Динамические системы, 2018, том 8(36), №2, 103–126

УДК 517.958

О малых движениях гидросистемы из трёх несмешивающихся жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд[1]

Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: kopachevsky@list.ru*

Аннотация. В данной работе изучается проблема малых движений гидросистемы "вязкоупругая жидкость-идеальная жидкость-идеальная жидкость", заполняющих неподвижный сосуд. Методы, развитые в предыдущих работах авторов, посвящённых исследованию проблем малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости, а также систем идеальных жидкостей, позволяют получить результаты о разрешимости начально-краевой задачи для исследуемой проблемы.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, идеальная жидкость, гидродинамическая система, ортопроектор, операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши.

Small movements of partially dissipative hydrosystem in stationary containers

N. D. Kopachevsky, E. V. Syomkina
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In the paper, we consider a problem on small motions of a system of viscoelastic and two ideal fluids in a stationary container. One of models of such viscoelastic fluid is Oldroid's model. It is described, for example, in the book Eirich, F. R. Rheology. Theory and Applications. New York: Academic Press, 1956. It should be noted that the present paper based on the previous N. D. Kopachevsky works together with Azizov, T. Ya., Orlova L. D., Krein, S. G. Namely, problem on small movements of one viscoelastic fluid for generalized Oldroid's model, small motions of a viscoelastic fluid in an open container, oscillations of a system of ideal fluids were investigated in these papers. The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to develop new approach and to prove the theorem on strong solvability for initial-boundary-value problem generated by a problem of small motions of a system of viscoelastic and two ideal fluids in an immovable container. This paper is organized as follows. In section 1 we formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance. In section 2 we choose the functional spaces generated by the problem for each fluid. For applying of method of orthogonal projection we need to choose orthogonal decomposition of corresponding spaces. After projection we get new statement of the problem without some trivial equations. Important part of section 2 is formulation

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (16-11-10125 "Операторные уравнения в функциональных пространствах и приложения к нелинейному анализу", выполняемого в Воронежском госуниверситете).

of auxiliary problems which help us to make transition to the the Cauchy problem for the system of integro-differential equation in some Hilbert space. In section 3 we reduce this problem to a system of differential equation. This system can be rewrite as operator differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operators of this problem are studied in section 3 too. Section 4 is devoted to the existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial-boundary-value problem. This result based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in section 4 we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem. This means that external forces equal to zero and dependence by time for the unknown function has the form $e^{-\lambda t}$. Here we obtain the spectral problem for operator pencil. This pencil has similar properties like pencil associated with spectral problem generated by the problem on normal oscillations of a system of viscoelastic and ideal fluids.
Keywords: viscoelastic fluid, ideal fluid, hydrodynamic system, orthogonal projector, operator differential equation, Cauchy problem

MSC 2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

Введение

В этой работе изучается задача о малых движениях системы из трёх тяжёлых несмешивающихся однородных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя жидкость считается вязкоупругой, а остальные две идеальными. Случай, когда сосуд полностью заполнен системой из двух жидкостей, одна из которых является вязкоупругой, а другая идеальной, рассмотрен в работе [4]. В данной работе предполагается, что вязкоупругая жидкость удовлетворяет обобщённой модели Олдройта (см. [7],[8]). Вариант, когда неподвижный сосуд заполнен системой из двух вязкоупругих жидкостей, изучен в [2], а случай полного заполнения сосуда одной вязкоупругой жидкостью — в [10].

1. Постановка задачи. Закон баланса полной энергии системы

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим неподвижный сосуд Ω, полностью заполненный системой из трёх несмешивающихся жидкостей. Жидкости предполагаются тяжёлыми, и в силу этого действие капиллярных сил в этой задаче не учитывается. Область Ω_1, нижняя по отношению к действию силы тяжести, заполнена несжимаемой вязкоупругой жидкостью обобщённой модели Олдройта (см., например, [7, 8, 11, 14]). В этой модели связь между тензором вязких напряжений и удвоенным тензором скоростей деформаций в вязкоупругой жидкости описывается не простейшим законом Гука, а линейным дифференциальным соотношением, где фигурируют производные порядка $m \geq 1$ по времени как у тензора вязких напряжений, так и у тензора скоростей деформаций. Далее, ρ_1, μ_1 — соответственно плотность и динамический коэффициент вязкости вязкоупругой жидкости. Области Ω_2 и Ω_3 заполнены идеальными несжимаемыми жидкостями с плотностями ρ_2 и ρ_3.

Обозначим через $\vec{n}_k$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_k$ и направленный вне Ω_k $(k = \overline{1,3})$. Через S_k обозначим часть стенки сосуда, граничащей с областью

Ω_k $(k = \overline{1,3})$. Горизонтальную границу раздела между вязкоупругой и идеальной жидкостями в состоянии равновесия обозначим через Γ_1, а между идеальными жидкостями — через Γ_2. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$, жёстко связанную с сосудом, таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена против действия силы тяжести. Тогда ускорение гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$, а в состоянии покоя поля давлений в жидкостях выражаются по законам

$$P_{0,k}(x_3) = c_k - \rho_k g x_3, \quad k = \overline{1,3}, \tag{1.1}$$

где константы c_k определяются из условия равенства давлений на границах раздела Γ_j, $j = 1, 2$, при $x_3 = 0$.

Теперь перейдём к уравнениям, описывающим движение гидросистемы. Обозначим через $\vec{u}_k$ поля скоростей жидкостей в Ω_k $(k = \overline{1,3})$, а через $p_k(t,x)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений (см.(1.1)). Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$, $x \in \Omega$.

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид (см., например, [13, 14]):

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \mu_1 \triangle \vec{v}_1 + \rho_1 \vec{f}_1(t,x), \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{1.2}$$

$$\vec{v}_1(t,x) = \vec{u}_1(t,x) + \sum_{r=1}^{m} \alpha_r \int\limits_0^t e^{-\beta_r(t-s)} \vec{u}_1(s,x)\,ds =: I_{0,1}(t)\vec{u}_1, \tag{1.3}$$

$$\rho_l \frac{\partial \vec{u}_l}{\partial t} = -\nabla p_l + \rho_l \vec{f}_l(t,x), \quad \operatorname{div} \vec{u}_l = 0 \quad (\text{в } \Omega_l), \quad l = 2,3, \tag{1.4}$$

где $\alpha_r \geq 0$, $\beta_r > 0$, $r = \overline{1,m}$, — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкости обобщённой модели Олдройта, $\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{x \in \Omega_k}$, $k = \overline{1,3}$, а $\triangle$ — трёхмерный оператор Лапласа.

Для вязкоупругой жидкости, как известно, на твёрдой стенке S_1 сосуда должно выполняться условие прилипания, т.е.

$$\vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \tag{1.5}$$

а для идеальных на поверхностях S_l, $l = 2, 3$, — условия непротекания

$$\vec{u}_l \cdot \vec{n}_l = 0 \quad (\text{на } S_l), \quad l = 2,3. \tag{1.6}$$

Будем описывать малые перемещения границ раздела между жидкостями с помощью функций вертикального отклонения

$$x_3 = \zeta_j(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_j, \quad j = 1,2. \tag{1.7}$$

Тогда на Γ_j, $j=1,2$, должны выполняться кинематические условия

$$\frac{\partial\zeta_j}{\partial t}=\vec{u}_j\cdot\vec{n}_j=:\gamma_{n,j}\vec{u}_j=-\vec{u}_{j+1}\cdot\vec{n}_{j+1}=:-\gamma_{n,j+1}\vec{u}_{j+1},\quad \vec{n}_j=\vec{e}_3=-\vec{n}_{j+1},\quad j=1,2, \tag{1.8}$$

а символом $\gamma_{n,j}$, $j=1,2$, обозначена операция взятия нормального следа на Γ_j, т.е. следа нормальной компоненты поля скорости. Заметим ещё, что из условия сохранения объёма каждой из жидкостей имеем интегральные связи

$$\int\limits_{\Gamma_j}\zeta_j d\Gamma_j=0,\quad j=1,2. \tag{1.9}$$

Сформулируем теперь динамические условия на Γ_j, $j=1,2$. Они состоят в том, что на движущейся границе раздела векторное поле напряжений при переходе от одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на Γ_j приводят к следующим соотношениям: на Γ_j касательные напряжения (т.е. вдоль Γ_j) изменяются непрерывно, а нормальные напряжения (т.е. вдоль оси Ox_3) компенсируются гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{aligned}\mu_1\tau_{q3}(\vec{v}_1)&=0,\quad q=1,2;\\ [-p_1+\mu_1\tau_{33}(\vec{v}_1)]-[-p_2]&=-g(\rho_1-\rho_2)\zeta_1\quad (\text{на } \Gamma_1),\\ p_2-p_3&=g(\rho_2-\rho_3)\zeta_2\quad (\text{на } \Gamma_2).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь $\tau_{qr}(\vec{u}):=\dfrac{\partial u_q}{\partial x_r}+\dfrac{\partial u_r}{\partial x_q}$ $(q,r=1,2,3)$ — удвоенный тензор скоростей деформаций.

Наконец, для искомых функций $\vec{u}_k(t,x)$, $k=\overline{1,3}$, и $\zeta_j(t,x_1,x_2)$, $j=1,2$, необходимо ещё задать начальные условия:

$$\begin{aligned}&\vec{u}_k(0,x)=\vec{u}_k^0(x),\quad x\in\Omega_k,\quad \vec{u}_j^0\cdot\vec{n}_j\equiv-\vec{u}_{j+1}^0\cdot\vec{n}_{j+1},\quad x\in\Gamma_j,\quad k=\overline{1,3},\quad j=1,2,\\ &\zeta_j(0,x)=\zeta_j^0(x),\quad x\in\Gamma_j,\quad j=1,2.\end{aligned} \tag{1.11}$$

1.2. Закон баланса полной энергии

Будем считать, что задача (1.2)-(1.11) имеет классической решение, и выведем закон баланса полной энергии гидросистемы. Предварительно выпишем формулы Грина для векторных полей скоростей в областях Ω_k, $k=\overline{1,3}$. Для дважды непрерывно дифференцируемых полей они имеют следующий вид:

$$\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{u}_1) := \frac{1}{2}\mu_1 \int\limits_{\Omega_1} \left(\sum_{q,r=1}^{3} \tau_{qr}(\vec{\eta}_1)\overline{\tau_{qr}(\vec{u}_1)} \right) d\Omega_1 =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} \vec{\eta}_1 \cdot \overline{(-\mu_1 \triangle \vec{u}_1 + \nabla p_1)} d\Omega_1 + \int\limits_{\Gamma_1} \sum_{q=1}^{3} \eta_{1,q} \overline{(\mu_1 \tau_{q,3}(\vec{u}_1) - p_1 \delta_{q3})} d\Gamma_1, \tag{1.12}$$

$$\mathrm{div}\vec{\eta}_1 = \mathrm{div}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{\eta}_1 = \vec{u}_1 \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad \vec{\eta}_1 = \sum_{q=1}^{3} \eta_{1,q}\vec{e}_q,$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \vec{\eta}_2 \cdot \overline{\nabla p_2} d\Omega_2 = -\int\limits_{\Gamma_1} \eta_{2,3}\overline{p_2} d\Gamma_1 + \int\limits_{\Gamma_2} \eta_{2,3}\overline{p_2} d\Gamma_2,$$

$$\int\limits_{\Omega_3} \vec{\eta}_3 \cdot \overline{\nabla p_3} d\Omega_3 = -\int\limits_{\Gamma_2} \eta_{3,3}\overline{p_3} d\Gamma_2, \tag{1.13}$$

$$\mathrm{div}\vec{\eta}_l = \mathrm{div}\vec{u}_l = 0 \quad (\text{в } \Omega_l), \quad \vec{\eta}_l \cdot \vec{\eta}_l = \vec{u}_l \cdot \vec{\eta}_l \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_l), \quad l = 2, 3.$$

(В этих формулах учтено, что направление внешних нормалей на Γ_j, $j = 1, 2$, для областей Ω_k, $k = \overline{1, 3}$, будет $\vec{n}_j = \vec{e}_3 = -\vec{n}_{j+1}$, $j = 1, 2$.)

Умножим обе части (1.2) и (1.4) слева на $\vec{u}_k$, $k = \overline{1, 3}$, проинтегрируем по Ω_k соответственно и сложим результаты; будем иметь (для вещественнозначных полей):

$$\sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} d\Omega_k = -\sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \nabla p_k d\Omega_k + \mu_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{u}_1 \cdot (\triangle \vec{v}_1) d\Omega_1 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k.$$

Используя формулы Грина (1.12), (1.13), а также граничные условия задачи (1.2)-(1.11), отсюда получаем соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_k \right\} = -\mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_1} \sum_{q=1}^{3} u_{1,q} \left(\mu_1 \tau_{q3}(\vec{u}_1) - (p_1 - p_2)\delta_{q3} \right) d\Gamma_1 + \int\limits_{\Gamma_2} u_{2,3} \left(p_3 - p_2 \right)) d\Gamma_2.$$

Учитывая ещё соотношения (1.9) и (1.10), окончательно приходим к выводу, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\vec{u}_k|^2\,d\Omega_k+g(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}|\zeta_1|^2\,d\Gamma_1+g(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}|\zeta_2|^2\,d\Gamma_2\right\}= \\ -\mu_1E_1(\vec{u}_1,\vec{v}_1)+\sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{u}_k\cdot\vec{f}_k d\Omega_k. \tag{1.14}$$

Это тождество есть закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Здесь в фигурных скобках стоит удвоенная полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия гидросистемы, а справа — мощность диссипативных вязкоупругих сил и мощность дополнительных внешних сил, действующих на систему. После интегрирования (1.14) по t в пределах от 0 до t получаем закон баланса полной энергии в интегральной форме, т.е. на произвольном отрезке времени $(0,t)$.

2. Метод ортогонального проектирования. Переход к системе операторных уравнений

2.1. Проектирование уравнений Эйлера

Воспользуемся далее разложением пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_l)$ в ортогональную сумму (см. [3, с.113]):

$$\vec{L}_2(\Omega_l)=\vec{J}_0(\Omega_l)\oplus\vec{G}_{h,S_l}(\Omega_l)\oplus\vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}_l}(\Omega_l),\quad l=2,3,$$

$$\vec{J}_0(\Omega_l):=\{\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega_l):\ \mathrm{div}\vec{u}=0\ (\text{в }\Omega_l),\quad u_n=0\ (\text{на }\partial\Omega_l)\},$$

$$\vec{G}_{h,S_l}(\Omega_l):=\{\vec{v}=\nabla\varphi\in\vec{L}_2(\Omega_l):\ \triangle\varphi=0\ (\text{в }\Omega_l),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=0\ (\text{на }S_l)\},$$

$$\vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}_l}(\Omega_l):=\{\vec{w}=\nabla\psi\in\vec{L}_2(\Omega_l):\ \triangle\psi=0\ (\text{в }\Omega_l),\quad \psi=0\ (\text{на }\widetilde{\Gamma}_l)\}.$$

Здесь $\widetilde{\Gamma}_2:=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, $\widetilde{\Gamma}_3:=\Gamma_2$.

Введём ортопроекторы на соответствующие подпространства: $P_{0,l}$, P_{h,S_l}, $P_{02,\widetilde{\Gamma}_l}$, $l=2,3$.

Основываясь на разложении (2.1), применим метод ортогонального проектирования к уравнениям движения начально-краевой задачи (1.2)-(1.11). В силу условия соленоидальности, условия непротекания на твёрдых стенках S_l и условия сохранения объёма на свободных границах Γ_j, $j=1,2$, (так как жидкости несжимаемы) считаем, что

$$\vec{u}_l\in\vec{J}_0(\Omega_l)\oplus\vec{G}_{h,S_l}(\Omega_l)=:\vec{J}_{0,S_l}(\Omega_l),\quad l=2,3. \tag{2.1}$$

Поля ∇p_l, $l=2,3$, потенциальны и поэтому

$$\nabla p_l \in \vec{G}(\Omega_l) = \vec{G}_{h,S_l}(\Omega_l) \oplus \vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}_l}(\Omega_l), \quad l=2,3.$$

Представим поля $\vec{u}_l$ и ∇p_l, $l=2,3$, в виде:

$$\vec{u}_l = \vec{w}_l + \nabla\Phi_l, \quad \vec{w}_l \in \vec{J}_0(\Omega_l), \quad \nabla\Phi_l \in \vec{G}_{h,S_l}(\Omega_l), \quad l=2,3; \tag{2.2}$$

$$\nabla p_l = \nabla\tilde{p}_l + \nabla\varphi_l, \quad \nabla\tilde{p}_l \in \vec{G}_{h,S_l}(\Omega_l), \quad \nabla\varphi_l \in \vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}_l}(\Omega_l), \quad l=2,3. \tag{2.3}$$

Подставим эти представления в уравнения (1.4) для идеальных жидкостей и применим к ним ортопроекторы, отвечающие разложению (2.1). Получим:

$$\frac{\partial\vec{w}_l}{\partial t} = P_{0,l}\vec{f}_l \quad (\text{в } \Omega_l), \quad l=2,3, \tag{2.4}$$

$$\rho_l\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi_l = -\nabla\tilde{p}_l + \rho_l P_{h,S_l}\vec{f}_l \quad (\text{в } \Omega_l), \quad l=2,3, \tag{2.5}$$

$$\nabla\varphi_l = \rho_l P_{0,\widetilde{\Gamma}_l}\vec{f}_l \quad (\text{в } \Omega_l), \quad l=2,3. \tag{2.6}$$

Из (2.4), с учётом начальных условий (1.11), сразу получаем

$$\vec{w}_l(t,x) = \int\limits_0^t P_{0,l}\vec{f}_l(\tau,x)\mathrm{d}\tau + P_{0,l}\vec{u}_l^0, \quad l=2,3.$$

Члены в уравнении (2.6) — это составляющие градиентов давлений в подпространстве $\vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}_l}(\Omega_l)$, $l=2,3$. Потенциал этого поля φ_l обращается в нуль на $\widetilde{\Gamma}_l$ и поэтому в граничных условиях не участвует. Далее соотношения (2.6) не рассматриваем.

Условимся называть решения уравнений (2.4), а также составляющие градиентов давлений из (2.6) — тривиальными решениями. Итак, основные уравнения, которые будем рассматривать для идеальных жидкостей, это уравнения (2.5).

2.2. Проектирование уравнения Навье-Стокса

Для области Ω_1 введём аналогичное разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_1)$ в ортогональную сумму (см. [3]):

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \quad \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1).$$

Введём ортопроекторы P_{0,S_1} и P_{01,Γ_1} на подпространства $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$ соответственно. В силу условия соленоидальности и условия прилипания на S_1 для $\vec{u}_1$ считаем, что поле $\vec{u}_1$ принадлежит пространству векторных полей с конечной скоростью диссипации энергии в жидкости:

$$\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) := \Big\{\vec{u}_1 \in \vec{H}^1(\Omega_1) : \mathrm{div}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1)\Big\} \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Здесь скалярное произведение определяется по формуле (см. (1.12))

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1)_{\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)} := E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_1}\left(\sum_{q,r=1}^{3}\tau_{qr}(\vec{u}_1)\overline{\tau_{qr}(\vec{v}_1)}\right)d\Omega_1.$$

Отметим, что $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ плотно вложено в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Подействуем введёнными операторами P_{0,S_1} и P_{01,Γ_1} на обе части уравнения для вязкоупругой жидкости (1.2), получим:

$$\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla\tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1 + \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{2.7}$$

$$-\mu_1 P_{01,\Gamma_1}\triangle\vec{v}_1 + P_{01,\Gamma_1}\nabla p_1 = \rho_1 P_{01,\Gamma_1}\vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1).$$

Здесь через $\nabla\tilde{p}_1$ обозначено поле $P_{0,S_1}\nabla p_1 =: \nabla\tilde{p}_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ в силу разложения пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$. Потенциал поля $P_{01,\Gamma_1}\nabla p_1$ в граничных условиях не участвует, так как обращается в нуль на Γ_1. Поэтому для вязкоупругой жидкости рассматриваем только уравнение (2.7).

2.3. Формулировка задачи после отделения тривиальных решений

Заметим, что в силу представлений (2.2) полей $\vec{u}_l$, $l = 2,3$, кинематические условия (1.8) можно записать в виде

$$\frac{\partial\zeta_j}{\partial t} = \gamma_{n,j}\vec{u}_j = \frac{\partial\Phi_{j+1}}{\partial n_j} \quad (\text{на } \Gamma_j), \quad j = 1,2.$$

В свою очередь динамические условия (1.10) в силу представлений (2.3) для ∇p_l, $l = 2,3$, примут вид

$$\begin{aligned} \mu_1\tau_{q3}(\vec{v}_1) = 0, \quad q = 1,2 \quad (\text{на } \Gamma_1),\\ [-\tilde{p}_1 + \mu_1\tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-\tilde{p}_2] = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1),\\ [\tilde{p}_2 - \tilde{p}_3] = g(\rho_2 - \rho_3)\zeta_2 \quad (\text{на } \Gamma_2). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Введём ещё ортопроекторы θ_j на $L_{2,\Gamma_j} := L_2(\Gamma_j) \ominus \{1_{\Gamma_j}\}$, $j = 1,2$. Тогда итогом проведенных выше преобразований является следующая

Теорема 1. *Пусть* $\vec{u}_k$, ∇p_k, $k = \overline{1,3}$, ζ_j, $j = 1,2$, *— классическое решение начально-краевой задачи* (1.2)-(1.11), *тогда функции* $\vec{u}_1$, $\nabla\tilde{p}_1$, $\nabla\Phi_l$, $\nabla\tilde{p}_l$, $l = 2,3$, ζ_j, $j = 1,2$, *являются решением следующей начально-краевой задачи:*

$$\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla\tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1 + \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{2.9}$$

$$\operatorname{div}\vec{u}_1 = 0 \quad (\textit{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \tag{2.10}$$

$$\rho_l\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi_l + \nabla\tilde{p}_l = \rho_l P_{h,S_l}\vec{f}_l \quad (\text{в } \Omega_l), \quad l = 2,3, \tag{2.11}$$

$$\triangle\Phi_l = 0 \text{ (в } \Omega_l), \quad \frac{\partial\Phi_l}{\partial n_l} = 0 \text{ (на } S_l) \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial\Phi_l}{\partial n_l} = -\frac{\partial\zeta_{l-1}}{\partial t} = -\gamma_{n,l-1}\vec{u}_{l-1} \text{ (на } \Gamma_{l-1}),\ l = 2, 3. \tag{2.13}$$

$$\begin{gathered} \mu_1\tau_{q3}(\vec{v}_1) = 0, \quad q = 1, 2 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ [-\theta_1\tilde{p}_1 + \mu_1\tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-\theta_1\tilde{p}_2] = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta_1 \text{ (на } \Gamma_1), \\ [\theta_2\tilde{p}_2 - \theta_2\tilde{p}_3] = g(\rho_2 - \rho_3)\zeta_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \end{gathered} \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered} \vec{u}_1(0, x) = P_{0,S_1}\vec{u}_1^0(x) = \vec{u}_1^0(x), \quad x \in \Omega_1, \quad \nabla\Phi_l(0, x) = P_{h,S_l}\vec{u}_l^0(x), \quad x \in \Omega_l, \quad l = 2, 3 \\ \zeta_j(0, x) = \zeta_j^0(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Замечание 1. Отметим, что введение ортопроекторов θ_j, $j = 1, 2$, обусловлено стремлением избежать произвола в нормировке на границах Γ_1 и Γ_2 для функций $\tilde{p}_2$. Действительно, в динамических условиях (2.8) функции $\zeta_j \in L_{2,\Gamma_j}$, $j = 1, 2$, $\tau_{33}(\vec{v}_1) \in L_{2,\Gamma_1}$ (см.[3, с.114]), откуда следует, что

$$\int\limits_{\Gamma_1} (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)\mathrm{d}\Gamma_1 = 0, \qquad \int\limits_{\Gamma_2} (\tilde{p}_2 - \tilde{p}_3)\mathrm{d}\Gamma_2 = 0.$$

Из определения ортопроекторов θ_j, $j = 1, 2$, следует, что $\tilde{p}_1 = \theta_1\tilde{p}_1 + c_1$, $\tilde{p}_3 = \theta_2\tilde{p}_3 + c_3$. Константы c_1, c_3 позволяют ввести однозначную нормировку для $\tilde{p}_2$ на границах Γ_1 и Γ_2:

$$c_1 = \frac{1}{|\Gamma_1|}\int\limits_{\Gamma_1} \tilde{p}_2\mathrm{d}\Gamma_1, \quad c_3 = \frac{1}{|\Gamma_2|}\int\limits_{\Gamma_2} \tilde{p}_2\mathrm{d}\Gamma_2.$$

2.4. Вспомогательные краевые задачи и их операторы

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Вспомогательная задача I.

$$-P_{0,S_1}\triangle\vec{u} + \mu^{-1}\nabla p = \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_1) \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S_1),$$

$$\mu_1\tau_{q3}(\vec{u}) = 0, \quad q = 1, 2, \quad -p + \mu\tau_{33}(\vec{u}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1).$$

Это так называемая первая вспомогательная задача С.Г. Крейна (см. [3, с.116]). Она имеет единственное обобщённое решение $\vec{u} = A_1^{-1}\vec{f}$ для любого вектора $\vec{f}$ из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Область определения $\mathcal{D}(A_1)$ оператора A_1 плотна в пространстве $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$, а $\mathcal{D}(A_1^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$. Оператор A_1^{-1} является положительным и компактным в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$.

Вспомогательная задача II.

$$\triangle p = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial p}{\partial n_1} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad p = \tau_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \int\limits_{\Gamma_1} \tau_1 \mathrm{d}\Gamma_1 = 0.$$

Это — известная задача Зарембы для уравнения Лапласа. Она имеет единственное решение (см. [3, с.45]) $p = G_1\tau_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$ при $\tau_1 \in H^{1/2}_{\Gamma_1}$,

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) := \{\varphi \in H^1(\Omega_1) : \int\limits_{\Gamma_1} \varphi \mathrm{d}\Gamma_1 = 0\}, \quad ||\varphi||^2_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)} := \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\varphi|^2 \mathrm{d}\Omega_1.$$

(Определение пространств $H^{1/2}_{\partial\Omega}$, $H^{-1/2}_{\partial\Omega}$ для областей Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$, а также соответствующие теоремы вложения и продолжения с границы см. в работе Gagliardo E. [12]).

Вспомогательная задача III.

$$\triangle \Phi = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_3} = 0 \quad (\text{на } S_3), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_3} = \psi_3 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \int\limits_{\Gamma_2} \Phi \mathrm{d}\Gamma_2 = \int\limits_{\Gamma_2} \psi_3 \mathrm{d}\Gamma_2 = 0.$$

Это задача Неймана для уравнения Лапласа. Если $\psi_3 \in \tilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_2}$, то задача имеет единственное решение $\Phi = V_3\psi_3 \in H^1_{\Gamma_2}(\Omega_3)$. Здесь символом $\tilde{}$ обозначен класс функций из $H^{-1/2}_{\Gamma_2}$, продолжимых нулём на всю границу $\partial\Omega_3$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_3)$ (см. [1, 9]). Введём по решению задачи III оператор:

$$\theta_2 \Phi|_{\Gamma_2} = \theta_2 \hat{C}_3 \psi_3 =: C_3\psi_3, \quad \hat{C}_3 := \gamma_{\Gamma_2} V_3, \quad \gamma_{\Gamma_2}\psi_3 := \psi_3|_{\Gamma_2}. \tag{2.16}$$

Отметим, что C_3 самосопряжённый, положительный и компактный оператор в L_{2,Γ_2}.

Вспомогательная задача IV.1.

$$\triangle \Phi_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2} = 0 \quad (\text{на } S_2 \cup \Gamma_2), \quad \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n_2} = \psi_1 \quad (\text{на } \Gamma_1),$$

$$\int\limits_{\Gamma_1} \Phi_{21} \mathrm{d}\Gamma_1 = \int\limits_{\Gamma_1} \psi \mathrm{d}\Gamma_1 = 0.$$

Это снова задача Неймана для уравнения Лапласа. Если $\psi_1 \in \tilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1}$, то задача имеет единственное решение $\Phi_{21} = V_{21}\psi_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_2)$.

Вспомогательная задача IV.2.

$$\triangle \Phi_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n_2} = 0 \quad (\text{на } S_2 \cup \Gamma_1), \quad \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n_2} = \psi_2 \quad (\text{на } \Gamma_2),$$

$$\int\limits_{\Gamma_2} \Phi_{22} \mathrm{d}\Gamma_2 = \int\limits_{\Gamma_2} \psi \mathrm{d}\Gamma_2 = 0.$$

Это тоже задача Неймана для уравнения Лапласа. Если $\psi_2 \in \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}$, то задача имеет единственное решение $\Phi_{22} = V_{22}\psi_2 \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_2)$.

Введём по решению задач IV.1 и IV.2 операторы:

$$\theta_1\Phi_{21}|_{\Gamma_1} = \theta_1\hat{C}_{11}\psi_1 =: C_{11}\psi_1, \quad \hat{C}_{11} := \gamma_{\Gamma_1}V_{21}, \quad \gamma_{\Gamma_1}\psi_1 := \psi_1|_{\Gamma_1}.$$

$$\theta_1\Phi_{22}|_{\Gamma_1} = \theta_1\hat{C}_{12}\psi_2 =: C_{12}\psi_2, \quad \hat{C}_{12} := \gamma_{\Gamma_1}V_{22}, \quad \gamma_{\Gamma_1}\psi_2 := \psi_2|_{\Gamma_1}.$$

$$\theta_2\Phi_{21}|_{\Gamma_2} = \theta_2\hat{C}_{21}\psi_1 =: C_{21}\psi_1, \quad \hat{C}_{21} := \gamma_{\Gamma_2}V_{21}, \quad \gamma_{\Gamma_2}\psi_1 := \psi_1|_{\Gamma_2}.$$

$$\theta_2\Phi_{22}|_{\Gamma_2} = \theta_2\hat{C}_{22}\psi_2 =: C_{22}\psi_2, \quad \hat{C}_{22} := \gamma_{\Gamma_2}V_{22}, \quad \gamma_{\Gamma_2}\psi_2 := \psi_2|_{\Gamma_2}.$$

Отметим, что компактные операторы C_{qr}, $q, r = 1, 2$ образуют самосопряжённую, положительную матрицу $\{C_{qr}\}_{q,r=1}^2$ в $L_{2,\Gamma_1} \oplus L_{2,\Gamma_2}$.

Вспомогательная задача V.

$$\triangle p = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial p}{\partial n_2} = 0 \quad (\text{на } S_2 \cap \Gamma_1), \quad p = \tau_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \int\limits_{\Gamma_2} \tau_2 d\Gamma_2 = 0.$$

Это, как и I, задача Зарембы для уравнения Лапласа. Она имеет единственное решение (см. [3, с.45]) $p = G_2\tau_2 \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_2)$ при $\tau_2 \in H_{\Gamma_2}^{1/2}$.

2.5. Вывод системы операторных уравнений

Переходя к формулировке исходной задачи (1.2)-(1.11) в операторной форме, представим поле $\nabla\tilde{p}_1$ в виде $\nabla\tilde{p}_1 = \nabla\tilde{p}_{11} + \nabla\tilde{p}_{12}$ и подберём поле $\nabla\tilde{p}_{11}$ таким образом, чтобы поле $\vec{v}_1$ являлось решением следующей краевой задачи

$$-P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1 + \mu_1^{-1}\nabla\tilde{p}_{11} = \mu_1^{-1}\left(-\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - \nabla\tilde{p}_{12}\right) \quad (\text{в } \Omega_1) \tag{2.17}$$

$$\operatorname{div}\vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{v}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \tag{2.18}$$

$$\mu_1\tau_{q3}(\vec{v}_1) = 0, \quad q = 1, 2, \quad -\theta_1\tilde{p}_{11} + \mu\tau_{33}(\vec{v}_1) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1). \tag{2.19}$$

Используя вспомогательную задачу I, заключаем, что краевая задача (2.17)-(2.19) имеет единственное обобщённое решение

$$\vec{v}_1 = \mu_1^{-1}A_1^{-1}\left(-\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - \nabla\tilde{p}_{12}\right)$$

для правой части из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Тогда можно записать

$$\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1\vec{v}_1 + \nabla\tilde{p}_{12} = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1). \tag{2.20}$$

Заметим, что при расщеплении условия для нормального напряжения на Γ_1 из (2.14) осталось условие

$$\theta_1\tilde{p}_{12} = \theta_1\tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1).$$

Учитывая принадлежность $\nabla\tilde{p}_{12} \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, найдём, что потенциал $\theta_1\tilde{p}_{12}$ удовлетворяет вспомогательной задаче II при $\tau_1 = \theta_1\tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta_1$. Поэтому можно считать, что

$$\tilde{p}_{12} = G_1(\theta_1\tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta_1).$$

Оператор G_1 ограниченно действует из пространства $H^{1/2}_{\Gamma_1}$ в пространство $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$.

Подставим последнее представление для градиента давления в (2.20), получим

$$\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1\vec{v}_1 + G_1\theta_1\tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2)G_1\zeta_1 = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1). \tag{2.21}$$

Далее, в силу принадлежности $\nabla\Phi_2$ пространству $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$ потенциал Φ_2 с помощью решений вспомогательных задач IV.1 и IV.2 можно представить в виде:

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} \quad \text{при } \psi_1 = -\gamma_{n,1}\vec{u}_1, \quad \psi_2 = \gamma_{n,2}\vec{u}_2.$$

Рассмотрим уравнения (2.11) для идеальных жидкостей. Из них следуют интегралы Коши-Лагранжа

$$\rho_l\frac{\partial\Phi_l}{\partial t} + \tilde{p}_l = F_l + c_l(t) \quad (\text{в } \Omega_l), \quad l = 2, 3. \tag{2.22}$$

где через F_l обозначены потенциалы полей $\rho_l P_{h,S_l}\vec{f}_l$, а $c_l(t)$ — произвольные функции переменной t, $l = 2, 3$. Рассмотрим эти уравнения на Γ_2 и спроектируем на L_{2,Γ_2}, тогда динамическое условие (см. третье уравнение (2.14)) можно преобразовать к следующему виду:

$$\theta_2\tilde{p}_2 = \theta_2\tilde{p}_3 + g(\rho_2 - \rho_3)\zeta_2 = \rho_3\theta_2 F_3 + \rho_3\theta_2\frac{\partial\Phi_3}{\partial t} + g(\rho_2 - \rho_3)\zeta_2 \quad (\text{на } \Gamma_2). \tag{2.23}$$

Выразим теперь $\theta_2\Phi_3|_{\Gamma_2}$ с помощью представления (2.16) и оператора C_3:

$$\theta_2\Phi_3|_{\Gamma_2} = -C_3\gamma_{n,2}\vec{u}_2 \quad \text{на } \Gamma_2.$$

Тогда вместо (2.23) получим

$$\theta_2\tilde{p}_2 = \rho_3\theta_2 F_3 - \rho_3\frac{\partial}{\partial t}C_3\gamma_{n,2}\vec{u}_2 + g(\rho_2 - \rho_3)\zeta_2 \quad (\text{на } \Gamma_2).$$

Значит, согласно вспомогательной задаче V,

$$\tilde{p}_2|_{\Omega_2} = G_2\left(\rho_3\theta_2 F_3 - \rho_3\frac{\partial}{\partial t}C_3\gamma_{n,2}\vec{u}_2 + g(\rho_2 - \rho_3)\zeta_2\right).$$

Выразим при $l = 2$ функцию $\tilde{p}_2$ из (2.22), тогда уравнение (2.21) можно переписать в виде:

$$\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1\vec{v}_1 + G_1\theta_1\left(\rho_2 F_2 - \rho_2\frac{\partial}{\partial t}\left(C_{11}\gamma_{n,1}\vec{u}_1 + C_{12}\gamma_{n,2}\vec{u}_2\right)\right) + g(\rho_1 - \rho_2)G_1\zeta_1 =$$

$$= \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1).$$

Далее для всех функций переменной t со значениями в гильбертовых пространствах их производные по t будем обозначать $\dfrac{d}{dt}$ вместо $\dfrac{\partial}{\partial t}$.

Проведенные в этом пункте рассуждения можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $\vec{u}_1$, $\nabla\tilde{p}_1$, $\nabla\Phi_l$, $\nabla\tilde{p}_l$, $l = 2, 3$, ζ_j, $j = 1, 2$, — классическое решение начально-краевой задачи* (2.9)-(2.15), *тогда функции $\vec{u}_k$, $k = 1, 2$, ζ_j, $j = 1, 2$ являются решением следующей задачи Коши:*

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_1\vec{u}_1 + \rho_2\left(G_1C_{11}\gamma_{n,1}\vec{u}_1 + G_1C_{12}\gamma_{n,2}\vec{u}_2\right)\right) + \mu_1 A_1\vec{v}_1 + g(\rho_1 - \rho_2)G_1\zeta_1 = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - \rho_2 G_1\theta_1 F_2 \tag{2.24}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_2\left(G_2C_{21}\gamma_{n,1}\vec{u}_1 + G_2C_{22}\gamma_{n,2}\vec{u}_2\right) + \rho_3 G_2C_3\gamma_{n,2}\vec{u}_2\right) + g(\rho_2 - \rho_3)G_2\zeta_2 = \rho_2G_2\theta_2F_2 - \rho_3G_2\theta_2F_3, \tag{2.25}$$

$$\frac{d}{dt}\left(g(\rho_1 - \rho_2)\zeta_1\right) = g(\rho_1 - \rho_2)\gamma_{n,1}\vec{u}_1, \tag{2.26}$$

$$\frac{d}{dt}\left(g(\rho_2 - \rho_3)\zeta_2\right) = g(\rho_2 - \rho_3)\gamma_{n,2}\vec{u}_2, \tag{2.27}$$

$$\vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k,\ k = 1, 2, \quad \zeta_j(0,x) = \zeta_j^0(x) \quad x \in \Gamma_j,\ j = 1, 2. \tag{2.28}$$

Введём операторы $\hat{G}_1 := g(\rho_1 - \rho_2)G_1$, $\hat{G}_2 := g(\rho_2 - \rho_3)G_2$. Тогда справедлива следующая

Лемма 2. *Имеют место соотношения*

$$\hat{G}_1^* = g(\rho_1 - \rho_2)\gamma_{n,1}, \quad \gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}).$$

$$\hat{G}_2^* = g(\rho_2 - \rho_3)\gamma_{n,2}, \quad \gamma_{n,2} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2); \tilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}).$$

Доказательство. См. доказательство леммы 6 из [2]. □

3. Преобразование задачи к стандартному виду

3.1. Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

В задаче (2.24)-(2.28) введём новые искомые функции по формулам

$$\vec{w}_r(t) := \alpha_r^{1/2}\int_0^t e^{-\beta_r(t-s)}\vec{u}_1(s)ds \in \vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1), \quad r = \overline{1,m}. \tag{3.1}$$

Тогда

$$\frac{d\vec{w}_r}{dt} = \alpha_r^{1/2}\vec{u}_1 - \beta_r\alpha_r^{1/2}\int\limits_0^t e^{-\beta_r(t-s)}\vec{u}_1(s)ds = \alpha_r^{1/2}\vec{u}_1 - \beta_r\vec{w}_r, \quad r=\overline{1,m}. \tag{3.2}$$

Теперь с учётом (3.1),(3.2) задача (2.24)-(2.28) переписывается в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dt}\left((\rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11}\gamma_{n,1})\,\vec{u}_1 + \rho_2 G_1 C_{12}\gamma_{n,2}\vec{u}_2\right) + \mu_1 A_1\left(\vec{u}_1 + \sum_{r=1}^m \alpha_r\vec{w}_r\right) + g(\rho_1-\rho_2)G_1\zeta_1 =$$

$$= \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - \rho_2 G_1 F_2$$

$$\frac{d\vec{w}_r}{dt} - \alpha_r^{1/2}\vec{u}_1 + \beta_r\vec{w}_r = 0, \quad r=\overline{1,m}. \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_2 G_2 C_{21}\gamma_{n,1}\vec{u}_1 + (\rho_2 G_2 C_{22}\gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3\gamma_{n,2})\,\vec{u}_2\right) + g(\rho_2-\rho_3)G_2\zeta_2 = \rho_2 G_2 F_2 - \rho_3 G_2 F_3,$$

$$\frac{d}{dt}\left(g(\rho_1-\rho_2)\zeta_1\right) - \hat{G}_1^*\vec{u}_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(g(\rho_2-\rho_3)\zeta_2\right) - \hat{G}_2^*\vec{u}_2 = 0,$$

$$\vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x\in\Omega_k,\ k=1,2, \quad \zeta_j(0,x) = \zeta_j^0(x) \quad x\in\Gamma_j,\ j=1,2,$$

$$\vec{w}_r(0,x) = \vec{0},\ r=\overline{1,m}.$$

Коротко эта задача может быть записана в виде:

$$\mathcal{T}\frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}z + g(t), \quad z(0) = z^0, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{T} := \operatorname{diag}\{\mathcal{C},\mathcal{B}\}, \quad \mathcal{C} := \begin{pmatrix} \rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11}\gamma_{n,1} & \hat{0}^\tau & \rho_2 G_1 C_{12}\gamma_{n,2} \\ \hat{0} & \hat{I} & \hat{0} \\ \rho_2 G_2 C_{21}\gamma_{n,1} & 0 & \rho_2 G_2 C_{22}\gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3\gamma_{n,2} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{B} := \operatorname{diag}\{g(\rho_2-\rho_1)I, g(\rho_3-\rho_2)I\} \tag{3.6}$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{G} \\ -\mathcal{G}^* & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A & \hat{\alpha}^\tau & 0 \\ -\hat{\alpha} & \hat{\beta} & \hat{0} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} g(\rho_2-\rho_1)G_1 & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} \\ 0 & g(\rho_3-\rho_2)G_2 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \hat{y} \\ \vec{u}_2 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - \rho_2 G_1 F_2 \\ 0 \\ \rho_2 G_2 F_2 - \rho_3 G_2 F_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Здесь

$$A := \mu_1 A_1, \quad \hat{\alpha} := (\alpha_1^{1/2}, \alpha_2^{1/2}, \dots, \alpha_m^{1/2})^\tau, \quad \hat{\beta} := \mathrm{diag}\{\beta_1 I, \beta_2 I, \dots, \beta_m I\}, \quad \vec{u}_2 = \nabla\Phi_{22}, \tag{3.9}$$

$$\hat{y} := (A^{1/2}\vec{w}_1, A^{1/2}\vec{w}_2, \dots, A^{1/2}\vec{w}_m)^\tau, \quad \hat{0} := (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \text{ раз}})^\tau, \quad \hat{I}_m := \mathrm{diag}\{\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \text{ раз}}\} \tag{3.10}$$

Операторная матрица $\mathcal{A}$ задана на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A) \oplus \hat{\mathcal{D}}(A^{1/2}) \oplus W \oplus H_{\Gamma_1}^{1/2} \oplus H_{\Gamma_2}^{1/2}, \quad \hat{\mathcal{D}}(A^{1/2}) := \bigoplus_{r=1}^{m} \mathcal{D}(A^{1/2}), \tag{3.11}$$

$$W := \Big\{ \nabla\Phi_{22} \in \vec{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2) : (\vec{u}_1, \nabla\Phi_{22}, \nabla\Phi_3)^\tau \in \vec{J}_{0,S}(\Omega), \, \vec{u}_1 \in \mathcal{D}(A),$$
$$\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = -\nabla\Phi_{22} \cdot \vec{n}_2 \in H_{\Gamma_1}^{1/2}, \, \nabla\Phi_{22} \cdot \vec{n}_2 = -\nabla\Phi_3 \cdot \vec{n}_3 \in H_{\Gamma_2}^{1/2} \Big\},$$

и действует в пространстве $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2) \oplus L_{2,\Gamma_1} \oplus L_{2,\Gamma_2}$, где $\hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1) := \bigoplus_{r=1}^{m} \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, $\vec{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2) := \{\vec{v} = \nabla\varphi \in \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) : \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ (\Gamma_1)\}$.

Замечание 2. Необходимо отметить, что задача (3.4) получена после дополнительной симметризации путём замены

$$\vec{w}_r = A^{-1/2}\vec{y}_r, \quad \vec{y}_r \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \quad r = \overline{1,m}.$$

Тогда из (3.3) имеем соотношения

$$\frac{d}{dt}(A^{-1/2}\vec{y}_r) = \alpha_r^{1/2}\vec{u}_1 - \beta_r A^{-1/2}\vec{y}_r, \quad r = \overline{1,m}, \tag{3.12}$$

и если $\vec{u}_1(t)$, — непрерывная по t функция со значениями в $\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1)$, а $\vec{y}_r(t)$, $r = \overline{1,m}$, — со значениями в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, то правая часть в (3.12) непрерывна по t со значениями в $\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Поэтому к обеим частям в (3.12) можно применить оператор $A^{1/2}$.

3.2. Свойства операторных коэффициентов

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{T}$ из* (3.5)-(3.6) *ограничен, самосопряжён и положительно определён.*

Доказательство. Свойство ограниченности следует из того, что ограничены все операторные коэффициенты матрицы $\mathcal{T}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить ограниченность, например, оператора $G_1 C_{11} \gamma_{n,1}$. Он действует из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ в $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Действительно, для $\vec{\xi} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ элемент $\gamma_{n,1}\vec{\xi} \in \tilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$. С помощью вспомогательной задачи IV.1 найдём функцию Φ_{21} при условии, что

$\psi_1 = \gamma_{n,1}\vec{\xi}$. Тогда в силу свойств ограниченности операторов C_{11} и G_1 оператор $G_1C_{11}\gamma_{n,1}$ ограничен, а его действие следующее:

$$G_1C_{11}\gamma_{n,1}\vec{\xi} = G_1\theta_1\Phi_{21}|_{\Gamma_1} \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Найдём квадратичную форму оператора $\mathcal{T}$ в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Для любого $z \in \mathcal{H}$ имеем

$$(\mathcal{T}z, z)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{u}_1|^2 d\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_1} G_1C_{11}\gamma_{n,1}\vec{u}_1 \cdot \overline{\vec{u}_1} d\Omega_1 + \sum_{r=1}^{m} \int\limits_{\Omega_1} |\vec{y}_r|^2 d\Omega_1 +$$

$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_1} G_1C_{12}\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22} \cdot \overline{\vec{u}_1} d\Omega_1 + \rho_2\int\limits_{\Omega_2} G_2C_{21}\gamma_{n,1}\vec{u}_1 \cdot \overline{\nabla\Phi_{22}} d\Omega_2 + \rho_2\int\limits_{\Omega_2} G_2C_{22}\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22} \cdot \overline{\nabla\Phi_{22}} d\Omega_2 +$$

$$+\rho_3 \int\limits_{\Omega_2} G_2C_3\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22} \cdot \overline{\nabla\Phi_{22}} d\Omega_1 + g(\rho_2 - \rho_1) \int\limits_{\Gamma_1} |\xi_1|^2 d\Gamma_1 + g(\rho_3 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_2} |\xi_2|^2 d\Gamma_2 \tag{3.13}$$

Преобразуем второе и четвёртое слагаемые в (3.13), используя свойства решения вспомогательных задач IV.1, IV.2, операторов C_{11}, C_{12}, взаимную сопряжённость операторов G_1 и $\gamma_{n,1}$, и свойства потенциала Φ_{21}:

$$\rho_2 \int\limits_{\Omega_1} G_1C_{11}\gamma_{n,1}\vec{u}_1 \cdot \overline{\vec{u}_1} d\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_1} G_1C_{12}\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22} \cdot \overline{\vec{u}_1} d\Omega_1 = \rho_2 \int\limits_{\Gamma_1} C_{11}\gamma_{n,1}\vec{u}_1 \cdot \overline{\gamma_{n,1}\vec{u}_1} d\Gamma_1 +$$

$$+\rho_2 \int\limits_{\Gamma_1} C_{12}\gamma_{n,1}\nabla\Phi_{22} \cdot \overline{\gamma_{n,1}\vec{u}_1} d\Gamma_1 = \rho_2 \int\limits_{\Gamma_1} \theta_1\Phi_{21} \cdot \overline{(-\gamma_{n,1}\vec{u}_1)} d\Gamma_1 + \rho_2 \int\limits_{\Gamma_1} \theta_1\Phi_{22} \cdot \overline{(-\gamma_{n,1}\vec{u}_1)} d\Gamma_1 =$$

$$= \rho_2 \int\limits_{\Gamma_1} \Phi_{21} \cdot \overline{-\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n_2}} d\Gamma_1 + \rho_2 \int\limits_{\Gamma_1} \Phi_{22} \cdot \overline{-\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n_2}} d\Gamma_1 = \rho_2 \int\limits_{\Gamma_1} (\Phi_{21} + \Phi_{22}) \cdot \overline{-\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n_2}} d\Gamma_1.$$

Аналогично с учётом свойств операторов C_{21} и C_{22}, G_2 преобразуем пятое и шестое слагаемые, получим:

$$\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} G_2C_{21}\gamma_{n,1}\vec{u}_1 \cdot \overline{\nabla\Phi_{22}} d\Omega_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} G_2C_{22}\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22} \cdot \overline{\nabla\Phi_{22}} d\Omega_2 = \rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\Phi_{21} + \Phi_{22}) \cdot \overline{\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n_2}} d\Gamma_2.$$

Кроме того, используя вспомогательную задачу III, преобразуем седьмое слагаемое в (3.13):

$$\rho_3 \int\limits_{\Omega_2} G_2C_3\gamma_{n,2}\vec{u}_2 \cdot \overline{\nabla\Phi_{22}} d\Omega_2 = \rho_3 \int\limits_{\Gamma_2} \Phi_3 \cdot \overline{\left(-\frac{\partial\Phi_3}{\partial n_2}\right)} d\Gamma_2$$

Тогда взамен (3.13) получим

$$(\mathcal{T}z,z)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{u}_1|^2 \mathrm{d}\Omega_1 + \sum_{r=1}^{m} \int\limits_{\Omega_1} |\vec{y}_r|^2 \mathrm{d}\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Phi_2|^2 \mathrm{d}\Omega_2 + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} |\nabla\Phi_3|^2 \mathrm{d}\Omega_3 +$$
$$+ g(\rho_2-\rho_1) \int\limits_{\Gamma_1} |\zeta_1|^2 \mathrm{d}\Gamma_1 + g(\rho_3-\rho_2) \int\limits_{\Gamma_2} |\zeta_2|^2 \mathrm{d}\Gamma_2 > 0. \tag{3.14}$$

С учётом ограниченности оператора $\mathcal{T}$ из (3.14) можно установить, что он самосопряжён и положительно определён. $\square$

Изучим теперь общие свойства оператора $\mathcal{A}$ из (3.7), (3.11).

Лемма 4. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ допускает факторизацию в виде произведения трёх матриц с симметричным окаймлением средней матрицы:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \hat{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I} & \tilde{\mathcal{G}}^+ \\ -\tilde{\mathcal{G}} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \hat{I}_2 \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

где

$$\tilde{\mathcal{G}}^+ := \begin{pmatrix} g(\rho_2-\rho_1)A^{-1/2}G_1 & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} \\ 0 & g(\rho_3-\rho_2)G_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{G}} := \begin{pmatrix} g(\rho_2-\rho_1)G_1^*A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & g(\rho_3-\rho_2)G_2^* \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A^{1/2} & \hat{0}^\tau & 0 \\ \hat{0} & \hat{I}_m & \hat{0} \\ 0 & \hat{0}^\tau & I \end{pmatrix}, \quad \tilde{I} := \begin{pmatrix} I & \hat{\alpha}^\tau & 0 \\ -\hat{\alpha} & \hat{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_2 := \mathrm{diag}\{I, I\} \quad \square$$

Лемма 5.

$$A^{-1/2}G_1 = (G_1^*A^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(G_1)},$$

причём замыкание по непрерывности оператора $A^{-1/2}G_1$ совпадает с $(G_1^*A^{-1/2})^*$.

Доказательство. См. доказательство леммы 9 из [2]. $\square$

Из леммы 5 непосредственно следует следующий результат.

Лемма 6. *Справедливо соотношение $\overline{\tilde{\mathcal{G}}^+} = \tilde{\mathcal{G}}^*$, $\tilde{\mathcal{G}}^+ = \tilde{\mathcal{G}}^*|_{\mathcal{D}(G_1)\oplus\mathcal{D}(G_2)}$.*

Лемма 7. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ из* (3.7)-(3.11) *является аккретивной в пространстве $\mathcal{H}$, т.е.*

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}z,z)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}. \quad \square$$

Доказательство. Действительно,

$$(\mathcal{A}z,z)_{\mathcal{H}} = (A\vec{u}_1,\vec{u}_1)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} + (\hat{\alpha}^\tau\hat{y},\vec{u}_1)_{\hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)} + b_1(G_1\zeta_1,\vec{u}_1)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} - (\hat{\alpha}\vec{u}_1,\hat{y})_{\hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)} +$$

$$+(\hat{\beta}\hat{y},\hat{y})_{\hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)}+b_2(G_2\zeta_2,\nabla\Phi_{22})_{\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)}-b_1(\gamma_{n,1}\vec{u}_1,\zeta_1)_{L_{2,\Gamma_1}}-b_2(\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22},\zeta_2)_{L_{2,\Gamma_2}}=$$

$$=(A\vec{u}_1,\vec{u}_1)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}+(\hat{\beta}\hat{y},\hat{y})_{\hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)}+(\hat{\alpha}^{\tau}\hat{y},\vec{u}_1)_{\hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)}-\overline{(\hat{\alpha}^{\tau}\hat{y},\vec{u}_1)}_{\hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1)}+$$

$$b_1(\zeta_1,\gamma_{n,1}\vec{u}_1)_{L_{2,\Gamma_1}}-b_1\overline{(\zeta_1,\gamma_{n,1}\vec{u}_1)}_{L_{2,\Gamma_1}}+b_2(\zeta_2,\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22})_{L_{2,\Gamma_2}}-b_2\overline{(\zeta_2,\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22})}_{L_{2,\Gamma_2}},$$

откуда следует, что

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}z,z)_{\mathcal{H}}=(A\vec{u}_1,\vec{u}_1)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}+\sum_{r=1}^{m}\beta_r(y_r,y_r)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)}\geq 0\quad\Box$$

Введём операторную матрицу

$$\mathcal{J}_a:=\mathcal{J}_0+a\,\mathrm{diag}(0;\hat{0}^{\tau};I;I;I),\quad a>0,\quad \mathcal{J}_0:=\begin{pmatrix}\tilde{I} & \tilde{\mathcal{G}}\\ -\tilde{\mathcal{G}}^* & \mathcal{O}\end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Тогда для $\mathcal{J}_a$ выполняется неравенство

$$\mathrm{Re}(\mathcal{J}_a z,z)_{\mathcal{H}}\geq c||z||^2_{\mathcal{H}},\quad c>0. \tag{3.17}$$

Из (3.16) следует, что операторная матрица $\mathcal{A}$ из (3.15) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{A}=\mathrm{diag}(\tilde{\mathcal{A}};\hat{I}_2)\mathcal{J}_a\mathrm{diag}(\tilde{\mathcal{A}};\hat{I}_2)-a\,\mathrm{diag}(0;\hat{0}^{\tau};I;I;I)=:\\ =:\mathcal{A}_a-a\,\mathrm{diag}(0;\hat{0}^{\tau};I;I;I).\end{aligned} \tag{3.18}$$

При этом оператор $\mathcal{A}_a$ представлен в виде произведения трёх сомножителей, каждый из которых имеет ограниченный обратный. Поэтому $\mathcal{A}_a$ допускает расширение путём замыкания среднего сомножителя, и в итоге возникает максимальный равномерно аккретивный оператор.

Лемма 8. *Замыкание $\bar{\mathcal{A}}_a$ оператора $\mathcal{A}_a$ представляется в виде*

$$\bar{\mathcal{A}}_a=\mathrm{diag}(A^{1/2};\hat{I};I)\bar{\mathcal{J}}_a\mathrm{diag}(A^{1/2};\hat{I};I),$$

$$\bar{\mathcal{J}}_a=\begin{pmatrix}\tilde{I}_a & \tilde{\mathcal{G}}^*\\ -\tilde{\mathcal{G}} & a\hat{I}_2\end{pmatrix},\quad \tilde{I}_a:=\tilde{I}+a\,\mathrm{diag}\{0;\hat{0};I\}$$

где $\bar{\mathcal{J}}_a$ — равномерно аккретивный оператор, для которого выполнено свойство (3.17) *(с заменой $\mathcal{J}_a\to\bar{\mathcal{J}}_a$).*

При этом

$$\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a)=\Big\{y=(\vec{u}_1;\hat{y};\nabla\Phi_{22};\zeta_1;\zeta_2)^{\tau}:\vec{u}_1\in\mathcal{D}(A^{1/2}),\ A^{1/2}\vec{u}_1+\sum_{r=1}^{m}\alpha_r^{1/2}\vec{y}_r+$$
$$+g(\rho_1-\rho_2)(G_1^*A^{-1/2})^*\zeta_1\in\mathcal{D}(A^{1/2})\Big\},\quad \mathcal{R}(\bar{\mathcal{A}}_a)=\mathcal{H},$$

и оператор $\bar{\mathcal{A}}_a$ *действует на* $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a)$ *по закону*

$$\bar{\mathcal{A}}_a z = \begin{pmatrix} A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1-\rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1) \\ -\hat{\alpha} A^{1/2}\vec{u}_1 + \hat{\beta}\hat{y} \\ a\nabla\Phi_{22} + g(\rho_2-\rho_3)G_2\zeta_2 \\ -g(\rho_1-\rho_2)G_1^*\vec{u}_1 + a\zeta_1 \\ -g(\rho_2-\rho_3)G_2^*\nabla\Phi_{22} + a\zeta_2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

4. Теорема о разрешимости задачи

Вернёмся к задаче (3.7)-(3.11) и перепишем её с учётом (3.18) в виде

$$\mathcal{T}\frac{dz}{dt} = -(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P})z + g(t), \quad z(0) = z^0 := (\vec{u}_1^0; \hat{0}; \vec{u}_2^0; \zeta_1^0; \zeta_2^0)^\tau,$$
$$z = (\vec{u}_1; \hat{y}; \nabla\Phi_{22}; \zeta_1; \zeta_2)^\tau, \quad \mathcal{P} := \operatorname{diag}(0; \hat{0}^\tau; I; I; I).$$

Рассмотрим также аналогичную задачу с замкнутым максимальным аккретивным оператором:

$$\mathcal{T}\frac{dz}{dt} = -(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})z + g(t), \quad z(0) = z^0. \tag{4.1}$$

Оператор $\mathcal{T}$ самосопряжённый, положительно определённый и ограниченный в $\mathcal{H}$, значит, для него существует оператор $\mathcal{T}^{-1}$, обладающий теми же свойствами. Тогда из (4.1) имеем:

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{T}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})z + \mathcal{T}^{-1}g(t), \quad z(0) = z^0. \tag{4.2}$$

Введём в $\mathcal{H}$ эквивалентную норму по формуле

$$\langle z, z\rangle := (\mathcal{T}z, z)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{T}^{1/2}z, \mathcal{T}^{1/2}z)_{\mathcal{H}}.$$

Эквивалентность этой нормы стандартной норме следует из свойств оператора $\mathcal{T}$.

Легко проверить, что оператор $\mathcal{T}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})$ будет максимальным аккретивным в новом скалярном произведении, и тогда $-\mathcal{T}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P})$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы. Поэтому по теореме Филлипса (см. [5, с.166]) задача Коши (4.2) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, если выполнены следующие условия

$$z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a), \quad g(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}). \tag{4.3}$$

Из условий (4.3) получим соответствующие условия на начальные данные исходной задачи (1.2)-(1.11).

Так, из принадлежности элемента z^0 области определения оператора $\mathcal{A}$ следует, что

$$\vec{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \zeta_j^0 \in \mathcal{D}(G_j) = H_{\Gamma_j}^{1/2},\ j = 1,2.$$

Аналогично получим условие для $\vec{f}_k(t)$:

$$\vec{f}_k(t) \in C^1([0,T]; \vec{L}_2(\Omega_k))), \quad k = \overline{1,3}.$$

Определение 1. Будем говорить, что исходная начально-краевая задача (1.2)-(1.11) имеет сильное решение $\{\vec{u}_1(t);\vec{u}_2(t);\vec{u}_3(t);\zeta_1(t);\zeta_2(t)\}$ на отрезке $[0,T]$, если выполнены следующие условия:

1. $\vec{u}_k(t)\in C^1([0,T];\vec{J}_{0,S}(\Omega_k))$, $k=\overline{1,3}$;
2. $\vec{v}_1(t)=I_{0,1}(t)\vec{u}_1(t)$ (см. (1.3)) обладает свойством $\vec{v}_1(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(A))$;
3. $\zeta_j(t)\in C^1([0,T];H^{1/2}_{\Gamma_j})$, $j=1,2$;
4. для любого $t\in[0,T]$ выполнена система уравнений (2.24)-(2.27), где все слагаемые в первом уравнении — элементы из $C([0,T];\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1))$, во втором — элементы из $C([0,T];\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2))$, а в третьем и четвёртом — из $C([0,T];H^{1/2}_{\Gamma_1})$ и $C([0,T];H^{1/2}_{\Gamma_2})$ соответственно;
5. выполнены начальные условия (2.28). □

Сформулируем теперь теорему существования и единственности сильного решения задачи (1.2)-(1.11).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}_1^0\in\mathcal{D}(A),\quad \vec{u}_l\in\vec{H}^1(\Omega_l)\cap\vec{J}_{0,S_l}(\Omega_l),\quad \zeta_j^0\in H^{1/2}_{\Gamma_j},\quad j=1,2,\ l=2,3.$$

$$\vec{f}_k(t)\in C^1([0,T];\vec{L}_2(\Omega_k)),\quad k=\overline{1,3};$$

тогда начально-краевая задача (1.2)-(1.11)*, имеет единственное сильное решение на* $[0;T]$.

Доказательство. Доказательство, основанное на обратном переходе от задачи Коши (4.2) к начально-краевой задаче (1.2)-(1.11) с использованием результатов лемм 2, 3-8, проводится по схеме доказательства теорем 2, 3 и 5 работы [2] и здесь не приводится. □

4.1. К задаче о нормальных колебаниях гидросистемы

Рассмотрим теперь постановку задачи о малых нормальных движениях исследуемой гидросистемы, т.е. о таких решениях однородной задачи (4.1) с замкнутым основным оператором, которые зависят от t по закону

$$z(t):=(\vec{u}_1(t);\hat{y}(t);\nabla\Phi_{22}(t);\zeta_1(t);\zeta_2(t))^\tau=(\vec{u}_1;\hat{y};\nabla\Phi_{22};\zeta_1;\zeta_2)^\tau e^{-\lambda t},$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$ — комплексный декремент затухания, а $(\vec{u}_1;\hat{y};\nabla\Phi_{22};\zeta_1;\zeta_2)^\tau$ — амплитудный элемент.

Тогда для отыскания амплитудных элементов возникает спектральная задача

$$\begin{aligned}
&A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u}_1+\hat{\alpha}^\tau\hat{y}+g(\rho_1-\rho_2)(G_1^*A^{-1/2})^*\zeta_1)=\lambda((\rho_1 I+\rho_2G_1C_{11}\gamma_{n,1})\vec{u}_1+\rho_2G_1C_{12}\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22}),\\
&-\alpha_r^{1/2}A^{1/2}\vec{u}_1+\beta_r\vec{y}_r=\lambda\vec{y}_r,\quad r=\overline{1,m},\\
&g(\rho_2-\rho_3)G_2\zeta_2=\lambda(\rho_2G_2C_{21}\gamma_{n,1}\vec{u}_1+(\rho_2G_2C_{22}\gamma_{n,2}+\rho_3G_2C_3\gamma_{n,2})\nabla\Phi_{22}),\\
&-G_1^*\vec{u}_1=\lambda\zeta_1,\\
&-G_2^*\nabla\Phi_{22}=\lambda\zeta_2.
\end{aligned}\tag{4.4}$$

В случае $\lambda = 0$ приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1) &= \vec{0}, \\ \beta_r \vec{y}_r &= \alpha_r^{1/2} A^{1/2} \vec{u}_1, \quad r = \overline{1,m}, \\ G_2 \zeta_2 &= 0, \\ G_1^* \vec{u}_1 &= \vec{0}, \\ G_2^* \nabla \Phi_{22} &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Домножим скалярно третье соотношение на элемент $\vec{u}_2 \in \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2)$, будем иметь

$$0 = (G_2 \zeta_2, \vec{u}_2)_{\vec{L}_2(\Omega_2)} = \langle \zeta_2, \gamma_{n,2} \vec{u}_2 \rangle_{L_{2,\Gamma_2}},$$

откуда в силу произвольности $\vec{u}_2$ следует, что $\zeta_2 = 0$. Аналогично из последних двух связей получаем, что $\vec{u}_1 = \vec{0}$, $\nabla \Phi_{22} = \vec{0}$, тогда из второго соотношения следует, что $\vec{y}_r = \vec{0}$, $r = \overline{1,m}$, и, наконец, из первого —

$$A^{1/2}(g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1) = \vec{0}.$$

Домножая это соотношение на $(g(\rho_1 - \rho_2))^{-1}$, а затем скалярно на элемент $\vec{u}_1 \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, получим

$$0 = (A^{1/2}(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1, \vec{u}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \langle \zeta_1, G_1^* A^{-1/2} A^{1/2} \vec{u}_1 \rangle_{L_{2,\Gamma_1}} = \langle \zeta_1, \gamma_{n,1} \vec{u}_1 \rangle_{L_{2,\Gamma_1}}.$$

Отсюда можем заключить, что $\zeta_1 = 0$ в силу произвольности элемента $\vec{u}_1$.

Таким образом, задача (4.5) имеет лишь тривиальное решение, т.е. $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (4.4).

Рассмотрим ещё случай, когда $\lambda = \beta_s$, $s = \overline{1,m}$. Вместо (4.4) теперь будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} & A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u}_1 + \hat{\alpha}^\tau \hat{y} + g(\rho_1 - \rho_2)(G_1^* A^{-1/2})^* \zeta_1) = \beta_s((\rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11} \gamma_{n,1})\vec{u}_1 + \rho_2 G_1 C_{12} \gamma_{n,2} \nabla \Phi_{22}), \\ & -\alpha_r^{1/2} A^{1/2} \vec{u}_1 + \beta_r \vec{y}_r = \beta_s \vec{y}_r, \quad r = \overline{1,m}, \\ & g(\rho_2 - \rho_3) G_2 \zeta_2 = \beta_s(\rho_2 G_2 C_{21} \gamma_{n,1} \vec{u}_1 + (\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \nabla \Phi_{22}), \\ & G_1^* \vec{u}_1 = \beta_s \zeta_1, \\ & G_2^* \nabla \Phi_{22} = \beta_s \zeta_2. \end{aligned}$$

Из второго соотношения при $r = s$ заключаем, что $\vec{u}_1 = \vec{0}$ в силу обратимости оператора $A^{1/2}$. Тогда из четвертого уравнения получим, что $\zeta_1 = 0$, а из второго при $r \neq s$ — свойство $\vec{y}_r = \vec{0}$. Выразим из последнего соотношения ζ_2 и подставим в третье. Получим

$$(g(\rho_2 - \rho_3)\beta_s^{-1} G_2 G_2^* - \beta_s(\rho_2 G_2 C_{22} \gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2}) \nabla \Phi_{22} = \vec{0}. \tag{4.6}$$

Домножим (4.6) скалярно на элемент $\nabla \Phi_{22} \in \vec{G}_{h,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2)$, получим

$$0 = g(\rho_2 - \rho_3)\beta_s^{-1}(G_2 G_2^* \nabla \Phi_{22}, \nabla \Phi_{22})_{\vec{L}_2(\Omega_2)} - \tag{4.7}$$

$$-\beta_s\rho_2(G_2C_{22}\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22},\nabla\Phi_{22})_{\vec{L}_2(\Omega_2)}-\beta_s\rho_3(G_2C_3\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22},\nabla\Phi_{22})_{\vec{L}_2(\Omega_2)}.$$

Используя свойства операторов C_{22}, C_3 и G_2 для каждого из слагаемых получим следующие соотношения

$$\int_{\Omega_2} G_2G_2^*\nabla\Phi_{22}\cdot\overline{\nabla\Phi_{22}}\mathrm{d}\Omega_2=\int_{\Gamma_2}\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22}\cdot\overline{\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22}}\mathrm{d}\Gamma_2=\int_{\Gamma_2}\left|\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n}\right|^2\mathrm{d}\Gamma_2,$$

$$\int_{\Omega_2} G_2C_{22}\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22}\cdot\overline{\nabla\Phi_{22}}\mathrm{d}\Omega_2=\int_{\Gamma_2}C_{22}\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22}\cdot\overline{\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22}}\mathrm{d}\Gamma_2=$$

$$=-\int_{\Gamma_2}\theta_2\Phi_{22}\cdot\overline{-\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n}}\mathrm{d}\Gamma_2=-\int_{\Omega_2}|\nabla\Phi_{22}|^2\mathrm{d}\Omega_2,$$

$$\int_{\Omega_2} G_2C_3\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22}\cdot\nabla\Phi_{22}\mathrm{d}\Omega_2=\int_{\Gamma_2}C_3\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22}\cdot\overline{\gamma_{n,2}\nabla\Phi_{22}}\mathrm{d}\Gamma_2=$$

$$=-\int_{\Gamma_2}\theta_2\Phi_3\cdot\overline{\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n_2}}\mathrm{d}\Gamma_2=-\int_{\Gamma_2}\theta_2\Phi_3\cdot\overline{-\frac{\partial\Phi_3}{\partial n_2}}\mathrm{d}\Gamma_2=-\int_{\Omega_3}|\nabla\Phi_3|^2\mathrm{d}\Omega_3$$

Подставляя эти результаты в (4.7) получим

$$0=g(\rho_2-\rho_3)\beta_s^{-1}\int_{\Gamma_2}\left|\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n}\right|^2\mathrm{d}\Gamma_2+\beta_s\rho_2\int_{\Omega_2}|\nabla\Phi_{22}|^2\mathrm{d}\Omega_2+\beta_s\rho_3\int_{\Omega_3}|\nabla\Phi_3|^2\mathrm{d}\Omega_3,$$

откуда следует, что $\nabla\Phi_{22}=\vec{0}$, а значит и $\zeta_2=0$. С учётом этих равенств из первого уравнения приходим к выводу, что $\vec{y}_s=\vec{0}$, т.е. $\lambda=\beta_s$, $s=\overline{1,m}$, тоже не является собственным значением задачи (4.4).

Опираясь на эти факты, преобразуем при $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq\beta_s$, $s=\overline{1,m}$, задачу (4.4) к спектральной проблеме, исключив $\vec{y}_r$ и ζ_j, $r=\overline{1,m}$, $j=1,2$. Имеем

$$\lambda\begin{pmatrix}\rho_1I+\rho_2G_1C_{11}\gamma_{n,1} & \rho_2G_1C_{12}\gamma_{n,2}\\ \rho_2G_2C_{21}\gamma_{n,1} & \rho_2G_2C_{22}\gamma_{n,2}+\rho_3G_2C_3\gamma_{n,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}_1\\ \nabla\Phi_{22}\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}g(\rho_1-\rho_2)G_1G_1^* & 0\\ 0 & g(\rho_2-\rho_3)G_2G_2^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}_1\\ \nabla\Phi_{22}\end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix}A_1\left(I-\sum\limits_{r=1}^{m}\frac{\alpha_r}{\lambda-\beta_r}\right) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}_1\\ \nabla\Phi_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{pmatrix}$$

Осуществляя ещё здесь замену

$$A^{1/2}\vec{u}_1=:\vec{\varphi}\in\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1),$$

приходим к спектральной проблеме для элемента $x(t):=(\vec{\varphi};\nabla\Phi_{22})^\tau$

$$L(\lambda)x:=\Big(\mathrm{diag}\{e_0(\lambda);0\}-\lambda\mathrm{diag}\{A^{1/2};0\}\tilde{\mathcal{C}}\mathrm{diag}\{A^{1/2};0\}-\lambda^{-1}\mathrm{diag}\{b_1QQ^*;b_2G_2G_2^*\}\Big)x=0 \tag{4.8}$$

$$e_0(\lambda) := 1+\sum_{r=1}^{m} \alpha_r(\beta_r-\lambda)^{-1}, \quad \tilde{\mathcal{C}} := \begin{pmatrix} \rho_1 I + \rho_2 G_1 C_{11}\gamma_{n,1} & \rho_2 G_1 C_{12}\gamma_{n,2} \\ \rho_2 G_2 C_{21}\gamma_{n,1} & \rho_2 G_2 C_{22}\gamma_{n,2} + \rho_3 G_2 C_3 \gamma_{n,2} \end{pmatrix},$$

в пространстве $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2)$ для операторного пучка $L(\lambda)$.

Задачу (4.8) можно исследовать методами спектральной теории операторных пучков (см. [6]). В частности, можно установить, что спектр этой задачи дискретен, расположен в правой комплексной полуплоскости и состоит из шести ветвей собственных значений, которым отвечают пограничные волны на границе раздела Γ_1, поверхностные волны на Γ_2, внутренние диссипативные волны в области Ω_1, а также диссипативные волны, обусловленные вязкоупругостью жидкости.

Подробно эти свойства решений спектральной задачи (4.8), а также свойства полноты и базисности её корневых (собственных и присоединённых) элементов будут изучены в другой работе.

Список цитируемых источников

1. *Агранович, М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей. // Успехи матем. наук. — 2002. — Т. 57, Вып. 5(347). — С. 3–78.

   Agranovich, M. S. Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in smooth and non-smooth domains. Russian Mathematical Surveys, 57:5(347), 3–78 (2002).

2. *Копачевский, Н. Д.* О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд. // Динамические системы. — 2017. — Т.7(35), №1. — С. 109-145.

   Kopachevsky, N. D. Small motions of two viscoelastic fluids in stationary containers. Dinamicheskie Sistemy, 7(35):1, 109–145 (2017).

3. *Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo Zuy Kan Operator methods in linear hydrodynamic. Evolutional and Spectral problems. Moscow: Nauka, 1989.

4. *Копачевский, Н. Д., Сёмкина, Е. В.* О малых движениях гидросистемы ”вязкоупругая жидкость-идеальная жидкость”, заполняющей неподвижный сосуд. // Динамические системы. — 2017. — Т.7(35), №3 — С. 207-228.

   Kopachevsky, N. D., Syomkina, E. V. Small movements of hidrosystem in stationary containers. Dinamicheskie Sistemy, 7(35):3, 207–228 (2017).

5. *Крейн, С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

   Krein, S. G. Linear differential equations in a Banach space. Moscow: Nauka, 1967. (in Russian)

6. *Маркус, А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: «Штиинца», 1986. — 260 с.

   Marcus, A. S. Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils. Kishinyov: Shtiintsa, 1986. (in Russian)

7. *Милославский, А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде // Успехи матем. наук. — 1989. — Т.44, №4.

   Miloslavskiy, A. I. Spectrum of small oscillations of a viscoelastic fluid in an open vessel. Uspehi Matem. Nauk, 44:4 (1989). (in Russian)

8. *Милославский, А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды // ДАН СССР. — 1990. — Т. 309. — №3.— С. 532 — 536.

   Miloslavskij, A. I. The spectrum of small oscillations of a viscoelastic hereditary medium. Sov. Math., Dokl. 40, No. 3, 538-541 (1990).

9. *Agranovich, M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary. // Russian Journal of Mathematical Physics — 2008. — Vol. 15., No.2. — P. 146–155.

10. *Azizov, T. Ya., Kopachevskii, N. D., Orlova, L. D.* Evolution and Spectral Problems Related to Small Motions of Viscoelastic Fluid // Proceedings of the St.-Petersburg Math. Society, Vol. VI. AMS Translations (2) —2000. — Vol. 199. — P. 1–24.

11. *Eirich, F. R.* Rheology. Theory and Applications. — New York: Academic Press, 1956. — 761p.

12. *Gagliardo, E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova — 1957. — Vol. 27. — P. 284–305.

13. *Kopachevsky, Nikolay D., Krein, Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. — Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.128) — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2001. — 384 p.

14. *Kopachevsky, Nikolay D., Krein, Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics.. — Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.146) — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2003. — 444 p.

Получена 17.05.2018