Динамические системы, 2018, том 8(36), №2, 173–186

УДК 517.98

Малые движения идеальной стратифицированной жидкости, частично покрытой крошеным и упругим льдом

Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

Симферополь, 295007, e-mail: *tsvetdo@gmail.com*

Аннотация. Изучается задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, частично покрытой крошеным и упругим льдом. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества. Упругий лед моделируется упругой пластиной. Используя метод ортогонального проектирования граничных условий на подвижной поверхности и введения вспомогательных задач, исходная начально-краевая задача сводится к равносильной задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, крошеный лед, упругий лед, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.

Small motions of an ideal stratified fluid partially covered with crumbling and elastic ice

D. O. Tsvetkov

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. We study the problem on small motions of ideal stratified fluid with a free surface, partially covered with crumbling and elastic ice. Under the crumbled ice we understand that on the free surface float heavy particles of some substance, and that these particles do not interact (or the interaction is small enough to be neglected) when the free surface oscillates. Elastic ice is modelled by an elastic plate. Using method of orthogonal projecting the boundary conditions on the moving surface and the introduction of auxiliary problems of the original initial-boundary value problem is reduced to the equivalent Cauchy problem for a differential equation of second order in some Hilbert space. We find sufficient existence conditions for a strong (with respect to the time variable) solution of the initial-boundary value problem describing the evolution of the specified hydrodynamics system.

Keywords: crumbling ice, elastic ice, differential equation in Hilbert space, accretive operator, strong solution.

MSC 2010: 35D05, 34K30

Введение

В связи с новыми потребностями прикладных наук возрос интерес к изучению динамических характеристик жидкостей, обладающих разными специфическими свойствами. К таким жидкостям, в частности, относятся стратифицированные и флотирующие жидкости. Этот интерес обусловлен не только практическими потребностями, но и теоретическим содержанием возникающих здесь проблем. Во многих случаях математические модели таких проблем существенно нелинейны и поддаются исследованию лишь численными методами. Однако ряд интересных и полезных задач можно рассматривать в рамках линейных моделей, приводящих к нетрадиционным начально-краевым задачам. Это, безусловно, определяет самостоятельный математический интерес к таким проблемам.

Настоящая статья является продолжением работ [4, 5], в которых были начаты исследования начально-краевых задач динамики стратифицированной жидкости покрытой льдом. А именно, были рассмотрены задачи о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — участок «чистой воды», Γ_2 — участок либо «крошеного льда», либо «упругого льда». Получены условия, при которых существует сильные по времени решения начально-краевых задач, описывающих эволюцию данных гидросистем. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества (см., например, [1]). Упругий лед моделируется упругой пластиной, близкая по математической постановке задача о колебаниях однородной жидкости в контейнере с упругим дном рассматривалась ранее в монографии [2]. Таким образом, остался не исследован случай, когда свободная поверхность состоит из участков крошеного и упругого льда.

1. Математическая формулировка задачи

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3: $\rho_0 = \rho_0(x_3)$, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — участок «крошеного льда», Γ_2 — участок «упругого льда». Обозначим через ρ_1 — поверхностную плотность крошеного льда, через ρ_2 — поверхностную плотность упругого льда. Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновесной поверхности Γ, которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси Ox_3. Предполагаем далее, что твердая стенка $S \subset \partial\Omega$ является липшицевой поверхностью, причем $\partial S = \partial\Gamma$ — липшицева кривая.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N^2_{min} \leq N^2(x_3) \leq N^2_{max} = N^2_0 < \infty, \quad N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0, \qquad (1.1)$$

Функцию $N(x_3)$ называют частотой Вяйсяля-Брента, или частотой плавучести.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, поле скорости в жидкости, $p = p(t,x)$ —

отклонение поля давлений от равновесного давления $P_0 = P_0(x_3)$, $\rho = \rho(t,x)$ — отклонения поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а через $\zeta = \zeta(t,\hat{x})$ ($\hat{x} = (x_1,x_2) \in \Gamma$) — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали $\vec{n}$. Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (см. [4, 5]):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho_0^{-1}(x_3)\Big(-\nabla p - g\rho\vec{e}_3\Big) + \vec{f}(t,x) \quad (\text{в}\,\Omega), \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega), \tag{1.3}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на}\,S), \quad u_n = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (\text{на}\,\Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0,$$

$$p = g\rho_0(0)\zeta + \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \quad (\text{на}\,\Gamma_1), \qquad p = K\zeta + \rho_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \quad (\text{на}\,\Gamma_2) \tag{1.4}$$

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x) \quad (x \in \Omega), \quad \zeta(0,\hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma). \tag{1.5}$$

Записывая второй закон Ньютона для частиц крошеного льда и линеаризуем его, получим динамическое условие (1.4) на Γ_1 (см. подробнее [5]).

Линейный дифференциальный оператор K, заданный дифференциальным выражением (см. [4]):

$$K\zeta := d\triangle_2^2\zeta + \rho_0(0)g\zeta \tag{1.6}$$

на области определения

$$\mathcal{D}(K) = \left\{\zeta \in C^4\left(\overline{\Gamma_2}\right) \mid \zeta = \partial\zeta/\partial\nu = 0 \ (\text{на}\,\gamma_2),\ M\zeta = N\zeta = 0 \ (\text{на}\ \partial\Gamma_2 \setminus \gamma_2)\right\}, \tag{1.7}$$

где $d > 0$ — коэффициент жесткости льда, $\triangle_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$.

Считаем, что на линии $\gamma_2 := \overline{\Gamma_2} \bigcap \overline{S}$ контакта упругого льда с твердой стенкой S выполнены условия жесткого закрепления льда как упругой пластинки $\zeta = 0$, $\partial\zeta/\partial\nu = 0$ (на γ_2), где $\vec{\nu}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Gamma_2$ (расположенный, очевидно, в плоскости Ox_1x_2). Далее, очевидно, что на остальной части границы $\partial\Gamma_2 \setminus \gamma_2$ области Γ_2, где упругий лед соприкасается с участком крошеного льда, поперечная сила и момент силы на кромке упругого льда должны равняться нулю. Математически эти условия записываются в следующем виде (см. [6, с. 270]):

$$M\zeta = 0, \quad N\zeta = 0 \quad (\text{на}\ \partial\Gamma_2 \setminus \gamma_2), \quad \text{где} \quad M\zeta = \sigma\triangle_2\zeta + (1-\sigma)\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial\nu^2},$$

$$N\zeta = -\frac{\partial}{\partial\nu}\,(\triangle_2\zeta) + (1-\sigma)\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial {x_1}^2}\nu_1\nu_2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) - \frac{\partial^2\zeta}{\partial {x_2}^2}\nu_1\nu_2\right),$$

ν_i — i-я координата единичного вектора внешней нормали $\vec{\nu}$ к границе $\partial\Gamma_2$, $\vec{s}$ — вектор касательной к $\partial\Gamma_2$, а σ — так называемая постоянная Пуассона, характеризующая упругую пластинку. Константа σ удовлетворяет неравенствам (см. [6, с. 424]): $0 \le \sigma < 1$.

В начально-краевой задаче (1.2) — (1.5) можно исключить одну искомую функцию — поле плотности $\rho(t,x)$, если ввести взамен поля скорости $\vec{u}(t,x)$ поле малых смещений частиц жидкости $\vec{v}(t,x)$, связанное с $\vec{u}(t,x)$ соотношениями

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega\,). \tag{1.8}$$

Тогда придем к связи

$$\begin{gathered} \rho(t,x) = -\nabla\rho_0 \cdot \vec{v}(t,x) + f_0(x) = -\rho_0^{'}(x_3)v_3(t,x) + f_0(x), \\ f_0(x) := \rho(0,x) + \rho_0^{'}(x_3)v_3(0,x), \quad v_3 := \vec{v}\cdot\vec{e}_3, \end{gathered} \tag{1.9}$$

и к уравнениям для $\vec{v}(t,x)$ и $p(t,x)$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega\,), \\ \psi_0(x) = \vec{f}(t,x) - g f_0(x)\vec{e}_3/\rho_0(x_3). \end{gathered} \tag{1.10}$$

С учетом сказанного перепишем исходную задачу (1.2) — (1.5) в виде:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\rho_0^{-1}(x_3)\nabla p - N^2(x_3)v_3\vec{e}_3 + \psi_0(x), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega\,), \\ \vec{v}\cdot\vec{n} =: v_n = 0 \quad (\text{на}\,S\,), \qquad \int_\Gamma v_3\,d\Gamma = 0, \\ p = g\rho_0(0)v_3 + \rho_1\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \quad (\text{на}\,\Gamma_1\,), \qquad p = Kv_3 + \rho_2\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \quad (\text{на}\,\Gamma_2\,), \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(0,x) = \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x), \\ v_3(0,\hat{x}) = \zeta(0,\hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}) \quad (\,\hat{x}\in\Gamma\,). \end{gathered} \tag{1.11}$$

Начально-краевая задача (1.11) содержит лишь две искомые функции: векторное поле $\vec{v}(t,x)$ и скалярное поле давлений $p(t,x)$. По решению $\vec{v}(t,x)$ задачи (1.11) решения $\vec{u}(t,x)$ и $\rho(t,x)$ задачи (1.2) — (1.5) можно найти по формулам (1.8) и (1.9).

2. Проектирование уравнений движения

Начально-краевую задачу (1.11) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (1.11) на ортогональные подпространства (см. [2]). Свяжем с функцией ρ_0 гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega \rho_0(x_3)\vec{u}(x)\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega. \tag{2.1}$$

Как следует из (1.1), для $\rho = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства

$$0 < m \le \rho_0 \le M < \infty,$$

обеспечивающие эквивалентность норм, определенных по закону (2.1) и обычным скалярным произведением в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Обозначим через $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ подпространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, которое получается замыканием в норме $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ множества гладких функций

$$\{\, \vec{v} \in \vec{C}^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{v} = 0 \ (\text{в } \Omega),\ v_n = 0 \ (\text{на } \partial\Omega)\,\}.$$

В качестве других подпространств возьмем подпространства

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) = \{\, \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{v} = \rho_0^{-1} \nabla p,\ v_n = 0 \ (\text{на } S), \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \ (\text{в } \Omega),\ \int\limits_\Gamma p\, d\Gamma = 0 \,\}.$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) = \{\, \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{w} = \rho_0^{-1} \nabla \varphi, \quad \varphi = 0 \ (\text{на}\, \Gamma)\,\}.$$

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0). \tag{2.2}$$

Доказательство леммы повторяет доказательство аналогичного утверждения для пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, когда в (2.2) $\rho_0(x_3) = \text{const}$ (см. [2], с. 106).

Будем считать $\vec{v}(t, x)$ и $\rho_0^{-1} \nabla p(t, x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, тогда в силу уравнений и граничных условий (1.11), ортогонального разложения (2.2) имеем

$$\vec{v}(t, x) \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0),$$
$$\rho_0^{-1} \nabla p(t, x) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{G}(\Omega, \rho_0).$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\begin{gathered} \vec{v}(t, x) = \vec{w}(t, x) + \rho_0^{-1} \nabla \Phi(t, x),\ \vec{w}(t, x) \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0),\ \rho_0^{-1} \nabla \Phi(t, x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \\ \rho_0^{-1} \nabla p(t, x) = \rho_0^{-1} \nabla p_1(t, x) + \rho_0^{-1} \nabla p_2(t, x), \\ \rho_0^{-1} \nabla p_1(x, t) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \quad \rho_0^{-1} \nabla p_2(t, x) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Обозначим через P_0, $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0)$ соответственно. Тогда, подставляя (2.3) в первое уравнение (1.11) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} + P_0 \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_0 \psi_0, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho_0^{-1} \nabla \Phi \right) + \rho_0^{-1} \nabla p_1 + P_{h,S} \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_{h,S} \psi_0, \tag{2.5}$$

$$\rho_0^{-1} \nabla p_2 + P_{0,\Gamma} \left[N^2(x_3) \left(\rho_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + w_3 \right) \vec{e}_3 \right] = P_{0,\Gamma} \psi_0. \tag{2.6}$$

Из соотношения (2.6) следует, что составляющая поля давлений, обусловленная слагаемым $\rho_0^{-1}\nabla p_2$, определяется лишь полем вертикального смещения v_3 и начальными условиями, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением первых двух соотношений, а также граничного условия с соответствующей заменой $p \to p_1$, так как $p = p_1 + p_2,\ p_2 = 0$ (на Γ).

Для перехода от (2.4), (2.5) к системе уравнений с двумя искомыми функциями введем новые элементы:

$$P_{h,S}\Big[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big] := \rho_0^{-1}\nabla\Psi\,, \qquad P_{h,S}\Big[N^2(x_3)\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\vec{e}_3\Big] := \rho_0^{-1}\nabla\eta\,. \tag{2.7}$$

Тогда (2.5) дает интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + p_1 + \Psi + \eta - F = c(t) \quad (\text{в}\,\Omega\,), \tag{2.8}$$

где $c(t)$ – произвольная функция времени, $P_{h,S}\psi_0 = \rho_0^{-1}\nabla F$.

Рассмотрим (2.8) на Γ_1 и воспользуемся равенством

$$p_1 = g\rho_0(0)v_3 + \rho_1\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right) + \rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right) =$$
$$= g\rho_0(0)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) = g\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \rho_1\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) \quad (\text{на}\,\Gamma_1\,);$$

получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\rho_0\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_1\,). \tag{2.9}$$

Аналогично, получаем

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + K\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_2\,). \tag{2.10}$$

Соотношения (2.9) и (2.10) вместе с (2.4) дают уравнения для определения двух искомых функций $\vec{w}(t,x)$ и $\Phi(t,x)$, при этом учитываются связи (2.7). Таким образом, начально-краевую задачу (1.11) перепишем в виде:

$$\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} + P_0\Big[N^2(x_3)\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + w_3\right)\vec{e}_3\Big] = P_0\psi_0 \quad (\,\text{в}\,\Omega\,),$$
$$\operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\,\text{в}\,\Omega\,), \quad \vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\,\text{на}\ \partial\Omega\,),$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\rho_0\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_1\,), \tag{2.11}$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + K\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_2\,), \tag{2.12}$$

$$
\begin{gathered}
\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi)=0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n}=0 \quad (\text{на } S), \\
\int_\Gamma \Phi\, d\Gamma=0, \quad \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\, d\Gamma=0, \\
\frac{\partial}{\partial t}w(0,x)=P_0\vec{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma=\left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma, \\
\vec{w}(0,x)=P_0\vec{v}^0, \quad \left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(0,\hat{x})\right)_\Gamma=\zeta^0(\hat{x}) \quad (\hat{x}\in\Gamma).
\end{gathered}
\tag{2.13}
$$

3. Переход к системе дифференциально-операторных уравнений

Напомним, что отклонение $v_3|_\Gamma=\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)_\Gamma$ частиц подвижной поверхности должно удовлетворять условию сохранения объема жидкости при колебаниях:

$$
\int_\Gamma v_3\, d\Gamma=\int_\Gamma\left(\rho_0^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+w_3\right)d\Gamma=0 \implies \int_\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\, d\Gamma=0,
$$

так как $w_3|_\Gamma=0$, $\rho_0^{-1}|_\Gamma=\text{const}$. Это же условие является необходимым условием разрешимости задачи Неймана

$$
\begin{gathered}
\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi)=0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi\cdot\vec{n}=0 \quad (\text{на } S), \\
\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=\psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma\psi\, d\Gamma=0.
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Функцию $\psi=\rho_0^{-1}(0)(\partial\Phi/\partial x_3)|_\Gamma$, будем рассматривать как элемент пространства $H=L_{2,\Gamma}:=L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}$, и искать в виде пары функций $\psi=(\psi_1;\psi_2)$, где $\psi_1=\psi|_{\Gamma_1}$ и $\psi_2=\psi|_{\Gamma_2}$, то есть функций, заданных на соответствующих областях Γ_1 и Γ_2.

Рассмотрим следующие подпространства пространства H:

$$
\begin{aligned}
H_1&:=\left\{(\psi_1;\psi_2)\mid\psi_1\in L_2(\Gamma_1)\ominus\{1_{\Gamma_1}\},\psi_2\equiv 0\right\}, \\
H_2&:=\left\{(\psi_1;\psi_2)\mid\psi_2\in L_2(\Gamma_2)\ominus\{1_{\Gamma_2}\},\psi_1\equiv 0\right\}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что пространства H_1 и H_2 ортогональны относительно скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$. Тогда пространство H можно разложить в ортогональную сумму трех пространств:

$$
H=H_1\oplus H_2\oplus H_3, \tag{3.2}
$$

где H_3 есть одномерное подпространство пространства H, натянутое на вектор $\widehat{\varphi}$:

$$
H_3=\left\{\widehat{v}\mid\widehat{v}=\alpha\widehat{\varphi}, \quad \forall\,\alpha\in\mathbb{C}, \quad \widehat{\varphi}=(\operatorname{mes}\Gamma_2;-\operatorname{mes}\Gamma_1)\right\}.
$$

Введем действующие в пространстве H ортопроекторы $P_1,\ P_2$ и P_3 на подпространства $H_1,\ H_2$ и H_3 соответственно. Они будут действовать по следующим правилам:

$$P_1 u = (u_1 - \tilde{u}_1; 0)\,, \quad P_2 u = (0; u_2 - \tilde{u}_2)\,, \tag{3.3}$$
$$\tilde{u}_i = (\operatorname{mes}\Gamma_i)^{-1} \int_{\Gamma_i} u_i\, d\Gamma_i, \quad P_3 u = (I - P_1 - P_2)\, u = (\tilde{u}_1; \tilde{u}_2)\,.$$

Для удобства дальнейших построений введем подпространство $\widehat{H}_2 := H_2 \oplus H_3$, тогда

$$H = H_1 \oplus \widehat{H}_2. \tag{3.4}$$

Отметим, что $\widehat{P}_2$ на подпространство $\widehat{H}_2$ действует по закону $\widehat{P}_2 u = P_2 u + P_3 u = (\widetilde{u}_1; u_2)$.

С учетом сказанного, граничные условия в (2.11) на Γ_1 и Γ_2 можно записать покомпонентно в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\rho_0\psi_1 + \rho_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_1\,), \tag{3.5}$$
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + K\psi_2 + \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} + \Psi + \eta = F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_2\,).$$

Спроектируем пару уравнений (3.5) на подпространства ортогонального разложения (3.4). Для этого предварительно выделим явно элемент из подпространства H_1 (для обозначения среднего интегрального значения функции, заданной на Γ или ее части, снова будем использовать знак " $\widetilde{\quad}$ ", см. (3.3)):

$$\frac{\partial^2 \widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\Phi|_{\Gamma_1} - \widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})}\right] + g\rho_0\widetilde{\psi}_1 + g\rho_0(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1) + \rho_1\frac{\partial^2 \widetilde{\psi}_1}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1) +$$
$$+ \left(\Psi - \widetilde{\Psi}\right) + \widetilde{\Psi} + (\eta - \widetilde{\eta}) + \widetilde{\eta} = \left(F - \widetilde{F}\right) + \widetilde{F} + c(t) \qquad (\text{на } \Gamma_1). \tag{3.6}$$

Здесь элементы $\left(g\rho_0(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1); 0\right)$ и $\left(\rho_1\,(\partial^2/\partial t^2)(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1); 0\right)$ являются функциями переменной t со значениями в H_1. Далее, элемент $\left(\rho_1(\partial^2\widetilde{\psi}_1/\partial t^2); \rho_2(\partial^2\psi_2/\partial t^2)\right)$ принадлежит подпространству $\widehat{H}_2 \oplus \{1_\Gamma\}$. Значит, проекцию на $\widehat{H}_2$ можно представить в следующем виде:

$$A_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\widetilde{\psi}_1; \psi_2\right) := \widehat{P}_2 \left(\rho_1 \frac{\partial^2 \widetilde{\psi}_1}{\partial t^2}; \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}\right) = \left(\rho_1 \frac{\partial^2 \widetilde{\psi}_1}{\partial t^2} - c_1; \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - c_1\right). \tag{3.7}$$

Из условия ортогональности функции 1_Γ получаем:

$$c_1 = \alpha_1 \left(\rho_1 \frac{\partial^2 \widetilde{\psi}_1}{\partial t^2}\right) + \alpha_2 \left(\rho_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}\right),$$
$$\alpha_1 := \frac{\operatorname{mes}\Gamma_1}{\operatorname{mes}\Gamma_1 + \operatorname{mes}\Gamma_2}\,, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \frac{\operatorname{mes}\Gamma_2}{\operatorname{mes}\Gamma_1 + \operatorname{mes}\Gamma_2}, \quad 0 < \alpha_1 < 1.$$

Аналогично с элементом $\left(g\rho_0\widetilde{\psi}_1; K\psi_2\right)$. Для него имеем:

$$A_2\left(\widetilde{\psi}_1;\psi_2\right) := \widehat{P}_2\left(g\rho_0\widetilde{\psi}_1; K\psi_2\right) = \left(g\rho_0\widetilde{\psi}_1 - c_2; K\psi_2 - c_2\right), \tag{3.8}$$
$$c_2 = \alpha_1\left(g\rho_0\widetilde{\psi}_1\right) + \alpha_2\left(\widetilde{K\psi_2}\right), \quad \alpha_1 = 1-\alpha_2 = \frac{\operatorname{mes}\Gamma_1}{\operatorname{mes}\Gamma_1 + \operatorname{mes}\Gamma_2}.$$

Введем обозначения:

$$P_H\left(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}\right) = \left(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}\right) = P_1\left(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}\right) + \widehat{P}_2\left(F|_{\Gamma_1}; F|_{\Gamma_2}\right) =$$
$$= \left(F|_{\Gamma_1} - \widetilde{(F|_{\Gamma_1})}; 0\right) + \left(\widetilde{(F|_{\Gamma_1})}; F|_{\Gamma_2}\right) =: f_1 + \widehat{f}_2.$$
$$P_H\left(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}\right) = \left(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}\right) = P_1\left(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}\right) + \widehat{P}_2\left(\Psi|_{\Gamma_1}; \Psi|_{\Gamma_2}\right) =$$
$$= \left(\Psi|_{\Gamma_1} - \widetilde{(\Psi|_{\Gamma_1})}; 0\right) + \left(\widetilde{(\Psi|_{\Gamma_1})}; \Psi|_{\Gamma_2}\right) =: \Psi_1 + \widehat{\Psi}_2.$$
$$P_H\left(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}\right) = \left(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}\right) = P_1\left(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}\right) + \widehat{P}_2\left(\eta|_{\Gamma_1}; \eta|_{\Gamma_2}\right) =$$
$$= \left(\eta|_{\Gamma_1} - \widetilde{(\eta|_{\Gamma_1})}; 0\right) + \left(\widetilde{(\eta|_{\Gamma_1})}; \eta|_{\Gamma_2}\right) =: \eta_1 + \widehat{\eta}_2.$$

Будем считаем слагаемые функциями t со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве. Поэтому, заменяя производные $\partial/\partial t$ на d/dt, окончательно после проектирования системы (3.6), получаем:

$$g\rho_0\left(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0\right) + \rho_1\frac{d^2}{dt^2}\left(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\Phi|_{\Gamma_1} - \widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})}; 0\right) +$$
$$+ \left(\Psi|_{\Gamma_1} - \widetilde{(\Psi|_{\Gamma_1})}; 0\right) + \left(\eta|_{\Gamma_1} - \widetilde{(\eta|_{\Gamma_1})}; 0\right) = \left(F|_{\Gamma_1} - \widetilde{(F|_{\Gamma_1})}; 0\right), \tag{3.9}$$

$$A_1\frac{d^2}{dt^2}\left(\widetilde{\psi}_1;\psi_2\right) + A_2\left(\widetilde{\psi}_1;\psi_2\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})}; \Phi|_{\Gamma_2}\right) +$$
$$+ \left(\widetilde{(\Psi|_{\Gamma_1})}; \Psi|_{\Gamma_2}\right) + \left(\widetilde{(\eta|_{\Gamma_1})}; \eta|_{\Gamma_2}\right) = \left(\widetilde{(F|_{\Gamma_1})}; F|_{\Gamma_2}\right). \tag{3.10}$$

Пусть $u_1(t) := \left(\psi_1 - \widetilde{\psi}_1; 0\right) \in H_1$ и $\widehat{u}_2(t) := \left(\widetilde{\psi}_1;\psi_2\right) \in \widehat{H}_2$, с учетом обозначений, перепишем (3.9) — (3.10) в виде

$$g\rho_0 u_1 + \rho_1\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{d^2}{dt^2}\left(\Phi|_{\Gamma_1} - \widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})}; 0\right) + \Psi_1 + \eta_1 = f_1, \tag{3.11}$$
$$A_1\frac{d^2\widehat{u}_2}{dt^2} + A_2\widehat{u}_2 + \frac{d^2}{dt^2}\left(\widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})}; \Phi|_{\Gamma_2}\right) + \widehat{\Psi}_2 + \widehat{\eta}_2 = \widehat{f}_2. \tag{3.12}$$

Представим в (3.11) — (3.12) слагаемые, содержащие элемент Φ, в виде операторной матрицы, действующей на вектор-столбец $(u_1;\widehat{u}_2)^t$. Для этого рассмотрим $\Phi|_{\Omega}$ в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \tag{3.13}$$

где $\Phi_1|_\Omega$ – решение (первой) вспомогательной задачи

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_1)=0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_1\cdot\vec{n}=0 \quad (\text{на } S), \qquad \int_\Gamma \Phi_1\,d\Gamma=0,$$
$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}=\psi_1-\widetilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \qquad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}=0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \tag{3.14}$$

а $\Phi_2|_\Omega$ — решение (второй) вспомогательной задачи

$$\nabla\cdot(\rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_2)=0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x)\nabla\Phi_2\cdot\vec{n}=0 \quad (\text{на } S), \qquad \int_\Gamma \Phi_2\,d\Gamma=0,$$
$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}=\widetilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \qquad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}=\psi_2 \quad (\text{на } \Gamma_2). \tag{3.15}$$

Граничные условия на $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ в задачах (3.14) и (3.15) соответствуют условиям

$$\rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}=u_1\ (\text{на } \Gamma), \quad \rho_0^{-1}(0)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}=\widehat{u}_2\ (\text{на } \Gamma), \tag{3.16}$$

причем выполнены необходимые условия разрешимости этих задач (см., например, [2, с. 46]).

Введем оператор T_1, который ставит в соответствие функции $u_1=P_1\psi\in H_1$ решение задачи (3.14): $\Phi_1=\Phi_1|_\Omega=T_1(\psi_1-\widetilde{\psi}_1;0)=T_1P_1\psi=T_1u_1$.

Рассмотрим теперь значения функции Φ_1 на границе Γ. Введем оператор следа на границе Γ: $\gamma(\Phi_1|_\Omega):=\Phi_1|_\Gamma$ и представим функцию $\Phi_1|_\Gamma$ в виде суммы ее проекций на подпространства H_1 и $\widehat{H}_2$: $\Phi_1|_\Gamma=P_1\gamma T_1P_1\psi+\widehat{P}_2\gamma T_1P_1\psi=:C_{11}u_1+C_{21}u_1$.

Введем оператор T_2, который ставит в соответствие функции $\widehat{u}_2=\widehat{P}_2\psi\in\widehat{H}_2$ решение задачи (3.15): $\Phi_2=\Phi_2|_\Omega=T_2(\widetilde{\psi}_1;\psi_2)=T_2\widetilde{P}_2\psi=T_2\widetilde{u}_2$.

Снова рассмотрим значения функции Φ_2 на границе Γ и представим функцию $\Phi_2|_\Gamma$ в виде суммы проекций этой функции на подпространства H_1 и $\widehat{H}_2$:

$$\Phi_2|_\Gamma=P_1\gamma T_2\widehat{P}_2\psi+\widehat{P}_2\gamma T_2\widehat{P}_2\psi=:C_{12}\widehat{u}_2+C_{22}\widehat{u}_2.$$

С учетом сказанного, имеем

$$\begin{pmatrix} \Big(\Phi|_{\Gamma_1}-\widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})};0\Big) \\ \Big(\widetilde{(\Phi|_{\Gamma_1})};\Phi|_{\Gamma_2}\Big) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \widehat{u}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Введем ряд обозначений

$$\Psi_1=:B_{21}u_1, \quad \widetilde{\Psi}_2=:B_{31}\widehat{u}_2, \quad \rho_0^{-1}\nabla\Psi_1=\rho_0^{-1}\nabla\widehat{\Psi}_2=P_{h,S}\Big[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big],$$
$$\eta_1=:B_{22}u_1, \qquad \rho_0^{-1}\nabla\eta_1=P_{h,S}\Big[N^2(x_3)\left((U_1u_1)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\Big],$$
$$\widehat{\eta}_2=:B_{33}\widehat{u}_2, \qquad \rho_0^{-1}\nabla\widehat{\eta}_2=P_{h,S}\Big[N^2(x_3)\left((U_2\widehat{u}_2)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\Big],$$

$$B_{11}\vec{w} := P_0\Big[N^2(x_3)w_3\vec{e}_3\Big], \quad B_{12}u_1 := P_0\Big[N^2(x_3)\left((U_1u_1)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\Big].$$
$$B_{13}\widehat{u}_2 := P_0\Big[N^2(x_3)\left((U_2\widehat{u}_2)\vec{e}_3\right)\vec{e}_3\Big].$$

Здесь через U_i $(i = 1, 2)$ обозначен оператор, который посредством решения вспомогательной задачи (см. (3.14), (3.15)) ставит в соответствие элементам u_1, $\widehat{u}_2$ функцию $\rho_0^{-1}\nabla\Phi_i \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ $(i = 1, 2)$.

Перепишем первое уравнение (2.11) и систему уравнений (3.11) — (3.12), с учетом обозначений, в виде системы уравнений, которая в векторно-матричной форме принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} + \\ + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{B}_{11} & \widehat{B}_{12} \\ \widehat{B}_{21} & \widehat{B}_{22} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \vec{w} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0\psi_0 \\ f \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$$A = N_1 + \mathcal{C} := \begin{pmatrix} \rho_1 I_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad N_2 = \mathrm{diag}(\rho_0 g I_1; A_2), \quad (3.19)$$

$$\widehat{B}_{11} = B_{11}, \quad \widehat{B}_{12} = \begin{pmatrix} B_{12} & B_{13} \end{pmatrix}, \quad \widehat{B}_{21} = \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix}, \quad \widehat{B}_{22} = \begin{pmatrix} B_{22} & 0 \\ 0 & B_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} \widehat{B}_{11} & \widehat{B}_{12} \\ \widehat{B}_{21} & \widehat{B}_{22} \end{pmatrix}, u = (u_1; \widehat{u}_2)^t, \quad f = (f_1; \widehat{f}_2)^t, \quad (3.20)$$

$I_0,\ I_1$ единичные операторы в $\vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$ и H_1 соответственно.

Начальные условия задачи (2.11) — (2.13) порождают начальные условия для уравнения (3.18):

$$\left(\vec{w}^0; u^0\right)^t = (\vec{w}(0); u(0))^t, \quad \left(\vec{w}^1; u^1\right)^t = \left(\vec{w}^{'}(0); u^{'}(0)\right)^t, \quad (3.21)$$
$$\vec{w}(0) = P_0\vec{v}^0, \quad u(0) = (P_1\zeta^0; \widehat{P}_2\zeta^0)^t, \quad \vec{w}^1(0) = P_0\vec{u}^0,$$
$$u^1(0) = \left(P_1\left(\left(P_{h,S}\vec{u}^0\right)\cdot\vec{n}\right); \widehat{P}_2\left(\left(P_{h,S}\vec{u}^0\right)\cdot\vec{n}\right)\right)^t.$$

Итогом рассмотрения задачи (2.11) — (2.13) в этом параграфе является

Теорема 1. *Начально-краевая задача* (2.11) — (2.13) *равносильна задаче Коши* (3.18) — (3.21) *для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H$.

Лемма 2. *Оператор* $\mathcal{C}$ *(см.* (3.19)*) самосопряженный компактный и положительный оператор, действующий в пространстве* $H = H_1 \oplus \widehat{H}_2$.

Оператор $\mathcal{B}$ (см. (3.20)) самосопряженный ограниченный и неотрицательный оператор, действующий в пространстве в $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus H$.

Оператор $K : \mathcal{D}(K) \subset L_2(\Gamma_2) \to L_2(\Gamma_2)$ (после расширения по Фридрихсу) — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор.

Данные утверждения доказаны в леммах 5, 6 и теореме 1 из [4].

Лемма 3. *Оператор N_2 (см. (3.19)) на области определения*

$$\mathcal{D}(N_2) = H_1 \oplus \mathcal{D}(A_2), \quad \mathcal{D}(A_2) = \{(\widetilde{\psi}_1; \psi_2) \in \widehat{H}_2 \,|\, \psi_2 \in \mathcal{D}(K)\}, \tag{3.22}$$

является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором.

Доказательство. Рассмотрим A_2 введенный в (3.8).

Для $\forall\, u,\ v \in \mathcal{D}(\widehat{A}_2) \subset \widehat{H}_2,\ u = (\widetilde{u}_1; u_2),\ v = (\widetilde{v}_1; v_2)$, в силу самосопряженности оператора ортогонального проектирования $\widehat{P}_2$ и оператора K, имеем:

$$\begin{aligned}
(A_2u, v) = \Big(\widehat{P}_2\left(\rho_0 g\widetilde{u}_1; Ku_2\right); (\widetilde{v}_1; v_2)\Big) = \Big((\rho_0 g\widetilde{u}_1; Ku_2)\,; \widehat{P}_2\left(\widetilde{v}_1; v_2\right)\Big) = \\
= ((\rho_0 g\widetilde{u}_1; Ku_2)\,; (\widetilde{v}_1; v_2)) = (\rho_0 g\widetilde{u}_1; \widetilde{v}_1)_{H_3} + (Ku_2; v_2)_{H_2} = \\
= (\widetilde{u}_1; \rho_0 g\widetilde{v}_1)_{H_3} + (u_2; Kv_2)_{H_2} = ((\widetilde{u}_1; u_2)\,; (\rho_0 g\widetilde{v}_1; Kv_2)) = \\
= \Big(\widehat{P}_2\left(\widetilde{u}_1; u_2\right); (\rho_0 g\widetilde{v}_1; Kv_2)\Big) = \Big((\widetilde{u}_1; u_2)\,; \widehat{P}_2\left(\rho_0 g\widetilde{v}_1; Kv_2\right)\Big) = (u; A_2v),
\end{aligned}$$

откуда следует, что оператор A_2 — самосопряженный.

Далее имеем:

$$(A_2u, u) = (\rho_0 g\widetilde{u}_1; \widetilde{u}_1)_{H_3} + (Ku_2; u_2)_{H_2} \geqslant \min\left(c; \rho g\right) \|u\|^2_{\widehat{H}_2}, \tag{3.23}$$

где $(Ku_2, u_2)_{H_2} \geqslant c\,\|u_2\|^2_{H_2}$, а значит, A_2 — положительно определенный оператор в $\widehat{H}_2$. Тогда и для оператора $N_2 = \mathrm{diag}(\rho_0 gI_1; A_2)$ эти свойства сохранятся, то есть оператор N_2 — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, и следовательно, ограниченно обратим. Обратный N_2^{-1} при этом является положительным оператором. $\square$

Изучим свойства оператора N_1, который имеет вид (см. (3.18)):

$$N_1 = \mathrm{diag}(\rho_1 I_1, A_1), \quad A_1\widehat{u}_2 = (\rho_1\widetilde{\psi_1} - c_1; \rho_2\psi_2 - c_1), \tag{3.24}$$

см. подробнее (3.7). Опираясь на представления оператора A_1, учитывая связь между $\widetilde{\psi}_1$ и $\widetilde{\psi}_2$: $\widetilde{\psi_1}\,\mathrm{mes}\Gamma_1 + \widetilde{\psi_2}\,\mathrm{mes}\Gamma_2 = 0$, имеем:

$$\begin{aligned}
(A_1\widehat{u}_2, \widehat{u}_2)_{\widehat{H}_2} = \Big((\rho_1\widetilde{\psi_1} - c_1; \rho_2\psi_2 - c_1); (\widetilde{\psi_1}; \psi_2)\Big)_{\widehat{H}_2} = \\
= \Big(\rho_1\widetilde{\psi_1} - c_1; \widetilde{\psi_1}\Big)_{H_3} + (\rho_2\psi_2 - c_1; \psi_2)_{H_2} = \rho_1\int_{\Gamma_1} |\widetilde{\psi_1}|^2 d\Gamma_1 + \rho_2\int_{\Gamma_2} |\psi_2|^2 d\Gamma_2 \geq \\
\geq k \cdot \|\widehat{u}_2\|_{\widehat{H}_2}, \qquad k := \min(\rho_1, \rho_2).
\end{aligned}$$

Из полученного результата следует

Лемма 4. *Для* A_1 *и* N_1 *из* (3.24) *справедливы оценки:*

$$k_1\widehat{I} \leqslant A_1 \leqslant k_2\widehat{I}, \quad k_1 := min(\rho_1, \rho_2) > 0, \quad +\infty > k_2 := max(\rho_1, \rho_2) \geq k_1 > 0,$$

$k_1 I \leqslant N_1 \leqslant k_2 I$, *где* $\widehat{I}$ *и* I *единичные операторы в* $\widehat{H}_2$ *и* H *соответственно.*

4. Теорема существования сильного решения

Определение 1. Сильным (по переменной t) решением задачи (1.2) — (1.5) на промежутке $[0,T]$ назовем набор функций $\vec{u}\,(t,x)$, $p\,(t,x)$, $\rho\,(t,x)$, $\zeta\,(t,\hat{x})$, для которых выполнены следующие условия:
1. $\rho\,(t) \in C^1\left([0,T]\,;\mathfrak{L}\,(\Omega)\right)$, где $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ — гильбертово пространство скалярных функций со скалярным произведением $(\varphi,\psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2\int_\Omega \left[\rho_0(x_3)N^2(x_3)\right]^{-1}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,d\Omega$, $\vec{u}\,(t) \in C^1\left([0,T]\,;\vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\right)$, $\rho_0^{-1}\nabla p \in C\left([0,T]\,;\vec{G}\,(\Omega,\rho_0)\right)$ и при любом $t \in [0,T]$ справедливо уравнение (1.2);

2. $u_n = \partial\zeta/\partial t \in C\left([0,T]\,;H\right)$; выполнены граничные условия на Γ_1 и Γ_2:

$$p = g\rho_0\zeta + \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \in C\left([0,T]\,;L_2(\Gamma_1)\right), \quad p = K\zeta + \rho_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \in C\left([0,T]\,;L_2(\Gamma_2)\right),$$

где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в $L_2(\Gamma_1)$ и $L_2(\Gamma_2)$ соответственно; а также выполнены начальные условия (1.5).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^0 \in \vec{J}_{0,S}\,(\Omega,\rho_0)\,, \quad \rho^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega), \quad f(t) \in C^1\left([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)\right),$$
$$\zeta^0 \in L_2\,(\Gamma)\,, \quad \int_\Gamma \zeta^0 d\Gamma = 0, \quad \zeta^0|_{\Gamma_2} \in \mathcal{D}(K),$$
$$\zeta^1 := \left[\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right)\cdot\vec{n}\right]_\Gamma \in L_2\,(\Gamma)\,, \quad \int_\Gamma \zeta^1 d\Gamma = 0, \quad \zeta^1|_{\Gamma_2} \in \mathcal{D}(K^{1/2}).$$

Тогда задача (1.2) — (1.5) *имеет единственное сильное по* t *решение.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда задача Коши (3.18), (3.21) имеет единственное сильное по t решение, что следует из теоремы 2 работы [3]. Дальнейшее доказательство основано на обратном переходе от задачи Коши (3.18), (3.21) к начально-краевой задаче (2.11) — (2.13), а затем к задаче (1.2) — (1.5). □

Список цитируемых источников

1. *Габов, С. А., Свешников, А. Г.* Математические задачи динамики флотирующей жидкости // Итоги науки и техники, сер. Мат. анализ. — 1990. — Т.28. — С. 3–86.

Gabov, S. A., Sveshnikov, A. G. Problems in the dynamics of flotation liquids. Journal of Soviet Mathematics 54, No.4, 979–1041 (1991).

2. *Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго, Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo, Zuy Can. Operator methods are in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)

3. *Копачевский, Н. Д., Цветков, Д. О.* Задача Коши, порожденная колебаниями стратифицированной жидкости, частично покрытой льдом // Таврический вестник информатики и математики. — 2018. — Т.38, №1 — С. 31–39.

   Kopachevsky, N. D., Tsvetkov, D. O. Cauchy problem generated by oscillations of stratified fluid partially closed by ice. TJCM 38, No.1, 31-39 (2018). (in Russian)

4. *Цветков, Д. О.* Малые движения идеальной стратифицированной жидкости, частично покрытой упругим льдом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т.28, №3 — С. 328–347.

   Tsvetkov, D. O. Small motions of an ideal stratified fluid partially covered with elastic ice. Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science 28, No.3, 328-347 (2018). (in Russian).

5. *Цветков, Д. О.* Колебания стратифицированной жидкости, частично покрытой крошеным льдом // Известия вузов. Математика. — 2018. — Т.62, №12. — С. 70–85.

   Tsvetkov, D. O. Oscillations of stratified liquid partial ly covered by crumpling ice. Russian Mathematics 62, No.12, 70-85 (2018).

6. *Rektorys, K.* Variational methods in mathematics, science and engineering (2th ed.). D. Reidel Publishing Company, 1980.

Получена 21.04.2016