Динамические системы, 2018, том 8(36), №2, 139–147

УДК 517.955.8

Асимптотическое поведение на бесконечности решений неоднородного уравнения внутренних волн

Е. В. Никитенко

Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВО "Алтайский государственный технический
университет им. И. И. Ползунова",
Рубцовск 658207. *E-mail: evnikit@mail.ru*

Аннотация. В работе исследуется асимптотическое поведение на бесконечности решений задачи Коши для неоднородного уравнения внутренних волн со специальной правой частью. Указан явный вид предельной функции и получена оценка на скорость сходимости.

Ключевые слова: уравнение внутренних волн, задача Коши, асимптотическое поведение решений на бесконечности.

Asymptotic behavior at infinity of solutions to the inhomogeneous equation of internal waves

E. V. Nikitenko
Rubtsovsk Industrial Institute,
Polzunov Altai State Technical University,
Rubtsovsk 658207.

Abstract. In this paper we investigate the asymptotic behavior at infinity of solutions the Cauchy problem for the inhomogeneous equation of internal waves with a special right-hand side. We specify the explicit form of the limit function and estimate the rate of convergence.

Keywords: equation of internal waves, Cauchy problem, asymptotic behavior of solutions at infinity.
MSC 2010: 35C20, 35C15

1. Введение

В работе рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения внутренних волн

$$\begin{aligned}
&\Delta u_{tt} + \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0,\ x \in R^n,\ n \geq 3,\\
&u|_{t=0} = \varphi_1(x),\\
&u_t|_{t=0} = \varphi_2(x),
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где Δ — оператор Лапласа по x, функции $f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in S(R^n)$, $\lambda \geq 0$ — параметр. Установлены асимптотические оценки при $t \to \infty$ решений $u(t, x, \lambda)$ в зависимости от параметра λ.

Решение данной задачи однозначно определяется в классе функций, убывающих при $|x| \to \infty$ [3]. При выводе асимптотических оценок используется вариант метода стационарной фазы, изложенного в [4]. Полученные результаты обобщают ранее полученные оценки в работе [2].

Среди последних работ, посвященных изучению асимптотических свойств решений уравнений, не разрешенных относительно старшей производной отметим работу [1], в которой рассматривалась задача Коши для неоднородного уравнения Соболева

$$\begin{aligned}
&\Delta u_{tt} + u_{x_n x_n} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0,\ x \in R^n,\ n \geq 3, \\
&u|_{t=0} = \varphi_1(x), \\
&u_t|_{t=0} = \varphi_2(x),
\end{aligned}$$

где $f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in S(R^n)$, $\lambda > 0$ — параметр. В данной работе были установлены асимптотические разложения при $t \to \infty$ решений $u(t, x, \lambda)$ в зависимости от значений параметра λ.

2. Формулировка результатов

Сформулируем основные результаты об асимптотическом поведении решений задачи Коши (1.1) при $t \to \infty$.

Теорема 1. Пусть $\lambda > 1$, тогда на любом компакте $K \subset R^n$ для решения задачи (1.1) имеет место оценка

$$\max_{x \in K} |u(t, x, \lambda) + e^{i\lambda t} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(|\xi'|^2 - \lambda^2 |\xi|^2)} d\xi| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1, \tag{2.1}$$

где $|\xi'|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \xi_i^2$, $c(K, \lambda) > 0$ — константа, зависящая от K, φ_1, φ_2, f и λ.

Теорема 2. Пусть $0 \leq \lambda \leq 1$, тогда на любом компакте $K \subset R^n$ справедлива асимптотическая оценка

$$\max_{x \in K} |(\sum_{i=1}^{n-1} D_{x_i}^2 - \lambda^2 \Delta) u(t, x, \lambda) - e^{i\lambda t} f(x)| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1, \tag{2.2}$$

$c(K, \lambda) > 0$ — константа, зависящая от K, φ_1, φ_2, f и λ.

3. Вывод асимптотических оценок

Доказательство теоремы 1.

Разобъем задачу (1.1) на две подзадачи:

$$\begin{aligned} &\Delta v_{tt} + \sum_{i=1}^{n-1} v_{x_i x_i} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0,\ x \in R^n\ (n \geq 3), \\ &v|_{t=0} = 0, \\ &v_t|_{t=0} = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $f(x) \in S(R^n)$, $\lambda \geq 0$ — параметр.

$$\begin{aligned} &\Delta w_{tt} + \sum_{i=1}^{n-1} w_{x_i x_i} = 0, \quad t > 0,\ x \in R^n\ (n \geq 3), \\ &w|_{t=0} = \varphi_1(x), \\ &w_t|_{t=0} = \varphi_2(x), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in S(R^n)$.

Используя интегральное преобразование Фурье нетрудно проверить, что решение задачи (3.1) при $\lambda > 1$ и решение задачи (3.2) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(t,x,\lambda) &= v^1(t,x,\lambda) + v^2(t,x,\lambda) + v^3(t,x,\lambda) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} e^{ix\xi} \frac{i\lambda|\xi|\hat{f}(\xi)}{(|\xi'|^2 - \lambda^2|\xi|^2)|\xi'|} \sin\Big(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\Big) d\xi \\ &+ \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(|\xi'|^2 - \lambda^2|\xi|^2)} \cos\Big(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\Big) d\xi \\ &- e^{i\lambda t} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(|\xi'|^2 - \lambda^2|\xi|^2)}) d\xi, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} w(t,x) &= w^1(t,x) + w^2(t,x) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} e^{ix\xi} \frac{|\xi|\hat{\varphi}_2(\xi)}{|\xi'|} \sin\Big(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\Big) d\xi \\ &+ \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} e^{ix\xi} \hat{\varphi}_1(\xi) \cos\Big(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\Big) d\xi. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Таким образом, решение задачи Коши (1.1) при $\lambda > 1$ имеет вид

$$u(t,x,\lambda) = v(t,x,\lambda) + w(t,x). \tag{3.5}$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности.

Для решения $w(t,x)$ задачи Коши (3.2), согласно [4, стр. 207], на любом компакте $K \subset R^n$ выполнена оценка

$$\max_{x\in K}|w(t,x)| \leq \frac{c(K)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1, \tag{3.6}$$

$c(K) > 0$ — константа, зависящая от K, φ_1, φ_2.

Найдем оценку для решения $v(t,x,\lambda)$ задачи Коши (3.1)

Рассмотрим вначале функцию $v^1(t,x,\lambda)$. Переходя к сферическим координатам

$$\xi_n = \rho\cos\theta_1,\ \xi_{n-1} = \rho\sin\theta_1\cos\theta_2,\ \ldots,\ \xi_1 = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}, \tag{3.7}$$

и учитывая, что якобиан преобразования имеет вид

$$J = \rho^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\phi(\theta_2,\ldots,\theta_{n-1}),$$

получим

$$v^1(t,x,\lambda) = \frac{i\lambda}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi\cdots\int\limits_0^{2\pi}\rho^{n-3}e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^{n-3}\theta_1}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\phi(\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})$$

$$\times\sin(t\sin\theta_1)\hat{f}(\xi(\rho,\theta))d\theta d\rho.$$

Рассмотрим следующий интеграл при $t \gg 1$

$$J_1 = \int\limits_0^\pi e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^{n-3}\theta_1}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\sin(t\sin\theta_1)\hat{f}(\xi(\rho,\theta))d\theta_1$$

$$= \Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi}\Big)e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^{n-3}\theta_1}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\sin(t\sin\theta_1)\hat{f}(\xi(\rho,\theta))d\theta_1 = J_1^1 + J_1^2 + J_1^3.$$

Так как оба интеграла J_1^1, J_1^3 оцениваются по одной схеме, то рассмотрим, например, J_1^1. Используя тождество

$$\sin(t\sin\theta_1) = \frac{-1}{t\cos\theta_1}D_{\theta_1}\cos(t\sin\theta_1)$$

и интегрируя по частям, получим

$$J_1^1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{-\sin^{n-3}\theta_1}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)t\cos\theta_1}D_{\theta_1}\cos(t\sin\theta_1)\hat{f}(\xi(\rho,\theta))d\theta_1$$

$$= e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{-\cos(t\sin\theta_1)\sin^{n-3}\theta_1}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)t\cos\theta_1}\hat{f}(\xi(\rho,\theta))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

$$+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\cos(t\sin\theta_1)}{t}\Big[\frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho,\theta)\hat{f}(\xi(\rho,\theta))\sin^{n-3}\theta_1}{\cos\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}$$

$$+\frac{\sin^{n-2}\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta))}{\cos^2\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}+\frac{1}{\cos\theta_1}D_{\theta_1}\Big(\frac{\hat{f}(\xi(\rho,\theta))\sin^{n-3}\theta_1}{\sin^2\theta_1-\lambda^2}\Big)\Big]d\theta_1 = J_1^{1,1}+J_1^{1,2}.$$

В силу того, что при достаточно больших t выполнено неравенство

$$|\cos\theta_1| \geq \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \theta_1\in\Big[0,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}\Big], \tag{3.8}$$

получим

$$|J_1^{1,1}| \leq \frac{c(\rho,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t\gg 1.$$

Очевидно, что для первого и третьего слагаемых в $J_1^{1,2}$ при достаточно больших t справедливы следующие оценки

$$|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\cos(t\sin\theta_1)}{t}\frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho,\theta)\hat{f}(\xi(\rho,\theta))\sin^{n-3}\theta_1}{\cos\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}d\theta_1| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}},$$

$$|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\cos(t\sin\theta_1)}{t}\frac{1}{\cos\theta_1}D_{\theta_1}\Big(\frac{\hat{f}(\xi(\rho,\theta))\sin^{n-3}\theta_1}{\sin^2\theta_1-\lambda^2}\Big)d\theta_1| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}.$$

Оценим второе слагаемое в $J_1^{1,2}$. Имеем

$$\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}\Big)e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\cos(t\sin\theta_1)}{t}\frac{\sin^{n-2}\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta))}{\cos^2\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}d\theta_1 = J_1^{1,2,1}+J_1^{1,2,2},$$

где $\delta>0$ - достаточно маленькое фиксированное число такое, что

$$|\cos\theta_1| \geq \frac{\frac{\pi}{2}-\theta_1}{2}, \quad \theta_1\in\Big[\frac{\pi}{2}-\delta,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}\Big]. \tag{3.9}$$

Очевидно, что

$$|J_1^{1,2,1}| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})}{t}, \quad t\gg 1.$$

По аналогии с [4, стр. 187] имеем

$$|J_1^{1,2,2}| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t\gg 1.$$

Таким образом,

$$|J_1^1| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Аналогично получаем, что

$$|J_1^3| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Учитывая, что $\lambda > 1$, имеем следующую оценку

$$|J_1^2| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Таким образом, для функции $v^1(t,x,\lambda)$ получено неравенство:

$$\max_{x\in K} |v^1(t,x,\lambda)| \le \frac{c(K,\lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1. \tag{3.10}$$

Оценим функцию $v^2(t,x,\lambda)$, по той же схеме, что и функцию $v^1(t,x,\lambda)$. Переходя к сферическим координатам (3.7) получим

$$v^2(t,x,\lambda) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi\dots\int\limits_0^{2\pi}\rho^{n-3}e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\phi(\theta_2,\dots,\theta_{n-1})$$

$$\times\cos(t\sin\theta_1)\hat f(\xi(\rho,\theta))d\theta d\rho.$$

Рассмотрим следующий интеграл при $t \gg 1$

$$J_2 = \int\limits_0^\pi e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^{n-2}\theta_1\cos(t\sin\theta_1)}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\hat f(\xi(\rho,\theta))d\theta_1$$

$$= \Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi}\Big)e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^{n-2}\theta_1\cos(t\sin\theta_1)}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\hat f(\xi(\rho,\theta))d\theta_1 = J_2^1+J_2^2+J_2^3.$$

Так как интегралы J_2^1 и J_2^3 оцениваются по одной схеме, то рассмотрим, например, J_2^1. Используя тождество

$$\cos(t\sin\theta_1) = \frac{1}{t\cos\theta_1}D_{\theta_1}\sin(t\sin\theta_1)$$

и интегрируя по частям, имеем

$$J_2^1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)t\cos\theta_1}D_{\theta_1}\sin(t\sin\theta_1)\hat f(\xi(\rho,\theta))d\theta_1$$

$$= e^{ix\xi(\rho,\theta)} \frac{\sin^{n-2}\theta_1 \sin(t\sin\theta_1)}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)t\cos\theta_1} \hat{f}(\xi(\rho,\theta))|_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

$$-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta)} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{t}\Big[\frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho,\theta)\sin^{n-2}\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta))}{\cos\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}$$

$$+\frac{\sin^{n-1}\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta))}{\cos^2\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}+\frac{1}{\cos\theta_1}D_{\theta_1}\Big(\frac{\sin^{n-2}\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta))}{\sin^2\theta_1-\lambda^2}\Big)\Big]d\theta_1 = J_2^{1,1}+J_2^{1,2}.$$

Воспользовавшись неравенством (3.8) получим, что

$$|J_2^{1,1}| \le \frac{c(\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Очевидно, что для первого и третьего слагаемых в $J_2^{1,2}$ при достаточно больших t справедливы следующие оценки

$$|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta)} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{t}\frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho,\theta)\sin^{n-2}\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta))}{\cos\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}d\theta_1| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}},$$

$$|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta)} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{t\cos\theta_1}D_{\theta_1}\Big(\frac{\sin^{n-2}\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta))}{\sin^2\theta_1-\lambda^2}\Big)d\theta_1| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}.$$

Оценим второе слагаемое в $J_2^{1,2}$. Имеем

$$\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}\Big) e^{ix\xi(\rho,\theta)} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{t}\frac{\sin^{n-1}\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta))}{\cos^2\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}d\theta_1 = J_2^{1,2,1}+J_2^{1,2,2},$$

где $\delta > 0$ — достаточно маленькое фиксированное число такое, что выполняется оценка (3.9). Очевидно, как и ранее имеем

$$|J_2^{1,2,1}| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{t}, \quad |J_2^{1,2,2}| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Следовательно,

$$|J_2^1| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Аналогично получаем, что

$$|J_2^3| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Учитывая, что $\lambda > 1$ имеем следующую оценку

$$|J_2^2| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Таким образом, для функции $v^2(t, x, \lambda)$ получено неравенство:

$$\max_{x \in K} |v^2(t, x, \lambda)| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1. \tag{3.11}$$

Следовательно, из представления (3.5) в силу неравенств (3.6), (3.10) и (3.11) вытекает оценка (2.1). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Применим к решению (3.5) задачи Коши (1.1) оператор $[\sum\limits_{i=1}^{n-1} D_{x_i}^2 - \lambda^2 \Delta]$. Тогда результат можно представить в следующем виде

$$(\sum_{i=1}^{n-1} D_{x_i}^2 - \lambda^2 \Delta) u(t, x, \lambda) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} e^{ix\xi} \frac{\lambda |\xi| \hat{f}(\xi)}{i|\xi'|} \sin\Big(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\Big) d\xi$$

$$-\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) \cos\Big(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\Big) d\xi$$

$$-\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} e^{ix\xi} \frac{|\xi| \hat{\varphi}_2(\xi)}{|\xi'|} (|\xi'|^2 - \lambda^2 |\xi|^2) \sin\Big(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\Big) d\xi$$

$$-\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} e^{ix\xi} \hat{\varphi}_1(\xi) (|\xi'|^2 - \lambda^2 |\xi|^2) \cos\Big(\frac{t|\xi'|}{|\xi|}\Big) d\xi + e^{i\lambda t} f(x).$$

Первое и третье слагаемые в правой части оцениваются по той же схеме, что $v^1(t, x, \lambda)$, а второе и четвертое слагаемые — по той же схеме, что $v^2(t, x, \lambda)$ для случая $\lambda > 1$. Поэтому, по аналогии с предыдущим, получаем оценку (2.2).

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

Список цитируемых источников

1. *Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В.* Асимптотическое поведение на бесконечности решений неоднородного уравнения Соболева // Сибирский математический журнал (принято в печать).

   Bondar L. N., Demidenko G. V. Asymptotic behavior at infinity of solutions to the inhomogeneous Sobolev equation // Siberian Mathematical Journal (accepted for printing). (in Russian)

2. *Никитенко Е. В.* Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения внутренних волн // Динамические системы. — 2017. — Т. 7(35), № 4. — С. 387–393.

   Nikitenko E. V. Asymptotic properties of solutions to the inhomogeneous equation of internal waves. Dynamical Systems, 7(35), 387-393 (2017). (in Russian)

3. *Секерж-Зенькович С. Я.* Теорема единственности и явное представление решения задачи Коши для уравнения внутренних волн // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 256, № 2. — С. 320–324.

   Sekerzh-Zen'kovich S. Ya. (1981). A uniqueness theorem and an explicit representation of the solution of the Cauchy problem for the equation of internal waves. Sov. Phys., Dokl., 26, 21–23.

4. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. — Новосибирск: Наука, 1984.

   Uspenskii S. V., Demidenko G. V., Perepelkin V. G. (1984). Imbedding theorems and applications to differential equations. Novosibirsk: Nauka. (in Russian)

Получена 26.05.2018