Динамические системы, 2018, том 8(36), №2, 127–137

УДК 517.929

Эффективные условия осцилляции решений разностных уравнений с несколькими запаздываниями[1]

К. М. Чудинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Пермь 614990. *E-mail: cyril@list.ru*

Аннотация. Рассматриваются эффективные достаточные условия осцилляции решений разностных уравнений первого порядка с последействием в виде оценки снизу нижнего предела суммы коэффициентов на заданном семействе подмножеств дискретной полуоси. Прослеживается преемственность результатов такого типа от первых эффективных условий осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием и их дискретных аналогов до новейших достижений. Выделяются наиболее эффективные подходы к задаче и сравниваются достигнутые результаты по отношению к уравнениям с различными видами запаздываний. Доказывается новый признак осцилляции и показана его независимость от известных результатов.

Ключевые слова: разностное уравнение, последействие, осцилляция, эффективные условия.

Effective conditions for the oscillation of solutions to difference equations with several delays

K. M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm 614990,
Perm State National Research University, Perm 614990.

Abstract. We consider a first-order linear difference equation with several variable delays. The subjects of our study are explicit sufficient conditions for all solutions of the equation to be oscillatory, in the form of an estimate from below for the lower limit of a sum of coefficients of the equation over a given class of subsets of the discrete semiaxis. We trace the history of results of the kind, from the first obtained in the 1940th explicit oscillation conditions for differential equations with aftereffect, and their discrete analogs obtained in the 1980th, to the best of contemporary known oscillation tests. We distinguish the most effective approaches to the problem, and compare the results achieved. We obtain a new explicit sharp oscillation test, show that it is independent of the known results, and give simple examples clarifying relationship between different oscillation conditions.

Keywords: delay difference equation, oscillation, effective test.

MSC 2010: 39A21

[1]Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (проект 1.5336.2017/8.9) при поддержке РФФИ (проект 18-01-00928).

Введение

В статье [1] А. Д. Мышкиса заложены несколько принципов исследования асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений первого порядка с последействием. Некоторые из этих принципов переоткрыты в международной печати последних нескольких десятилетий, но потенциал работы [1], по-видимому, исчерпан еще далеко не полностью. В настоящей работе разрабатывается одно из направлений, указанных в [1] — получение условий осцилляции решений уравнений с последействием в явном виде — в терминах определяющих уравнение функций. Основным объектом нашего исследования являются разностные уравнения с последействием (delay difference equations), ставшие объектом систематических исследований международного математического сообщества только в последней четверти XX в. Теория осцилляции решений таких уравнений является одним из основных направлений этих исследований. В настоящее время количество публикуемых работ, посвященных эффективным в указанном выше смысле достаточным условиям осцилляции решений разностных уравнений с последействием увеличивается с каждым годом.

Чтобы определить предмет нашего исследования, приведем следующие хорошо известные факты.

Теорема 1 ([1], [2])**.** *Пусть функции p и τ определены и непрерывны на полуоси $[0,+\infty)$, $p(t)\ge 0$, $\tau(t)\le t$, $\lim_{t\to\infty}\tau(t)\to+\infty$ и*

$$\varliminf_{t\to\infty}\int_{\tau(t)}^{t} p(s)\,ds>\frac{1}{e}.$$

Тогда все решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t)+p(t)x(\tau(t))=0,\quad t\ge 0, \tag{0.1}$$

осциллируют.

Далее для $n\in\mathbb{Z}$ полагаем $\mathbb{N}_n=\{\nu\in\mathbb{Z}\mid \nu\ge n\}$, $\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$.

Теорема 2 ([3], [4])**.** *Пусть для функций $p\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ и $\tau\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{Z}$ имеем $p(n)\ge 0$, $\tau(n)\le n-1$, $\lim_{n\to\infty}\tau(n)\to+\infty$ и*

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i)>\frac{1}{e}.$$

Тогда все решения разностного уравнения с запаздывающим аргументом

$$\Delta x(n)+p(n)x(\tau(n))=0,\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{0.2}$$

осциллируют.

Обобщения теорем 1 и 2 для уравнений с несколькими запаздываниями

$$\dot{x}(t)+\sum_{k=1}^{m}p_k(t)x(\tau_k(t))=0,\quad t\geq 0, \tag{0.3}$$

$$\Delta x(n)+\sum_{k=1}^{m}p_k(n)x(\tau_k(n))=0,\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{0.4}$$

при условии учета в равной мере всех запаздываний, встречает существенные трудности, см. [5].

В настоящей работе мы исследуем условия осцилляции решений уравнения (0.4), явно выраженные в виде оценки нижнего предела сумм коэффициентов уравнения по заданному семейству подмножеств области определения решения — дискретной полуоси.

Определим основные формальности.

Положим $b=\min\{\tau_k(i)\mid i\in\mathbb{N}_0, k=\overline{1,m}\}$. *Решением* уравнения (0.4) называется функция $x\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$, такая что для некоторой *начальной функции* $\varphi\colon\{b,\ldots,0\}\to\mathbb{R}$ при условии $x(n)=\varphi(\nu)$, $\nu=\overline{b,0}$, выполняются равенства (0.4). Очевидно, что для любой начальной функции уравнение (0.4) имеет единственное решение.

Решение $x=x(n)$ уравнения (0.4) называется *осциллирующим*, если для любого $n_0\in\mathbb{N}_0$ найдется $n_1\in\mathbb{N}_{n_0}$, такое что $x(n_0)x(n_1)\leq 0$. Назовем уравнение (0.4) *осциллирующим*, если все его решения осциллируют.

В первом разделе статьи отметим несколько важных вех недолгой истории исследований осцилляции решений разностных уравнений с последействием. Во втором разделе мы доказываем новый признак осцилляции для уравнения (0.4). Третий раздел посвящен сравнению разных подходов к исследуемым вопросам и полученных результатов.

1. Некоторые известные условия осцилляции

Рассмотрим известные условия осцилляции, применимые к разным случаям уравнения (0.4).

Пусть $p\in\mathbb{R}$ и $r\in\mathbb{N}_1$. Как хорошо известно (см., напр., [6]), уравнение

$$\Delta x(n)+px(n-r)=0,\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

является осциллирующим, если и только если

$$p>\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}. \tag{1.1}$$

Пусть теперь $p=p(n)$. Рассмотрим неулучшаемые достаточные условия осцилляции решений уравнения с одним постоянным запаздыванием

$$\Delta x(n)+p(n)x(n-r)=0,\quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{1.2}$$

Известно [6], что уравнение (1.2) является осциллирующим, если

$$\varliminf_{n\to\infty} p(n) > \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}. \tag{1.3}$$

В работе [7] было показано, что значение коэффициента $p(n)$ в неравенстве (1.3) можно заменить средним значением на промежутке длины r: уравнение (1.2) является осциллирующим, если $p_k(n) \geq 0$ и

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-r}^{n-1} p(i) > \left(\frac{r}{r+1}\right)^{r+1}.$$

Для уравнения с несколькими постоянными запаздываниями

$$\Delta x(n) + \sum_{k=1}^{m} p_k(n)x(n-r_k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

имеет место следующее обобщение последнего результата.

Теорема 3 ([8])**.** *Пусть* $p_k(n) \geq 0$ *и*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{r_k+1}{r_k}\right)^{r_k+1} \sum_{i=n+1}^{n+r_k} p_k(i) > 1.$$

Тогда уравнение (1.4) *является осциллирующим.*

Следствие 1. *Пусть* $p_k(n) \geq 0$ *и*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=n+1}^{n+r_k} p_k(i) > \frac{1}{e}. \tag{1.5}$$

Тогда уравнение (1.4) *является осциллирующим.*

Теорема 3 и следствие 1 являются дискретными аналогами полученного ранее признака осцилляции решений дифференциального уравнения с несколькими постоянными запаздываниями [9].

В связи с вышесказанным укажем следующий не привлекший к себе широкого внимания результат.

Теорема 4 ([10])**.** *Пусть* $r_k \in \mathbb{N}_1$ *и* $p_k(n) \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, *и*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{(r_k+1)^{r_k+1}}{r_k^{r_k}} p_k(n) > 1.$$

Тогда уравнение (1.4) *является осциллирующим.*

Выше указано, что в случае $m = 1$ теорема 4 очевидным образом следует из теоремы 3. Однако, как будет показано ниже, в общем случае теоремы 3 и 4 независимы.

Рассмотрим обобщения следствия 1 для уравнения (0.4) с несколькими переменными запаздываниями.

Теорема 5 ([11]). *Пусть* $p_k(n) \geq 0$, $\tau_k(n) \leq n-1$, $\tau(n) = \max\{\tau_k(n) \mid k = \overline{1,m}\}$ *и*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} \sum_{k=1}^{m} p_k(i) > \frac{1}{e}.$$

Тогда уравнение (0.4) *является осциллирующим.*

Очевидный недостаток последнего результата состоит в том, что влияние бо́льших запаздываний на наличие осцилляции не учитывается в полной мере. Для уравнений (0.4) с большими различиями запаздываний такие признаки осцилляции довольно грубы: в частности, если $\tau_k(n) \equiv n$ для некоторого k, то теорема 5 полностью теряет силу.

Опубликованное в [12] и цитируемое в нескольких последующих работах утверждение, что при условиях $p_k(n) \geq 0$, $\tau_k(n) \leq n-1$ и $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} p_k(n) > 0$ неравенство

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=\tau_k(n)}^{n-1} p_k(i) > \frac{1}{e}$$

влечет осцилляцию всех решений уравнения (0.4), является неверным — см. контрпример в [5]. Более того, упомянутые выше результаты из [8] и [9] в некоторых недавних обзорах цитируются неверно: их авторы не замечают, что если поменять нижний и верхний пределы во внутренней сумме неравенства (1.5) на $n - r_k$ и $n-1$ соответственно, то смысл утверждения изменится (хотя в случае $m = 1$ такая замена, очевидно, допустима).

Обобщение следствия 1 для уравнения с переменными запаздываниями с сохранением для каждого коэффициента p_k своего множества суммирования имеет следующий вид.

Теорема 6 ([13]). *Положим* $E_k(n) = \{i \geq n \mid \tau_k(i) \leq n-1\}$. *Пусть*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i\in E_k(n)} p_k(i) > \frac{1}{e}.$$

Тогда уравнение (0.4) *является осциллирующим.*

2. Новые условия осцилляции

Теоремы 1 и 2 и их обобщения для уравнений с несколькими запаздываниями естественно назвать *интегральными* условиями осцилляции: в основном неравенстве коэффициенты уравнения суммируются по заданному множеству аргументов. На этом пути для уравнений (0.3) и (0.4) до недавнего времени были известны только грубые результаты типа теоремы 5 и ее непрерывных аналогов.

Однако возможен другой подход. Среди известных условий осцилляции решений уравнения (0.3) особняком стоит следующий результат.

Теорема 7 ([14]). *Если $p_k(t) \geq 0$, $\tau_k(t) \leq t$, функции $r_k(t) = t - \tau_k(t)$ ограниченны и*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} p_k(t) r_k(t) > \frac{1}{e},$$

то все решения уравнения (0.3) *осциллируют.*

Это условие осцилляции можно назвать *точечным*, противопоставляя его интегральным условиям. Некоторые обобщения такого подхода на уравнения с распределенным запаздыванием имеются в работе [15].

Докажем дискретный аналог теоремы 7.

Теорема 8. *Пусть $p_k(n) \geq 0$, $\tau_k(n) \leq n-1$, функции $r_k(n) = n-\tau_k(n)$ ограниченны и*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} p_k(n) r_k(n) > \frac{1}{e}. \tag{2.1}$$

Тогда все решения уравнения (0.4) *осциллируют.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда найдутся числа $n_0 \in \mathbb{N}_0$ и $K > \frac{1}{e}$, такие что для всех $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(n) r_k(n) \geq K, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.2}$$

Предположим, что некоторое решение $x = x(n)$ уравнения (0.4) не осциллирует. Без ограничения общности положим, что $x(n) > 0$ для $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Обозначим $\xi(n) = \frac{x(n)}{x(n+1)}$. В силу уравнения (0.4), условия $p_k(n) \geq 0$ и ограниченности запаздываний можно также без ограничения общности считать, что $\xi(n) \geq 1$ для $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Покажем, что из сделанного предположения следует, что $\xi(n) \to +\infty$ при $n \to \infty$, но это свойство функции ξ противоречит условию теоремы. Приведенное ниже рассуждение является по сути очередной вариацией на тему рассуждения для дифференциального уравнения (0.1) из статьи [2], которое явилось основой доказательств многих условий осцилляции.

Из условия (2.1) получаем, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} p_k(n) = P > 0. \tag{2.3}$$

По условию теоремы найдется $R \in \mathbb{N}_1$, такое что $r_k(n) \le R$, $k = \overline{1,m}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Для $n \in \mathbb{N}_{n_0+R}$ имеем

$$\xi(n) = \left(1 - \sum_{k=1}^{m} p_k(n) \frac{x(n - r_k(n))}{x(n)}\right)^{-1} \ge \left(1 - \sum_{k=1}^{m} p_k(n)\right)^{-1},$$

следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} \xi(n) \ge (1 - P)^{-1} > 1.$$

Зафиксируем числа $c > 1$ и $n_1 \in \mathbb{N}_{n_0}$, такие что для всех $n \in \mathbb{N}_{n_1}$ имеем $\xi(n) \ge c$.

В силу уравнения (0.4) имеем

$$\frac{1}{\xi(n)} = 1 - \sum_{k=1}^{m} p_k(n) \xi(n - r_k(n)) \cdot \ldots \cdot \xi(n-1). \tag{2.4}$$

Следовательно,

$$\xi(n) \ge \left(1 - \sum_{k=1}^{m} p_k(n) c^{r_k(n)}\right)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}_{n_1+R}.$$

Учитывая, что для $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $e^\alpha \ge e\alpha$, и условие (2.2), получаем

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(n) c^{r_k(n)} = \sum_{k=1}^{m} p_k(n) e^{\ln c \cdot r_k(n)} \ge e \ln c \sum_{k=1}^{m} p_k(n) r_k(n) \ge \ln c \cdot eK,$$

откуда

$$\xi(n) \ge (1 - \ln c \cdot eK)^{-1} \ge \exp\left(\ln c \cdot eK\right) = c^{eK}, \quad n \in \mathbb{N}_{n_1+R}.$$

Таким образом, если $\xi(n) \ge c > 1$ для всех $n \in \mathbb{N}_{n_1}$, то $\xi(n) \ge c^{eK}$ для всех $n \in \mathbb{N}_{n_1+R}$, где $K > \frac{1}{e}$. Очевидно, из этого следует, что для любого $N > 0$ найдется такое $n_N \in \mathbb{N}_0$, что $\xi(n) \ge N$ для всех $n \in \mathbb{N}_N$.

Но тогда из равенства (2.4) получаем, что

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(n) \xi(n - r_k(n)) \cdot \ldots \cdot \xi(n-1) \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{m} p_k(n) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

что противоречит соотношению (2.3), следующему из условий теоремы. $\square$

3. Сравнение подходов и результатов

Покажем, что ни одна из теорем 6 и 8 не является следствием другой, более того, ни одна из теорем 3 и 4 — сужений теорем 6 и 8 соответственно на случай постоянных запаздываний — не является следствием другой. Для этого рассмотрим уравнение

$$\Delta x(n) + p_1(n)x(n-1) + p_2(n)x(n-2) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.1}$$

Пример 1. Положим $r_1(n) \equiv r_1 = 1$, $r_2(n) \equiv r_2 = 2$,

$$p_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{e}, & n = 2\nu; \\ \frac{1}{5e}, & n = 2\nu+1; \end{cases} \qquad p_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{10e}, & n = 2\nu; \\ \frac{1}{2e}, & n = 2\nu+1; \end{cases} \qquad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Имеем

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2} p_k(n) r_k(n) = \min\left(\frac{1}{e}\cdot 1 + \frac{1}{10e}\cdot 2, \frac{1}{5e}\cdot 1 + \frac{1}{2e}\cdot 2\right) = \frac{6}{5e} > \frac{1}{e};$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=n+1}^{n+r_k} p_k(n) = \min\left(\frac{1}{e}(10+1+5), \frac{1}{e}(5+2+1)\right) = \frac{4}{5e} < \frac{1}{e}.$$

Таким образом, по теореме 8 уравнение (3.1) является осциллирующим, но теорема 6 не позволяет установить это.

Пример 2. Положим

$$p_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{10e}, & n = 3\nu; \\ \frac{1}{e}, & n = 3\nu+1; \\ \frac{1}{10e}, & n = 3\nu+2; \end{cases} \qquad p_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{e}, & n = 3\nu; \\ \frac{1}{10e}, & n = 3\nu+1; \\ \frac{1}{10e}, & n = 3\nu+2; \end{cases} \qquad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Имеем

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2} p_k(n) r_k(n) = \min\left(\frac{1}{10e} + \frac{1}{e}\cdot 2, \frac{1}{e} + \frac{1}{10e}\cdot 2, \frac{1}{10e} + \frac{1}{10e}\cdot 2\right) = \frac{3}{10e} < \frac{1}{e};$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=n+1}^{n+r_k} p_k(n) = \min\left(\frac{1+10+1}{10e}, \frac{10+1+1}{10e}, \frac{1+1+10}{10e}\right) = \frac{6}{5e} > \frac{1}{e}.$$

Таким образом, по теореме 6 уравнение (3.1) является осциллирующим, но теорема 8 не позволяет установить это.

Обратим внимание еще на одну идею получения условий осцилляции в терминах параметров уравнения. В работах [16], [17], [18] для интегральных условий осцилляции уравнений (0.3) и (0.4) в виде не нижнего, как в настоящей работе, а верхнего предела интеграла или суммы коэффициентов успешно применен итерационный подход: строится последовательность оценок коэффициентов уравнения, такая что каждая из оценок уточняет предыдущую; если некоторая итерация дает справедливое неравенство, то уравнение является осциллирующим. Обзор достижений в этом направлении по отношению к уравнению (0.4) и некоторые новые результаты см. в работе [19].

В нескольких работах последних трех лет предприняты попытки применить итерационный подход для получения интегральных условий осцилляции в виде оценки нижнего предела функции от коэффициентов. Так, в работе [20] предлагается уточнить теорему 2, сделав первый шаг последовательности итераций; именно, утверждается, что если $p(n) \geq 0$, $\delta(n) = \max\{\tau(i) \mid i = \overline{0,n}\}$ и

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{i=\delta(n)}^{n-1} p(i) \prod_{j=\tau(j)}^{\delta(n)-1} \frac{1}{1-p(j)} > \frac{1}{e},$$

то уравнение (0.2) является осциллирующим. Следующий пример показывает, что это утверждение неверно.

Пример 3. Уравнение

$$\Delta x(n) + \frac{4}{27} x(n-2) = 0$$

по критерию (1.1) не является осциллирующим, однако

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-2}^{n-1} p(i) \prod_{j=i-2}^{n-3} \frac{1}{1-4/27} = \frac{4}{27}\left(\left(\frac{27}{23}\right)^2 + \frac{27}{23}\right) = \frac{200}{529} > \frac{1}{e}.$$

Аналогичная ошибка по отношению к уравнению (0.3) совершена в статье [21] (последовательность итераций предъявлена полностью). Возможность исправить ошибку рассмотрена в работе [22]. Ограничимся здесь выводами по отношению к уравнению (0.4), аналогичными некоторым из выводов, сделанных в [22] для уравнения (0.3).

Справедливо следующее утверждение. Положим $\rho(n) = \min\{r_k(i) \mid i = \overline{0,n}, k = \overline{1,m}\}$. Пусть $p_k(n) \geq 0$ и $\sum_{k=1}^m p_k(n) < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$ (если последнее неравенство нарушается для сколь угодно больших n, то уравнение (0.4) является осциллирующим) и

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-\rho(n)}^{n-1} \sum_{k=1}^{m} p_k(i) \frac{1}{\prod_{l=n-r_k(i)}^{n-\rho(i)-1} (1 - \sum_{k=1}^m p_j(l))} > \frac{1}{e}.$$

Тогда уравнение (0.4) является осциллирующим.

Это первая итерация уточнения теоремы 5, последовательность итераций может быть продолжена. Таким образом, итерационный подход к признакам осцилляции в виде оценки нижнего предела в принципе применим. Однако на момент написания данной работы автору неизвестно, существуют ли уравнения вида (0.4), для которых применение итерационного уточнения теоремы 5 дает лучшие результаты, чем применение как теоремы 6, так и теоремы 8.

Список цитируемых источников

1. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Матем. сб. — 1951. — Т.28(70), №3. — С. 641–658.
2. *Коплатадзе, Р. Г., Чантурия Т. А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравн. — 1982. — Т.18, №8. — С. 1463–1465.
3. *Zhang, B. G., Tian, C. J.* Nonexistence and existence of positive solutions for difference equations with unbounded delay // Comput. Math. Appl. — 1998. — V.36, No.1. — P. 1–8.
4. *Chatzarakis, G. E., Koplatadze, R., Stavroulakis, I. P.* Optimal oscillation criteria for the first order difference equations with delay argument // Pacific J. Math. — 2008. — V.235. — P. 15–33.
5. *Чудинов, К. М.* О точных достаточных признаках осцилляции решений линейных дифференциальных и разностных уравнений первого порядка // Изв. вузов. Матем. — 2018. — №5. — С. 93–98.
6. *Erbe, L. H., Zhang, B. G.* Oscillation of discrete analogues of delay equations // Differential Integral Equations. — 1989. — V.2, No.3. — P. 300–309.
7. *Ladas, G., Philos, Ch. G., Sficas, Y. G.* Sharp conditions for the oscillation of delay difference equations // J. Appl. Math. Simulation. — 1989. — V.2. — P. 101–11.
8. *Tang, X. H., Yu, J. S.* Oscillation of difference equations // Comp. Math. Appl. — 1999. — V.37. — P. 11–20.
9. *Li, B.* Oscillation of first order delay differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — V.124, No.12. — P. 3729–3737.
10. *Tang Q. G., Deng Y. B.* Oscillation of difference equations with several delays // Hunan Daxue Xuebao. — 1998. — V.25, No.2. — P. 1–3. (Chinese)
11. *Berezansky, L., Braverman, E.* On existence of positive solutions for linear difference equations with several delays // Adv. Dyn. Syst. Appl. — 2006. — V.1, No.1. — P. 29–47.
12. *Chatzarakis, G. E., Pinelas S., Stavroulakis, I. P.* Oscillations of difference equations with several deviated arguments // Aequationes Math. — 2014. — V.88, No. 1-2. — P. 105–123.
13. *Chudinov, K.M.* Sharp explicit oscillation conditions for difference equations with several delays // Georgian Math. J. — 2018. — In print.
14. *Hunt, B. R., Yorke, J. A.* When all solutions of $x' = \sum q_i(t)x(t - T_i(t))$ oscillate // J. Differential Equations. — 1984. — V.53. — P. 139–145.
15. *Berezansky, L., Braverman, E.* On oscillation of equations with distributed delay // Z. Anal. Anwend. — 2001. — V.20, No.2. — P. 489–504.
16. *Koplatadze, R., Kvinikadze, G.* On the oscillation of solutions of first-order delay differential inequalities and equations // Georgian Math. J. — 1994. — V.1. — P. 675–685.
17. *Braverman E., Karpuz, B.* On oscillation of differential and difference equations with non-monotone delays // Appl. Math. Comput. — 2011. — V.218, No. 7. — P. 3880–3887.
18. *Braverman E., Chatzarakis, G. E., Stavroulakis, I. P.* Iterative oscillation tests for difference equations with several non-monotone arguments // J. Difference Equ. Appl. — 2015. — V.21, No. 9. — P. 854–874.

19. *Чудинов, К. М.* О новых подходах к получению условий осцилляции решений разностных уравнений с последействием // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения. — Пермь: Изд-во Пермск. национальн. исслед. политехнич. ун-та, 2018. — С. 277–286.
20. *Chatzarakis, G. E., Öcalan, Ö.* Oscillations of difference equations with non-monotone arguments // Appl. Math. Comput. — 2015. — V.258. — P. 60–66.
21. *Braverman E., Chatzarakis, G. E., Stavroulakis, I. P.* Iterative oscillation tests for differential equations with several non-monotone arguments // Adv. Difference Equ. — 2016. — 2016:87. — 18 p. — DOI 10.1186/s13662-016-0817-3
22. *Чудинов, К. М., Малыгина, В. В.* Об осцилляции линейных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями // Вестник Пермск. ун-та. Математика. Механика. Информатика. — 2017. — Вып. 4(39). — С. 11–18.

Получена 15.05.2018