y, z ; G — модуль сдвига, характеризующий изменение углов между направлениями x и y ; ν_{12} — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении y при растяжении в направлениях x ; ν_{21} — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении x при растяжении в направлении y и т.д. Граничные условия зададим в упрощенном виде, чтобы уменьшить громоздкость:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}|_{x=\pm a} &= f(y) \sin \omega t; & \tau_{xy}|_{x=\pm a} &= 0; \\ \sigma_{yy}|_{y=\pm b} &= g(x) \sin \omega t; & \tau_{xy}|_{y=\pm b} &= 0;\end{aligned}\quad (1.3)$$

Поскольку мы рассматриваем установившиеся колебания, введём амплитудные характеристики напряжений и перемещений:

$$u = \tilde{u} \sin(\omega t); \quad v = \tilde{v} \sin(\omega t); \quad (1.4)$$

$$\sigma_{xx} = \tilde{\sigma}_{xx} \sin(\omega t); \quad \sigma_{yy} = \tilde{\sigma}_{yy} \sin(\omega t); \quad \sigma_{xy} = \tilde{\sigma}_{xy} \sin(\omega t). \quad (1.5)$$

Выразим напряжения из (1.2):

$$\begin{aligned}\frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_1} \sigma_{xx} &= (1 - \nu_{23}\nu_{32}) \frac{\partial u}{\partial x} + (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_2} \sigma_{yy} &= (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) \frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \nu_{13}\nu_{31}) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1}{G} \sigma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Для уменьшения громоздкости введём вспомогательные величины:

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_1 &= \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{1 - \nu_{13}\nu_{31}}; & \tilde{\nu}_2 &= \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{1 - \nu_{23}\nu_{32}}; \\ \tilde{E}_1 &= \frac{E_1}{1 - \nu_{13}\nu_{31}}; & \tilde{E}_2 &= \frac{E_2}{1 - \nu_{23}\nu_{32}}.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Для введённых величин верно, что $\tilde{E}_1\tilde{\nu}_2 = \tilde{E}_2\tilde{\nu}_1$. С учётом (1.7) обобщенный закон Гука (1.6) после преобразований примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{1 - \tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2}{\tilde{E}_1} \sigma_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{\nu}_2 \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{1 - \tilde{\nu}_1\tilde{\nu}_2}{\tilde{E}_2} \sigma_{yy} &= \tilde{\nu}_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{1}{G} \sigma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}\quad (1.8)$$

Выражения (1.8) совпадают с законом Гука для плоского напряженного состояния ортотропной пластины, использованного в статьях [6], [10] и др., с коэффициентами Пуассона $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2$ и модулями Юнга \tilde{E}_1, \tilde{E}_2 вдоль осей OX и OY

соответственно, а также модулем сдвига G . В дальнейшем мы будем использовать в выражениях только эти коэффициенты, поэтому опустим знак «тильда» над ними.

Подстановка (1.8) в (1.1) приводит к системе двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(G + \frac{E_1\nu_2}{1 - \nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \left(G + \frac{E_2\nu_1}{1 - \nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставив выражения (1.4) в данную систему получим следующую систему уравнений для установившихся колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \left(G + \frac{E_1\nu_2}{1 - \nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} &= -\rho\omega^2 \tilde{u}, \\ \left(G + \frac{E_2\nu_1}{1 - \nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} &= -\rho\omega^2 \tilde{v}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Поскольку в статье рассматриваются только амплитудные характеристики перемещений и напряжений, во всех последующих разделах опустим знак «тильда» над ними.

2. Приведение к безразмерному виду

Перейдём из системы координат, в которой призма соответствует множеству точек $(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]$, в систему координат $(\hat{x}, \hat{y}) \in [-1, 1] \times [-\eta, \eta]$, где $\eta = b/a$. Также разделим перемещения на половину ширины призмы a , выполнив замену $\hat{u} = u/a$, $\hat{v} = v/a$. Тогда система (1.10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + G \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + \left(G + \frac{E_1\nu_2}{1 - \nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} &= -\rho\omega^2 a^2 \hat{u}, \\ \left(G + \frac{E_2\nu_1}{1 - \nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + G \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{E_2}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} &= -\rho\omega^2 a^2 \hat{v}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В качестве безразмерной частоты возьмём $\Omega = \sqrt{\frac{\rho}{G}} \frac{2\omega a}{\pi}$. Введём следующие вспомогательные параметры:

$$\Omega_2 = \frac{\Omega\pi}{2}; \Omega_{11} = \Omega_2 \sqrt{\frac{G(1 - \nu_1\nu_2)}{E_1}}; \Omega_{12} = \Omega_2 \sqrt{\frac{G(1 - \nu_1\nu_2)}{E_2}}.$$

Разделим оба уравнения системы на $E_1/(1 - \nu_1\nu_2)$ и перепишем их, введя безразмерные параметры, предложенные в [6]:

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + a_{66} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} + (a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \Omega_{11}^2 \hat{u} &= 0, \\ (a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + a_{66} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + a'_{11} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} + \Omega_{11}^2 \hat{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $a_{11} = 1$, $a'_{11} = \nu_2/\nu_1$, $a_{12} = \nu_2$, $a_{66} = G(1 - \nu_1\nu_2)/E_1$. В качестве безразмерных напряжений возьмём следующие величины:

$$\hat{\sigma}_{xx} = \frac{1 - \nu_1\nu_2}{E_1}\sigma_{xx}; \hat{\sigma}_{yy} = \frac{1 - \nu_1\nu_2}{E_2}\sigma_{yy}; \hat{\sigma}_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy}. \quad (2.3)$$

Граничные условия (1.3) относительно безразмерных параметров для амплитудных характеристик запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{xx}|_{x=\pm 1} &= \frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1}f(a\hat{y}) = \hat{f}(\hat{y}); & \hat{\tau}_{xy}|_{x=\pm 1} &= 0; \\ \hat{\sigma}_{yy}|_{y=\pm \eta} &= \frac{1-\nu_1\nu_2}{E_2}g(a\hat{x}) = \hat{g}(\hat{x}); & \hat{\tau}_{xy}|_{y=\pm \eta} &= 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

Закон Гука относительно безразмерных параметров запишем следующим образом:

$$\hat{\sigma}_{xx} = a_{11}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + a_{12}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}; \hat{\sigma}_{yy} = \frac{1}{a'_{11}}\left(a_{12}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + a'_{11}\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}}\right); \hat{\sigma}_{xy} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}}. \quad (2.5)$$

В дальнейшем будем рассматривать только выражения, содержащие безразмерные параметры, поэтому будем опускать знак «уголка» над ними.

3. Построение представления решения

В силу линейности краевой задачи, перемещения можно представить в виде суммы четырех перемещений для каждого варианта четности и нечетности краевых условий. Подробно остановимся на построении общего решения для случая нечетных относительно двух осей колебаниями. Построение для остальных случаев производится аналогичным образом.

В соответствии с принципом суперпозиции общее решение строится в виде суммы двух решений для периодически нагруженной полосы, каждое из которых позволяет удовлетворить произвольным условиям на паре противоположных граней:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh}(p_{1,n}y) + B_n \operatorname{sh}(p_{2,n}y)) \cos(\alpha_n x) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (C_m M'_{1,m} \operatorname{ch}(q_{1,m}x) + D_m M'_{2,m} \operatorname{ch}(q_{2,m}x)) \sin(\beta_m y), \\ V &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n M_{1,n} \operatorname{ch}(p_{1,n}y) + B_n M_{2,n} \operatorname{ch}(p_{2,n}y)) \sin(\alpha_n x) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \operatorname{sh}(q_{1,m}x) + D_m \operatorname{ch}(q_{2,m}x)) \cos(\beta_m y). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Последовательности постоянных коэффициентов $p_{k,n}$, $q_{k,m}$, $M_{k,n}$ и $M'_{k,m}$ определим, потребовав, чтобы каждое слагаемое в перемещении удовлетворяло системе

дифференциальных уравнений (2.2). Для этого рассмотрим по одному из слагаемых суммы (3.1):

$$U = \operatorname{sh}(p_{k,n}y) \cos(\alpha_n x); V = M_{k,n} \operatorname{ch}(p_{k,n}y) \sin(\alpha_n x). \quad (3.2)$$

$$U = M'_{k,m} \operatorname{ch}(q_{k,m}x) \sin(\beta_m y); V = \operatorname{sh}(q_{k,m}x) \cos(\beta_m y). \quad (3.3)$$

Подстановка (3.2) в систему (2.2) позволяет определить последовательности $p_{k,n}$ и $M_{k,n}$, а подстановка (3.3) — $q_{k,m}$ и $M'_{k,m}$:

$$M_{k,n} = \frac{a_{11}\alpha_n^2 - a_{66}p_{k,n}^2 - \Omega_{11}^2}{\alpha_n p_{k,n}(a_{12} + a_{66})}; M'_{k,m} = \frac{a'_{11}\beta_m^2 - a_{66}q_{k,m}^2 - \Omega_{11}^2}{\beta_m q_{k,m}(a_{12} + a_{66})}. \quad (3.4)$$

$p_{1,n}$, $p_{2,n}$, $q_{1,m}$ и $q_{2,m}$ должны быть корнями следующих биквадратных уравнений:

$$\begin{aligned} a'_{11}a_{66}p^4 + (\Omega_{11}^2(a'_{11} + a_{66}) + \alpha_n^2((a_{12} + a_{66})^2 - (a_{11}a'_{11} + a_{66}^2)))p^2 + \\ + (a_{11}\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)(a_{66}\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) = 0, \\ a_{11}a_{66}q^4 + (\Omega_{11}^2(a_{11} + a_{66}) + \beta_m^2((a_{12} + a_{66})^2 - (a_{11}a'_{11} + a_{66}^2)))q^2 + \\ + (a'_{11}\beta_m^2 - \Omega_{11}^2)(a_{66}\beta_m^2 - \Omega_{11}^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Заметим, что в силу теоремы Виета произведения и суммы квадратов имеют простые выражения:

$$\begin{aligned} p_{1,n}^2 + p_{2,n}^2 &= -\frac{(\Omega_{11}^2(a'_{11} + a_{66}) + \alpha_n^2((a_{12} + a_{66})^2 - (a_{11}a'_{11} + a_{66}^2)))}{a'_{11}a_{66}}, \\ q_{1,m}^2 + q_{2,m}^2 &= -\frac{(\Omega_{11}^2(a_{11} + a_{66}) + \beta_m^2((a_{12} + a_{66})^2 - (a_{11}a'_{11} + a_{66}^2)))}{a_{11}a_{66}}, \\ p_{1,n}^2 p_{2,n}^2 &= \frac{(a_{11}\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)(a_{66}\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{a'_{11}a_{66}}, \\ q_{1,m}^2 q_{2,m}^2 &= \frac{(a'_{11}\beta_m^2 - \Omega_{11}^2)(a_{66}\beta_m^2 - \Omega_{11}^2)}{a_{11}a_{66}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Последовательности α_n и β_m выберем таким образом, чтобы входящие в выражения для нормальных напряжений функции $\sin(\alpha_n x)$ и $\sin(\beta_m y)$ были полны на отрезках $[-1, 1]$ и $[-\eta, \eta]$ соответственно, а также, чтобы их производные обращались в нуль на соответствующих сторонах. В случае нечетных относительно двух осей колебаний возьмём следующие последовательности:

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{2}\pi; \beta_m = \frac{2m-1}{2\eta}\pi. \quad (3.7)$$

Вычислим касательные напряжения, соответствующие данному решению:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(p_{1,n} + M_{1,n}\alpha_n) \operatorname{ch}(p_{1,n}y) + B_n(p_{2,n} + M_{2,n}\alpha_n) \operatorname{ch}(p_{2,n}y)) \cos(\alpha_n x) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (C_m(M'_{1,m}\beta_m + q_{1,m}) \operatorname{ch}(q_{1,m}x) + D_m(M'_{2,m}\beta_m + q_{2,m}) \operatorname{ch}(q_{2,m}x)) \cos(\beta_m y). \end{aligned} \quad (3.8)$$

После подстановки (3.8) в краевые условия (2.4) благодаря выбору последовательностей α_n и β_m получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} (C_m(M'_{1,m}\beta_m + q_{1,m}) \operatorname{ch}(q_{1,m}) + D_m(M'_{2,m}\beta_m + q_{2,m}) \operatorname{ch}(q_{2,m})) \cos(\beta_m y) &= 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(p_{1,n} + M_{1,n}\alpha_n) \operatorname{ch}(p_{1,n}\eta) + B_n(p_{2,n} + M_{2,n}\alpha_n) \operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)) \cos(\alpha_n x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из равенства нулю ряда Фурье следует, что коэффициенты ряда Фурье равны нулю. Поэтому получаем, что

$$A_n = -B_n \frac{p_{2,n} + M_{2,n}\alpha_n}{p_{1,n} + M_{1,n}\alpha_n} \cdot \frac{\operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)}{\operatorname{ch}(p_{1,n}\eta)}; \quad C_m = -D_m \frac{q_{2,m} + M'_{2,m}\beta_m}{q_{1,m} + M'_{1,m}\beta_m} \cdot \frac{\operatorname{ch}(q_{2,m})}{\operatorname{ch}(q_{1,m})}. \quad (3.10)$$

Для удобства введём следующие обозначения:

$$X_n = -B_n \frac{\operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)}{p_{1,n} + M_{1,n}\alpha_n}; \quad Y_m = -D_m \frac{\operatorname{ch}(q_{2,m})}{q_{1,m} + M'_{1,m}\beta_m}. \quad (3.11)$$

С учетом введенных обозначений аналитическое представление решения (3.1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n \left((p_{2,n} + M_{2,n}\alpha_n) \frac{\operatorname{sh}(p_{1,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{1,n}\eta)} - (p_{1,n} + M_{1,n}\alpha_n) \frac{\operatorname{sh}(p_{2,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \left(M'_{1,m}(q_{2,m} + M'_{2,m}\beta_m) \frac{\operatorname{ch}(q_{1,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{1,m})} - M'_{2,m}(q_{1,m} + M'_{1,m}\beta_m) \frac{\operatorname{ch}(q_{2,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{2,m})} \right) \times \\ &\times \sin(\beta_m y), \\ V &= \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \left((q_{2,m} + M'_{2,m}\beta_m) \frac{\operatorname{sh}(q_{1,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{1,m})} - (q_{1,m} + M'_{1,m}\beta_m) \frac{\operatorname{sh}(q_{2,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{2,m})} \right) \cos(\beta_m y) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} X_n \left(M_{1,n}(p_{2,n} + M_{2,n}\alpha_n) \frac{\operatorname{ch}(p_{1,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{1,n}\eta)} - M_{2,n}(p_{1,n} + M_{1,n}\alpha_n) \frac{\operatorname{ch}(p_{2,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \sin(\alpha_n x). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Посчитав по данным перемещениям нормальные напряжения и подставив их в граничные условия, после известной процедуры [1] метода суперпозиции можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных X_k, Y_k ($k = 1, 2, \dots$). Однако, перед тем как продолжить, преобразуем аналитическое представление решения таким образом, чтобы при подстановке всех неизвестных коэффициентов равными единице, ряды для перемещений и напряжений суммировались к некоторым аналитическим выражениям. В [12] для случая двойной симметрии в этом качестве были выбраны

выражения, являющиеся обобщениями мод Ламе на ортотропный случай. Для колебаний, антисимметричных относительно двух осей, они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\cos(\Omega_{11}^* x) \sin(\Omega_{12}^* y)}{\cos(\Omega_{11}^*) \cos(\Omega_{12}^* \eta)}; \\ V &= -\frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\sin(\Omega_{11}^* x) \cos(\Omega_{12}^* y)}{\cos(\Omega_{11}^*) \cos(\Omega_{12}^* \eta)}; \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\sigma_{xx} = -\sqrt{a'_{11}} \frac{\sin(\Omega_{11}^* x) \sin(\Omega_{12}^* y)}{\cos(\Omega_{11}^*) \cos(\Omega_{12}^* \eta)}; \sigma_{yy} = \frac{1}{\sqrt{a'_{11}}} \frac{\sin(\Omega_{11}^* x) \sin(\Omega_{12}^* y)}{\cos(\Omega_{11}^*) \cos(\Omega_{12}^* \eta)}; \sigma_{xy} = 0. \quad (3.14)$$

Здесь

$$\Omega_{11}^* = \Omega_{11} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}}, \Omega_{12}^* = \Omega_{11} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}}.$$

Данные перемещения будут являться решением однородной краевой задачи при следующих соотношениях сторон и частотах:

$$\eta = \frac{m}{k} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} + a_{12}}}, \Omega = 2k \sqrt{\frac{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}{a'_{11}a_{66} + a_{12}a_{66}}}, m, k \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

Рассчитаем по (3.12) и (3.14) нормальные напряжения σ_{xx} . Разложив их в двойные ряды Фурье относительно функций $\sin(\alpha_n x)$ и $\sin(\beta_m y)$ и приравняв коэффициенты этих рядов получим бесконечную систему уравнений относительно X_n, Y_m :

$$\begin{aligned} & \frac{X_n (-1)^m (p_{1,n}^2 - p_{2,n}^2) (a_{11} \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)}{\eta (a_{12} + a_{66}) p_{1,n} p_{2,n} \alpha_n} \times \\ & \times \frac{(\beta_m^2 a_{66} (a_{12} \Omega_{11}^2 - (a_{11} a'_{11} - a_{12}^2) \alpha_n^2) + a_{12} \Omega_{11}^2 (a_{66} \alpha_n^2 - \Omega_{11}^2))}{a'_{11} a_{66} (\beta_m^2 + p_{1,n}^2) (\beta_m^2 + p_{2,n}^2)} + \\ & + \frac{Y_m (-1)^n (q_{1,m}^2 - q_{2,m}^2) (a'_{11} \beta_m^2 - \Omega_{11}^2)}{(a_{12} + a_{66}) q_{1,m} q_{2,m} \beta_m} \times \\ & \times \frac{(a_{11} a_{66} \alpha_n^2 \Omega_{11}^2 + (a_{66} \beta_m^2 - \Omega_{11}^2) (a_{11} \Omega_{11}^2 - (a_{11} a'_{11} - a_{12}^2) \beta_m^2))}{a_{11} a_{66} (\alpha_n^2 + q_{1,m}^2) (\alpha_n^2 + q_{2,m}^2)} = \\ & = \frac{2 \Omega_{11}^2 \sqrt{a'_{11} (a'_{11} + a_{12}) (a_{11} + a_{12})}}{\eta (a_{11} a'_{11} - a_{12}^2)} \cdot \frac{(-1)^n (-1)^m}{(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2 \frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} a'_{11} - a_{12}^2}) (\beta_m^2 - \Omega_{11}^2 \frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11} a'_{11} - a_{12}^2})} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$(n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots)$

Решив систему (3.16), получим следующие значения произвольных постоянных

ных:

$$\begin{aligned}\hat{X}_n &= -\frac{2\sqrt{a'_{11}(a'_{11}+a_{12})(a_{11}+a_{12})}(-1)^n}{\left(\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2 \frac{a'_{11}+a_{12}}{a_{11}a'_{11}-a_{12}^2}\right)} \frac{p_{1,n}p_{2,n}}{(a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)} \frac{(a_{12} + a_{66})\alpha_n}{a_{11}\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2}, \\ \hat{Y}_m &= \frac{2\sqrt{a'_{11}(a'_{11}+a_{12})(a_{11}+a_{12})}(-1)^m}{\eta \left(\beta_m^2 - \Omega_{11}^2 \frac{a_{11}+a_{12}}{a_{11}a'_{11}-a_{12}^2}\right)} \frac{q_{1,m}q_{2,m}}{(a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)} \frac{(a_{12} + a_{66})\beta_m}{a'_{11}\beta_m^2 - \Omega_{11}^2}\end{aligned}\quad (3.17)$$

Таким образом, мы получили последовательности \hat{X}_n, \hat{Y}_m , которые соответствуют перемещениям (3.13) и напряжениям (3.14). После замены $X_k = \hat{X}_k \tilde{X}_k$, $Y_k = \hat{Y}_k \tilde{Y}_k$ ($k = 1, 2, \dots$) им будут соответствовать единичное решение $\tilde{X}_k = \tilde{Y}_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots$). Произведя эту замену и опустив знак «тильда» над постоянными, преобразуем перемещения (3.12) к следующему виду:

$$\begin{aligned}U &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(B_{1,n} \frac{\text{sh}(p_{1,n}y)}{\text{ch}(p_{1,n}\eta)} + B_{2,n} \frac{\text{sh}(p_{2,n}y)}{\text{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) + \\ &+ \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(M'_{1,m} B'_{1,m} \frac{\text{ch}(q_{1,m}x)}{\text{ch}(q_{1,m})} + M'_{2,m} B'_{2,m} \frac{\text{ch}(q_{2,m}x)}{\text{ch}(q_{2,m})} \right) \sin(\beta_m y),\end{aligned}\quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}V &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(M_{1,n} B_{1,n} \frac{\text{ch}(p_{1,n}y)}{\text{ch}(p_{1,n}\eta)} + M_{2,n} B_{2,n} \frac{\text{ch}(p_{2,n}y)}{\text{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \sin(\alpha_n x) + \\ &+ \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(B'_{1,m} \frac{\text{sh}(q_{1,m}x)}{\text{ch}(q_{1,m})} + B'_{2,m} \frac{\text{sh}(q_{2,m}x)}{\text{ch}(q_{2,m})} \right) \cos(\beta_m y).\end{aligned}\quad (3.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned}B_{k,n} &= \frac{\sqrt{a'_{11}(a_{11}+a_{12})(a'_{11}+a_{12})}(a_{12}p_{3-k,n}^2 - \Omega_{11}^2 + a_{11}\alpha_n^2)\alpha_n p_{k,n}}{(p_{k,n}^2 - p_{3-k,n}^2)(a_{11}\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)((a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2(a'_{11} + a_{12}))}, \\ B'_{k,m} &= \frac{\sqrt{a'_{11}(a_{11}+a_{12})(a'_{11}+a_{12})}(a_{12}q_{3-k,m}^2 - \Omega_{11}^2 + a'_{11}\beta_m^2)\beta_m q_{k,m}}{(q_{k,m}^2 - q_{3-k,m}^2)(a'_{11}\beta_m^2 - \Omega_{11}^2)((a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)\beta_m^2 - \Omega_{11}^2(a_{11} + a_{12}))}.\end{aligned}$$

Подстановка единичного решения $\tilde{X}_k = \tilde{Y}_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots$) в представление (3.18), (3.19) приводит к следующим тождествам:

$$\begin{aligned}&-2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(B_{1,n} \frac{\text{sh}(p_{1,n}y)}{\text{ch}(p_{1,n}\eta)} + B_{2,n} \frac{\text{sh}(p_{2,n}y)}{\text{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) + \\ &+ \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(M'_{1,m} B'_{1,m} \frac{\text{ch}(q_{1,m}x)}{\text{ch}(q_{1,m})} + M'_{2,m} B'_{2,m} \frac{\text{ch}(q_{2,m}x)}{\text{ch}(q_{2,m})} \right) \sin(\beta_m y) = \\ &= \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\cos(\Omega_{11}^* x) \sin(\Omega_{12}^* y)}{\cos(\Omega_{11}^* \eta) \cos(\Omega_{12}^* \eta)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(M_{1,n} B_{1,n} \frac{\operatorname{ch}(p_{1,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{1,n}\eta)} + M_{2,n} B_{2,n} \frac{\operatorname{ch}(p_{2,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \sin(\alpha_n x) + \\
& + \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(B'_{1,m} \frac{\operatorname{sh}(q_{1,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{1,m})} + B'_{2,m} \frac{\operatorname{sh}(q_{2,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{2,m})} \right) \cos(\beta_m y) = \\
& = -\frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\sin(\Omega_{11}^* x) \cos(\Omega_{12}^* y)}{\cos(\Omega_{11}^* \eta) \cos(\Omega_{12}^* \eta)}.
\end{aligned}$$

Разложим функции в граничных условиях для нормальных напряжений в ряды Фурье:

$$f(y) = \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m f_m \sin(\beta_m y); g(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n g_n \sin(\alpha_n x). \quad (3.20)$$

Для краевой задачи, соответствующей напряжениям (3.14), получатся следующие коэффициенты граничных условий:

$$\begin{aligned}
f_m &= \sqrt{a_{11}} \frac{\Omega_{12}^*}{\beta_m^2 + \Omega_{12}^{*2}} \operatorname{tg}(\Omega_{11}^*) \quad (m = 1, 2, \dots) \\
g_n &= -\frac{1}{\sqrt{a'_{11}}} \frac{\Omega_{11}^*}{\alpha_n^2 - \Omega_{11}^{*2}} \operatorname{tg}(\Omega_{12}^* \eta) \quad (n = 1, 2, \dots)
\end{aligned} \quad (3.21)$$

Подстановка напряжений, рассчитанных по перемещениям (3.18), (3.19), в граничные условия для нормальных напряжений после известной процедуры [1] метода суперпозиции приводит к парной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов X_k, Y_k ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} X_n \Delta_n = \frac{1}{a'_{11} \eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \frac{A_{n,m}}{(a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)\beta_m^2 - (a_{11} + a_{12})\Omega_{11}^2} + g_n \\ Y_m \Delta_m^* = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{A_{n,m}}{(a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)\alpha_n^2 - (a'_{11} + a_{12})\Omega_{11}^2} - f_m, \end{cases} \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \frac{1}{a'_{11}} (B_{1,n}(\alpha_n a_{12} - M_{1,n} p_{1,n} a'_{11}) \operatorname{th}(p_{1,n} \eta) + B_{2,n}(\alpha_n a_{12} - M_{2,n} p_{2,n} a'_{11}) \operatorname{th}(p_{2,n} \eta)) \\
\Delta_m^* &= (B'_{1,m}(\beta_m a_{12} - M'_{1,m} q_{1,m} a_{11}) \operatorname{th}(q_{1,m}) + B'_{2,m}(\beta_m a_{12} - M'_{2,m} q_{2,m} a_{11}) \operatorname{th}(q_{2,m})) \\
A_{n,m} &= 2\sqrt{a'_{11}(a_{11} + a_{12})(a'_{11} + a_{12})} \times \\
& \times \frac{(a_{12}\Omega_{11}^4 - a_{12}a_{66}\Omega_{11}^2\beta_m^2 + a_{66}\alpha_n^2((a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)\beta_m^2 - a_{12}\Omega_{11}^2))}{a_{11}a_{66}(\alpha_n^2 + q_{1,m}^2)(\alpha_n^2 + q_{2,m}^2)}.
\end{aligned}$$

Для остальных типов симметрий представления решений строятся аналогичным образом. В случае симметричных по двум осям колебаний в качестве последовательностей α_n и β_m выберем $\alpha_n = n\pi$ и $\beta_m = m\pi/\eta$. Тогда, используя указанные

выше обозначения, получим следующие выражения для перемещений:

$$\begin{aligned}
 U = & 2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(B_{1,n} \frac{\text{ch}(p_{1,n}y)}{\text{sh}(p_{1,n}\eta)} + B_{2,n} \frac{\text{ch}(p_{2,n}y)}{\text{sh}(p_{2,n}\eta)} \right) \sin(\alpha_n x) + \\
 & + \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(M'_{1,m} B'_{1,m} \frac{\text{sh}(q_{1,m}x)}{\text{sh}(q_{1,m})} + M'_{2,m} B'_{2,m} \frac{\text{sh}(q_{2,m}x)}{\text{sh}(q_{2,m})} \right) \cos(\beta_m y) + \quad (3.23) \\
 & + Y_0 \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} + a_{12}}} \frac{\sqrt{a'_{11}} \sin(\Omega_{11}x/\sqrt{a_{11}})}{\eta \Omega_{11}^2 \sin(\Omega_{11}/\sqrt{a_{11}})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V = & -2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(M_{1,n} B_{1,n} \frac{\text{sh}(p_{1,n}y)}{\text{sh}(p_{1,n}\eta)} + M_{2,n} B_{2,n} \frac{\text{sh}(p_{2,n}y)}{\text{sh}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) - \\
 & - \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(B'_{1,m} \frac{\text{ch}(q_{1,m}x)}{\text{sh}(q_{1,m})} + B'_{2,m} \frac{\text{ch}(q_{2,m}x)}{\text{sh}(q_{2,m})} \right) \sin(\beta_m y) - \quad (3.24) \\
 & - X_0 \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a'_{11} + a_{12}}} \frac{\sqrt{a'_{11}} \sin(\Omega_{11}y/\sqrt{a'_{11}})}{\Omega_{11}^2 \sin(\Omega_{11}\eta/\sqrt{a'_{11}})}
 \end{aligned}$$

Единичному решению для перемещений (3.23),(3.24) соответствуют следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\sin(\Omega_{11}^*x) \cos(\Omega_{12}^*y)}{\sin(\Omega_{11}^*) \sin(\Omega_{12}^*\eta)}; \\
 V = & -\frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\cos(\Omega_{11}^*x) \sin(\Omega_{12}^*y)}{\sin(\Omega_{11}^*) \sin(\Omega_{12}^*\eta)}; \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Перемещения (3.25) будут собственными модами колебаний при следующих соотношениях сторон и перемещениях:

$$\eta = \frac{2m - 1}{2k - 1} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} + a_{12}}}, \Omega = (2k - 1) \sqrt{\frac{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}{(a'_{11} + a_{12})a_{66}}}, m, k \in \mathbb{N}$$

В случае симметричных относительно оси OY и антисимметричных относительно оси OX колебаний для того, чтобы последовательности функций $\cos(\alpha_n x)$ и $\sin(\beta_m y)$ были полны, выберем $\alpha_n = n\pi$ и $\beta_m = (2m - 1)\pi/2\eta$. Перемещения в этом случае будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U = & -2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(B_{1,n} \frac{\text{sh}(p_{1,n}y)}{\text{ch}(p_{1,n}\eta)} + B_{2,n} \frac{\text{sh}(p_{2,n}y)}{\text{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \sin(\alpha_n x) + \\
 & + \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(M'_{1,m} B'_{1,m} \frac{\text{sh}(q_{1,m}x)}{\text{sh}(q_{1,m})} + M'_{2,m} B'_{2,m} \frac{\text{sh}(q_{2,m}x)}{\text{sh}(q_{2,m})} \right) \sin(\beta_m y) \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(M_{1,n} B_{1,n} \frac{\operatorname{ch}(p_{1,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{1,n}\eta)} + M_{2,n} B_{2,n} \frac{\operatorname{ch}(p_{2,n}y)}{\operatorname{ch}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) + \\
&+ \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(B'_{1,m} \frac{\operatorname{ch}(q_{1,m}x)}{\operatorname{sh}(q_{1,m})} + B'_{2,m} \frac{\operatorname{ch}(q_{2,m}x)}{\operatorname{sh}(q_{2,m})} \right) \cos(\beta_m y) + \\
&+ X_0 \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a'_{11} + a_{12}}} \frac{\sqrt{a'_{11}} \cos(\Omega_{11}y/\sqrt{a'_{11}})}{\Omega_{11}^2 \cos(\Omega_{11}\eta/\sqrt{a'_{11}})}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Единичному решению соответствуют перемещения:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\sin(\Omega_{11}^*x) \sin(\Omega_{12}^*y)}{\sin(\Omega_{11}^*) \cos(\Omega_{12}^*\eta)}, \\
V &= \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\cos(\Omega_{11}^*x) \cos(\Omega_{12}^*y)}{\sin(\Omega_{11}^*) \cos(\Omega_{12}^*\eta)},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Для данного типа симметрии перемещения (3.28) будут собственными модами колебаний при

$$\eta = \frac{2m}{2k-1} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} + a_{12}}}, \quad \Omega = (2k-1) \sqrt{\frac{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}{(a'_{11} + a_{12})a_{66}}}, \quad m, k \in \mathbb{N}$$

В случае антисимметричных относительно оси ОУ и симметричных относительно оси ОХ напряжений выберем последовательности $\alpha_n = (2n-1)\pi/2$ и $\beta_m = m\pi/\eta$ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
U &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(B_{1,n} \frac{\operatorname{ch}(p_{1,n}y)}{\operatorname{sh}(p_{1,n}\eta)} + B_{2,n} \frac{\operatorname{ch}(p_{2,n}y)}{\operatorname{sh}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) + \\
&+ \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(M'_{1,m} B'_{1,m} \frac{\operatorname{ch}(q_{1,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{1,m})} + M'_{2,m} B'_{2,m} \frac{\operatorname{ch}(q_{2,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{2,m})} \right) \cos(\beta_m y) \\
&+ Y_0 \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} + a_{12}}} \frac{\sqrt{a'_{11}} \cos(\Omega_{11}x/\sqrt{a'_{11}})}{\eta \Omega_{11}^2 \cos(\Omega_{11}/\sqrt{a'_{11}})}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
V &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n (-1)^n \left(M_{1,n} B_{1,n} \frac{\operatorname{sh}(p_{1,n}y)}{\operatorname{sh}(p_{1,n}\eta)} + M_{2,n} B_{2,n} \frac{\operatorname{sh}(p_{2,n}y)}{\operatorname{sh}(p_{2,n}\eta)} \right) \cos(\alpha_n x) + \\
&+ \frac{2}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} Y_m (-1)^m \left(B'_{1,m} \frac{\operatorname{sh}(q_{1,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{1,m})} + B'_{2,m} \frac{\operatorname{sh}(q_{2,m}x)}{\operatorname{ch}(q_{2,m})} \right) \sin(\beta_m y)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Единичное решение суммируется к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\cos(\Omega_{11}^*x) \cos(\Omega_{12}^*y)}{\cos(\Omega_{11}^*) \sin(\Omega_{12}^*\eta)}, \\
V &= -\frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Omega_{11}} \sqrt{\frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}} \frac{\sin(\Omega_{11}^*x) \sin(\Omega_{12}^*y)}{\cos(\Omega_{11}^*) \sin(\Omega_{12}^*\eta)},
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Перемещения (3.31) будут собственными модами колебаний при

$$\eta = \frac{2m-1}{2k} \sqrt{\frac{a'_{11} + a_{12}}{a_{11} + a_{12}}}, \Omega = 2k \sqrt{\frac{a_{11}a'_{11} - a_{12}^2}{(a'_{11} + a_{12})a_{66}}}, m, k \in \mathbb{N}.$$

4. Определение собственных частот и форм колебаний

Для исследования регулярности бесконечной системы необходимо найти сумму абсолютных величин коэффициентов для каждого уравнения системы, разделенные на коэффициент в левой части. Для нахождения сумм коэффициентов уравнений будем использовать метод, предложенный в [13]. Применим его к системе (3.22). Система была построена так, чтобы краевой задаче с коэффициентами (3.21) соответствовало единичное решение $X_k = Y_k = 1 (k = 1, 2, \dots)$. Подстановка X_k и Y_k в (3.22) обращает каждое уравнение в тождество, из которого можно элементарным образом получить выражения для сумм:

$$Sx_n = \frac{1}{\Delta_n a'_{11} \eta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{n,m}}{(a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)\beta_m^2 - (a_{11} + a_{12})\Omega_{11}^2} = 1 + \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Delta_n a'_{11}} \operatorname{tg}(\Omega_{12}^* \eta) \frac{\Omega_{11}^*}{\alpha_n^2 - \Omega_{11}^{*2}}$$

$$Sy_m = \frac{1}{\Delta_m^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n,m}}{(a_{11}a'_{11} - a_{12}^2)\alpha_n^2 - (a'_{11} + a_{12})\Omega_{11}^2} = 1 + \frac{\sqrt{a'_{11}}}{\Delta_m^*} \operatorname{tg}(\Omega_{11}^*) \frac{\Omega_{12}^*}{\beta_m^2 - \Omega_{12}^{*2}}$$

При достаточно небольших частотах все коэффициенты парной бесконечной системы линейных уравнений (3.22) положительны, поэтому сумма модулей совпадает с суммой коэффициентов. Из полученных формул следует, что система не является регулярной ни при какой частоте, поскольку все суммы больше единицы. Однако её возможно свести к нескольким регулярным системам с одинаковой матрицей с помощью операции исключения переменных, описанной в [15].

Проиллюстрируем данную операцию на бесконечной системе линейных уравнений в каноническом виде. Пусть мы хотим исключить первых N неизвестных x_n бесконечной системы $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} x_k + b_n (n=1, 2, \dots)$. Тогда заменой (4.1) она будет сведена к системам (4.2).

$$x_n = x_n^* + \sum_{k=1}^N x_n^{(k)} x_k, \quad (n = N+1, N+2, \dots) \quad (4.1)$$

$$x_k^* = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_{k,n} x_n^* + b_k; \quad x_k^{(j)} = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_{k,n} x_n^{(j)} + c_{k,j}, \quad (4.2)$$

$$(k = N+1, N+2, \dots; j = 1, 2, \dots, N)$$

Подставив (4.1) и решение систем (4.2) в первые N уравнений бесконечной системы, получим следующую конечную систему уравнений, решив которую получим

значения для первых N неизвестных системы:

$$x_n = \sum_{k=1}^N \left(c_{n,k} + \sum_{m=N+1}^{\infty} c_{n,m} x_m^{(k)} \right) x_k + \left(b_k + \sum_{m=N+1}^{\infty} c_{n,m} x_m^* \right). \quad (4.3)$$

В случае системы (3.22), возможно добиться регулярности систем (4.2), исключив достаточное количество неизвестных. Тогда вопрос о разрешимости системы будет сведен к вопросу о разрешимости конечной системы (4.3).

Наличие у бесконечной системы (3.22) решения, которое стремится к ненулевой константе, позволяет сделать предположение о том, что и в общем случае справедлив асимптотический закон для решения бесконечной системы:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = L. \quad (4.4)$$

С учетом этого предположения, для решения задачи можно применить метод [2] улучшенной редукции. Согласно данному методу, делается предположение, что начиная с некоторого номера P , все неизвестные совпадают с пределом L . Произведём следующую замену:

$$\begin{aligned} X_k &= \tilde{X}_k + \hat{X}_k L, \quad Y_k = \tilde{Y}_k + \hat{Y}_k L \quad (k = 1, 2, \dots, P-1); \\ X_k &= L, \quad Y_k = L \quad (k = P, P+1, \dots) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Данная замена приводит к двум системам линейных алгебраических уравнений с одинаковой матрицей относительно \tilde{X}_k, \tilde{Y}_k и \hat{X}_k, \hat{Y}_k . Для нахождения предела L воспользуемся подходом, аналогичным изложенному в [2]. Приравняв разность нормальных напряжений в угловых точках границы к известному из заданных граничных условий значению, получаем зависимость между решением бесконечной системы, входящем в бесконечные ряды для напряжений:

$$\sigma_{xx}(1, \eta) - \sigma_{yy}(1, \eta) = f(\eta) - g(1). \quad (4.6)$$

Подстановка выражений для напряжений приводит к линейному уравнению относительно L . Ряды в этом уравнении сходятся быстро, поэтому в основном определяются значениями первых неизвестных.

Для определения собственных частот воспользуемся тем фактом, что задача о свободных колебаниях имеет нетривиальное решение. В силу этого собственные частоты будут нулями определителя (4.3), а нетривиальное решение - собственными формами колебаний.

Собственные частоты и формы были численно исследованы для случая квадратной ортотропной призмы с $\nu_1 = 0.3/\sqrt{2}$, $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, рассмотренной в статье [10]. Для определения частот исключались первые 8 неизвестных в соответствующих бесконечных системах, после чего находились нули определителя конечной системы (4.3). Были определены первые 7 собственных частот и форм колебаний для каждого из видов симметрий. Полученные частоты приведены в таблицах 1, 2, 3, 4. В данных таблицах для сравнения приведены собственные

частоты, полученные в статье [10]. Поскольку частота вводилась другим образом, они были разделены на $\pi/2$. Собственные формы отображены на рисунках 1, 2, 3, 4.

Таблица 1. Собственные частоты квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, соответствующие антисимметричным относительно осей ОХ и ОУ колебаниям

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\Omega^{(k)}$ | 1,2457 | 2,2760 | 2,6380 | 2,9287 | 3,5071 | 4,0102 | 4,1802 |
| [10] | 1,2457 | 2,2760 | 2,6380 | 2,9287 | 3,5072 | 4,0102 | 4,1806 |

Таблица 2. Собственные частоты квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, соответствующие антисимметричным относительно оси ОХ и симметричным относительно оси ОУ колебаниям

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\Omega^{(k)}$ | 1,1589 | 1,9748 | 2,6660 | 3,4564 | 3,5911 | 4,0525 | 4,3021 |
| [10] | 1,1589 | 1,9748 | 2,6661 | 3,4565 | 3,5911 | 4,0525 | 4,3022 |

Таблица 3. Собственные частоты квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, соответствующие симметричным относительно оси ОХ и антисимметричным относительно оси ОУ колебаниям

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\Omega^{(k)}$ | 1,4834 | 2,0370 | 2,6591 | 2,8526 | 3,4021 | 3,6847 | 4,1912 |
| [10] | 1,4835 | 2,0371 | 2,6592 | 2,8526 | 3,4022 | 3,6848 | 4,1912 |

5. Обсуждение полученных результатов

В данной работе предложено обобщение результатов, полученных в [12] на все другие формы симметрии. Для каждой из форм получены обобщения мод Ламе, построены аналитические представления решения. Методом суперпозиции получена бесконечная система линейных уравнений, которая отличается от известных [6, 9, 10] тем, что имеет точное единичное решение при специальных значениях свободных членов. Подстановка единичного решения и этих специальных свободных членов превращает все уравнения системы в тождества, которые позволяют элементарно записать точные аналитические выражения для сумм коэффициентов каждой строки матрицы бесконечной системы. Произведено исследование

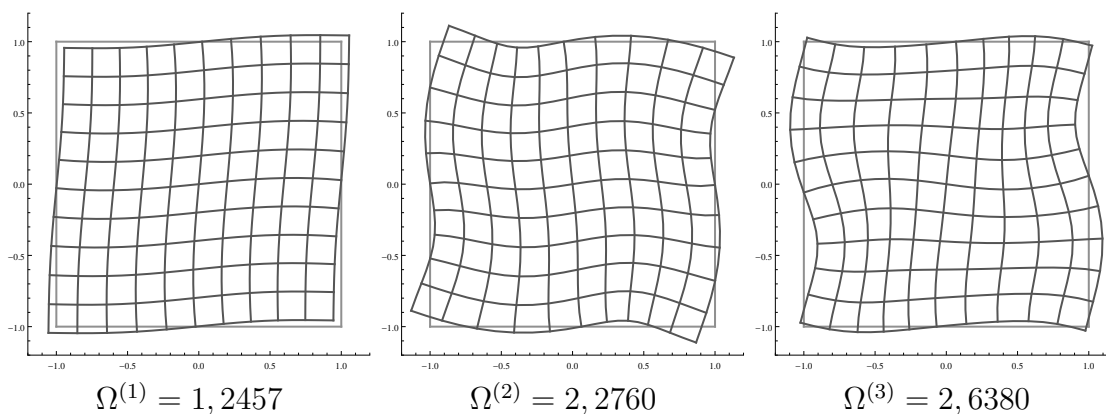


Рис. 1. Собственные формы колебаний квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, антисимметричные относительно осей OX и OY

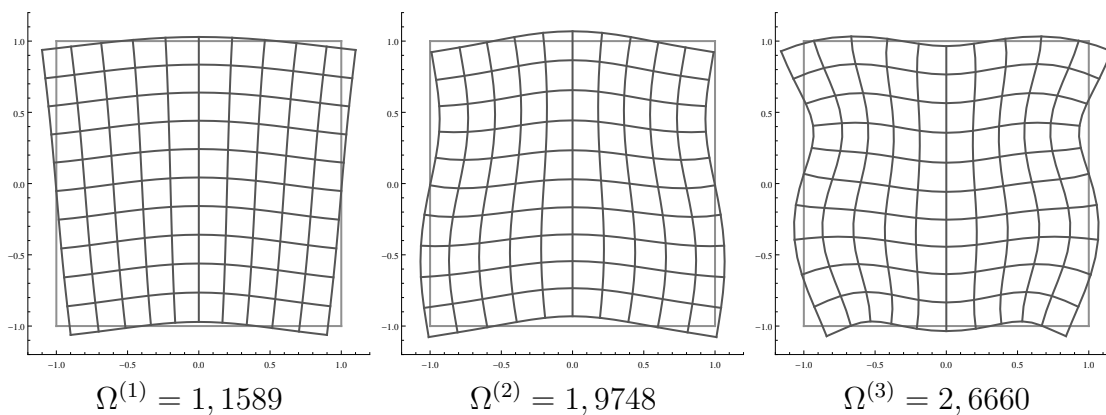


Рис. 2. Собственные формы колебаний квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, антисимметричные относительно оси OX и симметричные относительно оси OY

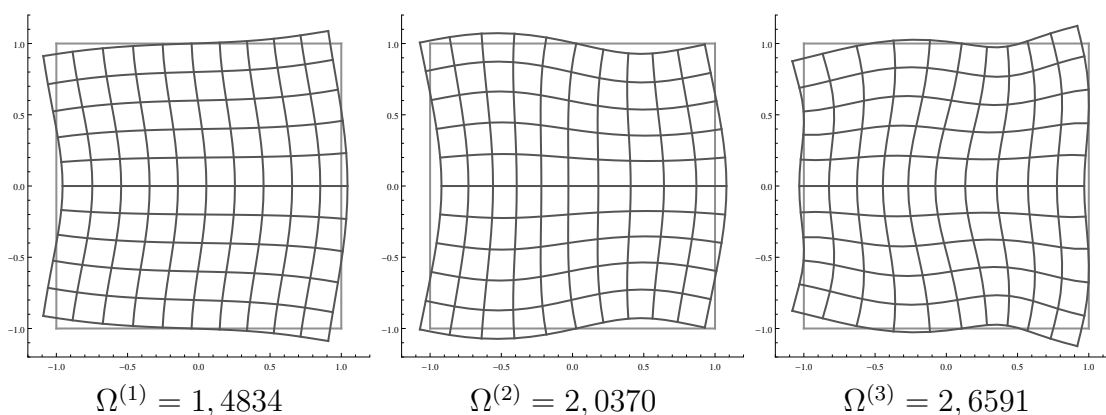


Рис. 3. Собственные формы колебаний квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, антисимметричные относительно оси OX и симметричные относительно оси OY

Таблица 4. Собственные частоты квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, соответствующие симметричным относительно осей ОХ и ОУ колебаниям

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\Omega^{(k)}$ | 1,3094 | 1,5939 | 2,0346 | 2,7269 | 3,2399 | 3,9374 | 4,0980 |
| [10] | 1,3095 | 1,5939 | – | 2,7269 | 3,2401 | 3,9374 | 4,0980 |

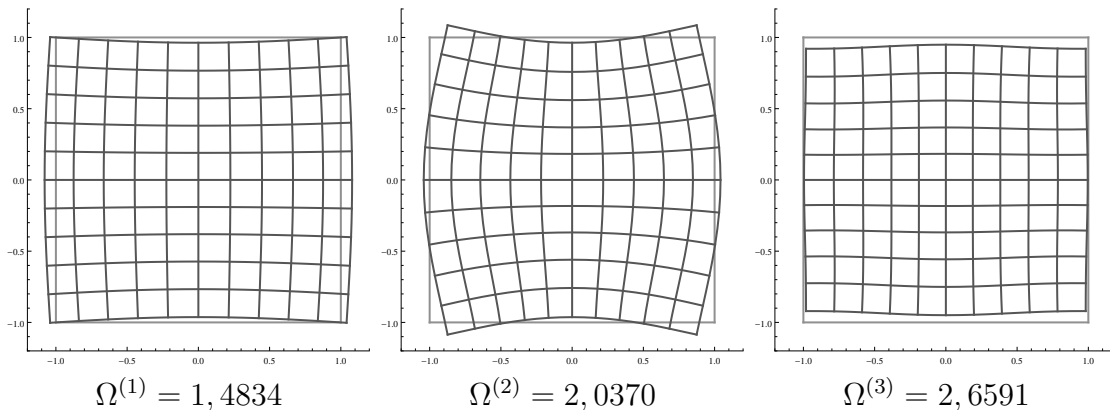


Рис. 4. Собственные формы колебаний квадратной призмы при $\nu_2 = 0.3\sqrt{2}$, $\nu_2/\nu_1 = 2$, $G/E_1 = \sqrt{2}/2.6$, симметричные относительно осей ОХ и ОУ

регулярности полученных систем. Бесконечная система для антисимметричных относительно двух осей колебаний, в отличие от симметричного случая [12], не удовлетворяет условию регулярности ни при какой частоте. Однако регулярности можно добиться при помощи исключения из бесконечной системы неизвестных по способу, предложенному в [15]. Данный подход позволил получить собственные частоты для колебаний всех типов симметрий квадратной призмы при заданных параметрах материала. Первые четыре значащие цифры совпали с результатами, полученными в [10], а для случая колебаний, обладающих двойной симметрией, обнаружена частота, не указанная в [10]. Построены собственные формы колебаний как нетривиальные решения при найденных собственных частотах.

Список цитируемых источников

1. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — К.: Наук. думка, 1978. — 264 с.
V.T. Grinchenko Equilibrium and steady-state oscillations of elastic bodies of finite dimensions (Russian). Kyev: Naukova Dumka. 264 (1978).
2. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. — К.: Наук. думка, 1981. — 284 с.

- V.T. Grinchenko, V.V. Meleshko* Harmonic vibrations and waves in elastic bodies (Russian). Kyev: Naukova Dumka. 284 (1981).
3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки — М.: Наука, 1966. — 636 с.
S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill. 580 (1959).
 4. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.
S.P. Timoshenko, D.H. Young, W. Weaver Vibration problems in engineering. 4th ed. New York, Wiley, 521 (1974).
 5. *Gorman D.J.* Free vibration analysis of rectangular plates, Elsevier, North Holland, Inc., New York: 1982, — 324 p.
 6. *Gorman D.J.* Accurate in-plane free vibration analysis of rectangular orthotropic plates // Journal of Sounds and Vibration 323 (2009), — 426–443 pp.
 7. *Gorman D.J., Yu S.D.* A review of the superposition method for computing free vibration eigenvalues of elastic structures // Computers and Structures — 2012, — 104–105, — 27–37 pp.
 8. *Leissa A.W.* Vibration of plates. — NASA SP-160, — 353 pp. 1969, reprint by The Acoustical Society of America, 1993.
 9. *Папков С.О.* Установившиеся вынужденные колебания прямоугольной ортотропной призмы // Мат. методы и физ.-мех. поля. 2012 — 55, № 2. — С. 177–185.
S.O. Papkov Steady-state forced vibrations of a rectangular orthotropic plate // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 173, No. 2, April, 1–12 (2012).
 10. *Papkov S.O.* A new method for analytical solution of inplane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems // Journal of Sound and Vibration 339 (2015), — 342–358 pp.
 11. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.; Л.: Гостехиздат, 1957 — 464 с.
Lekhnitskii S.G. Anisotropic Plates — Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1962 — 534 pp.
 12. *Ляшко А.Д., Чехов В.Н.* О регулярности бесконечных систем для установившихся вынужденных колебаний ортотропных прямоугольных призм // Динамические системы. — 2015 — Т.5(33), №1-2. — С. 113-124
Lyashko A.D., Chekhov V.N On regularity of infinite systems for steady-state oscillations of orthotropic rectangular prisms. Dinamicheskie Systemy 5(33), No.1-2, 113-124 (2015).
 13. *Пан А.В., Чехов В.Н.* Некоторые тождества для волновых уравнений и приложения их в исследовании вынужденных колебаний прямоугольной призмы // Крымская международная математическая конференция. Судак, Украина — Сб. Тезисов. 2013.— С. 77.
Pan A.V., Chekhov V.N. Some identities for the wave equations and their applications in the study of forced oscillations of a rectangular prism // In Book of Abstr. Crimea International Mathematical Conf. Sudak, Ukraine, 77 (2013).

14. *Чехов В.Н., Пан А.В.* О регулярности бесконечных систем для установившихся колебаний изотропных прямоугольных призм // *Динамические системы.* — 2016 — Т.6(34), №4. — С. 295-310.
Chekhov V.N., Pan A.V. On regularity of infinite systems for steady-state oscillations of isotropic rectangular prisms. *Dinamicheskie sistemy* 6(34), №4, 295-310 (2016).
15. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. — М. — Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.
16. *Timoshenko S.P.* Bending of rectangular plates with clamped edges // In: *Proc. Fifth Intern. Congress for Applied Mechanics.* Wiley, New York — 1939, — 40–43 pp.

Получена 03.03.2018

УДК 532.6,534

О способах аналитического расчета условий развития неустойчивости горизонтальной поверхности вязкой жидкости, совершающей вертикальные колебания

Д. Ф. Белоножко, А. В. Апарнева

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль 150023. *e-mail: belonozhko@mail.ru*

Аннотация. Проведен сравнительный анализ двух аналитических асимптотических методов расчета условий возникновения неустойчивости, наблюдаемой на поверхности горизонтального слоя вязкой жидкости, совершающего вертикальные колебания: метода сведения задачи к интегро-дифференциальному уравнению относительно амплитуды возмущения и метода, опирающегося на применение теории Флоке к системе с несколькими переменными. Показано, что некоторые известные работы по данному вопросу содержат некорректности, которые существенно усложняют сопоставление и верификацию результатов, полученных разными методами.

Ключевые слова: неустойчивость Фарадея, вязкая жидкость, свободная поверхность, теория Флоке.

On analytical calculation methods of instability conditions of horizontal surface of a viscous liquid committing vertical oscillations

D. F. Belonozhko, A. V. Aparneva

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

Abstract. A comparative analysis has been conducted for two analytical asymptotic methods for calculation of instability conditions of a horizontal surface of a viscous liquid which commits periodic vertical oscillations. The first method leads to integro-differential equation for amplitude of surfaces perturbations. Second one is based on the Floquet's theory applied directly to the system of several variables. It has been shown that some well known publications on the subject contain improprieties which essentially complicate juxtaposition and verification of results obtained by different methods. It has been revealed the second method is more preferable for analysis of the Faraday instability in more complicated cases such as the problem with vertically oscillating two-layer liquid or a liquid with surfactant film on it's surface etc.

Keywords: Faraday instability, viscous liquid, free surface, Floquet's theory.

MSC 2010: 76E17

Введение

Более полутора столетия назад знаменитый английский физик-экспериментатор Майкл Фарадей описал явление, которое с тех пор носит его имя — «неустойчивость Фарадея» [9]. Речь идет о «ряби Фарадея», которая возникает на изначально спокойной поверхности горизонтального слоя жидкости, начинающего совершать малые вертикальные колебания достаточно высокой частоты. Если действовать в рамках теории идеальной несжимаемой жидкости, моделирование этого явления не вызывает каких-то принципиальных трудностей [5]. Однако, для вязкой жидкости, особенно если требуется учесть дополнительные динамические эффекты [6], [8], вопросы анализа условий реализации неустойчивости Фарадея до сих пор разработаны недостаточно основательно.

Настоящая работа посвящена сравнительному анализу двух подходов к аналитическому асимптотическому расчету влияния вязкости на условия возникновения неустойчивости Фарадея, схематично описанных в часто цитируемой монографии [3]. В первом случае предлагается специальная схема исключения и замены переменных [3], сводящая задачу к интегро-дифференциальному уравнению относительно одной неизвестной — амплитуды волнового возмущения свободной поверхности. Согласно [3], анализ построенного уравнения дает возможность рассчитать условия развития неустойчивости. Во втором случае непосредственно ко всем неизвестным задачи (компонентам поля скоростей, давлению и возмущению свободной поверхности) применяется подстановка, продиктованная теорией Флоке, которая сводит задачу к бесконечной системе линейных алгебраических однородных уравнений относительно вспомогательных констант. Анализ условий разрешимости этой системы тоже позволяет найти условия развития неустойчивости. Именно второй подход используется большинством авторов [7],[10].

Представляется весьма заманчивым иметь надежный метод сведения задач рассматриваемого типа к уравнению относительно одной переменной. Однако, изложение соответствующей методики, представленное в [3] и в цитируемой авторами этой работы литературе, слишком слабо детализировано. Оно изобилует многочисленными опечатками и некоррекциями, значительно затрудняющими воспроизведение ключевых выкладок. Как показано в [1], даже само интегро-дифференциальное уравнение для амплитуды возмущения (впоследствии цитируемое другими исследователями, см., например, [12]) записано с ошибкой.

В настоящей работе мы постарались дать откорректированное и доступное для воспроизведения изложение методики [3], с помощью которой задача о расчете условий развития неустойчивости Фарадея на горизонтальной поверхности вязкой жидкости сводится к интегро-дифференциальному уравнению относительно одной переменной. Ставилась цель проанализировать целесообразность и эффективность этой методики по сравнению с методом применения теории Флоке к несколькими переменными.

1. Математическая формулировка задачи

Пусть несжимаемая жидкость с плотностью ρ , кинематической вязкостью ν и коэффициентом поверхностного натяжения γ заполняет полупространство $z < 0$ в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с осью z , направленной вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести \mathbf{g} . Система совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой a и круговой частотой 2ω . Ставилась задача исследовать устойчивость равновесного состояния системы по отношению к малым возмущениям $z = \xi(t, x)$ свободной поверхности жидкости (здесь t — время). Для простоты считалось, что поле скоростей и давлений не зависит от второй горизонтальной координаты y .

Математическая формулировка задачи расчета возмущенного поля скоростей и поля давления состоит из уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. На свободной поверхности и на глубине задавались стандартные для таких уравнений краевые условия. В первом приближении по амплитуде возмущения задача имеет следующий вид [3],[1]:

$$\begin{aligned} z > \xi : \quad \partial_t u + \frac{1}{\rho} \partial_x p - \nu (\partial_{xx} u + \partial_{zz} u) = 0; \quad \partial_t v + \frac{1}{\rho} \partial_x p - \nu (\partial_{xx} v + \partial_{zz} v) = 0; \\ \partial_x u + \partial_z v = 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} z = \xi : \quad \partial_t \xi - v = 0; \\ -\rho g \xi + 4a\omega^2 \rho \xi \cos(2\omega t) + p - 2\rho\nu \partial_z v + \gamma \partial_{xx} \xi = 0; \quad \partial_z u + \partial_x v = 0; \\ z \rightarrow -\infty : \quad u \rightarrow 0; \quad v \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь $u \equiv u(t, x, z)$ и $v \equiv v(t, x, z)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей; $p \equiv p(t, x, z)$ — возмущение равновесного значения давления. Задача (1.1) приводилась к безразмерным переменным, в которых $\rho = g = \gamma = 1$. По времени t осуществлялся переход к вспомогательному параметру $\tau = \omega t$:

$$z < 0 : \quad \omega \partial_\tau u + \partial_x p - \nu (\partial_{xx} u + \partial_{zz} u) = 0; \quad (1.2)$$

$$\omega \partial_\tau v + \partial_x p - \nu (\partial_{xx} v + \partial_{zz} v) = 0; \quad (1.3)$$

$$\partial_x u + \partial_z v = 0; \quad (1.4)$$

$$z = 0 : \quad \omega \partial_\tau \xi - v = 0; \quad (1.5)$$

$$-\xi + 4a\omega^2 \xi \cos(2\tau) + p - 2\nu \partial_z v + \partial_{xx} \xi = 0; \quad (1.6)$$

$$\partial_z u + \partial_x v = 0; \quad (1.7)$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad u \rightarrow 0; \quad v \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

Именно такая формулировка является предметом дальнейшего рассмотрения.

2. Сведение задачи к интегро-дифференциальному уравнению

Согласно [3], решение задачи (1.2)-(1.8) следует искать в следующем виде:

$$\xi = \zeta(\tau) \exp(ikx); \quad p = P(\tau, z) \exp(ikx); \quad (2.1)$$

$$u = h(\tau, z) \exp(ikx); \quad v = w(\tau, z) \exp(ikx).$$

Здесь k — волновое число возмущения, амплитуда которого $\zeta(t)$ мала по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$. Подставляя (2.1) в (1.2)-(1.8), несложно исключить неизвестную $h(t, z)$. Задача (1.2)-(1.8) преобразуется к новому виду:

$$z < 0: \quad \omega \partial_\tau w + kP - \nu(\partial_{zz}w - k^2w) = 0; \quad (2.2)$$

$$z = 0: \quad \omega \partial_\tau \zeta - w = 0; \quad (2.3)$$

$$-\zeta(1 + k^2) + 4a\omega^2 \zeta \cos(2\tau) + P - 2\nu \partial_z w = 0; \quad (2.4)$$

$$\partial_{zz}w + k^2w = 0; \quad (2.5)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad w \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

В (2.2) учтено, что давление p удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа $\partial_{xx}p + \partial_{zz}p = 0$. Для доказательства этого факта необходимо продифференцировать уравнения (1.2), (1.3) соответственно по x и по z , сложить их и учесть выполнение соотношения (1.4). Из уравнения Лапласа для p и стремления этой величины к нулю при $z \rightarrow -\infty$ (вместе с w) следует, что вспомогательная функция $P \equiv P(\tau, z)$, введенная в (2.1), является пропорциональной $\exp(kz)$. Очевидно, что $\partial_z P = kP$.

С помощью граничных условий (2.3)-(2.5) уравнение (2.2) при $z = 0$ преобразуется к соотношению [1]:

$$\omega^2 \ddot{\zeta} + 2\nu k^2 \omega \dot{\zeta} + \zeta(k^3 + k - 4ak\omega^2 \cos(2\tau)) = -2\nu k \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (2.7)$$

Здесь и далее точка над величиной означает дифференцирование по τ . В работе [3] это уравнение приведено с досадными опечатками, которые исправлены в [1].

Для исключения из (2.7) переменной $w \equiv w(\tau, z)$ авторы [3] предложили использовать вспомогательную функцию:

$$\psi \equiv \psi(\tau, z) = \partial_{zz}w - k^2w. \quad (2.8)$$

Если из правой части (2.8) вычесть левую часть граничного условия на касательные натяжения (2.5), то получится, что $\psi(\tau, 0) = -2k^2w(\tau, 0)$. Построенное соотношение с помощью (2.3) преобразуется в граничное условие, которое не зависит явным образом от переменной w :

$$\psi(\tau, 0) = -2\omega k^2 \dot{\zeta}. \quad (2.9)$$

Применяя к обеим частям (2.2) оператор $\partial_{zz} - k^2$ и учитывая, что P пропорционально $\exp(kz)$, несложно построить уравнение для вспомогательной функции $\psi(\tau, z)$:

$$z < 0: \quad \omega \partial_\tau \psi = \nu (\partial_{zz} \psi - k^2 \psi). \quad (2.10)$$

С помощью замены переменной

$$\psi = \Psi \exp\left(-\frac{\nu k^2}{\omega} \tau\right) \quad (2.11)$$

уравнение (2.10) преобразуется к однородному уравнению типа теплопроводности, с граничным условием, не содержащим величину w :

$$\partial_\tau \Psi - \frac{\nu}{\omega} \partial_{zz} \Psi = 0; \quad (2.12)$$

$$\Psi(\tau, 0) = -2\omega k^2 \dot{\zeta} \exp\left(\frac{\nu k^2}{\omega} \tau\right). \quad (2.13)$$

Решение краевой задачи (2.12), (2.13) с нулевым начальным условием хорошо известно (см. [1] и цитируемую там литературу). С его помощью легко выписать выражение для ψ :

$$\psi(x, \tau) = -\frac{\omega^{3/2} k^2}{\sqrt{\pi \nu}} \int_0^\tau \frac{z}{\sigma^{3/2}} \exp\left(-\frac{\omega z^2}{4\nu \sigma}\right) \exp\left(-\frac{\nu k^2 \sigma}{4\omega}\right) \dot{\zeta}(\tau - \sigma) d\sigma. \quad (2.14)$$

Следует отметить, что авторы [3] получили аналогичное выражение, но без каких-либо пояснений заменили в нем верхний предел интегрирования на бесконечность.

Подставляя (2.14) в соотношение (2.8) и решая получившееся неоднородное уравнение относительно w (важно учесть, что $w \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$), можно прийти к следующему выражению:

$$w = C(t) \exp(kz) + \frac{\exp(-kz)}{2k} \int_{-\infty}^z \psi(\tau, \eta) \exp(k\eta) d\eta - \frac{\exp(kz)}{2k} \int_{-\infty}^z \psi(\tau, \eta) \exp(-k\eta) d\eta. \quad (2.15)$$

Функция времени $C(t)$ определяется из граничного условия (2.3):

$$C(t) = \omega \dot{\zeta} + 2\nu k^2 \int_0^\tau \dot{\zeta}(\tau - \sigma) d\sigma. \quad (2.16)$$

Соотношения (2.14), (2.15), (2.16) позволяют выразить правую часть уравнения (2.7) через переменную ζ и построить относительно этой неизвестной интегро-дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\zeta} + 4\delta \dot{\zeta} + \zeta (\Omega^2 - 2q \cos(2\tau)) =$$

$$= 4\delta^{3/2} \int_0^\tau \frac{d}{d\tau} (\zeta(\tau - \sigma) \exp(-\delta\sigma)) \frac{d\sigma}{\sqrt{\pi\sigma}} - 4\delta^2 \int_0^\tau \frac{d}{d\tau} \zeta(\tau - \sigma) \operatorname{erfc} \left(k \sqrt{\frac{\nu\sigma}{\omega}} \right) d\sigma; \quad (2.17)$$

$$\delta = \frac{\nu k^2}{\omega}; \quad \Omega^2 = \frac{k^3 + k}{\omega^2}; \quad q = 2ak.$$

Здесь erfc — обозначение для функции, дополнительной к функции ошибок, δ — безразмерная вязкость, q — безразмерная амплитуда вертикальных осцилляций системы, а Ω — отношение частоты капиллярно-гравитационной волны с волновым числом k к частоте вертикальных колебаний системы. При $\delta = 0$ уравнение (2.17) превращается в известное уравнение Матье-Хилла. Для его анализа принято использовать плоскость параметров (Ω^2, q) , на которой изображаются языкообразные области неустойчивого поведения решения. С помощью теории Флоке [2] определяются линии границ областей неустойчивости, которые выходят из точек оси Ω^2 с координатами $\Omega^2 = 1, 4, 9, \dots, n^2 \dots (q = 0)$ [2], [11]. Эти точки соответствуют первому, второму и последующим резонансным состояниям, в которых возмущения даже сколь угодно малой амплитуды являются нарастающими во времени.

В работе [3] уравнение (2.17) записано с ошибкой: авторы потеряли второе интегральное слагаемое, а в первом необоснованно заменили верхний предел интегрирования на бесконечность. По их утверждению, применение теории Флоке к полученному ими интегро-дифференциальному уравнению в асимптотике малых δ позволило получить уравнение границы первой зоны неустойчивости. Согласно [3], при $\delta > 0$ минимум границы этой зоны на плоскости параметров (Ω^2, q) сдвигается из точки $\Omega^2 = 1, q = 0$ в новое положение:

$$\Omega_*^2 \approx 1 + 2\sqrt{2}\delta^{3/2}; \quad q_* \approx 4\delta. \quad (2.18)$$

Несмотря на всю небрежность представленных в [3] выкладок, с физической точки зрения результат получился вполне разумным. Согласно (2.18) для вертикально вибрирующего вязкого слоя жидкости параметрический резонанс возникает, только если амплитуда вибраций превосходит некоторое пороговое значение. Порог определяется вязкостью жидкости: чем больше вязкость, тем больше значение пороговой амплитуды. Интересно отметить, что в недавней работе [1] для анализа уравнения (2.17) была применена методика усреднения по бесконечному промежутку времени, обоснованная для интегро-дифференциальных уравнений подобного рода в работе Ю. А. Митропольского и А. Н. Филатова [4]. Это позволило корректно найти границы первой зоны устойчивости. Согласно [1] приближенные равенства (2.18) оказались действительно справедливы!

В целом, методику сведения задачи (1.2)-(1.8) к интегро-дифференциальному уравнению (2.17) нельзя считать универсальной. Она в существенной степени опирается на возможность выразить правую часть уравнения (2.7) через переменную ζ . Именно для этого вводится вспомогательная функция ψ , удовлетворяющая краевой задаче (2.10), (2.9). Важно подчеркнуть, что правая часть граничного условия (2.9) зависит только от неизвестной ζ и фиксированных параметров задачи, что

вытекает из рассуждений, приведенных после соотношения (2.8). Несложно проверить, что эта цепочка рассуждений справедлива только при условии, что правая часть (1.7) обращается в ноль, т. е. когда на поверхности присутствует лишь касательное натяжение, действующее со стороны жидкости. В общем случае это не так. Дополнительные касательные натяжения неизбежны в двухслойной системе; на поверхности жидкости с пленкой поверхностно-активного вещества; на поверхности неравномерно прогретого жидкого слоя и во многих других интересных обобщениях задачи о неустойчивости Фарадея.

3. Непосредственное применение теории Флоке к нескольким переменным

В колебательной системе с периодически изменяющимся внутренним параметром τ реализуется параметрический резонанс. Согласно теории Флоке [2], [11], если параметр изменяется по закону $\propto \cos(2\tau)$, то в состоянии, соответствующем границе устойчивости, переменные величины системы становятся периодически функциями параметра τ . При этом, их период равен π на одном типе границы зон неустойчивости и 2π — на другом. В случае задачи о неустойчивости Фарадея речь идет о поведении поверхностного волнового возмущения ξ , возмущений поля скоростей и давления. Последние связаны с $\xi \propto \exp(ikx)$ граничными условиями (1.5)-(1.7) и, значит, тоже должны быть пропорциональны $\exp(ikx)$. Периодичность по τ с периодами π и 2π несложно учесть, если искать ξ в виде разложения в ряд Фурье:

$$\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\tau - ikx). \quad (3.1)$$

Для переменных u , v , p следует принять во внимание тот факт, что коэффициенты разложения могут зависеть от z :

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z) \exp(in\tau - ikx); \quad v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(z) \exp(in\tau - ikx); \quad (3.2)$$

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(z) \exp(in\tau - ikx).$$

Это и есть главная идея решения, не требующая сведения задачи к уравнению относительно одной переменной.

Подставляя (3.1) и (3.2) в уравнения (1.2)-(1.4) и учитывая условия на глубине (1.8), несложно получить выражения для входящих в (3.2) вспомогательных функций:

$$f_n(z) = A_n \exp(kz) + B_n \exp(Q_n z); \quad F_n(z) = iA_n \exp(kz) + \frac{ik}{Q_n} B_n \exp(Q_n z); \quad (3.3)$$

$$G_n(z) = \frac{\omega n A_n}{k} \exp(kz); \quad Q_n = \sqrt{k^2 + \frac{i n \omega}{\nu}}.$$

Здесь A_n, B_n — константы.

Подстановка (3.1)-(3.3) в граничные условия (1.5)-(1.7) приводит к бесконечной системе линейных однородных уравнений относительно констант, A_n, B_n, c_n . Константы A_n, B_n легко исключаются. Остается бесконечная однородная система линейных алгебраических уравнений относительно c_n :

$$M_n c_n - q(c_{n-2} + c_{n+2}) = 0; \quad (3.4)$$

$$M_n = \left(\Omega^2 - n^2 + 4in\delta + 4\delta^2 - 4\delta^{3/2}\sqrt{\delta + in} \right).$$

Примечательно, что точно такая же система уравнений относительно коэффициентов c_n выписана в монографии [3]. По утверждению авторов, они, следуя теории Флоке, получили ее подставляя соотношение

$$\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\tau) \quad (3.5)$$

в свое интегро-дифференциальное уравнение. Но, как отмечено в предыдущем пункте, авторы [3] записали это уравнение с ошибкой (см. [3], гл.1, соотношение (1.1.36)). Можно проверить, что подстановка (3.5) не приводит такое уравнение к системе (3.4). При этом, метод, которому посвящен настоящий пункт, в работе [3] тоже кратко описан. Складывается впечатление, что уравнения (3.4) на самом деле были получены именно этим методом. Во всяком случае, происхождение квадратного корня, имеющегося в (3.4), можно четко соотнести со вспомогательным параметром Q , который возникает на этапе установления вида вспомогательных функций (3.3). Все эти досадные «нестыковки» вместе с описками и некорректностями по тексту весьма затрудняют использование работы [3] для освоения и дальнейшего использования метода сведения задачи (1.1) к интегро-дифференциальному уравнению относительно амплитуды возмущения.

Система (3.4), как и в случае классического уравнения Матье-Хилла, распадается на две независимые подсистемы [11]. Одну из них образуют уравнения, построенные по формуле (3.4) при всех четных значениях n . В эту же подсистему следует включить уравнение, получающееся при $n = 0$. Все остальные уравнения составляют другую независимую бесконечную подсистему. Первый случай соответствует поведению решения задачи на линии границ областей неустойчивости, которые на плоскости параметров (Ω^2, q) близки по форме к нулевой, второй, четвертой и следующим четным зонам классического уравнения Матье-Хилла. На границах этих зон решения имеют период 2π . Второй случай — система уравнений, соответствующих нечетным n — отвечает решениям, которые имеют период π и реализуются на линиях границ нечетных зон неустойчивости.

С практической точки зрения наиболее важной считается первая зона неустойчивости. Если $\delta = 0$, то линии ее границы начинаются при $\Omega^2 = 1; q = 0$. Первая зона неустойчивости, как показывает опыт, наименее подвержена диссипации и особенно четко проявляется в эксперименте [5].

Для обеспечения сходимости ряда (3.1) коэффициенты c_n должны убывать с возрастанием $|n|$. Поэтому условие разрешимости системы (3.4), с учетом ее распада на две независимые подсистемы, реализуется как стремление к нулю двух последовательностей определителей:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} M_{-1} & -q \\ -q & M_1 \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{cccc} M_{-3} & -q & 0 & 0 \\ -q & M_{-1} & -q & 0 \\ 0 & -q & M_1 & -q \\ 0 & 0 & -q & M_3 \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{cccccc} M_{-5} & -q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q & M_{-3} & -q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & M_{-1} & -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & M_1 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q & M_3 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q & M_5 \end{array} \right|; \dots \rightarrow 0; \\ & \left| \begin{array}{ccc} M_{-2} & -q & 0 \\ -q & M_0 & -q \\ 0 & -q & M_2 \end{array} \right|; \quad \left| \begin{array}{ccccc} M_{-4} & -q & 0 & 0 & 0 \\ -q & M_{-2} & -q & 0 & 0 \\ 0 & -q & M_0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & -q & M_2 & -q \\ 0 & 0 & 0 & -q & M_4 \end{array} \right|; \dots \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Последовательное вычисление определителей четного порядка и приравнивание получившихся соотношений к нулю приводит к бесконечной последовательности уравнений. Первое из них — приближенное уравнение границы первой зоны неустойчивости на плоскости параметров (Ω^2, q) . Второе — тоже приближенное, но более точное по сравнению с первым, уравнение границы первой зоны. К тому же, полное множество решений второго уравнения оказывается шире, чем у первого: помимо уравнения границы первой зоны, оно задает еще и границу третьей зоны неустойчивости. Третье уравнение описывает границы первых трех нечетных зон (первой, третьей и пятой). Причем, первые две оно задает более точно, чем предыдущие уравнения. Смысл следующих уравнений очевиден. Аналогично, последовательность определителей нечетного порядка позволяет последовательно построить приближенные уравнения границ нулевой и всех четных зон неустойчивости.

Например, уравнение границы первой зоны неустойчивости в самом грубом приближении определяется соотношением вида:

$$\left| \begin{array}{cc} \Omega^2 - 1 + 4i\delta + 4\delta^2 - 4\delta^{3/2}\sqrt{\delta + i} & -q \\ -q & \Omega^2 - 1 + 4i\delta + 4\delta^2 - 4\delta^{3/2}\sqrt{\delta + i} \end{array} \right| = 0.$$

Во втором приближении по δ получается уравнение

$$1 - 2\Omega^2 + \Omega^4 - q^2 - 4\sqrt{2}(\Omega^2 - 1)\delta^{3/2} + 8(\Omega^2 + 1)\delta^2 = 0,$$

легко разрешающееся относительно q . В области $q > 0$ граница первой зоны неустойчивости на плоскости параметров (Ω^2, q) описывается явной функцией $q \equiv q(\Omega^2)$:

$$q = \sqrt{(\Omega^2 - 1)^2 - 4\sqrt{2}(\Omega^2 - 1)\delta^{3/2} + 8(\Omega^2 + 1)\delta^2}.$$

Несложно найти положение минимума этой функции:

$$\Omega_*^2 = 1 + 2\sqrt{2}\delta^{3/2} - 4\delta^2 \approx 1 + 2\sqrt{2}\delta^{3/2}$$

и его значение в главном по δ приближении: $q_* \approx 4\delta$. Результат совпадает с тем, что приведен в работах [3] и [1] (см. выражения (2.18)).

Описанная в настоящем разделе методика решения задачи является достаточно универсальной. В отличие от подхода, разобранный в предыдущем пункте, для нее непринципиально, насколько сильно видоизменяются граничные условия при усложнении задачи. Аналитические вычисления сводятся к работе с линейными дифференциальными и алгебраическими соотношениями, которые, даже будучи достаточно громоздкими, легко поддаются обработке современными средствами символьной компьютерной математики.

4. Заключение

Аналитический асимптотический расчет влияния вязкости на условия реализации неустойчивости Фарадея сводится к анализу интегро-дифференциального уравнения относительно амплитуды волнового возмущения только в рамках относительно несложной модели, когда поверхность жидкости можно считать свободной от действия внешних касательных натяжений. Следует с большой осторожностью относиться к представленным в литературе процедурам вывода этого уравнения и к самой форме его записи. В общедоступных источниках нередко встречаются ошибки. Финальное интегро-дифференциальное уравнение содержит два интегральных слагаемых. Для его анализа существует четко обоснованный способ решения, разработанный в 70-е годы прошлого столетия Ю. А. Митропольским и А. Н. Филатовым, — метод усреднения по бесконечному промежутку времени.

Методика сведения задачи о расчете условий неустойчивости Фарадея к интегро-дифференциальному уравнению относительно амплитуды возмущения имеет весьма ограниченную область применения. Условия ее использования нарушаются, если поверхность жидкости не свободная, а испытывает влияние дополнительных касательных натяжений. Такие натяжения появляются, например, на поверхности жидкости, покрытой пленкой поверхностно-активного вещества; на границе раздела двух жидкостей; на поверхности неравномерный прогретого жидкого слоя и т.д. Во всех этих случаях нецелесообразно тратить силы и время на построение уравнения относительно амплитуды возмущения. Аналитическое асимптотическое исследование неустойчивости Фарадея в задачах подобного рода следует проводить, применяя общие принципы теории Флоке сразу ко всему набору переменных (компонентам поля скоростей, давлению; если нужно — к температуре, поверхностной концентрации примеси и т.п.). Такой подход не имеет каких-то принципиальных ограничений на сложность используемых граничных условий. Анализ получающихся соотношений сводится к манипуляциям с линейными дифференциальными и алгебраическими выражениями. С такой задачей эффективно справляются современные системы компьютерных аналитических вычислений.

Список цитируемых источников

1. *Белонозжко, Д. Ф., Апарнева, А. В.* Расчет условий дестабилизации горизонтальной поверхности вязкой жидкости в вибрационном поле // Ученые записки физического факультета Московского университета. — 2017, №6. — С. 1760401.
Belonozhko, D. F., Aparneva A. V. Calculation of instability conditions of a horizontal surface of viscous liquid in a vibration field. Memoirs of the Faculty of Physics, No.6, 1760401 (2017). (In Russian)
2. *Карлов, Н. В., Кириченко, Н. А.* Колебания, волны, структуры. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.
Karlov, N. V., Kirichenko, N. A. Oscillations, waves, patterns. Moscow: Physmatlit, 2003. (In Russian)
3. *Любимов, Д. В., Любимова, Т. П., Черепанов, А. А.* Динамика поверхности раздела в вибрационных полях. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 216 с.
Lyubimov D. V. Lyubimova T. P., Cherepanov, A. A. Dynamics of interfaces in vibrational fields. Moscow: Physmatlit, 2003. (In Russian)
4. *Митропольский, Ю. Ф., Филатов, А. Н.* Усреднение интегро-дифференциальных и интегральных уравнений // Украинский математический журнал. — 1972. — Т.24, №1. — С. 30-48.
Mitropol'skii, Y. A., Filatov, A. N. Averaging of integro-differential and integral equations. Ukrainian Mathematical Journal, 24, No.1, 22-37 (1972). (In Russian)
5. *Benjamin, T.B.* The stability of the plane free surface of liquid in a vertical periodic motion. Proc. R. Soc. London. A, 225, No.1163, 505–515 (1954).
6. *Pototsky, A., Bestehorn, M.* Faraday instability of a two-layer liquid film with a free surface. Physical Review Fluids, 1, No.2, 023901 (2016).
7. *Bosch, E. G. T.* An experimental investigation of Faraday waves and spatio-temporal chaos. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 1995.
8. *Diwakar, S., V., Zoueshtiagh, F., Amiroudine, S., Narayanan, R.* The Faraday instability in miscible fluid systems Physics of Fluids, 27, No.8, 084111 (2015).
9. *Faraday, M.* On the a peculiar class acoustical figures and on certain forms assumed by a group of particles upon elastic surface. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 121, 299–340 (1831).
10. *Kumar, K.* Linear theory of Faraday instability in viscous liquids. Proc. R. Soc. London. A, 452, No.1948, 1113–1126 (1996).
11. *Mathews, J., Walker, R.L.* Mathematical methods of physics. New York. W.A. Bendjamin, 1970.
12. *Yudovich, V.I., Zenkovskaya, S.M., Novossiadily, V.A., Shleykel A.L.* Parametric excitation of waves on a free boundary of horizontal fluid layer. Comptes Rendus Mecanique, 332, 257–262 (2004).

Получена 15.02.2017

УДК 531.36

Построение уравнений динамических систем со связями¹

Р. Г. Мухарлямов

Российский университет дружбы народов,
Москва 117198. *E-mail*: robgar@mail.ru

Аннотация. Составление уравнений динамики систем со связями приводит к необходимости определения выражений множителей Лагранжа, для чего непосредственно используются производные от уравнений связей. При этом подразумевается, что уравнения связей составляют первые интегралы уравнений динамики, что приводит к нарушению уравнений связей, вызванных погрешностями численного решения и задания начальных условий. Для обеспечения стабилизации связей используются методы построения дифференциальных уравнений с заданными частными интегралами. Составление уравнений возмущений связей с асимптотически устойчивым тривиальным решением позволяет обеспечить стабилизацию связей при численном решении уравнений динамики.

Ключевые слова: динамика, система, устойчивость, уравнения, связи, стабилизация.

Constructing equations of constrained dynamical systems

R. G. Mukharlyamov

RUDN University, Moscow 117198.

Abstract. Constructing dynamical equations of constrained systems can lead to the determining of the Lagrange multipliers. Derivatives of the constraints have to be used to determine their values. But, it is assumed that the constraint equations are first integrals of the dynamical equations. This fact can lead to the multiple deviations from the constraint equations caused by some errors of a numerical method of integration and setting initial conditions. To provide a constraint stabilization the methods of constructing differential equations with given set of partial integrals are applied. Constructing equations of perturbed constraints with an asymptotically stable trivial solution can provide a constraint stabilization during the numerical solution of dynamical equations.

Keywords: dynamics, system, stability, equations, constraints, stabilization.

MSC 2010: 70F20, 70H14

1. Введение

Дифференциальные уравнения динамических систем следуют из принципов динамики с учетом ограничений, вызванных действием связей. Если уравнения связей позволяют представить состояние системы через обобщенные координаты и скорости, то точность определения решений уравнений динамики зависит

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-08-00558).

только от выбора численного метода. В случае, когда не удастся ввести обобщенные координаты и скорости, для учета влияния связей используются множители Лагранжа. При этом связи составляют цели управления, а соответствующие реакции являются управляющими силами.

Задача определения дополнительных управляющих сил, обеспечивающих необходимые свойства решений уравнений динамики, относится к обратным задачам динамики [1], первые постановки которых состояли в определении сил, под действием которых механическая система совершает известные движения или решения уравнений динамики обладают известными свойствами. Так Исааком Ньютоном по законам Кеплера была определена сила притяжения [3], далее было установлено [19], что движение материальной точки по коническому сечению обеспечивается центральной силой, зависящей от положения точки [2],[20]. В [16] исследована задача определения силовой функции, соответствующей голономной системе с заданными интегралами, в [5],[6] предложен метод определения силовой функции по данному семейству траекторий точки на криволинейной поверхности и получено решение задачи о прочности движения изображающей точки по траектории. Общая теория устойчивости движения А. М. Ляпунова [8] позволила сформулировать критерии устойчивости множества траекторий и разработать методы построения систем дифференциальных уравнений, имеющих заданное устойчивое интегральное многообразие [7].

Для обеспечения стабилизации связей в [12] предлагается использовать линейную комбинацию уравнений связей и их производных. Различные модификации метода стабилизации связей, предложенные в [18]-[4], сводятся к анализу и подбору коэффициентов линейной комбинации. В общей постановке проблема стабилизации связей приводит к построению системы дифференциальных уравнений движения, допускающих уравнения связей в качестве частных интегралов [11], задающих асимптотически устойчивое инвариантное множество [13] или интегральное многообразие [14] этой системы. Используя общий подход к решению обратных задач динамики, удастся построить дифференциальные уравнения динамических систем, численное решение которых удовлетворяют уравнениям связей с требуемой точностью [17]. Современные динамические аналогии позволяют использовать методы и уравнения классической механики для решения задач моделирования и управления динамикой систем различной природы [15].

2. Постановка задачи

Рассматривается динамическая система, состояние которой определяется набором обобщенных координат $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$, $dq^i/dt = v^i$, $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n)$, $i = 1, \dots, n$. Пусть $L = L(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)$ — лагранжиан системы, непотенциальные обобщенные силы, действующие на нее, обозначим вектором $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$. Будем считать, что на систему наложены связи, заданные уравнениями

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, t) = 0, \mathbf{f} = (f^1, \dots, f^m), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = 0, \mathbf{f}' = (f^{m+1}, \dots, f^s), s \leq n \quad (2.2)$$

Требуется построить систему уравнений динамики, которые обеспечивали бы при численном решении выполнение уравнений связей (2.1), (2.2) с заданной точностью.

3. Уравнения динамики расширенной системы

Для оценки отклонений от уравнений связей введем новые переменные $\check{\mathbf{q}} = (q^{n+1}, \dots, q^{n+m})$, $\hat{\mathbf{q}} = (q^{n+m+1}, \dots, q^{n+s})$, $\check{\mathbf{v}} = (v^{n+1}, \dots, v^{n+m})$, $\hat{\mathbf{v}} = (v^{n+m+1}, \dots, v^{n+s})$, определив их равенствами:

$$\check{\mathbf{q}} - \mathbf{f}(\mathbf{q}, t) = 0, \quad (3.1)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{g} = (\check{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{g}}), \check{\mathbf{g}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{f}'.$$

С учетом выражений (3.2) составим систему уравнений для определения виртуальных скоростей системы

$$\mathbf{G} \delta \mathbf{v} = \delta \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (3.3)$$

Полагая вектор $\delta \tilde{\mathbf{v}}$ произвольным, определим множество виртуальных скоростей $\delta \mathbf{v}$ системы решением уравнения (3.3). Если строки матрицы \mathbf{G} линейно независимы, то решение уравнения (3.3) складывается $\delta \mathbf{v} = (\delta \mathbf{v})^T + (\delta \mathbf{v})^n$ из общего решения $(\delta \mathbf{v})^T = \delta c [\mathbf{GC}]$ однородного уравнения и частного решения $(\delta \mathbf{v})^n = \mathbf{G}^+ \delta \tilde{\mathbf{v}}$ неоднородного уравнения:

$$\delta \mathbf{v} = \delta c [\mathbf{GC}] + \mathbf{G}^+ \delta \tilde{\mathbf{v}}. \quad (3.4)$$

Здесь δc — произвольная скалярная величина, $[\mathbf{GC}]$ — векторное произведение векторов $\mathbf{g}^\sigma = (g_1^\sigma, \dots, g_n^\sigma)$, $\sigma = 1, \dots, s$, составляющих строки матрицы \mathbf{G} , и произвольных векторов $\mathbf{c}^\gamma = (c_1^\gamma, \dots, c_n^\gamma)$, $\gamma = s+1, \dots, n-1$, $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1}$.

С учетом возможных отклонений от уравнений связей, составим новую функцию Лагранжа $\tilde{L} = \tilde{L}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \check{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)$, удовлетворяющую условию $\tilde{L}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, 0, 0, t) = L(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)$, и построим функцию $\tilde{D} = \tilde{D}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \check{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{v}}, t)$, обладающую свойствами: $\tilde{D}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, 0, 0, t) = 0$ и $\tilde{D}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \check{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{v}}, t) > 0$, если $\check{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{v}}$ не обращаются в нуль одновременно. Обозначив $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$, R_i — реакции связей, запишем принцип Даламбера для расширенной системы с функцией Лагранжа \tilde{L} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - \mathbf{Q} - \mathbf{R} = 0, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{E}(\check{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \frac{\partial \tilde{D}}{\partial \tilde{\mathbf{v}}} = 0, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = (\check{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}})$$

Умножив равенства (3.5), (3.6) скалярно на $\delta \mathbf{v}$ и $\delta \tilde{\mathbf{v}}$, составим сумму элементарных мощностей с учетом выражения (3.4):

$$\begin{aligned} & (\mathbf{E}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - \mathbf{Q} - \mathbf{R})^T [\mathbf{GC}] \delta c + \\ & + \left((\mathbf{E}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - \mathbf{Q} - \mathbf{R})^T \mathbf{G}^+ + \left(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \frac{\partial \tilde{D}}{\partial \tilde{\mathbf{v}}} \right)^T \right) \delta \tilde{\mathbf{v}} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Равенство (3.7) возможно только при выполнении условий:

$$(\mathbf{E}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - \mathbf{Q} - \mathbf{R})^T [\mathbf{GC}] = 0, \quad (3.8)$$

$$(\mathbf{E}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - \mathbf{Q} - \mathbf{R})^T \mathbf{G}^+ + \left(\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \frac{\partial \tilde{D}}{\partial \tilde{\mathbf{v}}} \right)^T = 0. \quad (3.9)$$

Выберем вектор \mathbf{R} так, чтобы выполнялось равенство $\mathbf{R}^T [\mathbf{GC}] = 0$, что соответствует идеальным связям исходной системы $\mathbf{R} = \mathbf{G}^T \lambda$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$. Тогда из равенств (3.8), (3.9) следуют уравнение, описывающее изменение обобщенных координат системы и уравнение возмущений связей. В конечном итоге с учетом кинематических соотношений, равенств (3.1), (3.2) и начальных условий приходим к системе дифференциально-алгебраических уравнений относительно переменных \mathbf{q} , \mathbf{v} , $\tilde{\mathbf{q}}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, λ :

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T \lambda, \quad (3.10)$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \tilde{\mathbf{v}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{\mathbf{v}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = -\frac{\partial \tilde{D}}{\partial \tilde{\mathbf{v}}}, \quad (3.11)$$

$$\check{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t), \quad \tilde{\mathbf{q}} = (\check{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}), \quad \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t), \quad (3.12)$$

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \check{\mathbf{q}}(t_0) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_0, t_0), \quad \hat{\mathbf{q}}(t_0) = \hat{\mathbf{q}}_0, \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad \tilde{\mathbf{v}}(t_0) = \mathbf{g}(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_0, t_0), \quad (3.13)$$

Для решения системы уравнений (3.10)-(3.13) необходимо достроить правые части дифференциальных уравнений (3.10), (3.11). Значения сил реакций связей определяются выражением множителя λ , обеспечивающим выполнение равенств (3.12). Если учитывать, что величина отклонения решения системы уравнений (3.10), (3.11) от уравнений связей определяется значениями переменных $\tilde{\mathbf{q}}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, то решение $\tilde{\mathbf{q}} = 0$, $\tilde{\mathbf{v}} = 0$ этой системы соответствует уравнениям связей, и устойчивость этого решения зависит от выбора функции Лагранжа \tilde{L} и диссипативной функции \tilde{D} . Пусть функции \tilde{L} , \tilde{D} определены равенствами

$$\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{P},$$

$$2\tilde{T} = \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{v}}, \quad 2\tilde{P} = \tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{q}}, \quad 2\tilde{D} = \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{v}}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(q), \quad \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, \check{\mathbf{q}}), \quad \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{q}, \check{\mathbf{q}})$$

Тогда из уравнений (3.10)-(3.12) следует выражение $\lambda = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{h}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{G}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}^T, \quad \mathbf{h} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \check{\mathbf{q}}} - \left(\frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dt} + \mathbf{B} \right) \tilde{\mathbf{v}} \right) + \mathbf{G}\mathbf{A}^{-1} \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{v} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{q}} \right) - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t},$$

$$\check{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t), \quad \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t).$$

Соответственно, уравнения динамики (3.10) с учетом выражений \tilde{L} , $\check{\mathbf{q}}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, λ как функций переменных \mathbf{q} , \mathbf{v} , t приводятся к системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}^{-1} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{v} + \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T\lambda \right), \quad (3.15)$$

$$\tilde{L} = \tilde{L}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{f}(\mathbf{q}, t), \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t), t),$$

допускающих частные интегралы

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, t) = 0, \quad \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = 0. \quad (3.16)$$

Уравнения возмущений связей (3.11), разрешенные относительно производных, записываются в виде системы

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \tilde{\mathbf{v}}, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} = -\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{q}, \check{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \check{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{q}, \check{\mathbf{q}}) \left(\tilde{\mathbf{v}}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, \check{\mathbf{q}})}{\partial \check{\mathbf{q}}} \tilde{\mathbf{v}} \right), \quad (3.17)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{q}, \check{\mathbf{q}}) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{q}, \check{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q}), \quad \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}, \check{\mathbf{q}}) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{q}, \check{\mathbf{q}}) \left(\frac{d\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, \check{\mathbf{q}})}{dt} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \check{\mathbf{q}}) \right).$$

4. Устойчивость интегрального многообразия

Для стабилизации связей (2.1),(2.2) необходимо, чтобы интегральное многообразие системы дифференциальных уравнений (3.15), заданное равенствами (3.16), было устойчиво асимптотически.

Устойчивость интегрального многообразия определяется соответствующей устойчивостью тривиального решения $\check{\mathbf{q}}(t) = 0$, $\tilde{\mathbf{v}}(t) = 0$ системы уравнений возмущений связей (3.11). Полагая в равенствах (3.14) матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$, \mathbf{B} постоянными, получаем уравнения возмущений связей (3.11) как линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{W}y, \quad (4.1)$$

$$y = \begin{pmatrix} \check{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{H}} & -\tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица. Если все корни характеристического уравнения системы (4.1) имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение $\mathbf{y} = 0$ устойчиво асимптотически. В [12] исследуется задача о стабилизации голономных связей, соответствующая случаю $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$, $\tilde{\mathbf{H}} = \omega^2 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \gamma \mathbf{E}$. В [19] предложен алгоритм решения задачи стабилизации в общей постановке. Для определения достаточных условий устойчивости тривиального решения $\tilde{\mathbf{q}} = 0$, $\tilde{\mathbf{v}} = 0$ системы (3.17) используется [10] метод функций Ляпунова. Так, если связи являются стационарными

$$(\mathbf{q}) = 0, \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = 0,$$

то в качестве функции Ляпунова можно взять определенно положительную квадратичную форму с постоянной матрицей коэффициентов $2V = \mathbf{y}^T \mathbf{U} \mathbf{y}$. Если производная этой функции, вычисленная с учетом уравнений системы (3.17), является определенно отрицательной, то тривиальное решение $\mathbf{y} = 0$ устойчиво асимптотически.

5. Численное решение

Если уравнения возмущений связей имеют асимптотически устойчивое тривиальное решение, то для стабилизации связей можно ограничиться даже простейшими численными методами решения уравнений динамики (3.15). Так, использование разностной схемы

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \tau \mathbf{X}_k, \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k), \quad \tau = t_{k+1} - t_k, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{A}(\mathbf{q})}{dt} \mathbf{v} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{G}^T(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) \lambda(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) \right)$$

с учетом уравнения (4.1) приводит к соотношению

$$\|\mathbf{y}_{k+1}\| \leq \|\mathbf{E} - \tau \mathbf{W}\| \|\mathbf{y}_k\| + \Upsilon_k^{(2)}, \quad (5.1)$$

где $\Upsilon_k^{(2)}$ – остаточный член разложения функции $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}(t), t)$ в ряд по степеням τ в окрестности значения $t = t_k$. Из неравенства (5.1) следует оценка $\|\mathbf{y}_{k+1}\| \leq \varepsilon$, если при всех значениях $k = 0, 1, 2, \dots, N$ выполняются условия $\|\mathbf{y}_k\| \leq \varepsilon$, $\|\mathbf{E} - \tau \mathbf{W}\| \leq \alpha \leq 1$, $\|\Upsilon_k^{(2)}\| \leq 2\varepsilon(1 - \alpha)$.

Если для решения уравнения (3.15) используется [20] разностная схема

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_k, \quad \Delta \mathbf{x}_k = \tau(1 - \sigma) \mathbf{X}_k + \tau \sigma \hat{\mathbf{X}}_k,$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_k(\tilde{\mathbf{x}}_k, t_k + \alpha\tau), \quad \tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k + \alpha\tau \mathbf{X}_k, \quad \sigma > 0, \quad \alpha > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$\alpha, \sigma - const$, и при всех $k = 0, 1, 2, \dots, N$ выполняются условия

$$2\alpha\sigma = 1, \|\mathbf{y}_k\| \leq \varepsilon, \left\| \Upsilon_k^{(3)} \right\| \leq 6\varepsilon(1 - \beta), \left\| \mathbf{I}_{m+r} + \tau \mathbf{W} + \frac{1}{2} \tau^2 \mathbf{W}^2 \right\| \leq \beta \leq 1,$$

то будет справедлива оценка $\|\mathbf{y}_{k+1}\| \leq \varepsilon$. Условия стабилизации связей, соответствующие методу Рунге-Кутты получены в [21].

6. Пример

Определить закон изменения силы \mathbf{F} , обеспечивающей устойчивое движение ракеты по траектории $f(x, y) = 0$. Ракету будем считать материальной точкой, положение и скорость которой определяются векторами

$$\mathbf{q} = (x, y), \mathbf{v} = (v_x, v_y), v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, \quad (6.1)$$

и на которую действует сила тяжести $m\mathbf{g}$, направленная по вертикали. Отклонение точки от траектории и его производную определим величинами

$$\check{q} = f(x, y), \check{v} = \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y. \quad (6.2)$$

Введем функцию Лагранжа и диссипативную функцию:

$$2\tilde{L} = m\mathbf{v}^2 - 2mgy + \check{\mathbf{v}}^2 - c\check{q}^2, \quad 2D = k\check{\mathbf{v}}^2, \\ \mathbf{v}^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad c, k, g - const.$$

Из равенств (6.2) следует уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = \delta \check{v},$$

из которого определяются виртуальные перемещения точки в зависимости от произвольных величин δs и $\delta \check{v}$:

$$\delta x = -\frac{\partial f}{\partial y} \delta s + \frac{\partial f}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)^{-1} \delta \check{v}, \quad \delta y = \frac{\partial f}{\partial x} \delta s + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)^{-1} \delta \check{v}.$$

Используя принцип Даламбера-Лагранжа

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_x} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_y} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \check{v}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \check{q}} - \frac{\partial D}{\partial \check{v}} \right) \delta \check{v} = 0,$$

составим уравнения динамики ракеты

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{d}{dt} (mv_x) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt} (mv_y) = -mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (6.3)$$

и уравнения возмущений связей

$$\frac{d\check{q}}{dx} = \check{v}, \quad \frac{d\check{v}}{dt} = -c\check{q} - k\check{v}. \quad (6.4)$$

Обозначив μ величину скорости отделения частиц относительно ракеты и учитывая равенство

$$\frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} - \mu\left(\frac{dm}{dt}\right)\frac{v}{|v|},$$

уравнения (6.3) можно представить в виде:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad m\frac{dv_x}{dt} = T_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad m\frac{dv_y}{dt} = T_y - mg + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad (6.5)$$

$$T_x = \frac{\mu v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \frac{dm}{dt}, \quad T_y = \frac{\mu v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \frac{dm}{dt}.$$

Правые части уравнений (6.5) содержат силу тяги $T = (T_x, T_y)$, направленную вдоль касательной к траектории движения, и реакцию связи $R = \lambda(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$, направленную по нормали. Эти две силы составляют искомую силу F . Из уравнений (6.2), (6.4), (6.5) определяется выражение множителя Лагранжа

$$\lambda = -\frac{m}{N^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} v_x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} v_x v_y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} v_y^2 + cf(x, y) + k \left(\frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y \right) + g \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{1}{N^2} \frac{\mu}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y \right) \frac{dm}{dt}, \quad N^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2. \quad (6.6)$$

Движение по траектории будет устойчиво асимптотически, если корни характеристического уравнения $\kappa^2 + k\kappa + c = 0$ системы (6.4) имеют отрицательные действительные части. Численное решение системы (6.5), (6.6)

$$x(t_k) = x_k, \quad y_{k+1} = y_k + \tau v_{yk},$$

$$(v_x)_{k+1} = (v_x)_k + \frac{\tau}{m_k} \left(T_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right)_k, \quad (v_y)_{k+1} = (v_y)_k + \frac{\tau}{m_k} \left(T_y - mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right)_k,$$

будет при всех $k = 0, 1, 2, \dots, K$ удовлетворять неравенству $\|q_k\| \leq \varepsilon$, если будут выполнены условия $\|q_0\| \leq \varepsilon$, $\|E - \tau W\| \leq \alpha \leq 1$, $\|\Upsilon_k^{(2)}\| \leq 2\varepsilon(1 - \alpha)$, где W — матрица коэффициентов уравнений системы (6.4), $\Upsilon_k^{(2)}$ — остаточный член разложения в ряд функции $\check{q} = f(x, y)$.

7. Заключение

Методы решения обратных задач динамики и условия устойчивости множеств траекторий позволяют разработать алгоритмы решения задач динамики и управления динамическими процессами в системах различной природы.

Список цитируемых источников

1. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
Galiullin, A. S. Methods for the solution of inverse problems in dynamics. Moscow: Nauka, 1986 (in Russian).
2. *Имшенецкий В. Г.* Определение силы, движущей по коническому сечению материальную точку, в функции ее координат // Сообщ. Харьков. матем. общ. — 1879. — Вып.1. — 11 с.
Imshenetsky V. G. Determination of the force driving a material point along a conic section as a function of its coordinates // Soobsch. Kharkov. Matem. Obsch., No.1 (1879). (in Russian)
3. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского и примечания А. Н. Крылова. — М.: Наука, 1989. — 688 с.
Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. London, 1687.
4. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1979. — 744 с.
Erugin, N. P. 'Reader for a general course in differential equations. 3rd ed. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1979. (in Russian)
5. *Жуковский Н. Е.* Определение силовой функции по данному семейству траекторий / Полн. Собр. Соч. Т.1. — М.-Л.: Гл. ред. авиац. лит-ры, 1937. — С. 293-308.
Zhukovsky N. E. Definition of the force function from a given family of trajectories. Polnoe sobr. soch., Vol.I, M.-L. : Gl. redakts. aviats. lit., 1937, 293-308. (in Russian)
6. *Жуковский Н. Е.* О прочности движения // Полн. Собр. Соч. Т.1. — М.-Л.: Гл. ред. авиац. лит-ры, 1937. — С. 110-205.
Zhukovsky N. E. On the strength of motion. Polnoe sobr. soch., Vol.I, M.-L. : Gl. redakts. aviats. lit., 1937, 110-205. (in Russian)
7. *Зубов В.И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. — Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1957. — 241 с.
Zubov, V. I. Methods of A. M. Lyapunov and their application. Groningen: P. Noordhoff Ltd., 1964.
8. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — Собрание сочинений. Т. II. — М.: Изд. АН СССР, 1956. — 472 с.
Lyapunov A. M. General Problem of the Stability Of Motion. Int. J. Control 55, No.3, 521-527 (1992).
9. *Козлов В. В.* Динамика систем с сервосвязями. I // Нелинейная динамика. — 2015. — Т.11, №2. — С. 353-376.
Kozlov V. V. The dynamics of systems with servoconstraints. I. Regular and Chaotic Dynamics 20:3, 205–224 (2015).
10. *Козлов В. В.* Динамика систем с сервосвязями. II // Нелинейная динамика. — 2015. — Т.11, №3. — С. 579–611.
Kozlov V. V. The dynamics of systems with servoconstraints. II. Regular and Chaotic Dynamics 20:4, 401–427 (2015).

11. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т.2. Часть вторая. — Москва: ИЛ, 1952. — 544 с.
Levi-Civita T., Amaldi U. *Lezioni di meccanica razionale*. Vol.2, parte seconda, Bologna, 1927.
12. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т.5, №4. — С. 688-699.
Mukharlyamov, R. G. Über die Konstruktion einer Menge von Differentialgleichungssystemen der stabilen Bewegung auf einer Integralmannigfaltigkeit. *Differ. Uravn.* 5, 688-699 (1969).
13. *Мухарлямов Р. Г.* О построении дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию // Дифференц. уравнения. — 1971. — Т.7, №10. — С. 1825-1834.
Mukharlyamov, R. G. Construction of differential equations for optimal motion to a given manifold. *Differ. Equations* 7 (1971), 1384-1390 (1974).
14. *Мухарлямов Р. Г.* Стабилизация движений механических систем на заданных многообразиях фазового пространства // ПММ. — 2006. — Т.70, №2. — С. 236-249.
Mukharlyamov, R. G. Motion stabilization of mechanical systems on given manifolds of phase space. *J. Appl. Math. Mech.* 70, No. 2, 210-222 (2006).
15. *Мухарлямов, Р. Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями. // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2015. — №1. — С. 15-28.
Mukharlyamov, R. G. Simulation of control processes, stability and stabilization of systems with program constraints. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 54, No. 1, 13-26 (2015).
16. *Суслов Г. К.* О силовой функции, допускающей заданные интегралы. Киев: Изд-во Киевского университета, 1890. — 114 с.
Suslov G. K. On the force function that admits given integrals. Kiev: Izdat. Kiev. Univ., 1890. (in Russian)
17. *Ascher U. M., Hongsheng Chin, Petzold L. R., Reich S.* Stabilization of constrained Mechanical systems with DAEs and invariant manifolds, *J. Mechanics of Structures and Machines* 23, 135-158 (1995).
18. *Baumgarte J.* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.* — 1972. — Vol.1. — P. 1-16.
19. *Bertrand M. G.* Theoreme relative au mouvement d'un point attire vers un centre fixe // *Compte rendus* — 1873 — Vol. LXXVII, No.16. — P. 849-853.
20. *Darboux M. G.* Recherche de la loi que dois suivre une force centrale pour que la trajectoire qu'elle determine soit toujours une conique // *Compte rendus*. — 1877. — Vol. LXXXIV, No.16. — P. 760-762.
21. *Mukharlyamov, R. G., Beshaw, Assaye Walelgn.* Solving Differential Equation of Motion for Constrained Mechanical Systems // *Вестник РУДН. Сер. матем., инф., физ.* — 2013. — №3. — С. 81-92.

Получена 23.02.2018

MSC 2010: 34C05, 34C07, 34C23, 37G15

Multi-parameter planar dynamical systems: global bifurcations of limit cycles¹

V. A. Gaiko*, C. Vuik**

*United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk 220012, Belarus. *E-mail: valery.gaiko@gmail.com*

**Institute of Applied Mathematics, Delft University of Technology, 2600 GA Delft, The Netherlands. *E-mail: c.vuik@tudelft.nl*

Abstract. We study multi-parameter planar dynamical systems and carry out the global bifurcation analysis of such systems. To control the global bifurcations of limit cycle in these systems, it is necessary to know the properties and combine the effects of all their field rotation parameters. It can be done by means of the development of our bifurcational geometric method based on the Wintner–Perko termination principle and application of canonical systems with field rotation parameters. Using this method, we solve, e. g., Hilbert’s Sixteenth Problem on the maximum number of limit cycles and their distribution for the general Liénard polynomial system and a Holling-type quartic dynamical system. We also conduct some numerical experiments to illustrate the obtained results.

Keywords: multi-parameter planar dynamical system, global bifurcation analysis, field rotation parameter, limit cycle.

1. Introduction

We develop geometric aspects of bifurcation theory for studying multi-parameter planar polynomial dynamical systems. It gives a global approach to the qualitative analysis of such systems and helps to combine all other approaches, their methods and results. First of all, the two-isocline method which was developed by N. P. Erugin is used [4]. The isocline portrait is the most natural construction in the corresponding polynomial equation. It is sufficient to have only two isoclines (of zero and infinity) to obtain principal information on the original system, because these two isoclines are the right-hand sides of the system. Geometric properties of isoclines (conics, cubics, quartics, etc.) are well-known, and all isocline portraits can be easily constructed. By means of them, all topologically different qualitative pictures of integral curves to within a number of limit cycles and distinguishing center and focus can be obtained. Thus it is possible to carry out a rough topological classification of the phase portraits for the polynomial systems. It is the first application of Erugin’s method. After studying contact and rotation properties of isoclines, the simplest (canonical) systems containing limit cycles can be also constructed. Two groups of parameters can be distinguished in such systems: static and dynamic. Static parameters determine the behavior of the

¹The first author was supported by the Netherlands Organization for Scientific Research (NWO) and the Institute of Advanced Scientific Studies (IHÉS, France)

phase trajectories in principle, since they control the number, position and character of singular points in a finite part of the plane (finite singularities). Parameters from the first group determine also a possible behavior of separatrices and singular points at infinity (infinite singularities) under the variation of the parameters from the second group. Dynamic parameters are rotation parameters. They do not change the number, position and index of finite singularities and involve the vector field into directional rotation. The rotation parameters allow to control infinite singularities, the behavior of limit cycles and separatrices. The cyclicity of singular points and separatrix cycles, the behavior of semi-stable and other multiple limit cycles are controlled by these parameters as well. Therefore, by means of the rotation parameters, it is possible to control all limit cycle bifurcations and to solve the most complicated problems of the qualitative theory of polynomial systems [4].

To control all of the limit cycle bifurcations (especially, bifurcations of multiple limit cycles), it is necessary to know the properties and combine the effects of all of the rotation parameters. It can be done by means of the development of new methods based on the well-known Weierstrass preparation theorem and the Perko planar termination principle stating that the maximal one-parameter family of multiple limit cycles terminates either at a singular point, which is typically of the same multiplicity, or on a separatrix cycle, which is also typically of the same multiplicity [4, 14]. This principle is a consequence of the principle of natural termination which was stated for higher-dimensional dynamical systems by A. Wintner, who studied one-parameter families of periodic orbits of the restricted three-body problem and used Puiseux series to show that in the analytic case any one-parameter family of periodic orbits can be uniquely continued through any bifurcation except a period-doubling bifurcation. Such a bifurcation can happen, for example, in a Lorenz system. Besides, the periods in a one-parameter family of a higher-dimensional system can become unbounded in strange ways: for example, the periodic orbits may belong to a strange invariant set, strange attractor, generated at a bifurcation value for which there is a homoclinic tangency of the stable and unstable manifolds of the Poincaré map. This cannot happen for planar systems. That is why the Wintner–Perko termination principle is applied for studying multiple limit cycle bifurcations of the multi-parameter planar polynomial dynamical systems [4, 14].

We have already presented a solution of Hilbert’s Sixteenth Problem in the quadratic case of polynomial systems proving that for quadratic systems four is really the maximum number of limit cycles and $(3 : 1)$ is their only possible distribution. The proof is carried out by contradiction applying catastrophe theory. On the first step, the non-existence of four limit cycles surrounding a singular point is proved. A canonical system containing three field-rotation parameters is considered and it is supposed that this system has four limit cycles around the origin. Thus we get into some three-dimensional domain of the field rotation parameters being restricted by some conditions on the rest two parameters corresponding to definite cases of singular points in the phase plane. This three-parameter domain of four limit cycles is bounded by three fold bifurcation surfaces forming a swallow-tail bifurcation surface of multiplicity-four

limit cycles. Since the corresponding maximal one-parameter family of multiplicity-four limit cycles generated by a field rotation is monotonic, it is proved that it cannot be cyclic and terminates either at the origin or on some separatrix cycle surrounding the origin. Besides, we know absolutely precisely the cyclicity of the singular point which is equal to three and therefore we have got a contradiction with the termination principle stating that the multiplicity of limit cycles cannot be higher than the multiplicity (cyclicity) of the singular point in which they terminate. Since we know the concrete properties of all three field rotation parameters in the canonical system and can control simultaneously bifurcations of limit cycles around different singular points, we are able to complete the proof of the theorem [4]. The same result can be obtained by purely geometric methods as well [6].

We have also established some preliminary results on generalizing our ideas and methods to special planar cubic, quartic and other polynomial dynamical systems. In [5], we have constructed a canonical cubic dynamical system of Kukles type and have carried out the global qualitative analysis of its special case corresponding to a generalized Liénard equation. In [11, 12], using the Wintner–Perko termination principle of multiple limit cycles and our bifurcational geometric approach, we have solved the problem on the maximum number and distribution of limit cycles in the general Kukles cubic-linear system. In [2], we have established the global qualitative analysis of centrally symmetric cubic systems which are used as learning models of planar neural networks. In [3], we have carried out the global bifurcation analysis of a quartic dynamical system which models the dynamics of the populations of predators and their prey in a given ecological system. We have also completed the study of multiple limit cycle bifurcations in the well-known FitzHugh–Nagumo neuronal model [7]. Besides, we have presented a solution of Smale’s Thirteenth Problem [15] proving that the Liénard system with a polynomial of degree $2k + 1$ can have at most k limit cycles [8]. Generalizing the obtained results, we have presented a solution of Hilbert’s Sixteenth Problem on the maximum number of limit cycles surrounding a singular point for an arbitrary polynomial system [8].

In Section 2 of this paper, applying a canonical system with field rotation parameters and using geometric properties of the spirals filling the interior and exterior domains of limit cycles, we solve the limit cycle problem for the general Liénard polynomial system with an arbitrary (but finite) number of singular points generalizing our previous results which we obtained in [9, 10] under some assumptions on the parameters of the Liénard system. In Section 3, we complete the global bifurcation analysis of a quartic dynamical system corresponding to a new class of rational Holling-type systems which model the dynamics of the populations of predators and their prey in a given ecological or biomedical system. We also conduct some numerical experiments to illustrate the results obtained in this paper [16].

2. The General Liénard Polynomial System

In this Section, by means of our bifurcational geometric approach [2]–[10], we consider the general Liénard polynomial system:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x(1 + a_1 x + \dots + a_{2l} x^{2l}) + y(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{2k} x^{2k}). \quad (2.1)$$

Suppose that $a_1^2 + \dots + a_{2l}^2 \neq 0$ in system (2.1). The finite singularities of (2.1) are determined by the algebraic system

$$x(1 + a_1 x + \dots + a_{2l} x^{2l}) = 0, \quad y = 0. \quad (2.2)$$

This system always has an anti-saddle at the origin and, in general, can have at most $2l + 1$ finite singularities which lie on the x -axis and are distributed so that a saddle (or saddle-node) is followed by a node or a focus, or a center and vice versa [1]. For studying the infinite singularities, the methods applied in [1] for Rayleigh's and van der Pol's equations and also Erugin's two-isocline method developed in [4] can be used.

Following [4], we will study limit cycle bifurcations of (2.1) by means of canonical systems containing field rotation parameters of (2.1) [1, 4].

Theorem 2.1. *The Liénard polynomial system (2.1) with limit cycles can be reduced to one of the canonical forms:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x(1 + a_1 x + \dots + a_{2l} x^{2l}) \\ &+ y(\alpha_0 - \beta_1 - \dots - \beta_{2k-1} + \beta_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \beta_{2k-1} x^{2k-1} + \alpha_{2k} x^{2k}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

or

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= x(x - 1)(1 + b_1 x + \dots + b_{2l-1} x^{2l-1}) \\ &+ y(\alpha_0 - \beta_1 - \dots - \beta_{2k-1} + \beta_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \beta_{2k-1} x^{2k-1} + \alpha_{2k} x^{2k}) \equiv Q(x, y), \end{aligned} \quad (2.4)$$

where $1 + a_1 x + \dots + a_{2l} x^{2l} \neq 0$, $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ are field rotation parameters and $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2k-1}$ are semi-rotation parameters.

Proof. Let us compare system (2.1) with (2.3) and (2.4). It is easy to see that system (2.3) has the only finite singular point: an anti-saddle at the origin. System (2.4) has at list two singular points including an anti-saddle at the origin and a saddle which, without loss of generality, can be always putted into the point $(1, 0)$. Instead of the odd parameters $\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{2k-1}$ in system (2.1), also without loss of generality, we have introduced new parameters $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2k-1}$ into (2.3) and (2.4).

We will study now system (2.4) (system (2.3) can be studied absolutely similarly). Let all of the parameters $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ and $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2k-1}$ vanish in this system,

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x(x - 1)(1 + b_1 x + \dots + b_{2l-1} x^{2l-1}), \quad (2.5)$$

and consider the corresponding equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x-1)(1+b_1x+\dots+b_{2l-1}x^{2l-1})}{y} \equiv F(x,y). \tag{2.6}$$

Since $F(x, -y) = -F(x, y)$, the direction field of (2.6) (and the vector field of (2.5) as well) is symmetric with respect to the x -axis. It follows that for arbitrary values of the parameters b_1, \dots, b_{2l-1} system (2.5) has centers as anti-saddles and cannot have limit cycles surrounding these points. Therefore, we can fix the parameters b_1, \dots, b_{2l-1} in system (2.4), fixing the position of its finite singularities on the x -axis.

To prove that the even parameters $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ rotate the vector field of (2.4), let us calculate the following determinants:

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha_0} &= P Q'_{\alpha_0} - Q P'_{\alpha_0} = y^2 \geq 0, \\ \Delta_{\alpha_2} &= P Q'_{\alpha_2} - Q P'_{\alpha_2} = x^2 y^2 \geq 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_{\alpha_{2k}} &= P Q'_{\alpha_{2k}} - Q P'_{\alpha_{2k}} = x^{2k} y^2 \geq 0. \end{aligned}$$

By definition of a field rotation parameter [1, 4, 14], for increasing each of the parameters $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$, under the fixed others, the vector field of system (2.4) is rotated in the positive direction (counterclockwise) in the whole phase plane; and, conversely, for decreasing each of these parameters, the vector field of (2.4) is rotated in the negative direction (clockwise).

Calculating the corresponding determinants for the parameters $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2k-1}$, we can see that

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta_1} &= P Q'_{\beta_1} - Q P'_{\beta_1} = (x-1) y^2, \\ \Delta_{\beta_3} &= P Q'_{\beta_3} - Q P'_{\beta_3} = (x^3-1) y^2, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_{\beta_{2k-1}} &= P Q'_{\beta_{2k-1}} - Q P'_{\beta_{2k-1}} = (x^{2k-1}-1) y^2. \end{aligned}$$

It follows [1, 4] that, for increasing each of the parameters $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2k-1}$, under the fixed others, the vector field of system (2.4) is rotated in the positive direction (counterclockwise) in the half-plane $x > 1$ and in the negative direction (clockwise) in the half-plane $x < 1$ and vice versa for decreasing each of these parameters. We will call these parameters as semi-rotation ones.

Thus, for studying limit cycle bifurcations of (2.1), it is sufficient to consider the canonical systems (2.3) and (2.4) containing the field rotation parameters $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ and the semi-rotation parameters $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2k-1}$. The theorem is proved. \square

By means of the canonical systems (2.3) and (2.4), we will prove the following theorem.

Theorem 2.2. *The Liénard polynomial system (2.1) can have at most $k + l + 1$ limit cycles, $k + 1$ surrounding the origin and l surrounding one by one the other singularities of (2.1).*

Proof. According to Theorem 2.1, for the study of limit cycle bifurcations of system (2.1), it is sufficient to consider the canonical systems (2.3) and (2.4) containing the field rotation parameters $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ and the semi-rotation parameters $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2k-1}$. We will work with (2.4) again (system (2.3) can be considered in a similar way).

Vanishing all of the parameters $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ and $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2k-1}$ in (2.4), we will have system (2.5) which is symmetric with respect to the x -axis and has centers as anti-saddles. Its center domains are bounded by either separatrix loops or digons of the saddles or saddle-nodes of (2.5) lying on the x -axis.

Let us input successively the semi-rotation parameters $\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2k-1}$ into system (2.5) beginning with the parameters at the highest degrees of x and alternating with their signs. So, begin with the parameter β_{2k-1} and let, for definiteness, $\beta_{2k-1} > 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1 + b_1x + \dots + b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &\quad + y(-\beta_{2k-1} + \beta_{2k-1}x^{2k-1}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

In this case, the vector field of (2.7) is rotated in the negative direction (clockwise) in the half-plane $x < 1$ turning the center at the origin into a rough stable focus. All of the other centers lying in the half-plane $x > 1$ become rough unstable foci, since the vector field of (2.7) is rotated in the positive direction (counterclockwise) in this half-plane [1, 4].

Fix β_{2k-1} and input the parameter $\beta_{2k-3} < 0$ into (2.7):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1 + b_1x + \dots + b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &\quad + y(-\beta_{2k-3} - \beta_{2k-1} + \beta_{2k-3}x^{2k-3} + \beta_{2k-1}x^{2k-1}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Then the vector field of (2.8) is rotated in the opposite directions in each of the half-planes $x < 1$ and $x > 1$. Under decreasing β_{2k-3} , when $\beta_{2k-3} = -\beta_{2k-1}$, the focus at the origin becomes nonrough (weak), changes the character of its stability and generates a stable limit cycle. All of the other foci in the half-plane $x > 1$ will also generate unstable limit cycles for some values of β_{2k-3} after changing the character of their stability. Under further decreasing β_{2k-3} , all of the limit cycles will expand disappearing on separatrix cycles of (2.8) [1, 4].

Denote the limit cycle surrounding the origin by Γ_0 , the domain outside the cycle by D_{01} , the domain inside the cycle by D_{02} and consider logical possibilities of the appearance of other (semi-stable) limit cycles from a “trajectory concentration” surrounding this singular point. It is clear that, under decreasing the parameter β_{2k-3} , a semi-stable limit cycle cannot appear in the domain D_{02} , since the focus spirals filling

this domain will untwist and the distance between their coils will increase because of the vector field rotation [4].

By contradiction, we can also prove that a semi-stable limit cycle cannot appear in the domain D_{01} . Suppose it appears in this domain for some values of the parameters $\beta_{2k-1}^* > 0$ and $\beta_{2k-3}^* < 0$. Return to system (2.5) and change the inputting order for the semi-rotation parameters. Input first the parameter $\beta_{2k-3} < 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1+b_1x+\dots+b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &\quad + y(-\beta_{2k-3} + \beta_{2k-3}x^{2k-3}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Fix it under $\beta_{2k-3} = \beta_{2k-3}^*$. The vector field of (2.9) is rotated counterclockwise and the origin turns into a rough unstable focus. Inputting the parameter $\beta_{2k-1} > 0$ into (2.9), we get again system (2.8) the vector field of which is rotated clockwise. Under this rotation, a stable limit cycle Γ_0 will appear from a separatrix cycle for some value of β_{2k-1} . This cycle will contract, the outside spirals winding onto the cycle will untwist and the distance between their coils will increase under increasing β_{2k-1} to the value β_{2k-1}^* . It follows that there are no values of $\beta_{2k-3}^* < 0$ and $\beta_{2k-1}^* > 0$ for which a semi-stable limit cycle could appear in the domain D_{01} .

This contradiction proves the uniqueness of a limit cycle surrounding the origin in system (2.8) for any values of the parameters β_{2k-3} and β_{2k-1} of different signs. Obviously, if these parameters have the same sign, system (2.8) has no limit cycles surrounding the origin at all. On the same reason, this system cannot have more than l limit cycles surrounding the other singularities (foci or nodes) of (2.8) one by one.

It is clear that inputting the other semi-rotation parameters $\beta_{2k-5}, \dots, \beta_1$ into system (2.8) will not give us more limit cycles, since all of these parameters are rough with respect to the origin and the other anti-saddles lying in the half-plane $x > 1$. Therefore, the maximum number of limit cycles for the system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1+b_1x+\dots+b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &\quad + y(-\beta_1 - \dots - \beta_{2k-3} - \beta_{2k-1} + \beta_1x + \dots + \beta_{2k-3}x^{2k-3} + \beta_{2k-1}x^{2k-1}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

is equal to $l + 1$ and they surround the anti-saddles (foci or nodes) of (2.10) one by one.

Suppose that $\beta_1 + \dots + \beta_{2k-3} + \beta_{2k-1} > 0$ and input the last rough parameter $\alpha_0 > 0$ into system (2.10):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1+b_1x+\dots+b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &\quad + y(\alpha_0 - \beta_1 - \dots - \beta_{2k-1} + \beta_1x + \dots + \beta_{2k-1}x^{2k-1}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

This parameter rotating the vector field of (2.11) counterclockwise in the whole phase plane also will not give us more limit cycles, but under increasing α_0 , when $\alpha_0 =$

$\beta_1 + \dots + \beta_{2k-1}$, we can make the focus at the origin nonrough (weak), after the disappearance of the limit cycle Γ_0 in it. Fix this value of the parameter α_0 ($\alpha_0 = \alpha_0^*$):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1 + b_1x + \dots + b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &\quad + y(\beta_1x + \dots + \beta_{2k-1}x^{2k-1}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Let us input now successively the other field rotation parameters $\alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$ into system (2.12) beginning again with the parameters at the highest degrees of x and alternating with their signs. So, begin with the parameter α_{2k} and let $\alpha_{2k} < 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1 + b_1x + \dots + b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &\quad + y(\beta_1x + \dots + \beta_{2k-1}x^{2k-1} + \alpha_{2k}x^{2k}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

In this case, the vector field of (2.13) is rotated clockwise in the whole phase plane and the focus at the origin changes the character of its stability generating again a stable limit cycle. The limit cycles surrounding the other singularities of (2.13) can also still exist. Denote the limit cycle surrounding the origin by Γ_1 , the domain outside the cycle by D_1 and the domain inside the cycle by D_2 . The uniqueness of a limit cycle surrounding the origin (and limit cycles surrounding the other singularities) for system (2.13) can be proved by contradiction like we have done above for (2.8).

Let system (2.13) have the unique limit cycle Γ_1 surrounding the origin and l limit cycles surrounding the other antisaddles of (2.13). Fix the parameter $\alpha_{2k} < 0$ and input the parameter $\alpha_{2k-2} > 0$ into (2.13):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1 + b_1x + \dots + b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &\quad + y(\beta_1x + \dots + \beta_{2k-1}x^{2k-1} + \alpha_{2k-2}x^{2k-2} + \alpha_{2k}x^{2k}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Then the vector field of (2.14) is rotated in the opposite direction (counterclockwise) and the focus at the origin immediately changes the character of its stability (since its degree of nonroughness decreases and the sign of the field rotation parameter at the lower degree of x changes) generating the second (unstable) limit cycle Γ_2 . The limit cycles surrounding the other singularities of (2.14) can only disappear in the corresponding foci (because of their roughness) under increasing the parameter α_{2k-2} . Under further increasing α_{2k-2} , the limit cycle Γ_2 will join with Γ_1 forming a semi-stable limit cycle, Γ_{12} , which will disappear in a "trajectory concentration" surrounding the origin. Can another semi-stable limit cycle appear around the origin in addition to Γ_{12} ? It is clear that such a limit cycle cannot appear either in the domain D_1 bounded on the inside by the cycle Γ_1 or in the domain D_3 bounded by the origin and Γ_2 because of the increasing distance between the spiral coils filling these domains under increasing the parameter.

To prove the impossibility of the appearance of a semi-stable limit cycle in the domain D_2 bounded by the cycles Γ_1 and Γ_2 (before their joining), suppose the contrary,

i. e., that for some values of these parameters, $\alpha_{2k}^* < 0$ and $\alpha_{2k-2}^* > 0$, such a semi-stable cycle exists. Return to system (2.12) again and input first the parameter $\alpha_{2k-2} > 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1 + b_1x + \dots + b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &+ y(\beta_1x + \dots + \beta_{2k-1}x^{2k-1} + \alpha_{2k-2}x^{2k-2}). \end{aligned} \tag{2.15}$$

This parameter rotates the vector field of (2.15) counterclockwise preserving the origin as a nonrough stable focus.

Fix this parameter under $\alpha_{2k-2} = \alpha_{2k-2}^*$ and input the parameter $\alpha_{2k} < 0$ into (2.15) getting again system (2.14). Since, by our assumption, this system has two limit cycles surrounding the origin for $\alpha_{2k} > \alpha_{2k}^*$, there exists some value of the parameter, α_{2k}^{12} ($\alpha_{2k}^{12} < \alpha_{2k}^* < 0$), for which a semi-stable limit cycle, Γ_{12} , appears in system (2.14) and then splits into a stable cycle Γ_1 and an unstable cycle Γ_2 under further decreasing α_{2k} . The formed domain D_2 bounded by the limit cycles Γ_1, Γ_2 and filled by the spirals will enlarge since, on the properties of a field rotation parameter, the interior unstable limit cycle Γ_2 will contract and the exterior stable limit cycle Γ_1 will expand under decreasing α_{2k} . The distance between the spirals of the domain D_2 will naturally increase, which will prevent the appearance of a semi-stable limit cycle in this domain for $\alpha_{2k} < \alpha_{2k}^{12}$.

Thus, there are no such values of the parameters, $\alpha_{2k}^* < 0$ and $\alpha_{2k-2}^* > 0$, for which system (2.14) would have an additional semi-stable limit cycle surrounding the origin. Obviously, there are no other values of the parameters α_{2k} and α_{2k-2} for which system (2.14) would have more than two limit cycles surrounding this singular point. On the same reason, additional semi-stable limit cycles cannot appear around the other singularities (foci or nodes) of (2.14). Therefore, $l + 2$ is the maximum number of limit cycles in system (2.14).

Suppose that system (2.14) has two limit cycles, Γ_1 and Γ_2 , surrounding the origin and l limit cycles surrounding the other antisaddles of (2.14) (this is always possible if $-\alpha_{2k} \gg \alpha_{2k-2} > 0$). Fix the parameters $\alpha_{2k}, \alpha_{2k-2}$ and consider a more general system inputting the third parameter, $\alpha_{2k-4} < 0$, into (2.14):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1 + b_1x + \dots + b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &+ y(\beta_1x + \dots + \beta_{2k-1}x^{2k-1} + \alpha_{2k-4}x^{2k-4} + \alpha_{2k-2}x^{2k-2} + \alpha_{2k}x^{2k}). \end{aligned} \tag{2.16}$$

For decreasing α_{2k-4} , the vector field of (2.16) will be rotated clockwise and the focus at the origin will immediately change the character of its stability generating a third (stable) limit cycle, Γ_3 . With further decreasing α_{2k-4} , Γ_3 will join with Γ_2 forming a semi-stable limit cycle, Γ_{23} , which will disappear in a “trajectory concentration” surrounding the origin; the cycle Γ_1 will expand disappearing on a separatrix cycle of (2.16).

Let system (2.16) have three limit cycles surrounding the origin: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Could an additional semi-stable limit cycle appear with decreasing α_{2k-4} after splitting of

which system (2.16) would have five limit cycles around the origin? It is clear that such a limit cycle cannot appear either in the domain D_2 bounded by the cycles Γ_1 and Γ_2 or in the domain D_4 bounded by the origin and Γ_3 because of the increasing distance between the spiral coils filling these domains after decreasing α_{2k-4} . Consider two other domains: D_1 bounded on the inside by the cycle Γ_1 and D_3 bounded by the cycles Γ_2 and Γ_3 . As before, we will prove the impossibility of the appearance of a semi-stable limit cycle in these domains by contradiction.

Suppose that for some set of values of the parameters $\alpha_{2k}^* < 0$, $\alpha_{2k-2}^* > 0$ and $\alpha_{2k-4}^* < 0$ such a semi-stable cycle exists. Return to system (2.12) again inputting first the parameters $\alpha_{2k-2} > 0$ and $\alpha_{2k-4} < 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1 + b_1x + \dots + b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &+ y(\beta_1x + \dots + \beta_{2k-1}x^{2k-1} + \alpha_{2k-4}x^{2k-4} + \alpha_{2k}x^{2k}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Fix the parameter α_{2k-2} under the value α_{2k-2}^* . With decreasing α_{2k-4} , a separatrix cycle formed around the origin will generate a stable limit cycle Γ_1 . Fix α_{2k-4} under the value α_{2k-4}^* and input the parameter $\alpha_{2k} > 0$ into (2.17) getting system (2.16).

Since, by our assumption, (2.16) has three limit cycles for $\alpha_{2k} > \alpha_{2k}^*$, there exists some value of the parameter α_{2k}^{23} ($\alpha_{2k}^{23} < \alpha_{2k}^* < 0$) for which a semi-stable limit cycle, Γ_{23} , appears in this system and then splits into an unstable cycle Γ_2 and a stable cycle Γ_3 with further decreasing α_{2k} . The formed domain D_3 bounded by the limit cycles Γ_2 , Γ_3 and also the domain D_1 bounded on the inside by the limit cycle Γ_1 will enlarge and the spirals filling these domains will untwist excluding a possibility of the appearance of a semi-stable limit cycle there.

All other combinations of the parameters α_{2k} , α_{2k-2} , and α_{2k-4} are considered in a similar way. It follows that system (2.16) can have at most $l + 3$ limit cycles.

If we continue the procedure of successive inputting the field rotation parameters, $\alpha_{2k}, \dots, \alpha_2$, into system (2.12),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(x-1)(1 + b_1x + \dots + b_{2l-1}x^{2l-1}) \\ &+ y(\beta_1x + \dots + \beta_{2k-1}x^{2k-1} + \alpha_2x^2 + \dots + \alpha_{2k}x^{2k}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

it is possible to obtain k limit cycles surrounding the origin and l surrounding one by one the other singularities (foci or nodes) ($-\alpha_{2k} \gg \alpha_{2k-2} \gg -\alpha_{2k-4} \gg \alpha_{2k-6} \gg \dots$).

Then, by means of the parameter $\alpha_0 \neq \beta_1 + \dots + \beta_{2k-1}$ ($\alpha_0 > \alpha_0^*$, if $\alpha_2 < 0$, and $\alpha_0 < \alpha_0^*$, if $\alpha_2 > 0$), we will have the canonical system (2.4) with an additional limit cycle surrounding the origin and can conclude that this system (i. e., the Liénard polynomial system (2.1) as well) has at most $k + l + 1$ limit cycles, $k + 1$ surrounding the origin and l surrounding one by one the antisaddles (foci or nodes) of (2.4) (and (2.1) as well). The theorem is proved. \square

3. A Holling-Type Quartic Dynamical System

In this Section, we study a Holling-type rational system which models the dynamics of the populations of predators and their prey in a given ecological or biomedical system:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left(1 - \lambda x - \frac{xy}{\alpha x^2 + \beta x + 1} \right) && \text{(prey),} \\ \dot{y} &= -y \left(\delta + \mu y - \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1} \right) && \text{(predator),} \end{aligned} \tag{3.1}$$

where $x > 0$ and $y > 0$; $\alpha \geq 0$, $\beta > -2\sqrt{\alpha}$, $\delta > 0$, $\lambda > 0$, and $\mu \geq 0$ are parameters.

Dividing the second equation of (3.1) by the first one (left and right hand sides, respectively), after algebraic transformations in the corresponding equation, we can rewrite rational system (3.1) in the form of a quartic dynamical system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x((1 - \lambda x)(\alpha x^2 + \beta x + 1) - xy) \equiv P, \\ \dot{y} &= -y((\delta + \mu y)(\alpha x^2 + \beta x + 1) - x^2) \equiv Q. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Together with (3.2), we will also consider an auxiliary system; see [1, 4, 14]

$$\dot{x} = P - \gamma Q, \quad \dot{y} = Q + \gamma P, \tag{3.3}$$

applying to these systems our bifurcational geometric approach [2]–[10] and completing the qualitative analysis of (3.1).

Consider first a general polynomial system in the vector form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}), \tag{3.4}$$

where $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$; $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^n$; $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^2$ (\mathbf{f} is a polynomial vector function).

Let us formulate the Wintner–Perko termination principle [4, 14] for this system.

Theorem 3.1. *Any one-parameter family of multiplicity- m limit cycles of relatively prime polynomial system (3.4) can be extended in a unique way to a maximal one-parameter family of multiplicity- m limit cycles of (3.4) which is either open or cyclic.*

If it is open, then it terminates either as the parameter or the limit cycles become unbounded; or, the family terminates either at a singular point of (3.4), which is typically a fine focus of multiplicity m , or on a (compound) separatrix cycle of (3.4) which is also typically of multiplicity m .

The proof of this principle for general polynomial system (3.4) with a vector parameter $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^n$ parallels the proof of the planar termination principle for the system

$$\dot{x} = P(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = Q(x, y, \lambda) \tag{3.5}$$

with a single parameter $\lambda \in \mathbf{R}$ [4, 14], since there is no loss of generality in assuming that system (3.4) is parameterized by a single parameter λ ; i. e., we can assume that

there exists an analytic mapping $\mu(\lambda)$ of \mathbf{R} into \mathbf{R}^n such that (3.4) can be written as (3.5) and then we can repeat everything, what had been done for system (3.5) in [14]. In particular, if λ is a field rotation parameter of (3.5), the following Perko's theorem on monotonic families of limit cycles is valid [4, 14].

Theorem 3.2. *If L_0 is a nonsingular multiple limit cycle of (3.5) for $\lambda = \lambda_0$, then L_0 belongs to a one-parameter family of limit cycles of (3.5); furthermore:*

1) *if the multiplicity of L_0 is odd, then the family either expands or contracts monotonically as λ increases through λ_0 ;*

2) *if the multiplicity of L_0 is even, then L_0 bifurcates into a stable and an unstable limit cycle as λ varies from λ_0 in one sense and L_0 disappears as λ varies from λ_0 in the opposite sense; i. e., there is a fold bifurcation at λ_0 .*

Consider again system (3.2). This system has two invariant straight lines: $x = 0$ and $y = 0$. Its finite singularities are determined by the algebraic system

$$\begin{aligned} x((1 - \lambda x)(\alpha x^2 + \beta x + 1) - xy) &= 0, \\ y((\delta + \mu y)(\alpha x^2 + \beta x + 1) - x^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

From (3.6), we have got: two singular points $(0, 0)$ and $(0, -\delta/\mu)$, at most two points defined by the condition

$$\alpha x^2 + \beta x + 1 = 0, \quad y = 0, \quad (3.7)$$

and at most six singularities defined by the system

$$\begin{aligned} xy &= (1 - \lambda x)(\alpha x^2 + \beta x + 1), \\ y(\delta + \mu y) &= x(1 - \lambda x), \end{aligned} \quad (3.8)$$

among which we always have the point $(1/\lambda, 0)$. See [13] for more details.

The point $(0, 0)$ is always a saddle, but $(1/\lambda, 0)$ can be a node or a saddle, or a saddle-node. The point $(1/\lambda, 0)$ can change multiplicity when singular points enter or exit the first quadrant. In addition, a singular point of multiplicity 2 may appear in the first quadrant and bifurcate into two singular points. In the case $\beta \geq 0$ (respectively, $-2\sqrt{\alpha} < \beta < 0$), there is a possibility of up to one singular point (respectively, two singular points) in the open first quadrant [13]. If there exists exactly one simple singular point in the open first quadrant, then it is an anti-saddle. If there exists exactly two simple singular points in the open first quadrant, then the singular point on the left with respect to the x -axis is an anti-saddle and the singular point on the right is a saddle [13]. If a singular point is not in the first quadrant, in consequence, it has no biological significance.

To study singular points of (3.2) at infinity, consider the corresponding differential equation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y((\delta + \mu y)(\alpha x^2 + \beta x + 1) - x^2)}{x((1 - \lambda x)(\alpha x^2 + \beta x + 1) - xy)}. \quad (3.9)$$

Dividing the numerator and denominator of the right-hand side of (3.9) by x^4 ($x \neq 0$) and denoting y/x by u (as well as dy/dx), we will get the algebraic equation

$$u((\mu/\lambda)u - 1) = 0, \quad \text{where } u = y/x, \quad (3.10)$$

for all infinite singularities of (3.9) except when $x = 0$ (the “ends” of the y -axis) [1, 4]. For this special case we can divide the numerator and denominator of the right-hand side of (3.9) by y^4 ($y \neq 0$) denoting x/y by v (as well as dx/dy) and consider the algebraic equation

$$v^3(v - \mu/\lambda) = 0, \quad \text{where } v = x/y. \quad (3.11)$$

The equations (3.10) and (3.11) give three singular points at infinity for (3.9): a simple node on the “ends” of the x -axis, a triple node on the “ends” of the y -axis, and a simple saddle in the direction of $y/x = \lambda/\mu$.

To investigate the character and distribution of the singular points in the phase plane, we have used a method developed in [3]. The sense of this method is to obtain the simplest (well-known) system by vanishing some parameters (usually field rotation parameters) of the original system and then to input these parameters successively one by one studying the dynamics of the singular points (both finite and infinite) in the phase plane.

Using the obtained information on singular points and applying our bifurcational geometric approach [2]–[10], we can study the limit cycle bifurcations of system (3.2). This study will use some results obtained in [13]: in particular, the results on the cyclicity of a singular point of (3.2). However, it is surely not enough to have only these results to prove the main theorem of this paper concerning the maximum number of limit cycles of system (3.2).

Finally, we will see also that the main result of this paper is quite similar to the main result of [3], where a Holling system of type IV was studied, but the number of singular points in the first quadrant and the distribution of limit cycles in the two systems are different.

Applying the definition of a field rotation parameter [1, 4, 14], i. e., a parameter which rotates the field in one direction, to system (3.2), let us calculate now the corresponding determinants for the parameters α and β , respectively:

$$\Delta_\alpha = PQ'_\alpha - QP'_\alpha = x^4y(y(\delta + \mu y) - x(1 - \lambda x)), \quad (3.12)$$

$$\Delta_\beta = PQ'_\beta - QP'_\beta = x^4y(y(\delta + \mu y) - x(1 - \lambda x)). \quad (3.13)$$

It follows from (3.12) and (3.13) that on increasing α or β the vector field of (3.2) in the first quadrant is rotated in the positive direction (counterclockwise) only on the outside of the ellipse

$$y(\delta + \mu y) - x(1 - \lambda x) = 0. \quad (3.14)$$

Therefore, to study limit cycle bifurcations of system (3.2), it makes sense together with (3.2) to consider also an auxiliary system (3.3) with a field rotation parameter γ :

$$\Delta_\gamma = P^2 + Q^2 \geq 0. \quad (3.15)$$

Using system (3.3) and applying Perko's results [4, 14], we prove the following theorem.

Theorem 3.3. *System (3.2) can have at most two limit cycles surrounding one singular point.*

Proof. First let us prove that system (3.2) can have at least two limit cycles. Begin with system (3.2), where $\alpha = \beta = 0$. It is clear that such a cubic system, with two invariant straight lines, cannot have limit cycles at all [13]. Inputting a negative parameter β into this system, the vector field of (3.2) will be rotated in the negative direction (clockwise) at infinity, the structure and the character of stability of infinite singularities will be changed, and an unstable limit, Γ_1 , will appear immediately from infinity in this case. This cycle will surround a stable anti-saddle (a node or a focus) A which is in the first quadrant of system (3.2). Inputting a positive parameter α , the vector field of quartic system (1.10) will be rotated in the positive direction (counterclockwise) at infinity, the structure and the character of stability of infinite singularities will be changed again, and a stable limit, Γ_2 , surrounding Γ_1 will appear immediately from infinity in this case. On further increasing the parameter α , the limit cycles Γ_1 and Γ_2 combine a semi-stable limit, Γ_{12} , which then disappears in a "trajectory concentration" [1, 4]. Thus, we have proved that system (3.2) can have at least two limit cycles; see also [13].

Let us prove now that this system has at most two limit cycles. The proof is carried out by contradiction applying catastrophe theory [4, 14]. Consider system (3.3) with three parameters: α , β , and γ (the parameters δ , λ , and μ can be fixed, since they do not generate limit cycles). Suppose that (3.3) has three limit cycles surrounding the only point A in the first quadrant. Then we get into some domain of the parameters α , β , and γ being restricted by definite conditions on three other parameters δ , λ , and μ . This domain is bounded by two fold bifurcation surfaces forming a cusp bifurcation surface of multiplicity-three limit cycles in the space of the parameters α , β , and γ .

The corresponding maximal one-parameter family of multiplicity-three limit cycles cannot be cyclic, otherwise there will be at least one point corresponding to the limit cycle of multiplicity four (or even higher) in the parameter space.

Extending the bifurcation curve of multiplicity-four limit cycles through this point and parameterizing the corresponding maximal one-parameter family of multiplicity-four limit cycles by the field rotation parameter γ , according to Theorem 3.2, we will obtain two monotonic curves of multiplicity-three and one, respectively, which, by the Wintner–Perko termination principle (Theorem 3.1), terminate either at the point A or on a separatrix cycle surrounding this point.

Since we know at least the cyclicity of the singular point which is equal to two [13], we have got a contradiction with the termination principle stating that the multiplicity of limit cycles cannot be higher than the multiplicity (cyclicity) of the singular point in which they terminate.

If the maximal one-parameter family of multiplicity-three limit cycles is not cyclic, using the same principle (Theorem 3.1), this again contradicts the cyclicity of A [13] not admitting the multiplicity of limit cycles to be higher than two. This contradiction

completes the proof in the case of one singular point in the first quadrant.

Suppose that system (3.3) with two finite singularities, a saddle S and an anti-saddle A , has three limit cycles surrounding A . Then we get again into some domain of the parameters α , β , and γ bounded by two fold bifurcation surfaces forming a cusp bifurcation surface of multiplicity-three limit cycles in the space of the parameters α , β , and γ being restricted by definite conditions on three other parameters δ , λ , and μ .

The corresponding maximal one-parameter family of multiplicity-three limit cycles cannot be cyclic, otherwise there will be at least one point corresponding to the limit cycle of multiplicity four (or even higher) in the parameter space. Extending the bifurcation curve of multiplicity-four limit cycles through this point and parameterizing the corresponding maximal one-parameter family of multiplicity-four limit cycles by the field rotation parameter γ , according to Theorem 3.2, we will obtain again two monotonic curves of multiplicity-three and one, respectively, which, by Theorem 3.1, terminate either at the point A or on a separatrix loop surrounding this point [4].

Since we know at least the cyclicity of the singular point which is equal to two [13], we have got a contradiction with the termination principle (Theorem 3.1).

If the maximal one-parameter family of multiplicity-three limit cycles is not cyclic, using the same principle, this again contradicts the cyclicity of A [13] not admitting the multiplicity of limit cycles higher than two. Moreover, it also follows from the termination principle that a separatrix loop cannot have the multiplicity (cyclicity) higher than two in this case.

Thus, we conclude that system (3.2) cannot have either a multiplicity-three limit cycle or more than two limit cycles surrounding a singular point which proves the theorem. \square

References

1. *Bautin, N. N., Leontovich, E. A.* Methods and Examples of the Qualitative Analysis of Dynamical Systems in a Plane. — Moscow: Nauka, 1990. — 488 p. (in Russian).
2. *Botelho, F., Gaiko, V. A.* Global analysis of planar neural networks // *Nonlinear Anal.* — 2006. — Vol. 64, No. 1. — P. 1002–1011.
3. *Broer, H. W., Gaiko, V. A.* Global qualitative analysis of a quartic ecological model // *Nonlinear Anal.* — 2010. — Vol. 72, No. 2. — P. 628–634.
4. *Gaiko, V. A.* Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003. — 204 p.
5. *Gaiko, V. A., van Horssen, W. T.* Global bifurcations of limit and separatrix cycles in a generalized Liénard system // *Nonlinear Anal.* — 2004. — Vol. 59, No. 1–2. — P. 189–198.
6. *Gaiko, V. A.* Limit cycles of quadratic systems // *Nonlinear Anal.* — 2008. — Vol. 69, No. 7. — P. 2150–2157.
7. *Gaiko, V. A.* Multiple limit cycle bifurcations of the FitzHugh–Nagumo neuronal model // *Nonlinear Anal.* — 2011. — Vol. 74, No. 18. — P. 7532–7542.
8. *Gaiko, V. A.* On limit cycles surrounding a singular point // *Differ. Equ. Dyn. Syst.* — 2012. — Vol. 20, No. 3. — P. 329–337.

9. *Gaiko, V. A.* The applied geometry of a general Liénard polynomial system // Appl. Math. Letters. — 2012. — Vol. 25, No. 12. — P. 2327–2331.
10. *Gaiko, V. A.* Limit cycle bifurcations of a general Liénard system with polynomial restoring and damping functions // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. — 2012. — Vol. 4, No. 3. — P. 242–254.
11. *Gaiko, V. A., Ginoux, J.-M., Vuik, C.* Control of limit cycle bifurcations in the Kukles cubic system // Eighth International Conference on Physics and Control [Electronic resource]: Proc. / A.L. Fradkov [et al.], Eds. — Florence, 2017. — 6 p. — <http://coms.physcon.ru/getpaper/c1608p25r4164.pdf/>, 17.07.2017.
12. *Gaiko, V. A., Ginoux, J.-M., Vuik, C.* The termination principle of multiple limit cycles for the Kukles cubic system // Cyber. Phys. — 2017. — Vol. 6, No. 4. — P. 195–200.
13. *Lamontagne, Y., Coutu, C., Rousseau, C.* Bifurcation analysis of a predator-prey system with generalized Holling type III functional response // J. Dyn. Diff. Equations. — 2008. — Vol. 20. — P. 535–571.
14. *Perko, L.* Differential Equations and Dynamical Systems. — New York: Springer-Verlag, 2002. — 555 p.
15. *Smale, S.* Mathematical problems for the next century // Math. Intellig. — 1998. — Vol. 20. — P. 7–15.
16. *Vuik, C., Vermolen, F. J., van Gijzen, M. B., Vuik, M. J.* Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. — Delft: Delft Academic Press, 2015. — 212 p.

Получена 12.02.2018

Памяти Евгения Петровича Белана



10 октября 2017 года после тяжёлой и продолжительной болезни на 77 году ушёл из жизни Евгений Петрович Белан, известный учёный, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение Крымского федерального университета имени В.И.Вернадского).

Евгений Петрович Белан родился 28 февраля 1941 года в городе Евпатории. Его мать Елена Ефимовна Воловик и отец Петр Андреевич Белан по происхождению были крестьянами из Житомирской и Черниговской областей. Во время голода 1930-х годов семье пришлось перебраться в город. Петр Андреевич закончил профильное училище и работал фельдшером. Во время Великой отечественной войны семья находилась в эвакуации в городе Хасавьюрт Чечено-Ингушской республики. В 1943 году в семье родились еще и близнецы Андрей и Александр. После освобождения Крыма семья переехала в Симферополь. Петр Андреевич работал в специальной областной комиссии по санитарной проверке пищевых предприятий. Евгений Петрович учился в симферопольской школе №16, и в эти годы началось его увлечение математикой. По окончании школы в 1958 году он поступил на физико-математический факультет Крымского государственного педагогического института имени М. В. Фрунзе. В эти годы на факультете работали доценты Николай Андреевич Никулин, Борис Аронович Манзон, Виктор Николаевич Скрыдлов, Вячеслав Григорьевич Еськов, Рубен Григорьевич Бадальян и другие преподаватели, представители разных математических школ. Ещё до окончания института

с 1 января 1962 года по 30 октября 1962 года Евгений Петрович работал учителем математики и физики. После окончания пединститута в 1963 году по специальности «математика, черчение и астрономия» Евгений Петрович поступил в аспирантуру Института математики АН УССР. Свои исследования он проводил в отделе нелинейных колебаний под руководством академика Юрия Алексеевича Митропольского. Во время учёбы в аспирантуре Евгений Петрович был призван в армию, где служил лейтенантом артиллерии. После окончания службы он вернулся в аспирантуру, которую окончил 31 июня 1968 года с представлением диссертации. Евгений Петрович в 1967 году создал семью, и его жена также была преподавателем математики. В 1968 году у них родился сын Алексей, а в 1975 году – сын Михаил. В Славянском государственном институте Евгений Петрович работал с 1 июля 1968 на должности преподавателя кафедры математики. В это время из 30 преподавателей физико-математического было только четыре кандидата физико-математических наук. 22 апреля 1969 года в Институте математики АН УССР Евгений Петрович успешно защитил диссертацию на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Дифференциальные уравнения», на основании чего с 15 ноября 1968 года был переведён на должность старшего преподавателя кафедры математики, а 22 мая 1970 года, решением ВАК СССР получил диплом кандидата физико-математических наук. В Славянском педагогическом институте на физико-математическом факультете с 1968 года прочитал курсы дифференциальных уравнений, аналитической геометрии, проводил занятия по математическому анализу.

В 1971 году Евгений Петрович вернулся в Симферополь и начал работать в Крымском государственном педагогическом институте имени М. В. Фрунзе на кафедре математического анализа. После преобразования пединститута в Симферопольский государственный университет на математическом факультете в 1973 году была создана кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, которую возглавил профессор Юрий Иосифович Черский. Евгений Петрович стал доцентом созданной кафедры и в дальнейшем, в течение 1977–1980 годов, исполнял обязанности заведующего кафедрой. Евгений Петрович читал лекции по различным дисциплинам, в том числе, по дифференциальным уравнениям, вариационному исчислению, методам оптимизации, а также по многим специальным дисциплинам, в числе которых теория бифуркаций, теория устойчивости и другие. Будучи спокойным и деликатным человеком, уважительно относящимся к своим коллегам и студентам, Евгений Петрович в своей преподавательской деятельности был всегда строгим и требовательным. Когда в 1980 году кафедру дифференциальных и интегральных уравнений возглавил профессор Сергей Константинович Персидский, на кафедре началась активная научно-прикладная деятельность, в которую включился и Евгений Петрович Белан. Он выполнял исследования по многим хозяйственным темам кафедры, входил в состав оргкомитета КРОМШ и организованной в 1993 году Крымской математической школы «Метод функций Ляпунова и его приложения».

Евгений Петрович вместе с кафедрой и факультетом прошел через многие ре-

организации, затронувшие образовательную и научную деятельность, и при этом продолжал свои научные исследования, по материалам которых подготовил докторскую диссертацию. В своих научных работах Е. П. Белан рассматривал квазилинейные параболические уравнения с преобразованиями пространственных переменных, относящиеся к исследованию бегущих и ротационных волн, движущихся фронтов, стационарных пространственно-неоднородных структур. Изучались также задачи о бифуркации рождения вращающихся структур для параболического уравнения на круге с преобразованием поворота и радиального сжатия пространственных переменных, бифуркации рождения периодических решений на гладкой области, бифуркации рождения вращающихся структур для параболического уравнения на круге с преобразованием поворота и радиального сжатия пространственных переменных, бифуркация рождения периодических решений на гладкой области. По указанным направлениям ему удалось получить ряд приоритетных результатов.

В 2007 году в специализированном совете Института математики АН Украины Евгений Петрович защитил докторскую диссертацию на тему «Метод инвариантных многообразий в теории параболических и функционально-дифференциальных уравнений и его приложения». Научный консультантом работы был директор Института математики НАН Украины академик Анатолий Михайлович Самойленко. В дальнейшем исследования профессора Е. П. Белана стали составной частью научных направлений, объединенных в научную школу «Спектральные и эволюционные задачи» под руководством заслуженного деятеля науки и техники Украины, лауреата государственной премии профессора Николая Дмитриевича Копачевского.

С начала нового столетия Евгений Петрович активно участвовал в подготовке кадров высшей квалификации, руководил научными исследованиями аспирантов. Под его руководством подготовлены и защищены две кандидатские диссертации. В 2012 году в специализированном совете Таврического национального университета защитила диссертацию Ольга Шиян. Тема диссертации — «Буферность в параболических задачах Ван-дер-Полевского типа». Другая ученица, Юлия Хазова, защитила диссертацию по теме «Динамика структур в параболической задаче с преобразованием пространственной переменной» в спецсовете Южного федерального университета в 2018 году, уже после ухода из жизни научного руководителя.

Евгений Петрович до последних дней занимался научными исследованиями, сотрудничая с ведущим научным сотрудником Института математики НАН Украины О. Б. Лыковой, членом-корреспондентом НАН Украины М. В. Михалевичем, академиком А. М. Самойленко и другими. Входил в состав редакционных коллегий научных журналов «Таврический вестник математики и информатики» и «Динамические системы».

Евгений Петрович Белан был не только высококвалифицированным математиком и педагогом. И члены факультета, и студенты хорошо знали его принципиальность и требовательность в учебном процессе. Евгений Петрович всегда тщательно готовился к лекциям и практическим занятиям, но ещё более высокие требова-

ния он предъявлял к своим научным результатам. Поэтому среди соавторов его научных работ такие выдающиеся ученые как А. М. Самойленко, О. Б. Лыкова, М. В. Михалевич.

Глубокая увлеченность математикой не мешала Евгению Петровичу жить полноценной жизнью со всеми её заботами и радостями. Он знал крымскую природу и историю Крыма, хорошо плавал, мог быстро приготовить отличный полноценный обед и поддержать интересной беседой застолье.

Мы всегда будем помнить Евгения Петровича Белана как принципиального, порядочного и мудрого коллегу и товарища.

О. В. Анашкин, Н. Д. Копачевский, В. А. Лукьяненко, М. А. Муратов, И. В. Орлов, Г. С. Осипенко, В. Н. Чехов, С. Н. Чуйко.

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.947

Г. В. ДЕМИДЕНКО, Е. А. ЛОМАКИНА. **Локальные оценки решений второй краевой задачи для уравнения Соболева** (русский) // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №1. — С. 3–14.

Рассматривается вторая краевая задача в цилиндрической области для двумерного уравнения Соболева. Установлены внутренние оценки решений при больших t .

Ключевые слова: вторая краевая задача, уравнение Соболева, соболевские пространства.

Библиогр. 7 назв.

УДК 517.938.5

В. КРУГЛОВ. **Топологическая сопряжённость топологически эквивалентных градиентно-подобных потоков на поверхностях** (английский) // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №1. — С. 15–21.

Класс C^1 -гладких градиентно-подобных потоков (потоков Морса) на замкнутой поверхности лежит в классе потоков Морса-Смейла, которые являются грубыми, их неблуждающее множество состоит только из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических предельных циклов, а ещё у них нет траекторий, соединяющих седловые точки. Градиентно-подобные потоки это потоки Морса-Смейла без предельных циклов. В этой работе мы доказываем, что топологически эквивалентные градиентно-подобные потоки на замкнутой поверхности топологически сопряжены.

Ключевые слова: градиентно-подобный поток, поток Морса-Смейла, сопряжённость, эквивалентность, гомеоморфизм

Ил. 3. Библиогр. 8 назв.

УДК 531.36+531.384

А. С. КУЛЕШОВ, Д. С. ЗУЕВА. **К задаче о движении тела вращения по сфере** (русский) // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №1. — С. 23–30.

Рассматривается задача о качении без проскальзывания динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной сфере. Предполагается, что приложенные к твердому телу силы, имеют приложенную к центру масс G тела равнодействующую, направленную к центру O опорной сферы и зависящую только от расстояния между точками G и O . В этом случае решение задачи сводится к интегрированию системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент ω_3 и n угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии и на нормаль к опорной сфере соответственно. Изучается вопрос: при каком условии на форму поверхности катящегося тела уравнение, которому удовлетворяет ω_3 , интегрируется методом разделения переменных отдельно от других уравнений.

Ключевые слова: тело вращения; качение по сфере; интегрируемость в явном виде.

Ил. 1. Библиогр. 2 назв.

УДК 539.3

А. Д. ЛЯШКО, В. Н. ЧЕХОВ. **Собственные формы прямоугольной ортотропной призмы при различных видах симметрии** (русский) // Динамические системы, 2018. — Том 8(36), №1. — С. 31–49.

В статье получены новые аналитические представления решения задачи для установившихся колебаний прямоугольной ортотропной призмы для четырех видов симметрии. По сравне-

нию с другими известными аналитическими представлениями для данных представлений существенным образом упрощен анализ регулярности соответствующих бесконечных систем и применимость метода улучшенной редукции для численных оценок её решения. Для каждого вида симметрии указано счетное множество элементарных собственных частот и собственных форм колебаний, которые соответствуют известным модам Ламе для изотропных призм. Вычислены первые собственные частоты и соответствующие собственные формы колебаний для квадратной ортотропной призмы.

Ключевые слова: установившиеся колебания ортотропной призмы, метод суперпозиции, регулярная бесконечная система линейных алгебраических уравнений, собственные частоты ортотропной прямоугольной призмы, аналитическое представление решения, улучшенный метод редукции.

Ил. 4. Табл. 4. Библиогр. 16 назв.

УДК 532.6,534

Д. Ф. БЕЛОНОЖКО, А. В. АПАРНЕВА. **О способах аналитического расчета условий развития неустойчивости горизонтальной поверхности вязкой жидкости, совершающей вертикальные колебания** (русский) // *Динамические системы*, 2018. — Том 8(36), №1. — С. 51–61.

Проведен сравнительный анализ двух аналитических асимптотических методов расчета условий возникновения неустойчивости, наблюдаемой на поверхности горизонтального слоя вязкой жидкости, совершающей вертикальные колебания: метода сведения задачи к интегро-дифференциальному уравнению относительно амплитуды возмущения и метода, опирающегося на применение теории Флоке к системе с несколькими переменными. Показано, что некоторые известные работы по данному вопросу содержат некорректности, которые существенно усложняют сопоставление и верификацию результатов, полученных разными методами.

Ключевые слова: неустойчивость Фарадея, вязкая жидкость, свободная поверхность, теория Флоке.

Библиогр. 12 назв.

УДК 531.36

Р. Г. МУХАРЛЯМОВ. **Построение уравнений динамических систем со связями** (русский) // *Динамические системы*, 2018. — Том 8(36), №1. — С. 63–72.

Составление уравнений динамики систем со связями приводит к необходимости определения выражений множителей Лагранжа, для чего непосредственно используются производные от уравнений связей. При этом подразумевается, что уравнения связей составляют первые интегралы уравнений динамики, что приводит к нарушению уравнений связей, вызванных погрешностями численного решения и задания начальных условий. Для обеспечения стабилизации связей используются методы построения дифференциальных уравнений с заданными частными интегралами. Составление уравнений возмущений связей с асимптотически устойчивым тривиальным решением позволяет обеспечить стабилизацию связей при численном решении уравнений динамики.

Ключевые слова: динамика, система, устойчивость, уравнения, связи, стабилизация.

Библиогр. 21 назв.

УДК 517.925.42

В. А. ГАЙКО, К. ФАУК. **Многопараметрические планарные динамические системы: глобальные бифуркации предельных циклов** (английский) // *Динамические системы*, 2018. —

Том 8(36), №1. — С. 73–88.

Мы изучаем многопараметрические планарные динамические системы и проводим глобальный бифуркационный анализ таких систем. Чтобы контролировать глобальные бифуркации предельных циклов в этих системах, необходимо знать свойства и комбинировать действие всех их параметров, поворачивающих векторное поле. Это можно сделать с помощью разработанного нами бифуркационно-геометрического метода, основанного на принципе окончания Уинтера–Перко и применении канонических систем с параметрами поворота поля. Используя этот метод, мы решаем, например, шестнадцатую проблему Гильберта о максимальном числе и распределении предельных циклов для общей полиномиальной системы Лъенара и квартирной динамической системы типа системы Холлинга. Мы также проводим некоторые численные эксперименты для иллюстрации полученных результатов.

Ключевые слова: многопараметрическая планарная динамическая система, глобальный бифуркационный анализ, параметр поворота поля, предельный цикл.

Библиогр. 16 назв.

ABSTRACTS

MSC 2010: 35G15

G. V. DEMIDENKO, E. A. LOMAKINA. **Local estimates of solutions to the second boundary value problem for the Sobolev equation** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.1, 3–14 (2018).

We consider the second boundary value problem in a cylindrical domain for the two-dimensional Sobolev equation. We establish internal estimates of solutions for large t .

Keywords: the second boundary value problem, Sobolev equation, Sobolev spaces.

Ref. 7.

MSC 2010: 37D15

V. KRUGLOV. **Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces** (English). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.1, 15–21 (2018).

The class of C^1 -smooth gradient-like flows (Morse flows) on closed surface is the subclass of the Morse-Smale flows class, which are rough. Their non-wandering set consists of a finite number of hyperbolic fixed points and a finite number of hyperbolic limit cycles, and they do not have trajectories connecting saddle points. It is well known that the topological equivalence class of a Morse-Smale flow on a surface can be described combinatorially, for example, by the directed Peixoto graph, or by the Oshemkov-Sharko molecule. However, the description of the class of the topological conjugacy of such a system already requires the introduction of continuous invariants (moduli), corresponding to the periods of limit cycles at least. Thus, one class of the equivalence contains continuum classes of the topological conjugacy. Gradient-like flows are Morse-Smale flows without limit cycles. In this paper we prove that gradient-like flows on a closed surface are topologically conjugate iff they are topologically equivalent.

Keywords: gradient-like flow, Morse-Smale flow, conjugacy, equivalence, homeomorphism

Fig. 3. Ref. 8.

MSC 2010: 70F25; 70E18; 70E40

A. S. KULESHOV, D. S. ZUEVA. **Motion of a Rotationally Symmetric Body on a Sphere** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.1, 23–30 (2018).

The problem of rolling without sliding of a rotationally symmetric rigid body on a sphere is considered. The rolling body is assumed to be subjected to the forces, the resultant of which is directed from the center of mass G of the body to the center O of the sphere, and depends only on the distance between G and O . In this case the solution of this problem is reduced to solving the system of two first order linear differential equations over the projections ω_3 and n of the angular velocity of the body onto its axis of symmetry and onto the normal to the sphere respectively. The problem of determination of the shape of the rolling body for which the equation for ω_3 can be solved by separation of variables is studied.

Keywords: rotationally symmetric body; body rolling on a sphere; integrability.

Fig. 1. Ref. 2.

MSC 2010: 65N25, 74E10, 74H05, 74H10, 74H30, 74H45

A. D. LYASHKO, V. N. CHEKHOV. **Eigenforms of rectangular orthotropic prism for the different forms of symmetry** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.1, 31–49 (2018).

In this paper new analytical presentations of the solutions for steady-state oscillations of orthotropic rectangular prism is found for four forms of symmetry. These presentations significantly

simplify the regularity analysis and application of the improved reduction method. Countable sets of the elementary eigenforms for rectangular orthotropic prism that correspond to Lamé modes for isotropic prism are found for each type of symmetry. First eigenfrequencies and eigenforms are found numerically for square orthotropic prism.

Keywords: steady-state oscillations of orthotropic rectangular prism, superposition method, regular infinite system of linear algebraic equations, eigenfrequencies of rectangular orthotropic prism, analytical presentation of solution, the improved reduction method.

Fig. 4. Tbl. 4. Ref. 16.

MSC 2010: 76E17

D. F. BELONozhko, A. V. APARNEVA. **On analytical calculation methods of instability conditions of horizontal surface of a viscous liquid committing vertical oscillations** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.1, 51–61 (2018).

A comparative analysis has been conducted for two analytical asymptotic methods for calculation of instability conditions of a horizontal surface of a viscous liquid which commits periodic vertical oscillations. The first method leads to integro-differential equation for amplitude of surfaces perturbations. Second one is based on the Floquet's theory applied directly to the system of several variables. It has been shown that some well known publications on the subject contain improprieties which essentially complicate juxtaposition and verification of results obtained by different methods. It has been revealed the second method is more preferable for analysis of the Faraday instability in more complicated cases such as the problem with vertically oscillating two-layer liquid or a liquid with surfactant film on its surface etc.

Keywords: Faraday instability, viscous liquid, free surface, Floquet's theory.

Ref. 12.

MSC 2010: 70F20, 70H14

R. G. MUKHARLYAMOV. **Constructing equations of constrained dynamical systems** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.1, 63–72 (2018).

Constructing dynamical equations of constrained systems can lead to the determining of the Lagrange multipliers. Derivatives of the constraints have to be used to determine their values. But, it is assumed that the constraint equations are first integrals of the dynamical equations. This fact can lead to the multiple deviations from the constraint equations caused by some errors of a numerical method of integration and setting initial conditions. To provide a constraint stabilization the methods of constructing differential equations with given set of partial integrals are applied. Constructing equations of perturbed constraints with an asymptotically stable trivial solution can provide a constraint stabilization during the numerical solution of dynamical equations.

Keywords: dynamics, system, stability, equations, constraints, stabilization.

Ref. 21.

MSC 2010: 34C05, 34C07, 34C23, 37G15

V. A. GAIKO, C. VUIK. **Multi-parameter planar dynamical systems: global bifurcations of limit cycles** (English). *Dinamicheskie Sistemy* **8(36)**, no.1, 73–88 (2018).

We study multi-parameter planar dynamical systems and carry out the global bifurcation analysis of such systems. To control the global bifurcations of limit cycle in these systems, it is necessary to know the properties and combine the effects of all their field rotation parameters. It can be done by means of the development of our bifurcational geometric method based on the Wintner–Perko termination principle and application of canonical systems with field rotation parameters. Using this method, we solve, e. g., Hilbert's Sixteenth Problem on the maximum number of limit cycles and their

distribution for the general Liénard polynomial system and a Holling-type quartic dynamical system. We also conduct some numerical experiments to illustrate the obtained results.

Keywords: multi-parameter planar dynamical system, global bifurcation analysis, field rotation parameter, limit cycle.

Ref. 16.

Подписано в печать 05.03.2018. Формат 60x84/8.
Усл. печ. л. 11,39. Тираж 50 экз. Заказ № НП/226. Бесплатно.
Дата выхода в свет 06.12.2018.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской
деятельности КФУ имени В. И. Вернадского
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7.