Динамические системы, 2018, том 8(36), №2, 187–193

УДК 517.968

Интегральные уравнения типа криволинейной свертки на замкнутом контуре со степенными ядрами

А. И. Песчанский

Севастопольский государственный университет
Севастополь, 299053. *peschansky_ sntu@mail.ru*

Аннотация. Построена теория разрешимости интегральных уравнений первого рода типа криволинейной свертки на замкнутом контуре в комплексной плоскости, как с внешними, так и внутренними коэффициентами. Ядра уравнений зависят от отношения аргументов и имеют слабую степенную особенность. Доказана нетеровость операторов, соответствующих уравнениям, как операторов, действующих из пространства суммируемых функций в пространство дробных интегралов типа криволинейной свертки. Решения уравнений получены в замкнутой форме в результате сведения их к краевой задаче Римана и обращению оператора криволинейной свертки со степенным ядром.

Ключевые слова: криволинейная свертка со степенным ядром, нетеровость интегрального уравнения первого рода, оператор дробного интегрирования на замкнутой кривой, решение в замкнутой форме.

Integral equations of curvilinear convolution type over the circumference with power kernels

A. I. Peschansky

Sevastopol State University, Sevastopol.

Abstract. The theory of solvability of integral equations of first kind of curvilinear convolution type over the circumference in the complex plane with both external and internal coefficients is constructed. Kernels of equations are the functions of arguments' ratio and have a weak power singularity. The Noetherian property of operators, corresponding the equations, as the operators acting from the space of summable functions into the space of fractional integrals of curvilinear convolution type. The closed-form solutions of equations are obtained as a result of their reduction to the boundary Riemann problem and inversion of the operator of curvilinear convolution with a power kernel.

Keywords: curvilinear convolution with a power kernel, Noetherian property of an integral equation of first kind, the operator of fractional integration over the circumference, a closed-form solution.

MSC 2010: 45E10

Введение

Систематическое исследование интегральных уравнений первого рода со слабой особенностью в ядре началось по инициативе Ф. Д. Гахова, начиная примерно с 1960 года. Особое внимание при этом было уделено уравнениям, решение которых можно получить в замкнутой форме. Изложение основных результатов и исторических сведений можно найти в монографиях [1, 2], книгах [3, 4]. Отметим, что в большей степени изучены уравнения на прямой и на отрезке, в меньшей степени — уравнения на замкнутом контуре в комплексной области. Решение в замкнутой форме некоторых обобщенных уравнений Абеля, в том случае, когда они задаются на произвольной гладкой дуге, приводится в [5-7]. В данной работе предлагается постановка нетеровости и решение в квадратурах ранее не исследованных уравнений типа криволинейной свертки на замкнутом контуре со слабой степенной особенностью в ядрах. Аналитический метод их решения сводится к последовательному решению характеристического сингулярного уравнения с ядром Коши и обращению оператора криволинейной свертки со степенным ядром.

1. Интегральное уравнение с внешними коэффициентами

Пусть Γ — простая гладкая замкнутая ориентированная кривая на комплексной плоскости с параметрическим уравнением: $y = y(s)$, $0 \le s \le l$, s — дуговая абсцисса, l — длина Γ. Контур Γ разбивает плоскость на две области: G^+ $(0 \in G^+)$ и G^-. Рассмотрим на этом контуре в пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, интегральное уравнение с внешними коэффициентами

$$\frac{a(t)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{(1-t/\tau)^\alpha}\frac{d\tau}{\tau} + \frac{b(t)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{(1-\tau/t)^\alpha}\frac{d\tau}{t} = g(t), \quad 0<\alpha<1, \quad t\in\Gamma, \qquad (1)$$

где $a(t)$, $b(t)$ принадлежат классу $H^\lambda(\Gamma)$ функций, удовлетворяющих на Γ условию Гельдера с показателем λ. Если обозначить $F^\pm_{\alpha,1}$ интегральные операторы с ядрами, содержащими степенную функцию, т. е.

$$(F^+_{\alpha,1}f)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{(1-t/\tau)^\alpha}\frac{d\tau}{\tau}, \ \ (F^-_{\alpha,1}f)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{(1-\tau/t)^\alpha}\frac{d\tau}{t},$$

то уравнение (1) в операторной форме примет вид

$$(A_1 f)(t) \equiv a(t)(F^+_{\alpha,1}f)(t) + b(t)(F^-_{\alpha,1}f)(t) = g(t), \quad t\in\Gamma, \qquad (2)$$

Операторы $F^\pm_{\alpha,1}$ являются примерами операторов криволинейной свертки, введенной Ю. И. Черским [8]. В силу свойств операторов $F^\pm_{\alpha,1}$ для A_1 справедливо представление

$$A_1 = \left(aP^+ + bP^-\right)F_{\alpha,1},$$

где $F_{\alpha,1} = F^+_{\alpha,1} + F^-_{\alpha,1}$, а $P^\pm = 1/2(I \pm S)$ — проекционные операторы, связанные с сингулярным интегральным оператором с ядром Коши

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad t \in \Gamma,$$

I — тождественный оператор.

Таким образом, решение уравнения (1) сводится к решению характеристического сингулярного уравнения с ядром Коши и обращению оператора криволинейной свертки.

Поскольку оператор A_1 уравнения (2) вполне непрерывный и не является нормально разрешимым в пространстве $L_p(\Gamma)$, то для исследования (2) применяется метод нормализации оператора с незамкнутой областью значений, общая идея которого развита в [3, 9]. Пространство, в котором задана правая часть уравнения, надлежащим образом сужается. В случае уравнения (2) таким сужением является пространство $L^\eta_p(\Gamma)$ дробных интегралов типа криволинейной свертки [10], которое вводится следующим образом:

$$L^\eta_p(\Gamma) = \left\{ g \mid g = F_\eta \phi, \;\; \phi \in L_p(\Gamma), \;\; 0 < \eta < 1, \;\; 1 < p < \infty, \;\; \|g\|_{L^\eta_p} = \|\phi\|_{L_p} \right\},$$

$$F_\eta = F^+_\eta + F^-_\eta,$$

$$F^+_\eta \phi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma F\left(1,\; 1;\; 1+\eta;\; \frac{t}{\tau}\right)\phi(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau},$$

$$F^-_\eta \phi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma F\left(1,\; 1;\; 1+\eta;\; \frac{\tau}{t}\right)\phi(\tau)\,\frac{d\tau}{t}.$$

Здесь под $F(1,\; 1;\; 1+\eta;\; \frac{t}{\tau})$ $(t,\, \tau \in \Gamma)$ понимается граничное значение на Γ ветви гипергеометрической функции Гаусса, определяемой в окрестности $z = 0$ рядом

$$F\left(1, 1; 1+\eta; \frac{z}{\tau}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n}{(1+\eta)_n}\left(\frac{z}{\tau}\right)^n, \;\; (\tau \in \Gamma),$$

$(\alpha)_n$ — символ Похгаммера, определяемый равенствами $(\alpha)_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$, $n = 1, 2, \ldots$; $(\alpha)_0 = 1$. Под $F\left(1, 1; 1+\eta; \frac{t}{\tau}\right)$ $(t, \tau \in \Gamma)$ понимается граничное значение на Γ аналогично выбранной ветви функции $F(1,\; 1;\; 1+\eta;\; \frac{\tau}{z})$ $(z \in G^-)$.

В статье автора [10] дано описание пространства $L^\eta_p(\Gamma)$ в терминах модифицированных производных Маршо

$$D_\eta = D^+_\eta + D^-_\eta, D^\pm_\eta g = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} D^{\varepsilon\pm}_\eta g,$$

где $D_\eta^{\varepsilon\pm}$ — усеченные модифицированные производные Маршо

$$D_\eta^{\varepsilon+} g \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\varepsilon(t)}} \frac{\tau g(\tau) - t g(t)}{(1-t/\tau)^{1+\eta}} \frac{d\tau}{\tau^2}, \quad D_\eta^{\varepsilon-} g \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\varepsilon(t)}} \frac{g(\tau) - g(t)}{(1-\tau/t)^{1+\eta}} \frac{d\tau}{t},$$

$\Gamma_{\varepsilon(\mathrm{t})}$ — часть кривой Γ, оставшаяся после удаления из нее дуги с концами $t_2 = = y(s_0 - \varepsilon)$, $t_1 = y(s_0 + \varepsilon)$ и содержащая точку $t = y(s_0)$.

Теорема [10]. *Для того, чтобы функция $g(t)$ принадлежала пространству $L_p^\eta(\Gamma)$, $0 < \eta < 1$, необходимо и достаточно, чтобы $g \in L_p^\eta(\Gamma)$ и в $L_p(\Gamma)$ существовали пределы $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (L_p)}} D_\eta^{\varepsilon\pm} g$. Если эти условия выполняются, то имеет место равенство $\phi = D_\eta g$.*

В частности, если функция g принадлежит пространству Гельдера $H^\lambda(\Gamma)$, то g принадлежит $L_p^\eta(\Gamma)$, $\lambda > \eta$.

Вернемся к решению уравнения (2). С помощью свойств оператора криволинейной свертки доказывается, что оператор $F_{\alpha,1}$ осуществляет изоморфизм пространств $L_p(\Gamma)$ и $L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$. Кроме этого, при $\lambda > 1-\alpha$ оператор $aP^+ + bP^-$ действует инвариантно в пространстве $L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$. Поэтому для разрешимости уравнения (1) необходимо, чтобы $g \in L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$. Относительно новой неизвестной функции $\phi(t) = (F_{\alpha,1} f)(t)$ уравнение (2) является характеристическим сингулярным

$$(aP^+ + bP^-)\phi(t) = g(t). \tag{3}$$

Как известно [1], условия $a(t)$, $b(t) \neq 0$, обеспечивают нетеровость оператора $aP^+ + bP^-$ в пространстве $L_p(\Gamma)$, а его индекс χ_1 равен индексу Коши функции $b(t)\, a^{-1}(t)$. В случае $\chi_1 \geq 0$ уравнение (3) безусловно разрешимо, а при $\chi_1 < 0$ — необходимы и достаточны условия разрешимости

$$\int\limits_\Gamma g(t) Z^{-1}(t) t^{k-1} dt = 0, \quad k = 1, \ldots, -\chi_1.$$

Решение дается формулой

$$2\phi = (a+b)g - (a-b) Z\, S\, Z^{-1} g + \sum_{k=1}^{\chi_1} c_k \phi_k, \tag{4}$$

где $Z(t)$ — предельное значение канонической функции соответствующей краевой задачи Римана, $\left\{2\phi_k(t) = [a(t) - b(t)]\, Z(t)\, t^{k-1}\right\}_{k=1}^{\chi_1}$ — базис ядра оператора $aP^+ + bP^-$, c_k — произвольные постоянные; $c_k = 0$ при $\chi_1 < 0$ (не ограничивая общности, полагаем $a(t)b(t) = 1$).

Функция $\phi(t)$ определяется по функции $g(t)$ с помощью операторов, действующих инвариантно в пространстве $L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$. Поэтому, если $g \in L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$, то и

$\phi \in L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$. Тогда, как известно [11], оператор $aP^+ + bP^-$ является нетеровым в этом пространстве, т. е. $aP^+ + bP^- \in \Phi\left(L_p^{1-\alpha}(\Gamma)\right)$.

Решение $f(t)$ уравнения (1) определяется по решению $\phi(t)$ уравнения (3) с помощью производной Маршо $f = D_{1-\alpha}\phi$. Кроме этого, решение $f(t)$ может быть определено с помощью обращения оператора криволинейной свертки: $f = F_{\alpha,1}^{-1}\phi$, где

$$\left(F_{\alpha,1}^{-1}\phi\right)(t) = \frac{1}{2\pi i\alpha}\left(\alpha + t\frac{d}{dt}\right)\int\limits_{\Gamma} F(1,\,1;\,\alpha+1;\,\frac{t}{\tau})\phi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} - \\ - \frac{1}{2\pi i\alpha}\left(1-\alpha + t\frac{d}{dt}\right)\int\limits_{\Gamma} F(1,\,1;\,\alpha+1;\,\frac{\tau}{t})\phi(\tau)\frac{d\tau}{t}. \quad (5)$$

Используя свойства композиции Адамара [12] и оператора дробного интегрирования Римана-Лиувилля аналитической функции, для оператора $F_{\alpha,1}^{-1}\phi$ можно получить представление

$$\left(F_{\alpha,1}^{-1}\phi\right)(t) = \left(\alpha + t\frac{d}{dt}\right)\int\limits_0^t \left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\left(P^+\phi\right)(\tau)\frac{d\tau}{t} - \\ - \left(1-\alpha + t\frac{d}{dt}\right)\int\limits_t^{\infty}\left(1-\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\left(P^-\phi\right)(\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

где в качестве контура интегрирования в первом интеграле берется любая дуга, лежащая в области G^+, а контур интегрирования во втором интеграле лежит в области G^-. Проведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $a(t),\, b(t) \in H^\lambda(\Gamma)$, $\lambda > \{1-\alpha\}$; $a(t),\, b(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. *Тогда* $A_1 \in \Phi\left[L_p(\Gamma),\, L_p^{1-\alpha}(\Gamma)\right]$. *Индекс оператора* $IndA_1 = \chi_1 = ind\,[b(t)\,a^{-1}(t)]$; d *– характеристика оператора* A_1 *имеет вид* $(\chi_1, 0)$ *при* $\chi_1 \geq 0$; $(0, \chi_1)$ *при* $\chi_1 < 0$. *Решения уравнения (1) строятся в квадратурах по формулам (4) и (5).*

2. Интегральное уравнение с внутренними коэффициентами

Рассмотрим в пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, уравнение с внутренними коэффициентами

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{c(\tau)f(\tau)}{(1-t/\tau)^\alpha}\frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d(\tau)f(\tau)}{(1-\tau/t)^\alpha}\frac{d\tau}{t} = g(t), \quad 0<\alpha<1, \quad t \in \Gamma \qquad (6)$$

или в операторной форме

$$(A_2 f)(t) \equiv F_{\alpha,1}^{+}\left(c(t)f(t)\right) + F_{\alpha,1}^{-}\left(d(t)f(t)\right) = g(t), \quad t \in \Gamma.$$

Предположим, что коэффициенты $c(t)$, $d(t)$ непрерывны и $c(t) \neq 0$, $d(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. Уравнение (6) решается по той же схеме, что и уравнение (1). Для оператора A_2 имеет место представление

$$A_2 = F_{\alpha,1}\left(P^+cI + P^-dI\right).$$

Решение уравнения (6) сводится к последовательному решению уравнения

$$F_{\alpha,1}\psi = g$$

и уравнения

$$\left(P^+cI + P^-dI\right) f = \psi. \tag{7}$$

Если $g \in L_p^{1-\alpha}(\Gamma)$, то $\psi(t) = \left(F_{\alpha,1}^{-1}g\right)(t)\,(\in L_p(\Gamma))$.

Как известно [1], в случае $\chi_2 = ind[d(t)\,c^{-1}(t)] \geq 0$ уравнение (7) безусловно разрешимо, а при $\chi_2 < 0$ — необходимы и достаточны условия разрешимости

$$\int\limits_{\Gamma} \psi(t)\,[d(t) - c(t)]\,Z_1(t)t^{k-1}dt = 0, \quad k = \overline{1, -\chi_2},$$

где $Z_1(t)$ — предельное значение канонической функции соответствующей задачи Римана (не ограничивая общности считаем, что $d(t)c(t) = 1$). Решения даются формулой

$$2f = (c+d)\psi - Z_1^{-1}\,S\,(c-d)Z_1\psi + \sum_{k=1}^{\chi_2} b_k f_k, \tag{8}$$

где $\left\{f_k(t) = Z_1^{-1}(t)\,t^{k-1}\right\}_{k=1}^{\chi_2}$ — базис ядра оператора $P^+cI + P^-dI$, постоянные $b_k = 0$ при $\chi_2 \leq 0$.

Теорема 2. *Если $c(t)$, $d(t) \in C(\Gamma)$; $c(t)$, $d(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, то $A_2 \in \Phi[L_p(\Gamma), L_p^{1-\alpha}(\Gamma)]$. Индекс оператора $IndA_2 = \chi_2 = ind[d(t)\,c^{-1}(t)]$; d — характеристика оператора A_2 имеет вид $(\chi_2, 0)$ при $\chi_2 \geq 0$; $(0, \chi_2)$ при $\chi_2 < 0$. Решения уравнения (6) строятся в квадратурах по формулам (5) и (8).*

Заключение

С помощью метода нормализации оператора с незамкнутым образом построена теория разрешимости уравнений первого рода на замкнутом контуре с внешними и внутренними коэффициентами, ядра которых зависят от отношения аргументов и имеют слабую степенную особенность. Решения уравнений удалось получить в замкнутой форме в результате сведения этих уравнений к краевой задаче Римана и обращению оператора криволинейной свертки со степенным ядром. Аналогичным образом исследуются интегральные уравнения типа криволинейной свертки на замкнутом контуре, ядра которых содержат гипергеометрическую функцию Гаусса и зависят от отношения аргументов.

Список цитируемых источников

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

2. *Плещинский Н. Б.* Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре. — Казанский федеральный университет, 2018. — 160 с.
3. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. — Gordon and Breach Science, 1993. — 1006 p.
4. *Полянин, А. Д.* Интегральные уравнения в 2 ч. Часть 1. — М.: Юрайт, 2018. — 369 с. Часть 2. — М.: Юрайт, 2018. — 238 с.
5. *Сакалюк К. Д.* Обобщенное уравнение Абеля // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131. — № 4. — С. 748–751.
6. *Peters A. S.* Some integral equations related to Abel‘s equation and the Hilbert transform // Comm. Pure and Appl. Math. — 1969. — T. 22. — № 4. — P. 539–560.
7. *Чумаков В. Ф., Васильев И. Л.* Интегральные уравнения типа Абеля на замкнутом контуре // Вестник Белорусск. гос. ун-та. — 1980, сер. 1. — № 2. — С. 40–44.
8. *Песчанский А. И., Черский Ю. И.* Интегральное уравнение с криволинейными свертками на замкнутом контуре // Укр. матем. журн. — 1984. — Т. 36. — № 3. — С. 335–340.
9. *Хайкин М. И.* О регуляризации операторов с незамкнутой областью значений // Изв. вузов. Математика. — 1970. — № 8. — С. 118–123.
10. *Песчанский А. И.* Об описании пространства дробных интегралов типа криволинейной свертки // Известия вузов. Математика. — 1989. — № 7(326). — С. 29–39.
11. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. — М.: Мир, 1979. — 494 с.
12. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. — М.: Мир, 1967. — 240 с.

Получена 11.04.2018