Динамические системы, 2018, том 8(36), №2, 159–172

УДК 517.938

О структуре пространства орбит каскадов Морса-Смейла сферы[1]

Е. Я. Гуревич, А. С. Смирнова
Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики,
Нижний Новгород 603005. *E-mail: egurevich@hse.ru, assmirnova_8@edu.hse.ru*

Аннотация. В работе рассматривается класс диффеоморфизмов Морса-Смейла на сфере размерности четыре и выше, для которых инвариантные многообразия различных седловых периодических точек не пересекаются. Динамика произвольного такого диффеоморфизма может быть представлена как динамика "источник-сток", где "сток" ("источник") является связным объединением одномерного и нульмерного неустойчивых (устойчивых) инвариантных многообразий периодических точек. Изучается структура пространства орбит, принадлежащих области притяжения "стока" (области отталкивания "источника") и топология вложения в него сепаратрис седловых периодических точек коразмерности 1.

Ключевые слова: Каскады Морса-Смейла, пространство орбит, топологическая сопряженность, динамические системы Морса-Смейла.

On the structure of orbit space of Morse-Smale cascades on the sphere S^n

E. Ya. Gurevich, A. S. Smirnova
National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod 603005.

Abstract. In this paper, we consider the class of Morse-Smale diffeomorphisms on a sphere of dimension four and higher, for which the invariant manifolds of different saddle periodic points do not intersect. The dynamics of an arbitrary such diffeomorphism can be represented as a "sink-source" dynamics, where "sink" ("source") is a connected union of one-dimensional and zero-dimensional unstable (stable) invariant manifolds of periodic points. The structure of the space of orbits belonging to the region of attraction of the "sink" (the repulsion region of the "source") and the topology of the embedding of separatrices of saddle periodic points of codimension 1 are studied.

Keywords: Morse-Smale cascades, orbit space, topological conjugacy, Morse-Smale dynamical systems.
MSC 2010: 37D15

1. Введение и формулировка результатов

Динамические системы, называемые сейчас системами Морса-Смейла, были введены С. Смейлом в 1960 г. в качестве претендента на класс всех структурно устойчивых систем в размерности, большей двух. Условия, выделяющие

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01041) и в рамках выполнения программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 году (проект T-95)

этот класс, были сформулированы по аналогии с необходимыми и достаточными условиями грубости потоков на плоскости, найденными А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным в 1937 году. Вскоре сам С. Смейл понял, что многомерные структурно-устойчивые системы устроены значительно сложнее и могут обладать счетным множеством гиперболических периодических траекторий. Однако, изучение систем Морса-Смейла является актуальной задачей, имеющей как самостоятельный интерес (для описания детерминированных процессов в естествознании), так и с точки зрения теории бифуркаций (для понимания переходных процессов).

Напомним, что диффеоморфизм f на замкнутом многообразии M^n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических периодических точек и инварантные многообразия периодических точек пересекаются трансверсально (см., например, [12] для знакомства с основными понятиями, которые используются в определении).

Задача топологической классификации систем Морса-Смейла берет начало в классических работах Е. А. Леонтович и А. Г. Майера, посвященных классификации потоков на двумерной сфере с конечным числом особых траекторий. В работах М. Пейшото, А. А. Ошемкова, В. В. Шарко, Я. Л. Уманского и С. Ю. Пилюгина решалась аналогичная задача для потоков Морса-Смейла на многообразиях размерности 2, 3 и выше, а в работах А. Н. Безденежных, В. З. Гринеса, Х. Бонатти, Р. Ланжевена, О. В. Починки, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведева, Е. В. Жужомы — для каскадов Морса-Смейла на многообразиях размерности 2 и выше (см. для ссылок обзор [5] и работу [2]).

Отметим, что для диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях в настоящий момент получена полная топологическая классификация (О. В. Починка, В. З. Гринес, Х. Бонатти, Ф. Лауденбах). В размерности четыре и выше классификация получена лишь для частных случаев систем. В работе [2] получен полный топологический инвариант для класса G диффеомофизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на сфере S^n размерности $n \geq 4$. В работе [4] установлено, что инвариант, введенный в работе [2], можно существенно упростить для случая, когда неблуждающее множество диффеоморфизмов Морса-Смейла состоит только из неподвижных точек, сведя проблему классификации рассмотренных диффеоморфизмов к комбинаторной задаче. В настоящей работе делается первый шаг к описанию динамики диффеоморфизмов из класса G на комбинаторном языке, а именно, уточняется топология вложения сепаратрис коразмерности 1 в объемлющее многообразие. Точный результат заключается в теореме 1, формулировка которой приводится после введения необходимых понятий.

Пусть Ω^i_f — множество всех периодических точек диффеоморфизма $f \in G$, размерность неустойчивого многообразия которых равна $i \in \{0, \dots, n\}$.

Представим сферу S^n в виде объединения попарно непересекающихся множеств

$$A_f = (\bigcup_{\sigma\in\Omega_f^1} W_\sigma^u)\cup\Omega_f^0,\ R_f = (\bigcup_{\sigma\in\Omega_f^{n-1}} W_\sigma^s)\cup\Omega_f^n,\ V_f = S^n\setminus(A_f\cup R_f). \tag{1.1}$$

Из [10] следует, что множества A_f, R_f, V_f связные, причем множество A_f является аттрактором, R_f — репеллер диффеоморфизма f^2, а множество V_f состоит из блуждающих орбит, идущих от R_f к A_f.

Обозначим через $\widehat{V}_f = V_f/_f$ пространство орбит ограничения диффеомофизма f на V_f, через $p_f : V_f \to \widehat{V}_f$ — естественную проекцию. В силу [17] (Теорема 3.5.7, Предложение 3.6.7) p_f является накрытием, а пространство $\widehat{V}_f$ является многообразием.

Обозначим через $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \to \mathbb{Z}$ гомоморфизм, заданный следующим образом. Пусть $\hat c \subset \widehat{V}_f$ — не гомотопная нулю петля в $\widehat{V}_f$ и $[\hat c] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$ — её гомотопический класс $\hat c$. Выберем произвольную точку $\hat x \in \hat c$, обозначим через $p_f^{-1}(\hat x)$ ее полный прообраз и зафиксируем точку $\tilde x \in p_f^{-1}(\hat x)$. Так как p_f является накрывающим отображением, то существует единственный путь $\tilde c(t)$, начинающийся в точке $\tilde x(\tilde c(0) = \tilde x)$ и накрывающий петлю $\hat c$ (то есть такой, что $p_f(\tilde c(t)) = \hat c$). Тогда существует такой номер $n \in \mathbb{Z}$, что $\tilde c(1) = f^n(\tilde x)$. Положим $\eta_f([\hat c]) = n$. Из [6, Глава 18] следует, что гомоморфизм η_f является эпиморфизмом.

Напомним, что *устойчивой (неустойчивой) сепаратрисой* седловой точки σ называется компонента связности множества $W_\sigma^s \setminus \sigma$ ($W_\sigma^u \setminus \sigma$). Для произвольной периодической точки $\sigma \in \Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$ обозначим через m_σ ее период, через l_σ ее сепаратрису размерности $(n-1)$, положим $\hat l_\sigma = p_f(l_\sigma)$ и обозначим через $e_* : \pi_1(\hat l_\sigma^s) \to \pi(\widehat{V}_f)$ эпиморфизм, индуцированный включением $e : \hat l_\sigma^s \to \widehat{V}_f$.

Будем говорить, что седловая точка $\sigma \in \Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$ периода m_σ имеет тип ориентации $+1$ (-1), если ограничение $f^{m_\sigma}|_{W_\sigma^u}$ сохраняет (меняет) ориентацию W_σ^u.

Напомним, что n-шаром (n-диском) называется многообразие B^n, гомеоморфное стандартному шару $\mathbb{B}^n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+\dots+x_n^2 \le 1\}$. Открытым n-шаром (n-диском) называется многообразие, гомеоморфное внутренности $\mathbb{B}^n$ и сферой S^{n-1} называется многообразие, гомеоморфное границе $\mathbb{S}^{n-1}$ шара $\mathbb{B}^n$.

Теорема 1. *Пусть $f \in G$. Тогда*

1. *многообразие $\widehat{V}_f$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$;*

2. *если множество $\Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$ содержит точку σ отрицательного типа ориентации, то такая точка только одна и многообразие $\hat l_\sigma$ гомеоморфно обоб-*

[2]Множество A называется аттрактором диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$, если существует замкнутая окрестность $U \subset M^n$ множества A такая, что $f(U) \subset int\ U$ и $A = \bigcap\limits_{n\ge 0} f(U)$. Множество R называется репеллером диффеоморфизма f, если оно является аттрактором для диффеоморфизма f^{-1}.

щенной бутылке Клейна[3]*;*

3. *для любой точки $\sigma \in \Omega^1_f \cup \Omega^{n-1}_f$ положительного типа ориентации $\eta_f e_* = m_\sigma \mathbb{Z}$ и многообразие $\hat{l}_\sigma$ делит $\widehat{V}_f$ на две компоненты связности таких, что замыкание по крайней мере одной из них гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.*

2. Вспомогательные определения и факты

2.1. Свободные и разрывные действия группы преобразований

Напомним некоторые вспомогательные сведения о свойствах группы преобразований $\{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$, являющейся бесконечной циклической группой, действущей свободно и разрывно на некотором топологическом (вообще говоря, некомпактном) многообразии X и порожденной гомеоморфизмом $g : X \to X$.

Группа $\mathcal{G}$ *действует* на многообразии X, если задано отображение $\zeta : \mathcal{G} \times X \to X$, обладающее следующими свойствами:

1) $\zeta(e, x) = x$ для всех $x \in X$, где e — нейтральный (единичный) элемент группы $\mathcal{G}$;

2) $\zeta(g, \zeta(h, x)) = \zeta(gh, x)$ для всех $x \in X$ и $g, h \in \mathcal{G}$.

Группа $\mathcal{G}$ действует *свободно* на многообразии X, если для любых различных $g, h \in X$ и любой точки $x \in X$ выполняется неравенство $\zeta(g, x) \neq \zeta(h, x)$.

Группа $\mathcal{G}$ действует *разрывно* на многообразии X, если для каждого компактного подмножества $K \subset X$ множество элементов $g \in \mathcal{G}$ таких, что $\zeta(g, K) \cap K \neq \emptyset$ — конечно.

Будем обозначать через X/g пространство орбит действия группы $\{g^n\ ,\ n \in\ \mathbb{Z}\}$ и через $p_{_{X/g}} : X \to X/g$ естественную проекцию. В силу [17, Теорема 3.5.7, Предложение 3.6.7] естественная проекция $p_{_{X/g}} : X \to X/g$ является накрывающим отображением, а пространство X/g является многообразием.

Обозначим через $\eta_{_{X/g}} : \pi_1(X/g) \to \mathbb{Z}$ гомоморфизм, определенный следующим образом. Пусть $\hat{c} \subset X/g$ — не гомотопная нулю петля в X/g и $[\hat{c}] \in \pi_1(X/g)$ — класс гомотопической эквивалентности петли $\hat{c}$. Выберем произвольную точку $\hat{x} \in \hat{c}$, обозначим через $p^{-1}_{_{X/g}}(\hat{x})$ полный прообраз точки $\hat{x}$ и зафиксируем точку $\tilde{x} \in p^{-1}_{_{X/g}}(\hat{x})$. Так как $p_{_{X/g}}$ — накрытие, то существует единственный путь $\tilde{c}(t)$ с началом в точке $\tilde{x}$ ($\tilde{c}(0) = \tilde{x}$), накрывающий петлю c (то есть такой, что $p_{_{X/g}}(\tilde{c}(t)) = \hat{c}$). Поэтому существует элемент $n \in \mathbb{Z}$ такой, что $\tilde{c}(1) = f^n(\tilde{x})$. Положим $\eta_{_{X/g}}([\hat{c}]) = n$. Из [6] (гл. 18) следует, что гомоморфизм $\eta_{_{X/g}}$ является эпиморфизмом.

В силу [6, Теорема 5.5] (см. также [7, Предложения 1.2.3, 1.2.4]) справедливо следующее утверждение.

[3]Определение обобщенной бутылки Клейна дается в разделе 2.2

Утверждение 1. *Пусть X, Y — связные топологические многообразия и $g : X \to X$, $h : Y \to Y$ — гомеоморфизмы такие, что группы $\{g^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $\{h^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ действуют свободно и разрывно на X, Y соответственно. Тогда:*

1) *Если $\varphi : X \to Y$ — гомеоморфизм, сопрягающий гомеоморфизмы h и g, то отображение $\widehat{\varphi} : X/g \to Y/h$, заданное формулой $\widehat{\varphi} = p_{Y/h}\varphi p^{-1}_{X/g}$, является гомеоморфизмом; кроме того, $\eta_{X/g} = \eta_{Y/h}\varphi_*$, где $\varphi_* : \pi_1(X/g) \to \pi_1(Y/h)$ — гомоморфизм, индуцированный отображением φ.*

2) *Если $\widehat{\varphi} : X/g \to Y/h$ — гомеоморфизм такой, что $\eta_{X/g} = \eta_{Y/h}\varphi_*$, и $\hat{x} \in X/g$, $\tilde{x} \in p^{-1}_{X/g}(x)$, $y = \widehat{\varphi}(x)$, $\tilde{y} \in {p^{-1}}_{Y/h}(y)$, то существует единственный гомеоморфизм $\varphi : X \to Y$, сопрягающий гомеоморфизм g и h и такой, что $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{y}$.*

2.2. Канонические многообразия, связанные с гиперболическими неподвижными точками

Пусть $a_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\nu \in \{-1, +1\}$ — линейное отображение евклидова пространства, заданное формулой

$$a_\nu(x_1, \dots, x_n) = \Big(\nu\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{2}x_n\Big). \tag{2.1}$$

Для каждой периодической точки p диффеоморфизма Морса - Смейла $f : M^n \to M^n$ обозначим через $\mathcal{O}_p$ её орбиту, через q_p — размерность ее неустойчивого многообразия и через ν_p — тип ориентации.

В силу [12, предложение 2.1.1] верно следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса - Смейла, имеющий периодическую гиперболическую точку p. Тогда существует гомеоморфизм $\Psi : W^u_p \setminus p \to \mathbb{R}^{q_p} \setminus \{O\}$, удовлетворяющий условию $f^{m_p}|_{W^u_p \setminus p} = \Psi^{-1} a_{\nu_p} \Psi|_{W^u_p \setminus p}$.

Положим $\mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$. Фактор-пространство $\mathbb{K}^n_{+1} = \mathbb{R}^n_0/a_{+1}$ диффеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. В дальнейшем будем отождествлять $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ с $\mathbb{K}^n_{+1}$. Фактор-пространство $\mathbb{K}^n_{-1} = \mathbb{R}^n_0/a_{-1}$ будем называть *стандартной обобщенной n-мерной бутылкой Клейна.* Многообразие, гомеоморфное $\mathbb{K}^n_{-1}$, будем называть *обобщенной бутылкой Клейна.* Каноническая проекция $p_{a_{-1}} : \mathbb{R}^n_0 \to \mathbb{K}^n_{-1}$ индуцирует на $\mathbb{K}^n_{-1}$ структуру неориентируемого локально тривиального расслоения над $\mathbb{S}^1$ со слоем $\mathbb{S}^{n-1}$. Отсюда следует, что K^n_{-1} является неориентируемым многообразием. Так как $\mathbb{R}^n_0$ является для $\mathbb{K}^n_\nu$ универсальным накрытием, то фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{K}^n_\nu)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$ (см. [6, следствие 19.4]).

Положим $V^u_p = W^u_p \setminus p$ и $\widehat{V}^u_p = V^u_p/f$. Тогда из утверждения 1 и предложения1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2. Фактор-пространство $\widehat{V}^u_p$ гомеоморфно $\mathbb{K}^{q_p}_{\nu_p}$.

Обозначим через $b_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\nu \in \{+1, -1\}$, линейный автоморфизм евклидова пространства, определенный формулой

$$b_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Big(\nu 2x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{2}x_{n-1}, \nu\frac{1}{2}x_n\Big) \tag{2.2}$$

. Начало координат O является единственной неподвижной точкой автоморфизм b_ν, причем O является гиперболической седловой неподвижной точкой, устойчивое многообразие которой W^s_O совпадает с гиперплоскостью $x_1 = 0$, а неустойчивое многообразие W^u_O совпадает с осью Ox_1.

Положим $\mathbb{U} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n^2(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) \leq 1\}$, $\mathbb{U}_0 = \{(x_1, \dots, x_n) | \ x_1 = 0\}$, $\mathbb{N}^u = \mathbb{U} \setminus \mathbb{U}_0$, $\mathbb{N}^s = \mathbb{U} \setminus Ox_1$, $\widehat{\mathbb{N}}^s_\nu = \mathbb{N}^s/_{b_\nu}$, $\widehat{\mathbb{N}}^u_\nu = \mathbb{N}^u/_{b_\nu}$.

Пространство $\widehat{\mathbb{N}}_\nu$ будем называть *канонической окрестностью многообразия* $\mathbb{K}^{n-1}_\nu$. Непосредственно из определения вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.

1. Многообразие $\widehat{\mathbb{N}}^u_{+1}$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомеоморфна прямому произведению $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.
2. Многообразие $\widehat{\mathbb{N}}^u_{-1}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.
3. Многообразие $\widehat{\mathbb{N}}^s_{+1}$ диффеоморфно прямому произведению $\mathbb{K}^{n-1}_{+1} \times [-1, 1]$.
4. многообразие $\widehat{\mathbb{N}}^s_{-1}$ является трубчатой окрестностью нулевого сечения неориентируемого одномерного векторного расслоения над $\mathbb{K}^{n-1}_-$, граница $\partial\widehat{\mathbb{N}}_-$ диффеоморфна $\mathbb{K}^{n-1}_+$, причем если $i_* : \pi_1(\partial\widehat{\mathbb{N}}_-) \to \pi_1(\widehat{\mathbb{N}}_-)$ — гомоморфизм, индуцированный включением, то $\eta_{\widehat{\mathbb{N}}_-}(i_*(\pi_1(\partial\widehat{\mathbb{N}}_-))) = 2\mathbb{Z}$[4]

[4]Напомним, что *локально тривиальным расслоением* называется четверка $\xi = \{E, B, Y, \pi\}$ где E, B, Y — топологические пространства, $\pi : E \to B$ — непрерывное отображение такое, что многообразие B допускает открытое покрытие $\{U\}$, для каждого элемента которого $U \in \{U\}$ существует гомеоморфизм $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times Y$ такой, что если $p_1 : U \times Y \to U$ — проекция на первый сомножитель ($p_1(x, y) = x$), то $\pi|_{\pi^{-1}(U)} = p_1\varphi|_{\pi^{-1}(U)}$. Пространства E, B и Y называются *пространством, базой* и *слоем* локально тривиального расслоения соответственно, пара $(U, \varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times Y)$ — *картой*, $\{(U, \varphi)\}$ — *атласом локально тривиального расслоения*, максимальный атлас называется его *структурой*. Каждому замкнутому пути $\lambda \subset B$ с началом и концом в точке x соответствует гомотопический класс гомеоморфизмов $T_\lambda : \xi_x \to \xi_x$, индуцированный координатными преобразованиями при обходе петли, который называется *преобразованием монодромии.*

Векторным расслоением размерности n называется локально тривиальное расслоение $\xi = \{E, B, \mathbb{R}^n, \pi\}$ такое, что для любых двух карт (U, φ), (V, ψ) с множествами U, V, имеющими непустое пересечение в точке x, выполняется следующее условие: если $\varphi_x = p_2\varphi|_{\pi^{-1}(x)}$, $\psi_x = p_2\psi|_{\pi^{-1}(x)}$, то отображение $\psi_x^{-1}\varphi_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ линейно (здесь $p_2 : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — проекция на второй сомножитель). Слой $\xi_x = \pi^{-1}(x)$ над точкой $x \in B$ наделяется такой структурой векторного пространства, по отношению к которой отображение $\psi_x : \xi_x \to \mathbb{R}^n$ является изоморфизмом векторных пространств. Нулевым сечением векторного расслоения называется образ $\zeta(B) \subset E$ отображения $\zeta : B \to E$, сопоставляющее точке $x \in B$ нуль пространства ξ_x.

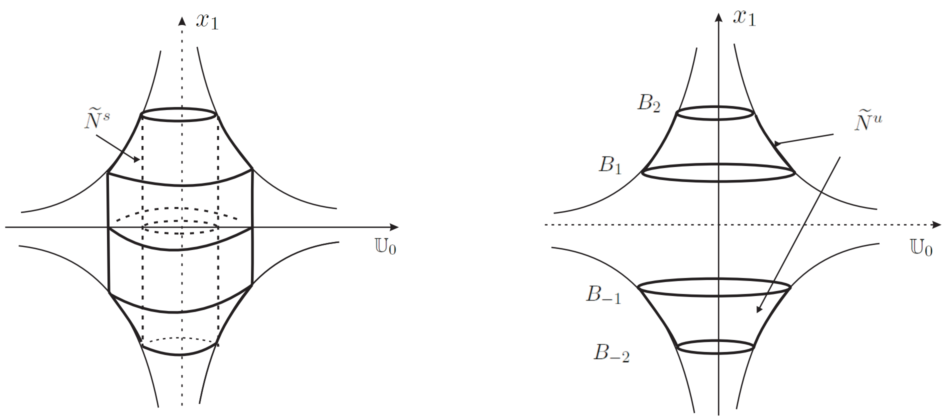

Рис. 1. Фундаментальные области $\widetilde{N}^s, \widetilde{N}^u$ действия диффеоморфизма b_{+1} на множества $\mathbb{N}^s, \mathbb{N}^u$

На рисунке 1 изображены окрестности $\mathbb{N}^s, \mathbb{N}^u$ и фундаментальные области $\widetilde{N}^s = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^s | \frac{1}{4} \leq x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}, \widetilde{N}^u = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | |x_1| \in [1, 2]\}$ действия ограничения диффеоморфизма b_{+1} на соответствующие окрестности[5]. Положим $\mathcal{C} = \{\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \frac{1}{4} \leq x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$. Множество $\mathbb{N}^s$ является объединением гиперплоскостей $\mathcal{L}_t = \{(x_1, ..., x_n) \in N^s | x_1^2(x_2^2 + \dots + x_n^2) = t^2\}, t \in [-1, 1]$. Тогда фундаментальная область $\widetilde{N}^s_{+1}$ является объединением пар колец $\mathcal{K}_t = \mathcal{L}_t \cap \mathcal{C}, t \in [-1, 1]$ и пространство $\widehat{\mathbb{N}}^s_{+1}$ может быть получено из $\widetilde{N}^s$ склеиванием компонент связности границы каждого кольца при помощи диффеоморфизма b_{+1}. Множество $\widetilde{N}^u$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомеоморфна прямому произведению $\mathbb{B}^{n-1} \times [0, 1]$. Пространство $\widehat{\mathbb{N}}^u_{+1}$ может быть получено из $\widetilde{N}^u$ склеиванием диска $B_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | x_1 = 1\}$ с диском $B_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | x_1 = 2\}$ и диска $B_{-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | x_1 = -1\}$ с диском $B_{-2} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | x_1 = -2\}$ при помощи диффеоморфизма b_{+1}.

Фундаментальной областью действия диффеоморфизма b_{-1} на множество $\mathbb{N}^u$ является множество $\widetilde{N}^u_{-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | |x_1| \in [1, 4]\}$ Пространство $\widehat{\mathbb{N}}^u_{-1}$ может быть получено из $\widetilde{N}^u_{-1}$ склеиванием диска $B_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | x_1 = 1\}$ с диском $B_4 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^u | x_1 = 4\}$ при помощи диффеоморфизма b_{-1}. Структура векторного расслоения в пространстве орбит $\widehat{\mathbb{N}}^s_{-1}$ определяется естественной проекцией одномерного слоения множества $\mathbb{N}^s$ прямыми, параллельными оси Ox_1. Это расслоение неориентируемо, поскольку преобразование монодромии, соответствующее петле $p_{a_\nu}(l_\nu)$, где l_ν — отрезок оси $0x_1$, соединяющий точку $(0, \dots, 0, 1)$ с точкой $(0, \dots, 1/2)$, является меняющим ориентацию.

В силу [12, теорема 2.1.2] (см. также [3, Proposition 4.3]) справедливо следующее предложение.

[5]Фундаментальной областью действия группы G на множество X называется замкнутое множество $D_G \subset X$, содержащее подмножество $\tilde{D}_G$ со следующими свойствами: 1) $cl\,\tilde{D}_G = D_G$; 2) $g(\tilde{D}_G) \cap \tilde{D}_G = \emptyset$ для любого $g \in G$, отличного от нейтрального элемента; 3) $\bigcup\limits_{g \in G} g(\tilde{D}_G) = X$.

Предложение 4. Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует система попарно непересекающихся окрестностей $\{N_\sigma, \sigma \in \Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}\}$ таких, что для любой окрестности N_σ существует гомеоморфизм $\chi_\sigma : N_\sigma \to \mathbb{U}$, удовлетворяющий следующему соотношению:

1) если $q_\sigma = 1$, то $\chi_\sigma f^{m_\sigma}|_{N_\sigma} = b_{\nu_\sigma}\chi_\sigma|_{N_\sigma}$,
2) если $q_\sigma = n-1$, то $\chi_\sigma f^{m_\sigma}|_{N_\sigma} = b_{\nu_\sigma}^{-1}\chi_\sigma|_{N_\sigma}$.

Будем называть окрестность N_σ, введенную в предложении 4, *линеаризующей*.

3. Доказательство основного результата

В этом разделе приводится доказательство теоремы 1, разбитое на несколько частей, оформленных как леммы.

Приведенное ниже вспомогательное предложение описывает основные свойства диффеоморфизмов из класса G. Первые два утверждения являются следствиями классических результатов теории систем Морса-Смейла, см., например, [15, Теорема 2.3], [12, Теорема 2.1], второе следует из [11, Теорема 1.3, Предложение 3.2] (см. также [3, Proposition 4.2]), третье является следствием из [9], [8], см. также [1, Лемма 3.2].

Предложение 5. Пусть $f \in G$. Тогда:

1. $S^n = \bigcup\limits_{p\in\Omega_f} W_p^s = \bigcup\limits_{p\in\Omega_f} W_p^u$;

2. множество седловых периодических точек состоит из точек, размерность неустойчивых многообразий которых равна 1 или $(n-1)$;

3. для любой точки $p \in \Omega_f^1$ замыкание $cl\ l_p^u$ компоненты связности l_p^u множества $W_p^u \setminus p$ является объединением $l_p^u \cup p \cup \omega$, где $\omega \in \Omega_f^0$ — стоковая точка, устойчивое многообразие которой содержит l_p^u; замыкание $cl\ W_\sigma^s$ устойчивого многообразия состоит из W_σ^s и единственной источниковой точки $\alpha \in \Omega_f^n$ такой, что $W_\sigma^s \setminus \sigma \subset W_\alpha^u$;

4. для любой седловой точки $\sigma \in \Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$ замыкание ее инвариантного многообразия размерности $(n-1)$ является цилиндрически вложенной сферой[6].

Докажем вначале, что пространство орбит $\widehat{V}_f$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Обозначим через m_f минимальное натуральное число такое, что все периодические точки и сепаратрисы седловых периодических точек диффеоморфизма f являются неподвижными для диффеомофизма f^{m_f}.

Из [3, Лемма 3.1] следует справедливость следующего утверждения.

[6]Сфера $S^{n-1} \subset M^n$ называется цилиндрически вложенной в многообразие M^n, если существует топологическое вложение $h : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1,1] \to M^n$ такое, что $h(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$.

Предложение 6. $\widehat{V}_{f^{m_f}}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$.

Следующее важное утверждение доказано в [13][7].

Утверждение 2. *Пусть* $\tau:\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$, $n\geq 4$, *— инволюция, не имеющая неподвижных точек. Тогда фактор-пространство* $(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1)/_\tau$ *гомеоморфно одному из четырех многообразий:* $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$, *неориентируемому расслоению* $\mathbb{S}^{n-1}\tilde{\times}\mathbb{S}^1$ *над окружностью со слоем* $\mathbb{S}^{n-1}$, *прямому произведению* $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}P^{n-1}$ *или связной сумме* $\mathbb{R}P^n\times\mathbb{R}P^n$.

Лемма 1. $\widehat{V}_f$ *гомеоморфно* $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$.

Доказательство. Из предложения 6 следует, что пространство V_f гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}$, следовательно, является универсальным накрытием для $\widehat{V}_f$. Тогда, в силу [6, следствие 19.4], фундаментальная группа $\pi_1(\widehat{V}_f)$ изоморфна группе $\{f^n\}\cong\mathbb{Z}$, следовательно, изоморфна группе $\mathbb{Z}$. Так как f — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, то $\widehat{V}_f$ ориентируемо.

Определим отображение $\tau_{m_f}:\widehat{V}_{f^{m_f}}\to\widehat{V}_{f^{m_f}}$ соотношением $\tau_{m_f}=p_{m_f}fp_{m_f}^{-1}$, где $p_{m_f}:V_f\to\widehat{V}_{f^{m_f}}$ — естественная проекция[8]. Тогда $\tau^{m_f}=id$ и $\widehat{V}_f=\widehat{V}_{f^{m_f}}/\tau_{m_f}$.

Если $m_f=2$, то из утверждения 2 непосредственно следует требуемый факт. Пусть $m_f>2$ и r — такое число, что $2^r\leq m_f<2^{r+1}$. Положим $g_r=f^{2^r}$.

Обозначим через $\xi:\widehat{V}_{f^{m_f}}\to\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$ произвольный гомеоморфизм. Пусть $S_0^{n-1}\subset V_f$ — сфера такая, что $\xi p_{f^{m_f}}=\mathbb{S}^{n-1}\times\{z\}$, где $z\in\mathbb{S}^1$ — произвольная фиксированная точка. Тогда $f^i(S_0^{n-1})\cap S_0^{n-1}=\emptyset$ для любого $i\geq m_f$, в частности, $g_r(S_0^{n-1})\cap S_0^{n-1}=\emptyset$. Из теоремы о кольце следует, что множество $K\subset V_f$, ограниченное сферами $S_0^{n-1},g_r(S_0^{n-1}$, гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1}\times[0,1]$, поэтому пространство орбит $\widehat{V}_{g_r}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$. Применяя аргументы, аналогичные приведенным выше и утверждение 2, получим, что пространство орбит $\widehat{V}_{g_{r-1}}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$. Если $r=1$, то $g^{r-1}=f$ и доказательство закончено. Если $r>1$, то продолжая процесс, за $r-1$ шагов придем к требуемому утверждению.

$\square$

Докажем второе утверждение теоремы 1.

Лемма 2. *Множество* $\Omega_f^1\cup\Omega_f^{n-1}$ *содержит не более одной точки* σ *отрицательного типа ориентации, и многообразие* $\hat{l}_\sigma$ *гомеоморфно обобщенной бутылке Клейна.*

Доказательство. Предположим, что множество $\Omega_f^1\cup\Omega_f^{n-1}$ содержит точку σ отрицательного типа ориентации периода m_σ. Для определенности предположим,

---

[7] Аналогичное утверждение для случая $n=3$ доказано в [16].

[8] Под $p_{m_f}^{-1}(y)$ понимается полный прообраз точки y, то есть множество всех точек $x\in V_f$ таких, что $y=p_{f_m}(x)$.

что $\sigma \subset \Omega^1_f$. В силу предложения 4 существует окрестность N_σ и гомеоморфизм $\chi_\sigma : N_\sigma \to \mathbb{U}$ такие, что $f^{m_\sigma}|_{N_\sigma} = \chi_\sigma^{-1} b_- \chi_\sigma|_{N_\sigma}$, поэтому одномерные сепаратрисы точки σ имеют период $2m_\sigma$. Замыкание устойчивого многообразия точки σ является локально-плоско вложенной $(n-1)$-сферой, делящей сферу S^n на два открытых n-шара B_1, B_2, каждый из которых содержит одну одномерную сепаратрису точки σ. Поэтому $f^{m_\sigma}(B_1) = B_2$, $f^{m_\sigma}(B_2) = B_1$. Отсюда следует, что любая периодическая точка, лежащая в шаре B_1 (B_2) имеет период, кратный $2m_\sigma$. Предположим, что имеется еще одна точка σ_* отрицательного типа ориентации с периодом m_{σ_*}. Так как $\sigma_* \subset B_1 \cup B_2$, то существует целое n такое, что $m_{\sigma_*} = n2r_\sigma$. Применяя к точке σ_* рассуждения, сделанные для точки σ, получим, что существует целое k такое, что $m_\sigma = 2kr_{\sigma_*} = 4knm_\sigma$, откуда $4nk = 1$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что множество седловых точек диффеоморфизма f содержит не более одной точки отрицательного типа ориентации. Тогда, если такая точка имеется, ее период равен 1, и, в силу предложения 2, соответствующее ей многообразие $\hat{l}_\sigma$ гомеоморфно обобщенной бутылке Клейна. $\square$

Докажем третье утверждение теоремы 1.

Пусть M^n, N^k — многообразия (возможно, с непустым краем) такие, что группы $\pi_1(M^n), \pi_1(N^k)$ изоморфны группе $\mathbb{Z}$ и N^k — топологическое подмногообразие многообразия M^n. Будем называть многообразие N^k *m-существенным*, если включение $e_{_{N^k}} : N^k \to M^n$ индуцирует гомомофизм $e_{\gamma_*} : \pi_1(N^k) \to \pi_1(M^n)$ такой, что $e_{\gamma_*}(\pi_1(N^k)) = m\pi_1(M^n)$. Будем называть m-существенное многообразие β, гомеомофное окружности $\mathbb{S}^1$, *m-существенным узлом.*

Пусть $\beta \in M^n$ — m-существенный узел и $h : \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \to M^n$ — топологическое вложение такое, что $h(\{O\} \times \mathbb{S}^1) = \beta$. Многообразие $N_\beta = h(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ будем называть *трубчатой окрестностью* узла β.

Следующее предложение доказывается аналогично [3, Propositions 5.1, 5.3].

Предложение 7. Пусть M^n — либо $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, либо $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, $\beta, \beta' \in M^n$ — m-существенные узлы, $N_\beta, N_{\beta'}$ — их трубчатые окрестности. Тогда:

1. существует гомеоморфизм $\psi : M^n \to M^n$ такой, что $\psi(\beta) = \beta'$;

2. множества $M^n \setminus int\ N_\beta$, $M^n \setminus int\ N_{\beta'}$ гомеоморфны.

Следующее утверждение доказано в [14, Theorem 2].

Утверждение 3. *Пусть $\psi : \mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1$ — произвольный гомеоморфизм. Тогда существует гомеоморфизм $\Psi : \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ такой, что $\Psi|_{\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1} = \psi|_{\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1}$.*

Следствие 1. *Пусть M^n — либо $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, либо $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, Q — многообразие, полученное удалением из M^n внутренности трубчатой окрестности $N_\beta \in M^n$ m-существенного узла и вклеиванием $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ по произвольному меняющему естественную ориентацию края гомеорфизму $\varphi : \partial N_\beta \to \mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1$. Тогда Q гомеоморфно M^n.*

Доказательство. Положим $N' = M^n \setminus int\ N_\beta$, тогда $Q = N' \cup_\varphi \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ и для любого подмножества $X \in N' \cup \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ определена проекция $\pi : X \to Q$. Положим $\psi = \varphi^{-1}\pi^{-1}|_{\pi(\mathbb{S}^{n-2}\times\mathbb{S}^1)}$. Согласно предложению 3 гомеоморфизм ψ может быть продолжен до гомеоморфизма $\Psi : \pi(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \to N_\beta$. Тогда отображение $H : Q \to M^n$, определенное как $H(x) = \pi^{-1}(x) = x$ для любой точки $x \in \pi(int\, N')$, и $H(x) = \Psi(x)$ для любой точки $x \in \pi(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$, является искомым гомеоморфизмом. □

Лемма 3. *Для любой точки $\sigma \in \Omega^1_f \cup \Omega^{n-1}_f$ положительного типа ориентации $\eta_f e_* = m_\sigma\mathbb{Z}$ и многообразие $\hat{l}_\sigma$ делит $\widehat{V}_f$ на две компоненты связности таких, что замыкание по крайней мере одной из них гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.*

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Omega^1_f$ — седловая периодическая точка положительного типа ориентации периода r_σ. Из предложений 1,2 и определения эпиморфизма η_f следует, что многообразие $\hat{l}_\sigma$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ и $\eta_f e_* = m_\sigma\mathbb{Z}$. Покажем, что многообразие $\hat{l}_\sigma$ делит $\widehat{V}_f$ на две компоненты связности и замыкание по крайней мере одной из них гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Обозначим через $|\Omega^i_f|$ количество всех точек, составляющих множество Ω^i_f.

Из предложения 5 следует, что замыкание устойчивого многообразия любой точки $\sigma \in \Omega^1_f$ делит сферу S^n на два шара, поэтому: 1) одномерные сепаратрисы точки σ содержатся в устойчивых многообразий двух различных стоковых точек; 2) совокупность всех замыканий устойчивых многообразий точек из множества Ω^1_f делит сферу S^n на $|\Omega^1_f|+1$ компонент связности, каждая из которых содержит в точности одну стоковую точку, следовательно $|\Omega^0_f| = |\Omega^1_f| + 1$; 3) если у диффеоморфизма f имеется седловая точка отрицательного типа ориентации, то она делит аттрактор A_f на два симметричных подмножества периода 2.

Кроме того, из предложения 5 следует, что аттрактор A_f является носителем связного графа, вершинами которого являются стоковые периодические точки, а ребрами — неустойчивые многообразия седловых точек из множества Ω^1_f. Из соотношения $|\Omega^0_f| = |\Omega^1_f| + 1$ следует, что этот граф является деревом, и аттрактор A_f не содержит подмножеств, гомеоморфных окружности. Кроме того, найдется по крайней мере одна стоковая вершина ω, в бассейне которой лежит в точности одна неустойчивая одномерная сепаратриса седловой периодической точки. Обозначим эту точку через σ и через через l_-, l_+ ее одномерные сепаратрисы. Пусть $l_+ \subset W^s_\omega$.

Возможны 2 случая: 1) множество Ω^1_f состоит только из точек положительного типа ориентации; 2) множество Ω^1_f содержит точку σ_* (возможно, совпадающую с σ)отрицательного типа ориентации.

Рассмотрим случай 1). Тогда $m_\sigma = m_\omega$, а совокупность $cl\ W^s_{\mathcal{O}_\sigma}$ замыканий устойчивых многообразий седловых периодических точек, составляющих орбиту точки σ, делит сферу S^{n-1} на $m_\sigma + 1$ компонент связности, составляющих два f-инвариантных множества $D_+ = W^s_{\mathcal{O}_\omega}$ и $D_- = S^n \setminus cl\ D_+$. Так как аттрактор A_f одномерный и удаление одномерного множества из многообразия размерности $n >$

2 не увеличивает числа компонент связности, то проекция $\hat{l}_\sigma$ множества $W^s_{\mathcal{O}_\sigma} \setminus \mathcal{O}_\sigma$ делит $\widehat{V}_f$ на две компоненты связности $\widehat{D}_+ = p_f(D_+ \setminus A_f)$ и $\widehat{D}_- = p_f(D_- \setminus A_f)$.

Покажем, что замыкание $cl\ \widehat{D}_+ = \widehat{D}_+ \cup \hat{l}_\sigma$ множества $\widehat{D}_+$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Пусть N_σ — линеаризующая окрестность седловой точки σ, положим $N^s_\sigma = N_\sigma \setminus W^s_\sigma$, $N^u_\sigma = N_\sigma \setminus W^u_\sigma$, $\widehat{N}^s_\sigma = N^s_\sigma/_f$, $\widehat{N}^u_\sigma = N^u_\sigma/_f$ и обозначим через $\widehat{N}^u_{\sigma,+}$ компоненту связности множества $\widehat{N}^u_\sigma$, имеющую непустое пересечение с множеством $\widehat{D}_+$. Из предложений 3,4 следует, что множество $cl\ \widehat{D}_+ \cap \widehat{N}^s_\sigma$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1 \times [0,1]$, поэтому множество $cl\ \widehat{D}_+$ гомеоморфно множеству $\widehat{D}_+ \setminus int\ \widehat{N}^s_\sigma$. Отметим, что $\widehat{D}_+ \setminus int\ \widehat{N}^s_\sigma = \widehat{V}^s_{\mathcal{O}_\omega} \setminus int\ \widehat{N}^u_{\sigma,+}$. Из определения эпиморфизма $\eta_{X/g}$ следует, что пространство $\widehat{V}^s_{\mathcal{O}_\omega}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, а дуга $\hat{l}_+ = p_{\widehat{V}^s_{\mathcal{O}_\omega}}(\mathcal{O}_{l_+})$ вложена в $\widehat{V}^s_{\mathcal{O}_\omega}$ таким образом, что отображение включения индуцирует изоморфизм групп $\pi_1(\hat{l}_+)$, $\pi_1(\widehat{V}^s_{\mathcal{O}_\omega})$. Из предложения 7 следует, что замыкание дополнения до произвольной замкнутой трубчатой окрестности дуги $p_{\widehat{V}_{\omega_0}}(l_+)$ в $\widehat{V}_\omega$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, откуда следует, что множество $\widehat{D}_+ \setminus int\ \widehat{N}^s_\sigma$, а, следовательно, и множество $cl\ \widehat{D}_+$ гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Если множество точек Ω^1_f не исчерпывается орбитой точки σ, то положим $A'_f = A_f \setminus W^u_{\mathcal{O}_\sigma}$, $V'_f = (\bigcup\limits_{p \in A'_f} V^s_p) \setminus \bigcup\limits_{q \in A'_f} V^u_q$. Тогда $V'_f \cup \bigcup\limits_{r \in \mathcal{O}_\omega} V^s_r = V_f \setminus \bigcup\limits_{p \in \mathcal{O}_\sigma} V^s_p \cup \bigcup\limits_{p \in \mathcal{O}_\sigma} V^u_p = V_f \setminus \bigcup\limits_{p \in \mathcal{O}_\sigma} int\ N^s_p \cup \bigcup\limits_{p \in \mathcal{O}_\sigma} N^u_p$, и $\widehat{V}'_f = V'_f/f = \widehat{V}_f \setminus int\ \widehat{N}^s_\sigma \cup_\varphi \widehat{N}^u_\sigma$, где $\varphi : \partial \widehat{N}^s_\sigma \to \partial \widehat{N}^u_\sigma$ — гомеоморфизм, определяемый формулой $\varphi = p_{\widehat{N}^u_\sigma} p^{-1}_{\widehat{N}^s_\sigma}|_{\partial \widehat{N}^s_\sigma}$.

Положим $\widehat{N}^u_{\sigma,-} = \widehat{N}^u_\sigma \setminus \widehat{N}^u_{\sigma,+}$, $Q_- = \widehat{D}_- \setminus int\ \widehat{N}^s_\sigma) \cup_\varphi \widehat{N}^u_{\sigma,-}$, $Q_+ = (\widehat{D}_+ \setminus int\ \widehat{N}^s_\sigma) \cup_\varphi \widehat{N}^u_{\sigma,+}$. Тогда $\widehat{V}'_f = Q_+ \cup Q_-$. По определению $Q_+ = (W^s_{\mathcal{O}_\omega} \setminus \mathcal{O}_\omega)/f$, следовательно, гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. В силу следствия 1 Q_- также гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Так как множество A'_f является связным аттрактором и носителем связного графа, являющегося деревом, то найдется стоковая точка $\omega' \subset A'_f$, для которой существует единственная точка $\sigma' \in A'_f$, чья одномерная сепаратриса принадлежит $W^s_{\omega'}$. Применим к точке σ' те же рассуждения, что и для точки σ, и получим, что множество $p_{Q_-}(V^s_{\sigma'})$ делит Q_- на две компоненты связности, замыкание по крайней мере одной из которых, обозначим ее $\widehat{D}'_+$, гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Если $\widehat{D}'_+ \subset \widehat{D}_-$, то $\hat{l}_{\sigma'}$ ограничивает в $\widehat{V}_f$ множество $\widehat{D}'_+$ и утверждение доказано для точки σ'. Если $\widehat{D}'_+ \cap \widehat{D}_+ \neq \emptyset$, то $\hat{l}_{\sigma'}$ ограничивает в $\widehat{V}_f$ множество, полученное из $\widehat{D}'_+$ удалением внутренности трубчатой окрестности m_σ=существенного узла $\widehat{N}^s_{\sigma,-}$ и вклеиванием гомеоморфного этой окрестности множества. Тогда, в силу следствия 1 проекция $\hat{l}_{\sigma'}$ также ограничивает в $\widehat{V}_f$ множество, гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Если множество Ω^1_f не исчерпывается орбитами точек σ, σ', продолжим процесс деления аттрактора A_f и через конечное число шагов получим требуемое утверждение. Доказательство для точек $\sigma \in \Omega^{n-1}_f$ проводится аналогично переходом от

f к f^{-1}.

Рассмотрим случай 2). В этом случае множество $cl\ W^s_{\sigma_*}$ делит сферу S^n на две компоненты связности $D_*, f(D_*)$ периода 2. Аналогично доказательству леммы 1, показывается, что пространство орбит $\widehat{D}_* = (D_* \setminus (A_f \cap R_f))/f$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Положим $A^*_f = A_f \setminus W^s_{\sigma_*}$, $V^*_f = (\bigcup\limits_{p \in A^*_f} V^s_p) \setminus \bigcup\limits_{q \in A^*_f} V^u_q$, $\widehat{V}^*_f = V^*_f/f$. Так как $V_f \setminus W^s_{\sigma_*}$ гомеоморфно $V_f \setminus int\ N^s_{\sigma_*}$, то $\widehat{V}_f \setminus l_{\sigma_*}$ гомеоморфно $\widehat{V}_f \setminus int\, \widehat{N}^u_{\sigma_*}$. Поскольку $V_f \setminus int\ N^s_{\sigma_*} = (D_* \setminus (A_f \cap R_f)) \setminus int\ N^u_{\sigma_*}$, то ввиду предложений 3,7, многообразие $\widehat{V}_f \setminus\ int\ \widehat{N}^s_{\sigma_*}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Теперь, применяя рассуждения из рассмотрения случая 1), получим требуемое утверждение.

□

Список цитируемых источников

1. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С.* Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех // Труды СВМО. — 2008. — 261(1). — С. 59–83.

   Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Medvedev V. S. Peixoto graph of Morse-Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension greater than three. Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova 261(1), 59-83 (2008).

2. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С.* О топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис на многообразиях размерности большей 3 // Труды математического института им. В. А. Стеклова — 2010. — 270. — С. 62–86.

   Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Medvedev V. S. Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with one-dimensional set of unstable separatrices. Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova 270, 62-86 (2010). (in Russian)

3. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Починка О. В.* О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток // Математический сборник. — 2016. — 71. — С. 164.

   Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Pochinka O. V. On embedding of multidimensional Morse-Smale diffeomorphisms in topological flows. Russian Mathematical Surveys 71, 164 (2016).

4. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Починка О. В.* Комбинаторный инвариант для каскадов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на сфере S^n, $n \geq 4$ // Математические заметки — 2019. (в печати)

   Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Pochinka O. V. Combinatorial invariant for Morse-Smale cascades without heteroclinic intersections on the sphere S^n, $n \geq 4$. Mathematical Notes (2019). (in press)

5. *Гринес В. З., Починка О. В.* Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях // УМН. — 2013. — 68(1). — С. 129–188.

   Grines V. Z., Pochinka O. V. Morse-Smale cascades on 3-manifolds. Russian Mathematical Surveys 68(1), 129-188 (2013).

6. *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии — Москва: Мир, 1983 — С. 304.

   Ch. ,Kosnevsky The first course of algebraic topology. Moscow: Mir (1983)
7. *Bonatti Ch., Grines V. Z., Pochinka O. V.* Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds. Proc. Steklov Inst. Math. 3(250), 1-46 (2005).
8. *Brown M.* Locally Flat Embeddings of Topological Manifolds. Annals of Mathematics Second Series 75(2), 331-341 (1962).
9. *Cantrell J. C.* Almost locally flat sphere S^{n-1} in S^n. Proceeding of the American Mathematical society 15(4), 574-578 (1964).
10. *Grines V. Z., Zhuzhoma E. V., Medvedev T. V., Pochinka O. V.* Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms. Tr. Mat. Inst. Steklova 271(Differentsial'nye Uravneniya i Topologiya. II), 111-133 (2010).
11. *Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections. Journal of Mathematical Sciences 208(208), 81-90 (2015).
12. *Grines V. Z., Gurevich E. Ya., Pochinka O. V.* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Switzerland Springer International Publishing, 295, 2016.
13. *Jahren B., Kwasik S.* Free involutions on $S^1 \times S^n$. Math. Ann. 351(2), 281-303 (2011).
14. *Max N.* Homeomorphisms of $S^n \times S^1$. Bull. Amer. Math. Soc. 73(6), 939-942 (1967).
15. *Smale S.* Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc. 73(6), 747-817 (1967).
16. *Tollefson J.* Involutions on $S^1 \times S^2$ and other 3-manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 183, 139-152 (1973).
17. *Thurston W.* Three-Dimensional Geometry and Topology. Princeton University Press 1, 1997.

Получена 08.05.2018