

# ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

---

Математический журнал

**Главный редактор:** д-р физ.-мат. наук О. В. Анашкин, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь.

**Редакционная коллегия:**

**Е. П. Белан**, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;  
**А. Т. Барабанов**, д-р техн. наук, Севастопольский государственный ун-т, Севастополь;  
**В. З. Гринес**, д-р физ.-мат. наук, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород;  
**Г. В. Демиденко**, д-р физ.-мат. наук, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;  
**А. Л. Зуев**, д-р физ.-мат. наук, Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany;  
**Н. Д. Копачевский**, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;  
**В. А. Лукьяненко**, канд. физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;  
**М. А. Муратов**, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;  
**И. В. Орлов**, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;  
**Г. С. Осипенко**, д-р физ.-мат. наук, Севастопольский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, Севастополь;  
**О. В. Починка**, д-р физ.-мат. наук, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород;  
**В. Н. Тхай**, д-р физ.-мат. наук, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Москва;  
**А. Ф. Хрусталева**, д-р физ.-мат. наук, Севастопольский государственный ун-т, Севастополь;  
**В. Н. Чехов**, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь.

**Том 6(34), №4, 303-412.**

*Печатается по решению Научно-технического Совета КФУ протокол №11 от 21.12.2017.*

**ISSN 0203–3755**

**Адрес редакционной коллегии:** Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, к. 203В, пр-т Вернадского, 4, Симферополь 295007, Россия. Тел. +7 978 7715582. E-mail: dynsys2011@yandex.ru

© Крымский федеральный ун-т, 2017

УДК 519.63

# Факторизация спектральных задач винтовых волноводов<sup>1</sup>

А. Д. Юнаковский

ФИЦ «Институт прикладной физики РАН»

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»

Нижегород 603950. E-mail: yun@appl.sci-nnov.ru

**Аннотация.** В статье разработан метод граничных интегральных уравнений для нахождения дисперсионных характеристик круглого волновода с глубокой многозаходной винтовой гофрировкой. Изначально трехмерная задача посредством введения косоугольной системы координат, «раскручивающих» волновод, сведена к спектральной задаче для системы одномерных гиперсингулярных граничных интегральных уравнений. Введением дополнительной компоненты задача регуляризована, но разными способами для разной глубины гофрировки. Развитие современных электронных СВЧ приборов сопровождается повышением их мощности и эффективности, расширением частотных диапазонов, использованием новых режимов работы. Электродинамические системы таких приборов характеризуются наличием сложной геометрии. Определение их дисперсионных характеристик требует высокой точности расчетов. Оптимизация профилей для улучшения эффективности приборов приводит к перебору большого количества значений параметров. Поэтому задача поиска математических моделей и численных методов, обеспечивающих проведение оптимизации, является актуальной. Задачи для волноводов сложного и многозаходного профиля часто решают конечно-разностным методом и методом конечных элементов. Если заходов винта много, то крутизна профиля возрастает, что резко увеличивает размерность задачи. В статье приведен переход к расчету задачи с одним «зубцом» и неклассическими граничными условиями. Область при этом становится сильно негладкой, но задача остается доступной для пользователей метода конечных элементов.

**Ключевые слова:** волноводы, факторизация, спектральная задача

## Factorization of Spectral Problems of Helical Waveguides

A. D. Yunakovskiy

Federal Research Center The Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences (IAP RAS),

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod 603950.

**Abstract.** The development of modern electronic microwave devices is accompanied by an increase in their power and efficiency, the expansion of frequency ranges, the use of new operating modes. Electrodynamical systems of such devices are characterized by the presence of complex geometry. Determination of their dispersion characteristics requires high accuracy of calculations. Optimization of profiles to improve the efficiency of devices leads to a search of a large number of parameter values. Therefore, the problem of finding mathematical models and numerical methods that provide

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00601.

optimization is urgent. The method of boundary integral equations is developed to find the dispersion characteristics of a circular waveguide with a deep multi-screw screw corrugation. This type of waveguides is used as a space for interaction of radiation with an electron beam in such devices of microwave electronics as gyro-TWT. Until recently, first-order perturbation theory based on coupled wave equations was used to calculate waveguides with screw corrugation. This theory allows a fairly accurate description of the case of a relatively small corrugation. Restrictions on the depth of corrugation were studied in papers. The method of finite difference in the time domain (FNDP), described in detail in the review and used in the work, made it possible to obtain results for a wider range of problems. The method of boundary integral equations is developed to find the dispersion characteristics of a circular waveguide with a deep multi-screw screw corrugation. Initially, the three-dimensional problem, by introducing an oblique-angled coordinate system «unwinding» the waveguide, is reduced to the spectral problem for a system of one-dimensional hypersingular boundary integral equations. By introducing an additional component, the problem is regularized, but in different ways for different depths of corrugation. The intrinsic waves in the helical waveguides are not divided into waves of magnetic and electric type, as a result of which a solution of the complete vector problem is required to solve the system of Maxwell equations.

**Keywords:** optimal control, maximum principle, solid body with flexible rod

**MSC 2010:** 35K20, 35K59, 35Q60, 78A05, 37L10, 34O12

## 1. Введение

Развитие современных электронных СВЧ приборов сопровождается повышением их мощности и эффективности, расширением частотных диапазонов, использованием новых режимов работы. Электродинамические системы таких приборов характеризуются наличием сложной геометрии. Определение их дисперсионных характеристик требует высокой точности расчетов. Оптимизация профилей для улучшения эффективности приборов приводит к перебору большого количества значений параметров. Поэтому задача поиска математических моделей и численных методов, обеспечивающих проведение оптимизации, является актуальной.

В статье разработан метод граничных интегральных уравнений для нахождения дисперсионных характеристик круглого волновода с глубокой многозаходной винтовой гофрировкой. Данный тип волноводов применяется в качестве пространства взаимодействия излучения с электронным пучком в таких приборах СВЧ-электроники, как gyro-ЛБВ. До недавнего времени для расчетов волноводов с винтовой гофрировкой использовалась теория возмущений первого порядка, основанная на уравнениях связанных волн [7]. Данная теория позволяет достаточно точно описывать случай мелкой гофрировки. Ограничения на глубину гофрировки исследовались в работах [24, 28]. Метод конечных разностей во временной области (FNDP), подробно описанный в обзоре [29] и применявшийся в работах [9], позволил получать результаты для более широкого круга задач.

В [2] дан обзор исследований СВЧ-приборов гиротронного типа с электродинамической системой в виде сверхразмерного металлического волновода с винтовой гофрировкой. При определенных параметрах такая гофрировка радикальным образом изменяет волноводную дисперсию, обеспечивая в широкой полосе частот почти постоянную по величине групповую скорость нормальной волны при малом продольном волновом числе.

Собственные волны в винтовых волноводах не разделяются на волны магнитного и электрического типа, вследствие чего для решения системы уравнений Максвелла требуется решение полной векторной задачи. «Раскрутка», т. е. переход к «винтовым» координатам, преобразующим геометрию винтового волновода к прямой цилиндрической конструкции, давно использовалась механиками в декартовой системе координат [8]. Она сводила задачу к исследованию волновода с тем же поперечным сечением, но с анизотропным диэлектрическим и магнитным заполнением, однородным в продольном направлении. Другими словами, в уравнении Гельмгольца вместо лапласиана появлялся эллиптический оператор с зависящими от поперечных координат коэффициентами. В этом случае так же, как и в изотропном случае, возможен поиск распространяющихся волн методом граничных интегральных уравнений, но с ядрами, выраженными через функцию Грина «анизотропного» уравнения. При использовании этой функции происходит скачок производной по конормали при переходе через граничную поверхность волновода, что меняет смысл производных по направлению нормали и касательной в граничных условиях для электрического поля. Оказалось возможным получить и решить слабо некорректную задачу, используя представление полей через соответствующую функцию Грина и ее нормальную, а не конормальную производную. В [8] отмечено, что «малые углы закрутки, как и следовало ожидать, слабо влияют на картину поведения физического поля. С ростом угла закрутки линии уровня в центральной зоне раздвигаются, что свидетельствует об образовании зон «плато» и больших градиентов». В цилиндрических координатах «раскрутка» была реализована в [21].

В работе [13] представлен метод расчета дисперсии нормальных волн металлических волноводов с винтовой гофрировкой внутренней поверхности, основанный на переходе к новой неортогональной системе координат. Система используемых базисных функций образует базис Бари [1] и может применяться лишь при небольшой глубине гофрировки.

При представлении полей в волноводе в цилиндрических координатах через электрический  $u$  и магнитный  $v$  векторы Герца с единственными отличными от нуля  $z$ -компонентами наиболее перспективным оказалось введение дополнительной  $w$ -компоненты. В работе изначально трехмерная задача посредством введения косоугольной системы координат, «раскручивающих» волновод, сведена к спектральной задаче для системы одномерных гиперсингулярных граничных интегральных уравнений [12]. Это понизило до предела размерность задачи, но, к сожалению, «перевело» проблему к задаче точного вычисления гиперсингулярных интегралов. Введением дополнительной  $w$ -компоненты задача регуляризована, но разными способами для разной глубины гофрировки. При малой глубине аналитически избавились от «электрической» составляющей электромагнитного поля, сведя задачу к системе двух уравнений относительно «магнитной» составляющей и вновь введенной компоненты. Для большой глубины гофрировки регуляризация достигается естественным путем за счет анизотропии пространства. В систему граничных интегральных уравнений входят производные по нормали и по касательной.

тельному направлению к граничной поверхности, а разрыв при предельном переходе в интегральном представлении полей к граничной поверхности, т. е. переход к интегральным уравнениям второго рода достигается по направлению конормали. Другими словами, система уравнений становится аналогичной системе с косою производной относительно конормали, т. е. с операторами Фредгольма 3-го рода. Увеличение глубины гофрировки требует в граничных интегральных уравнениях перейти от интегрирования по объемлющей окружности к интегрированию по близкому к поверхности волновода контуру (например, для контура волновода в поперечном сечении  $(a + b \cos 3\varphi)$  интегрирование вести по объемлющему контуру  $(a + \delta + b \cos 3\varphi)$ ). Это обусловлено тем, что при аналитическом продолжении поля до границы минимального объемлющего цилиндра у продолжения возможен полюс, расположенный между цилиндром и поверхностью волновода.

Задачи для волноводов сложного и многозаходного профиля часто решают конечно-разностным методом и методом конечных элементов [22, 9]. Если заходов винта много, то крутизна профиля возрастает, что резко увеличивает размерность задачи. В статье приведен переход к расчету задачи с одним «зубцом», но с неклассическими граничными условиями, примеры которых приведены в [17], [5]. Область при этом становится сильно негладкой, но задача остается доступной для пользователей метода конечных элементов.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим волновод с винтовой гофрировкой. Профиль волновода в цилиндрических координатах описывается уравнением:

$$F(r, \varphi, z) = r - f\left(\varphi - \frac{2\pi}{L}z\right) = 0; \quad f(\xi + 2\pi) = f(\xi); \quad -\infty < z < +\infty; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (2.1)$$

где функция  $f(\xi)$  непрерывно дифференцируемая и периодическая с периодом  $2\pi$ .

Поля в волноводе удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла

$$\vec{E} = ik \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \vec{H} = -ik \operatorname{rot} \vec{E}, \quad (2.2)$$

Решение системы уравнений Максвелла в специальных системах координат, для которых одна из локальных единиц длины  $e_i$  является функцией только этой координаты  $x_i$ , а отношение остальных локальных единиц длины не зависит от этой координаты  $x_i$ , может быть найдено методом Бромвича [6]. При этом для компоненты вектора Герца  $\Pi_i$  должно выполняться так называемое уравнение Боргниса, решение которого находится с точностью до функции только от координаты  $x_i$ .

В случае цилиндрической симметрии электромагнитное поле выражается через электрическую  $u$  и магнитную  $v$  функции Боргниса, что эквивалентно введению электрического и магнитного векторов Герца с единственными отличными от нуля  $z$ -компонентами:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m, \quad \vec{H} = \vec{H}_e + \vec{H}_m, \quad (2.3)$$

$$\vec{E}_e = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (u \vec{i}_z), \quad \vec{H}_e = -i \operatorname{rot} (v \vec{i}_z), \quad (2.4)$$

$$\vec{E}_m = i \operatorname{rot} (v \vec{i}_z), \quad \vec{H}_m = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (v \vec{i}_z). \quad (2.5)$$

При этом функции  $u$  и  $v$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + {}^2 u = 0, \quad \Delta v + {}^2 v = 0. \quad (2.6)$$

Кроме того, функции  $u$  и  $v$ , а, следовательно, и все компоненты электрического и магнитного полей удовлетворяют условию Флоке:

$$u, v, E_j, H_j(r, \varphi + 2\pi l/L, z + l) = \exp(i\pi h_f) u, v, E_j, H_j(r, \varphi, z), \quad j = r, \varphi, z. \quad (2.7)$$

Здесь  $k = \omega/c$  — волновое число,  $\omega$  — круговая частота,  $c$  — скорость света,  $r = f(\varphi - \frac{2\pi}{L}z) - 0$  — обозначение внутренней поверхности волновода,  $h_f$  — параметр Флоке. Полный «оборот» винтовой гофрировки происходит на расстоянии  $L$  по оси  $z$ , а периодичность полей с набегом фазы по Флоке — на расстоянии  $l$ .

Электрическая и магнитная составляющие электрического поля запишутся в виде

$$\vec{E}_e = \begin{cases} E_{er} = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \\ E_{e\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial z} \\ E_{ez} = {}^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{cases}, \quad \vec{E}_m = \begin{cases} E_{mr} = \frac{i}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ E_{m\varphi} = -i \frac{\partial v}{\partial r} \\ E_{mz} = 0 \end{cases}. \quad (2.8)$$

Граничное условие на внутренней поверхности волновода является условием равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля на металлической поверхности и записывается в форме

$$\vec{E}_\tau \Big|_S = 0,$$

$$S = \{F \equiv r - f(\varphi - \frac{2\pi}{L}z) = 0; f(\xi + 2\pi) = f(\xi); -\infty < z < +\infty; 0 \leq \varphi < 2\pi\},$$

$$T_s : \left\{ \frac{2\pi}{L} E_\varphi + \frac{1}{r} E_z \right\} \Big|_S = 0, \quad (2.9)$$

$$T_k : \{f' E_r + E_\varphi\} \Big|_S = 0. \quad (2.10)$$

Вектор нормали к поверхности имеет вид

$$\operatorname{grad} F = \left( 1, -\frac{1}{r} f', \frac{2\pi}{L} f' \right), \quad \vec{n} = \frac{1}{|n|} \operatorname{grad} F, \quad |n| = \sqrt{1 + (f')^2 (1 + (2\pi/L)^2)}. \quad (2.11)$$

Вектора

$$\vec{s} = \frac{1}{|s|} \left( 0, \frac{2\pi}{rL}, 1 \right), \quad |s| = \sqrt{1 + (2\pi/L)^2},$$

$$\vec{k} = \frac{1}{|k|} \left( f', \frac{1}{r}, 0 \right), \quad |k| = \sqrt{1 + (f')^2},$$

лежат в касательной к поверхности плоскости, но не ортогональны между собой.

Введем новую систему координат [21]:

$$z_{\text{new}} = z, \quad \psi = \varphi - \frac{2\pi}{L}z. \quad (2.12)$$

В новой системе координат уравнения Максвелла примут вид

$$\vec{E}_e = \begin{cases} E_{er} = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} - \frac{2\pi}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \\ E_{e\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi \partial z} - \frac{2\pi}{Lr} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \\ E_{ez} = u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{4\pi}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi \partial z} + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \end{cases}, \quad \vec{E}_m = \begin{cases} E_{mr} = \frac{i}{r} \frac{\partial v}{\partial \psi} \\ E_{m\varphi} = -i \frac{\partial v}{\partial r} \\ E_{mz} = 0 \end{cases}. \quad (2.13)$$

Уравнение граничной поверхности примет вид

$$F(r, \psi, z) = r - f(\psi) = 0; \quad f(\xi + 2\pi) = f(\xi); \quad -\infty < z < +\infty; \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad (2.14)$$

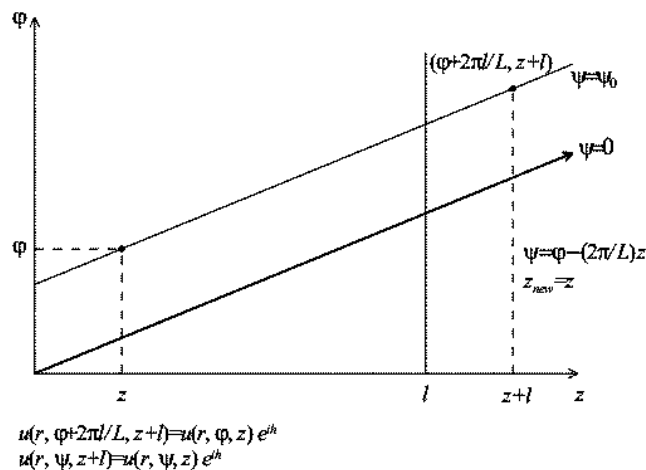


Рис. 1 Условия Флоке в новых координатах.

вектор нормали к поверхности

$$\text{grad } F = \left( 1, -\frac{1}{r}f', 0 \right),$$

$$\vec{\nu} = \frac{1}{|\nu|} \text{grad } F, \quad |\nu| = \sqrt{1 + (f')^2}.$$

Векторы

$$\vec{s} = (0, 0, 1), \quad \vec{k} = \frac{1}{|\nu|} \left( f', \frac{1}{r}, 0 \right)$$

лежат в касательной к поверхности плоскости и ортогональны между собой в новой системе координат.

Условия Флоке перейдут в стандартную форму:

$$u, v, E_j, H_j(r, \psi, z + l) = \exp(i2\pi h_f)u, v, E_j, H_j(r, \psi, z), \quad j = r, \psi, z. \quad (2.15)$$

Распространяющиеся моды в силу (2.15) являются квазипериодическими функциями координаты  $z$  и их можно искать в виде

$$u = \exp(i2\pi(m_z + h_f)z/l)u_{\text{new},m_z}, \quad v = \exp(i2\pi(m_z + h_f)z/l)v_{\text{new},m_z}, \quad (2.16)$$

где  $u_{\text{new},m}$ ,  $v_{\text{new},m}$  являются функциями только  $r, \psi$ . В дальнейшем мы опустим нижние индексы  $\text{new}, m_z$  у неизвестных функций. Так как  $2m_z$  соответствует  $2l$ , то можно ограничиться  $m_z = 1$  или  $m_z = 0$ .

Введем обозначение

$$h = \frac{2\pi}{l}(m_z + h_f), \quad 0 \leq h_f \leq 1. \quad (2.17)$$

Будем исследовать спектральную задачу нахождения дисперсионной кривой  $h()$ , т.е. для каждого значения  $h$  будем искать значение, являющееся собственным значением линейной задачи для системы функций  $u$  и  $v$  в поперечном сечении волновода. Так как мы будем рассматривать только однородные уравнения и системы уравнений, то общий у всех компонент поля и неизвестных функций множитель  $e^{i2\pi(m_z+h_f)z/l}$  можем опустить.

Выражения для компонент электрического поля примут вид

$$\vec{E}_e = \begin{cases} E_{er} = ih \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\pi}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \\ E_{e\psi} = i \frac{h}{r} \frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{2\pi}{Lr} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \\ E_{ez} = [2 - h^2]u - ih \frac{4\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \end{cases}, \quad \vec{E}_m = \begin{cases} E_{mr} = \frac{i}{r} \frac{\partial v}{\partial \psi} \\ E_{m\psi} = -i \frac{\partial v}{\partial r} \\ E_{mz} = 0 \end{cases}. \quad (2.18)$$

Запишем условия равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля на границе через вновь введенные величины

$$\left\{ \frac{2\pi}{L} E_\psi + \frac{1}{r} E_z \right\} \Big|_S = \left( [2 - h^2] \frac{1}{r} u - ih \frac{2\pi}{Lr} \frac{\partial u}{\partial \psi} - i \frac{2\pi}{L} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_S = 0. \quad (2.19)$$

Получили первое граничное условие. Из (2.9) и (2.10) получаем второе граничное условие:

$$\left\{ E_\psi + \frac{f'}{r} E_r \right\} \Big|_S = \left( i \frac{h}{r} \frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{2\pi}{Lr} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + i f' \frac{h}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - f' \frac{2\pi}{Lr} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} + i \frac{f'}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \psi} - i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_S = 0. \quad (2.20)$$



На границе выражение

$$\left( f' \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) = \left( f'(\psi) \frac{\partial u(f(\psi), \psi)}{\partial r} + \frac{\partial u(f(\psi), \psi)}{\partial \psi} \right) = \frac{du}{d\psi}$$

является производной по параметру  $\psi$  от  $u(f(\psi), \psi)$ . Воспользовавшись этим, перепишем выражение (2.20) в виде

$$\left( \frac{d}{d\psi} \left[ ihu - \frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] + ir \left[ \frac{f'}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial r} \right] \right) \Big|_S = 0. \quad (2.21)$$

Вторая скобка является фактически производной по нормали от функции  $v$ .

В пределе, когда глубина гофрировки стремится к нулю, т.е.  $f'(\psi) \rightarrow 0$ ,  $f \rightarrow \text{const} = R_0$ ,  $\frac{d}{d\psi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \psi}$ , соотношение (2.20) или (2.21) на границе приобретает вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ ihu - \frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] - ir \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_0} = 0.$$

Вместе с (2.19) это дает однородную систему уравнений относительно функций  $u$  и  $\frac{\partial v}{\partial r}$ . Общее решение этой системы

$$u|_{r=R_0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0$$

совпадает с классическим решением [19]. Вырожденное решение получается, когда функция  $u$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{2\pi}{L} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ ihu - \frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] -^2 u + ih \left[ ihu - \frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] = 0,$$

которое имеет периодическое решение на интервале  $2\pi$ . Это возможно лишь при целочисленном значении, включая нулевое, величин

$$\alpha_{\pm} = \frac{L}{2\pi}(h \pm). \quad (2.22)$$

Этот вырожденный случай, сводящийся к появлению степенных по радиальной координате компонент решения, мы не рассматриваем.

В предположении (2.16) с учетом обозначения (2.17), уравнение Гельмгольца (2.6) преобразуется к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{1}{r^2} + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} - i \frac{4\pi h}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} + (2 - h^2) u = 0. \quad (2.23)$$

Аналогично получается уравнение относительно  $v$ .

Функции  $u$  и  $v$  будем задавать в виде граничных потенциалов с помощью функций Грина уравнения Гельмгольца (2.23). Задачу нахождения дисперсионной кривой сведем к спектральной задаче для системы граничных интегральных уравнений. Выбор типов потенциалов поясним в дальнейшем.

### 3. Построение функций Грина

Хорошо известно, что для функции Грина оператора Гельмгольца в полуполосе с условиями Флоке с ростом частоты  $\omega$  возникают проблемы правильного и быстрого вычислений. Известно несколько способов ее представления.

1. Пространственное представление — через фундаментальное решение во всем пространстве с последующим суммированием сдвинутых на период функций.
2. Спектральное представление — через ряд Фурье по угловой координате [19].
3. Преобразование Куммера [20].
4. Lattice sum — через сумму значений некоторой функции в точках решетки. Достигается использованием теоремы суммирования для спецфункций с целью ускорения суммирования рядов в пространственном представлении.
5. Преобразование Эвальда [23].
6. Интегральное представление [30], которое может быть рассмотрено как аналог применения известного метода спуска.

У каждого из перечисленных представлений есть проблемная область параметров.

Будем пользоваться разными представлениями функций Грина для случаев мелкой и глубокой гофрировки. Причины, по которым выбирается тот или иной способ представления будут ясны в процессе их дальнейшего применения.

Для случая мелкой гофрировки найдем функцию Грина  $G(r, R, \psi, \varphi)$  уравнения (2.23) в полуполосе

$$0 < r, R < +\infty; 0 \leq \psi, \varphi < 2\pi, \tag{3.1}$$

с периодическими по  $\psi, \varphi$  граничными условиями

$$G(r, R, \psi + 2\pi, \varphi) = G(r, R, \psi, \varphi + 2\pi) = G(r, R, \psi, \varphi), \tag{3.2}$$

с условием излучения Зоммерфельда по радиальной координате

$$\frac{\partial G}{\partial r} - i\sqrt{2 - h^2} G = O\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \tag{3.3}$$

и условием ограниченности решения в точке  $r = 0$  :  $|u| < \infty$ .

Правая часть уравнения для функции Грина имеет вид [3]

$$f = -\frac{2\pi}{r}\delta(r-R)\delta(\psi-\varphi).$$

Воспользуемся известным разложением дельта-функции:

$$\delta(\psi-\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(in(\psi-\varphi)) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n(\psi-\varphi)). \quad (3.4)$$

Функцию Грина будем искать в виде

$$G(r, R, \psi, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n(r, R) \exp(in(\psi-\varphi)). \quad (3.5)$$

Для функций  $G_n(r, R)$  в этом случае получим уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial G_n(r, R)}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} G_n(r, R) + \left( 2 - \left( \frac{2\pi}{L} n - h \right)^2 \right) G_n(r, R) = -\frac{1}{r} \delta(r-R).$$

Его решение имеет вид

$$G_n(r, R) = \frac{i\pi}{2} \begin{bmatrix} J_n(g_n r) H_n^{(1)}(g_n R) & , r < R \\ J_n(g_n R) H_n^{(1)}(g_n r) & , r > R \end{bmatrix},$$

где

$$g_n^2 = 2 - \left( \frac{2\pi}{L} n - h \right)^2, \alpha_- < n < \alpha_+. \quad (3.6)$$

Обозначим

$$h_n = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\left( 1 - \frac{Lh}{2\pi n} \right)^2 - \frac{2L^2}{4\pi^2 n^2}}, \quad h_0 = \frac{2\pi}{L}, \quad n < \alpha_-, \quad n > \alpha_+. \quad (3.7)$$

Отметим, что при  $g_n = 0$

$$G_n(r, R) = \frac{R}{2n} \begin{bmatrix} (r/R)^n & , r < R \\ (R/r)^n & , r > R \end{bmatrix}.$$

Функцию Грина запишем в виде

$$\begin{aligned} G(r, R, \psi, \varphi) &= \frac{i\pi}{2} \sum_{\alpha_- < n < \alpha_+} \begin{bmatrix} J_n(g_n r) H_n^{(1)}(g_n R) & , r < R \\ J_n(g_n R) H_n^{(1)}(g_n r) & , r > R \end{bmatrix} \exp(in(\psi-\varphi)) + \\ &+ \sum_{\substack{\alpha_+ < n \\ n < \alpha_-}} \begin{bmatrix} K_n(R|n|h_n) I_n(r|n|h_n) & , r < R \\ I_n(R|n|h_n) K_n(r|n|h_n) & , r > R \end{bmatrix} \exp(in(\psi-\varphi)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выделим главную сингулярную часть этой функции, воспользовавшись асимптотическим представлением функций  $K_\nu(\nu z)$  и  $I_\nu(\nu z)$  с учетом главной части величины  $h_n$ , равной  $2\pi/L$ , при фиксированном  $z$  и  $\nu \rightarrow \infty$  [15]

$$I_\nu(\nu z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \frac{e^{\nu\eta(z)}}{(1+z^2)^{1/4}}, \quad K_\nu(\nu z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \frac{e^{-\nu\eta(z)}}{(1+z^2)^{1/4}},$$

$$I_0(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \left[ 1 - \frac{1}{8z} + \dots \right], \quad K_0(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ 1 + \frac{1}{8z} + \dots \right].$$

Введем обозначения

$$p(s) = e^{-\sqrt{1+(2\pi s/L)^2}}, \quad q(s) = \frac{2\pi}{L} \frac{s}{1 + \sqrt{1 + (2\pi s/L)^2}}. \tag{3.9}$$

При предельном переходе на поверхность волновода получаем  $r = f(\psi)$ ,  $R = f(\varphi)$ . Для удобства мы будем продолжать обозначать  $r$  и  $R$  там, где это не вызывает недоразумений. Мы будем в дальнейшем обозначать

$$I_{an}(s|n|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|n|}} \frac{1}{(1 + (2\pi s/L)^2)^{1/4}} \left( \frac{q(s)}{p(s)} \right)^{|n|},$$

$$K_{an}(s|n|) = \sqrt{\frac{\pi}{2|n|}} \frac{1}{(1 + (2\pi s/L)^2)^{1/4}} \left( \frac{p(s)}{q(s)} \right)^{|n|},$$

$$I_0(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^s, \quad K_0(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{-s}, \tag{3.10}$$

главные части соответствующих асимптотических разложений функций  $I_n(ns)$  и  $K_n(ns)$ ,  $I_0(s)$  и  $K_0(s)$ . Здесь мы учли, что всюду в последующих выражениях входят только произведения  $I_{an}(ns)$  и  $K_{an}(s)$  и поэтому их произведение при положительных и отрицательных  $n$  не меняет знак.

Введем обозначение для функций, заданных на граничной поверхности (см. (2.11))

$$|n(\psi)|^2 = \left( \left( \frac{1}{r} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \right) (f'(\psi))^2 + 1. \tag{3.11}$$

Представим функцию Грина в (3.8) в виде суммы нескольких ограниченных функций и главной сингулярной части

$$G(r, R, \psi, \varphi) = G_{1m}(r, R, \psi, \varphi) + G_{2m}(r, R, \psi, \varphi) + G_{am}(r, R, \psi, \varphi)$$

$$= \sum_{\alpha_- < n < \alpha_+} \left[ \begin{array}{l} i\frac{\pi}{2} J_n(g_n r) H_n^{(1)}(g_n R) - K_{an}(R|n|) I_{an}(r|n|), \quad r < R \\ i\frac{\pi}{2} J_n(g_n R) H_n^{(1)}(g_n r) - I_{an}(R|n|) K_{an}(r|n|), \quad r > R \end{array} \right] \exp(in(\psi - \varphi)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{\alpha_+ < n \\ n < \alpha_-}} \left[ K_n(R|n|h_n) I_n(r|n|h_n) - K_{an}(R|n|) I_{an}(r|n|), r < R \right] \exp(in(\psi - \varphi)) + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[ \begin{array}{l} K_{an}(R|n|) I_{an}(r|n|) \quad , \quad r < R \\ I_{an}(R|n|) K_{an}(r|n|) \quad , \quad r > R \end{array} \right] \exp(in(\psi - \varphi)). \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Ряд для главной части такого представления сходится и записывается в следующем виде в пределе при  $\varphi \rightarrow \psi$

$$\begin{aligned}
G_{am}(r, R, \psi, \varphi) = & -\frac{1}{8\pi} \frac{1}{(1 + (2\pi r/L)^2)^{1/4} (1 + (2\pi R/L)^2)^{1/4}} \times \\
& \times [\ln(1 - \cos(\psi - \varphi)) + \ln 2 |n(\psi)|^2]
\end{aligned}$$

В окрестности  $\varphi = \psi$  получаем для производной по радиальной координате

$$\frac{\partial G_{am}(r, R, \psi, \varphi)}{\partial r} = \left( \frac{1}{r^2} + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \right) \frac{r f'(\psi)}{2 |n(\psi)|^2} \operatorname{ctg} \left( \frac{\psi - \varphi}{2} \right).$$

Как следует из [4], эта часть не является сильно сингулярной и соответствующий интеграл считается в смысле главного значения.

Рассмотрим теперь случай глубокой гофрировки. Найдем функцию Грина  $G(r, \rho, \psi, \varphi)$  уравнения (2.23) в прямоугольнике

$$0 < r, \rho < R_a; \quad 0 \leq \psi, \varphi < 2\pi, \quad (3.13)$$

с периодическими по  $\psi, \varphi$  граничными условиями

$$G(r, \rho, \psi + 2\pi, \varphi) = G(r, \rho, \psi, \varphi + 2\pi) = G(r, \rho, \psi, \varphi), \quad (3.14)$$

с условием

$$G(r, R_a, \psi, \varphi) = G(R_a, \rho, \psi, \varphi) = 0, \quad (3.15)$$

и условием ограниченности решения в точке  $r = 0$ :  $|G| < \infty$ .

Функцию Грина аналогично предыдущему случаю будем искать в виде

$$G(r, \rho, \psi, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n(r, \rho) \exp(in(\psi - \varphi)). \quad (3.16)$$

Для функций  $G_n(r, \rho)$  в этом случае получим уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial G_n(r, \rho)}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} G_n(r, \rho) + \left( 2 - \left( \frac{2\pi}{L} n - h \right)^2 \right) G_n(r, \rho) = -\frac{1}{r} \delta(r - \rho).$$

Его решение будем искать в виде разложения по полной системе функций краевой задачи

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial y(r)}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} y(r) = -\lambda y(r)$$

с граничным условием

$$y(R_a) = 0, \tag{3.17}$$

и условием ограниченности решения в точке  $r = 0 : |y| < \infty$ .

Собственные функции этой задачи имеют вид

$$y_k = \alpha_n^k J_n(\mu_n^k r / R_a).$$

Здесь  $\mu_n^k$  —  $k$ -ый положительный корень уравнения  $J_n(\mu_n^k)$ , а

$$(\alpha_n^k)^2 = \frac{2}{R_a^2 \left( |J_n'(\mu_n^k)|^2 + \left(1 - n^2 / |\mu_n^k|^2\right) J_n^2(\mu_n^k) \right)} = \frac{2}{R_a^2 J_{n-1}^2(\mu_n^k)}.$$

Собственные значения

$$\lambda_n^k = \left( \frac{\mu_n^k}{R_a} \right)^2.$$

Для функции Грина окончательно получаем выражение

$$G(r, \rho, \varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} g_n^k J_n(\mu_n^k r / R_a) J_n(\mu_n^k \rho / R_a) \exp(in(\varphi - \psi)), \tag{3.18}$$

где

$$g_n^k = \frac{(\alpha_n^k)^2}{\left( \left( \frac{\mu_n^k}{R_a} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{L} n - h \right)^2 - 2 \right)}.$$

Преимущество такого представления состоит в том, что от параметра  $r$  зависят только коэффициенты  $g_n^k$ .

Мы воспользовались спектральным представлением, так как с его помощью удалось получить аналитические значения коэффициентов системы линейных уравнений для коэффициентов Фурье неизвестных плотностей граничных интегральных уравнений.

#### 4. Постановка задачи о поиске собственных мод винтового волновода

Для отыскания распространяющихся мод и соответствующих собственных чисел винтового волновода сформулируем задачу для системы граничных интегральных уравнений. Для этого воспользуемся граничными условиями (2.19) и (2.21). В соотношение (2.21) входит вторая производная по угловой координате, поэтому при сведении задачи к системе граничных интегральных уравнений появляются

гиперсингулярные слагаемые [12]. Введем дополнительную компоненту, выбрав в качестве ее первую квадратную скобку из (2.21). Это можно сделать, так как она стоит под знаком полной производной, т.е. дифференцирование идет по границе области. В результате получим следующую систему соотношений на границе области

$$\left( \frac{d}{d\psi} [w] - ir \left[ \frac{f'}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial r} \right] \right) \Big|_S = 0. \quad (4.1)$$

$$w = \left( \frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} - ihu \right) \Big|_S. \quad (4.2)$$

В (4.1) вторая квадратная скобка является фактически производной по нормали от функции  $v$ .

Рассмотрим функцию

$$u(r, \psi) = \int_0^{2\pi} \tilde{\alpha}(\varphi) G(r, \psi, f(\varphi), \varphi) \sqrt{f(\varphi)^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi,$$

Здесь

$$r \sqrt{1 + (f'/r)^2} \Big|_{\partial V} d\varphi = \sqrt{f(\varphi)^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi$$

элемент поверхности,

$$G(r, \psi, f(\varphi), \varphi)$$

функция Грина эллиптического оператора (2.23) с главной частью, не являющейся лапласианом. Очевидно, что функция  $u$  является решением уравнения (2.23) внутри волновода. Пусть

$$a(r, \varphi) = \sqrt{r^2 + (f')^2 (1 + (2\pi r/L)^2)^2}. \quad (4.3)$$

Тогда

$$\vec{\nu} = \frac{1}{a} (r \cos \varphi + f'(1 + (2\pi r/L)^2) \sin \varphi, \quad r \sin \varphi - f'(1 + (2\pi r/L)^2) \cos \varphi) \quad (4.4)$$

вектор конормали к поверхности  $r = f(\varphi)$  в декартовых координатах. В цилиндрических координатах

$$\vec{\nu}_\perp = \frac{1}{a} (1, +r f'(1/r^2 + (2\pi/L)^2)).$$

Производная по направлению конормали в точке на поверхности определяется выражением [14]

$$\left( \frac{\partial u(r, \psi)}{\partial \nu} \right)^\pm = \mp \frac{\tilde{\alpha}(\psi)}{2a(f(\psi), \psi)} + \int_0^{2\pi} \tilde{\alpha}(\varphi) \frac{\partial G(r, \psi, f(\varphi), \varphi)}{\partial \nu} \sqrt{f(\varphi)^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (4.5)$$

Для произвольного направления

$$\left(\frac{\partial u(r, \psi)}{\partial l}\right)^\pm = \mp \frac{\tilde{\alpha}(\psi)}{2\tilde{a}_l(f(\psi), \psi)} + \int_0^{2\pi} \tilde{\alpha}(\varphi) \frac{\partial G(r, \psi, f(\varphi), \varphi)}{\partial l} \sqrt{f(\varphi)^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (4.6)$$

Здесь

$$\tilde{a}_l(f(\psi), \psi) = a(f(\psi), \psi) \frac{\cos(n\nu)}{\cos(nl)}, \quad \cos(n\nu) = \frac{r^2 + (f')^2(1 + (2\pi r/L)^2)}{a\sqrt{(r^2 + (f')^2)}}, \quad (4.7)$$

$$\cos(nr) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (f')^2}}, \quad \cos(n\psi) = -\frac{f'}{\sqrt{r^2 + (f')^2}}. \quad (4.8)$$

Мы можем воспользоваться тем, что при вычислении производной от граничного потенциала по радиальному направлению соответствующий косинус угла с нормалью к поверхности не обращается в нуль и соответствующее слагаемое в граничном интегральном уравнении при представлении его потенциалом простого слоя будет «второго рода». С производной  $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$  по угловой координате можно поступить следующим образом, добавив и вычитая слагаемое  $f' \frac{\partial u}{\partial r}$  мы получаем полную производную по угловой координате минус слагаемое с производной по радиальной координате  $\frac{du}{d\varphi} - f' \frac{\partial u}{\partial r}$ . Для упрощения выкладок обозначим

$$a_l = \frac{1}{2\tilde{a}_l \sqrt{r^2 + (f')^2}}.$$

Тогда производная по направлению запишется в виде

$$\left(\frac{\partial u(r, \psi)}{\partial l}\right)^\pm = \mp a_l \alpha(\psi) + \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \frac{\partial G}{\partial l} d\varphi. \quad (4.9)$$

Производные по конормали и кокасательная производная имеют вид

$$\frac{\partial G(r, \psi)}{\partial \nu} = \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \psi} (r f' (1/r^2 + (2\pi/L)^2)) \right],$$

$$\frac{\partial G(r, \psi)}{\partial \nu_\perp} = \frac{1}{a} \left[ -\frac{\partial G}{\partial r} (r f' (1/r^2 + (2\pi/L)^2)) + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \psi} \right].$$

Рассмотрим функции

$$u(r, \psi) = \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) G(r, \psi, f(\varphi), \varphi) d\varphi,$$



$$v(r, \psi) = \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) \frac{\partial G(r, \psi, f(\varphi), \varphi)}{\partial n} d\varphi, \quad (4.10)$$

$$w(r, \psi) = \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) \frac{\partial G(r, \psi, f(\varphi), \varphi)}{\partial n} d\varphi.$$

Здесь  $G(r, \psi, \rho, \varphi,)$  — функция Грина оператора (2.23) с соответствующими глубине гофрировки граничными условиями. Элемент поверхности  $dS = \sqrt{f^2 + (f')^2} d\varphi$ . Можно считать, что соответствующий множитель в дальнейшем присоединен к неизвестным весам  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Тогда каждая из них удовлетворяет уравнению (2.23). Для нахождения неизвестных плотностей  $\alpha(\varphi)$ ,  $\beta(\varphi)$ ,  $\gamma(\varphi)$  воспользуемся граничными условиями (4.1) и дополнительно введенным соотношением (4.2).

Так как выражения (4.10) являются выражениями типа потенциала простого и двойного слоя, то в результате получаем систему граничных интегральных уравнений

$$a_n \gamma(\psi) + \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) \frac{\partial G(\varphi)}{\partial n} d\varphi - \frac{2\pi}{L} \frac{d}{d\psi} \left[ \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) G(\varphi) d\varphi \right] + \frac{2\pi}{L} f' \left( a_r \alpha(\psi) + \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \frac{\partial G(\varphi)}{\partial r} d\varphi \right) + ih \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) G(\varphi) d\varphi = 0, \quad (4.11)$$

$$h \left( a_n \gamma(\psi) + \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) \frac{\partial G(\varphi)}{\partial n} d\varphi \right) - \frac{2\pi}{L} r \left( a_r \beta(\psi) + \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) \frac{\partial G(\varphi)}{\partial r} d\varphi \right) - i^2 \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) G(\varphi) d\varphi = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{d\psi} \left[ a_n \gamma(\psi) + \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) \frac{\partial G(\varphi)}{\partial n} d\varphi \right] - ir \left( a_n \beta(\psi) + \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) \frac{\partial G(\varphi)}{\partial n} d\varphi \right) = 0. \quad (4.13)$$

Допустим, что мы нашли нетривиальное решение системы (4.11)-(4.13). Это значит, что на границе области выполнено соотношение (4.2), но из него не следует выполнение этого же соотношения внутри области. Зная  $w$  внутри области, нельзя однозначно найти  $u$ , проинтегрировав это соотношение по  $\psi$  при фиксированном  $r$ . При малом  $r$  должно найтись периодическое решение, а при интегрировании между точками граничной поверхности должны быть удовлетворены два граничных условия. Тем не менее, уравнению (2.23) удовлетворяет не только функция  $u(r, \psi)$ , но и  $\frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} - ihu$ . В силу (4.2) граничные значения  $w(r, \psi)$  из (4.10) и функции

$\frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} - ihu$  совпадают. Если область, ограниченная кривой (2.14), не является резонансной областью задачи Дирихле для оператора (2.23), то в силу единственности решения задачи Дирихле из того, что совпадают граничные значения этих (практически гармонических) функций, следует, что совпадают и сами функции на всей области. А это значит, что выполняются граничные условия (2.19) и (2.21).

Соотношения можно интегрировать по угловой координате в представлении в виде ряда Фурье, учитывая периодичность получаемой первообразной, что требует отдельного рассмотрения вхождения среднего значения, т.е. нулевой гармоники. Соответствующий множитель элемента поверхности  $dS = \sqrt{f^2 + (f')^2} d\varphi$  в дальнейшем присоединим и к функции  $a(r, \varphi)$ .

### 5. Случай мелкой гофрировки

Предположим, что мы можем продолжить функцию

$$v(r, \psi) = \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) G(r, \psi, f(\varphi), \varphi) d\varphi,$$

где в качестве функции Грина используется представление (3.8), за границу расчетной области, задаваемой кривой  $r = f(\varphi)$ , до некоторого минимального объемлющего круга. Тогда интегрирование можно вести по границе круга — окружности фиксированного радиуса. Если функцию  $\beta(\varphi)$  представить в виде соответствующего ряда Фурье

$$\beta(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n e^{in\varphi},$$

то на границе винтовой поверхности функция  $v(r, \psi)$  также может быть представлена в виде ряда Фурье, а также в виде функционального ряда с коэффициентами Фурье функции  $\beta(\varphi)$ . Для простоты ограничимся случаем  $f(\varphi) = a + b \sin m\varphi$

$$v = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k e^{ik\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n Z_n(n(a + b \sin m\varphi)) e^{in\varphi}, \tag{5.1}$$

$c_n$  отличается от  $\tilde{c}_n$  лишь множителем, зависящим от радиуса окружности  $R$ , по которой велось интегрирование. Здесь  $Z_n$  — обобщенное обозначение соответствующей функции  $J_n$  или  $I_n$ . Это представление получается в результате подстановки соответствующего разложения в ряд Фурье функции  $\beta(\varphi)$  в интегральное представление функции  $v$  (4.10), интегрирования по границе объемлющего круга и переходе на границу исходной поверхности. Разложим функции Бесселя, зависящие от  $\sin m\varphi$  и являющимися периодическими функциями с периодом  $2\pi/m$  в ряд Фурье с периодом  $2\pi$ . Тогда

$$J_n(n(a + b \sin m\varphi)) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} d_{n,mj} e^{imj\varphi}, \tag{5.2}$$

где

$$d_{n,mj} = \frac{m}{2\pi} \int_0^{2\pi/m} J_n(n(a + b \sin m\varphi)) e^{-imj\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_n(n(a + b \sin \varphi)) e^{-ij\varphi} d\varphi.$$

Обозначим

$$d_{n,k}^{\pm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_{n\pm 1}(n(a + b \sin m\varphi)) e^{-ik\varphi} d\varphi,$$

$$I_n(n(a + b \sin m\varphi)) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} d_{n,mj} e^{imj\varphi}.$$

Тогда

$$v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} cv_n Z_n(n(a + b \sin m\varphi)) Z_n^*(nR) e^{in\varphi}.$$

Здесь  $Z_n$  в зависимости от знака  $n$  либо  $J_n$  либо  $I_n$ ,

$$Z_n^*(nR) = \begin{cases} i\frac{\pi}{2} H_n^{(1)}(nR) & \frac{2}{n} > 0, \\ K_n(nR) & \frac{2}{n} < 0. \end{cases}$$

Окончательно получаем

$$v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} cv_n d_{n,mj} Z_n^*(nR) e^{imj\varphi} \right) e^{in\varphi}.$$

Естественно, в дальнейшем мы будем вместо индекса  $n$  использовать конструкцию

$$j_{mn} = j_m + mn, \quad j_m = 0, \dots, m-1, \quad n \in \mathbf{Z}_n. \quad (5.3)$$

и будем указывать, что аргумент у функции  $Z_n$  зависит от  $n$ .

$$v = \sum_{j_m=0}^{m-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} cv_{j_{mn}} d_{j_{mn},mj}(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^*(j_{mn}R) \right) e^{im(j+n)\varphi} e^{ij_m\varphi}.$$

Введем вместо  $j$  новый индекс суммирования  $k = j + n$ , а затем сменим порядок суммирования:

$$v = \sum_{j_m=0}^{m-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} cv_{j_{mn}} d_{j_{mn},m(k-n)}(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^*(j_{mn}R) \right) e^{imk\varphi} e^{ij_m\varphi} =$$

$$= \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{j_m,k} e^{imk\varphi}, \quad (5.4)$$

$$v_{j_m,k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} cv_{j_{mn}} d_{j_{mn},m(k-n)}(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R) \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= \sum_{j_m=0}^{m-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ij_{mn} cv_{j_{mn}} d_{j_{mn},m(k-n)}(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R) \right) e^{imk\varphi} e^{ij_m\varphi} = \\ &= \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{j_m,mk}^- e^{imk\varphi}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$v_{j_m,mk}^- = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ij_{mn} cv_{j_{mn}} d_{j_{mn},m(k-n)}(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R). \tag{5.7}$$

Введем обозначение

$$\alpha_z = \begin{cases} -1, & \text{при } Z = J, \\ 1, & \text{при } Z = I, \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k^+ e^{ik\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} cv_{nn} \frac{dZ_n}{dr} (n(a + b \sin m\varphi)) e^{in\varphi},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= \sum_{j_m=0}^{m-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j_{mn}}{2} \left[ d_{j_{mn},m(k-n)}^-(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \alpha_z d_{j_{mn},m(k-n)}^+(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R) \right] cv_{j_{mn}} \right) e^{imk\varphi} e^{ij_m\varphi} = \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{j_m,mk}^+ e^{imk\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{j_m,k}^+ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j_{mn}}{2} \left[ d_{j_{mn},m(k-n)}^-(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R) + \right. \\ &\left. + \alpha_z d_{j_{mn},m(k-n)}^+(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R) \right] cv_{j_{mn}}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Теперь вычислим коэффициенты  $d_{n,mk}$

$$\begin{aligned} J_n(a_n + b_n \sin m\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a_n + b_n \sin m\varphi) \sin \vartheta} e^{in\vartheta} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(a_n) e^{ip\vartheta} \right) \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(b_n \sin \vartheta) e^{ikm\varphi} \right) e^{in\vartheta} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(a_n) \int_{-\pi}^{\pi} J_k(b_n \sin \vartheta) e^{i(p+n)\vartheta} d\vartheta \right\} e^{imk\varphi}. \end{aligned}$$

Мы получили, что в разложении отличны от нуля только коэффициенты с номерами, кратными  $m$ , т.е. числу заходов винта.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} J_k(b_n \sin \vartheta) e^{i(p+n)\vartheta} d\vartheta &= \int_0^{\pi} J_k(b_n \sin \vartheta) e^{i(p+n)\vartheta} d\vartheta + (-1)^k \int_0^{\pi} J_k(b_n \sin \vartheta) e^{-i(p+n)\vartheta} d\vartheta = \\ &= \pi J_{(k-p-n)/2}(b_n/2) J_{(k+p+n)/2}(b_n/2) (e^{i\pi(p+n)/2} + (-1)^k e^{-i\pi(p+n)/2}). \\ J_{n,mk}(a_n + b_n \sin m\varphi) d_{n,mk} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} J_k(a_n + b_n \sin m\varphi) e^{-imk\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(a_n) J_{(k-p-n)/2}(b_n/2) J_{(k+p+n)/2}(b_n/2) (e^{i\pi(p+n)/2} + (-1)^k e^{-i\pi(p+n)/2}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{p-n}(a_n) J_{(k-p)/2}(b_n/2) J_{(k+p)/2}(b_n/2) (e^{i\pi p/2} + (-1)^k e^{-i\pi p/2}). \end{aligned}$$

Так как полученное выражение отлично от нуля только при четном  $k - p = 2s$  и  $k + p = 2(s + p)$ , то можно ввести новый индекс суммирования  $s$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_k(b_n \sin \theta) e^{i(p+n)\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} i^{k-2s} J_{k-n-2s}(a_n) J_s(b_n/2) J_{k+s}(b_n/2).$$

Новая индексация (5.3) дает

$$d_{j_{mn},mk} = \frac{i^k}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s J_{k-j_{mn}-2s}(a_{j_{mn}}) J_s(b_{j_{mn}}/2) J_{k-s}(b_{j_{mn}}/2).$$

Вычисление коэффициентов  $d_{n,mk}$ , получающееся суммированием ряда, каждый член которого является произведением трех функций от параметров  $n$  и  $k$ , может быть выполнено с помощью рядов Фурье. Для упрощения записи суммирования ряда Фурье и разложения в ряд, мы будем пользоваться символикой интегрального преобразования Фурье.

Для пояснения вычислим функцию

$$G(k, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k - n - 2s) g(s) g(k + s) ds.$$

Сделаем преобразование Фурье по переменной  $k$

$$F_{qk}^{-1} G(q, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k - n - 2s) g(s) g(k + s) e^{-iqk} dk ds.$$

Теперь выразим функцию  $f$  через ее преобразование Фурье по переменной  $t$

$$F_{qk}^{-1}G(q, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(t)g(s)g(k+s)e^{it(k-n-2s)}e^{-iqk} dk ds dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(t)e^{-int} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{-i(3t-q)s} ds \int_{-\infty}^{+\infty} g(k+s)e^{-i(q-t)(k+s)} d(k+s) dt.$$

Выразим внутренние интегралы через образы Фурье функции  $g$

$$\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(t)e^{-int} Fg(3t-q)Fg(q-t) dt.$$

Применим обратное преобразование по переменной  $q$ , используя тот факт, что можно воспользоваться комбинацией  $q - 2t$

$$G(k, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(t)e^{-i(n-2k)t} F^{-1}(Fg(t-q)Fg(t+q)) dt.$$

Для получения функции  $G(k, n)$  осталось сделать прямое преобразование Фурье по переменной  $t$ . Таким образом получение суммы ряда для каждой пары  $(k, n)$  свелось к применению двух прямых и двух обратных преобразований Фурье. Для конечных сумм размерности  $N$  вместо  $N^3$  действий используется  $4N \ln N$ .

Приведем систему уравнений граничных условий (4.1) с учетом введенной компоненты  $w$  (4.2) к такому виду, чтобы в коэффициентах при неизвестных функциях и их производных не было деления на величины  $r, f$ , их производные и комбинации. Тогда в эти коэффициенты будут входить только синусы и косинусы от аргументов, кратных  $m$ , т.е. кратных числу заходов винта на граничной поверхности. В результате вместо системы граничных интегральных уравнений общего вида с произвольным граничным контуром, к которой мы свели задачу, получим систему

$$i \frac{2\pi}{L} r \frac{\partial v}{\partial r} - {}^2 u - ihw = 0, \tag{5.9}$$

$$\frac{d}{d\psi} [rw] - f'w + ir^2 \frac{\partial v}{\partial r} - if' \frac{\partial v}{\partial \psi} = 0, \tag{5.10}$$

$$\frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} -ihu - w = 0, \tag{5.11}$$

в которой будем использовать представления неизвестных функций рядами Фурье вида (5.4)-(5.8).

Из последнего уравнения можно выразить гармоники Фурье функции  $u$  на граничной поверхности, используя выражения типа (5.4) для функции  $w$  и (5.7)

для  $u$ , найти проекции на  $e^{imq}$  и приравнять коэффициенты Фурье функций  $w$  и  $u$ . Получим

$$cu_{jmn} = \frac{-icw_{jmn}}{\left(\frac{2\pi}{L}(jmn) - h\right)}. \quad (5.12)$$

Таким образом, получив возможность выразить элементы  $cu_k$  через  $cw_k$ , мы можем в случае мелкой гофрировки ограничиться только двумя уравнениями относительно неизвестных  $u$  и  $w$ . Их проекции на гармоники Фурье дают нам линейную алгебраическую систему для коэффициентов  $cw_{jmn}$  и  $cu_{jmn}$ . Факторизация по параметру  $J_m$  приводит ее к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jmn \left[ a \left[ d_{jmn, m(k-n)}^-(jmn) + \alpha_z d_{jmn, m(k-n)}^+(jmn) \right] - \right. \\ & \quad - i \frac{b}{2} \left[ d_{jmn, m(k-n+1)}^-(jmn) + \alpha_z d_{jmn, m(k-n+1)}^+(jmn) \right] - \\ & \quad \left. - i \frac{b}{2} \left[ d_{jmn, m(k-n-1)}^-(jmn) + \alpha_z d_{jmn, m(k-n-1)}^+(jmn) \right] \right] cw_{jmn} - \\ & \quad - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{L}(jmn) - h\right)} + h \right] d_{jmn, m(k-n)}(jmn) cw_{jmn} = 0, \\ & \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ ad_{jmn, m(k-n)}(jmn) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{b}{2} \left[ \left(\frac{m}{k} - i\right) d_{jmn, m(k-n+1)}(jmn) + \left(\frac{m}{k} + i\right) d_{jmn, m(k-n-1)}(jmn) \right] \right] cw_{jmn} + \\ & \quad + i \frac{b}{k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{jmn}{2} \left[ \left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right) \left[ d_{jmn, m(k-n)}^-(jmn) + d_{jmn, m(k-n)}^+(jmn) \right] - \right. \right. \\ & \quad - iab \left[ d_{jmn, m(k-n+1)}^-(jmn) + d_{jmn, m(k-n+1)}^+(jmn) \right] + \\ & \quad \left. + \left[ d_{jmn, m(k-n-1)}^-(jmn) + d_{jmn, m(k-n-1)}^+(jmn) \right] - \right. \\ & \quad - \frac{b^2}{4} \left[ d_{jmn, m(k-n+2)}^-(jmn) + d_{jmn, m(k-n+2)}^+(jmn) \right] - \\ & \quad \left. \left. - \frac{b^2}{4} \left[ d_{jmn, m(k-n-2)}^-(jmn) + d_{jmn, m(k-n-2)}^+(jmn) \right] \right] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{bm(jmn)}{2} \left[ d_{jmn, m(k-n+1)}(jmn) + d_{jmn, m(k-n-1)}(jmn) \right] \right\} cw_{jmn} = 0. \end{aligned}$$

### 6. Случай глубокой гофры

Используем функцию Грина (3.18) для интегрального представления полей в винтовом волноводе в случае глубокой гофры, когда интегрирование ведется по контуру

$$\rho_\delta(\psi) = a_\delta + b \sin m\psi, \quad a_\delta > a,$$

$$u(r, \varphi) = \int_C \alpha_c(\psi) G(r, \rho(\psi), \varphi, \psi) dS.$$

Перейдем от интегрирования по длине дуги к интегрированию по переменной  $\psi$ , включив элемент длины дуги  $\sqrt{(\rho^2(\psi) + (\rho'(\psi))^2)}$  в функцию  $\alpha(\psi) = \alpha_c(\psi) \sqrt{(\rho^2(\psi) + (\rho'(\psi))^2)}$ ,

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\psi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} g_n^k J_n(\mu_n^k r / R_a) J_n(\mu_n^k \rho_\delta(\psi) / R_a) \exp(in(\varphi - \psi)) d\psi.$$

Теперь воспользуемся разложениями функций Бесселя в ряды

$$J_n(\mu_n^k r(\varphi) / R_a) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} d_{n,mj}^k e^{imj\varphi}, \quad J_n(\mu_n^k \rho_\delta(\psi) / R_a) = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} d_{n,mj_1}^{\delta,k} e^{imj_1\psi},$$

$$\alpha(\psi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha_l e^{il\psi}.$$

Тогда

$$u(r(\varphi), \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \alpha_l g_n^k d_{n,mj}^k d_{n,mj_1}^{\delta,k} e^{i(mj+n)\varphi} e^{i(mj_1+l-n)\psi} d\psi.$$

В результате интегрирования суммирование по индексу  $n$  пропадает и вместо индекса  $n$  будет  $n = l + mj_1$

$$u(r(\varphi), \varphi) = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha_l g_{l+mj_1}^k d_{l+mj_1,mj}^k d_{l+mj_1,mj_1}^{\delta,k} e^{i(l+m(j+j_1))\varphi}.$$

Коэффициенты  $d_{n,mj}^k$  и  $d_{n,mj}^{\delta,k}$  нужно считать только один раз для каждого заданного граничного контура. Введем вместо  $l$  двойной индекс суммирования  $l = j_m + mn$ . Естественно, меняя при этом порядки суммирования (замена индекса производится для внутреннего индекса). В результате всех смен порядков суммирования



получим

$$\sum_{j_m=0}^{m-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j_m+mn} g_{j_m+m(n+j_1)k}^k d_{j_m+m(n+j_1),mj}^k d_{j_m+m(n+j_1),mj_1}^{\delta,k} \right] \times \\ \times e^{ij_m\varphi} e^{im(n+j+j_1)\varphi}.$$

Вместо индекса  $j$  введем  $q = n + j + j_1$  и получим

$$\sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j_m+mn} g_{j_m+m(n+j_1)k}^k d_{j_m+m(n+j_1),m(q-n-j_1)}^k \times \right. \\ \left. \times d_{j_m+m(n+j_1),mj_1}^{\delta,k} \right] e^{imq\varphi}.$$

Вместо индекса  $j_1$  введем  $j = n + j_1$  и получим

$$= \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j_m+mn} g_{j_m+mj}^k d_{j_m+mj,m(q-j)}^k d_{j_m+mj,m(j-n)}^{\delta,k} \right] e^{imq\varphi}.$$

Изменим порядок суммирования, получаем выражение, аналогичное (5.4)

$$u(r(\varphi), \varphi) = \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j_m+mn} \Omega_{qn} \right] e^{imq\varphi},$$

где

$$\Omega_{qn} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_{j_m+mj}^k d_{j_m+mj,m(q-j)}^k d_{j_m+mj,m(j-n)}^{\delta,k}. \quad (6.1)$$

Теперь приведем производные от решения:

$$\frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\psi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} i n g_n^k J_n(\mu_n^k r / R_a) J_n(\mu_n^k \rho_\delta(\psi) / R_a) \exp(in(\varphi - \psi)) d\psi.$$

После аналогичных преобразований окончательно получаем

$$\frac{\partial u(r(\varphi), \varphi)}{\partial \varphi} = \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j_m+mn} \Omega_{\varphi qn} \right] e^{imq\varphi},$$

где

$$\Omega_{\varphi qn} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} i(j_m + mj) g_{j_m+mj}^k d_{j_m+mj,m(q-j)}^k d_{j_m+mj,m(j-n)}^{\delta,k}. \quad (6.2)$$

Для производной по  $r$

$$\frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\psi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (\mu_n^k / R_a) g_n^k J_n'(\mu_n^k r / R_a) J_n(\mu_n^k \rho_\delta(\psi) / R_a) \times \\ \times \exp(in(\varphi - \psi)) d\psi, \\ \frac{\partial u(r(\varphi), \varphi)}{\partial r} = \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j_m+mn} \Omega r_{qn} \right] e^{imq\varphi},$$

где

$$\Omega r_{qn} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (\mu_n^k / 2R_a) g_{j_m+mj}^k [d_{j_m+mj, m(q-j)}^{-,k} + d_{j_m+mj, m(q-j)}^{+,k}] d_{j_m+mj, m(j-n)}^{\delta, k}. \quad (6.3)$$

Выражение для  $\Omega n_{qn}$  легко получается с помощью линейной комбинации  $\Omega r_{qn}$  и  $\Omega \varphi_{qn}$  и разложения  $\frac{f'}{r}$  в соответствующий ряд Фурье.

В систему уравнений (4.11)-(4.13) кроме интегральных составляющих входят выражения типа  $a_n \gamma(\psi)$ , где коэффициенты разлагаются в соответствующие ряды Фурье

$$a_n(\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{n,l} e^{iml\varphi}.$$

Тогда

$$a_n \gamma(\psi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{n,l} e^{iml\varphi} \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_{j_m+mj} e^{imj\varphi} \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{n,l} \gamma_{j_m+mj} e^{im(j+l)\varphi}.$$

Заменяя  $q = j + l$ , получаем

$$a_n \gamma(\psi) = \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_{j_m+mj} a_{n,q-j} \right) e^{imq\varphi}.$$

Теперь мы можем, подставив полученные представления для функций  $u, v, w$  и их производных и перейдя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , т.е. при стремлении контура интегрирования к границе волновода, заменить систему уравнений (4.11) - (4.13) соответствующей бесконечной системой линейных алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье неизвестных функций. Предварительно проинтегрируем первое и третье уравнения по  $\varphi$ , учитывая условие периодичности и особо выделяя случай  $j_m + q = 0$ .

Как коэффициенты уравнений системы, так и коэффициенты разложения входящих в уравнения неизвестных функций и их производных нумеруются с шагом, равным числу заходов винтовой поверхности. Поэтому в разложении уравнений в

ряды Фурье в коэффициент при каждой гармонике будут входить суммы коэффициентов Фурье неизвестных функций с шагом, равным числу заходов винта на поверхности волновода. Следовательно, система линейных уравнений распадается на точно такое же число независимых подсистем. Случаю  $j_m = 0$  соответствует линейное подпространство в линейном пространстве показателей экспонент базисных функций преобразования Фурье.  $j_m \neq 0$  определяет соответствующий класс смежности в этом пространстве [18].

Для фиксированного  $j_m$  получаем замкнутую подсистему. Распишем ее проекцию на  $e^{i(j_m+q)\varphi}$  при  $j_m + q \neq 0$ .

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{j_m + q} (a_{n,q-j} + \Omega n_{q,j}) \gamma_{j_m+mj} - \frac{2\pi}{L} \Omega_{q,j} \alpha_{j_m+mj} + \frac{1}{(j_m + q)} \left( \frac{2\pi}{L} ((f' a_r)_{q-j} + (f' \Omega r)_{q,j}) + ih \Omega_{q,j} \right) \alpha_{j_m+mj} \right) = 0, \quad (6.4)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left( h (a_{n,q-j} + \Omega n_{q,j}) \gamma_{j_m+mj} - \frac{2\pi}{L} ((r a_r)_{q-j} + (r \Omega r)_{q,j}) \beta_{j_m+mj} - i^2 \Omega_{q,j} \alpha_{j_m+mj} \right) = 0, \quad (6.5)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left( (a_{n,q-j} + \Omega n_{q,j}) \gamma_{j_m+mj} - i \frac{1}{j_m + mj} ((r a_n)_{q-j} + (r \Omega n)_{q,j}) \beta_{j_m+mj} \right) = 0.$$

Отдельно распишем проекции первого и третьего уравнений на нулевую гармонику  $j_m + mq = 0$ , что возможно лишь при  $j_m = q = 0$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left( (a_{n,-j} + \Omega n_{0,j}) \gamma_{mj} + \left( \frac{2\pi}{L} ((f' a_r)_{-j} + (f' \Omega r)_{0,j}) + ih \Omega_{0,j} \right) \alpha_{mj} \right) = 0,$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} ((r a_n)_{-j} + (r \Omega n)_{0,j}) \beta_{mj} = 0.$$

## 7. Поиск дисперсионных кривых

Заменив систему интегральных уравнений (4.11)-(4.13) соответствующей бесконечной системой линейных алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье неизвестных функций для случая мелкой гофры и системы (6.4)-(6.5) для глубокой гофры, выделим из них подсистемы для фиксированного  $j_m$ . В обоих случаях ограничимся конечномерной матрицей для коэффициентов при гармониках  $e^{-iN\varphi}, \dots, e^{iN\varphi}$ . Найдем её сингулярное представление. Теперь в качестве минимизируемого функционала возьмем наименьшее  $s_N$  – число этой матрицы. Точкой на приближенной дисперсионной кривой и будет  $\min(s_N)_h$ . Дисперсионная кривая находится предельным переходом при  $N \rightarrow \infty$ .

Для облегчения вычислений дисперсионных кривых мы можем искать величину  $h$  при вариации  $l$ . График зависимости минимального  $s$ -числа от  $l$  носит ярко выраженный «клювообразный» характер.

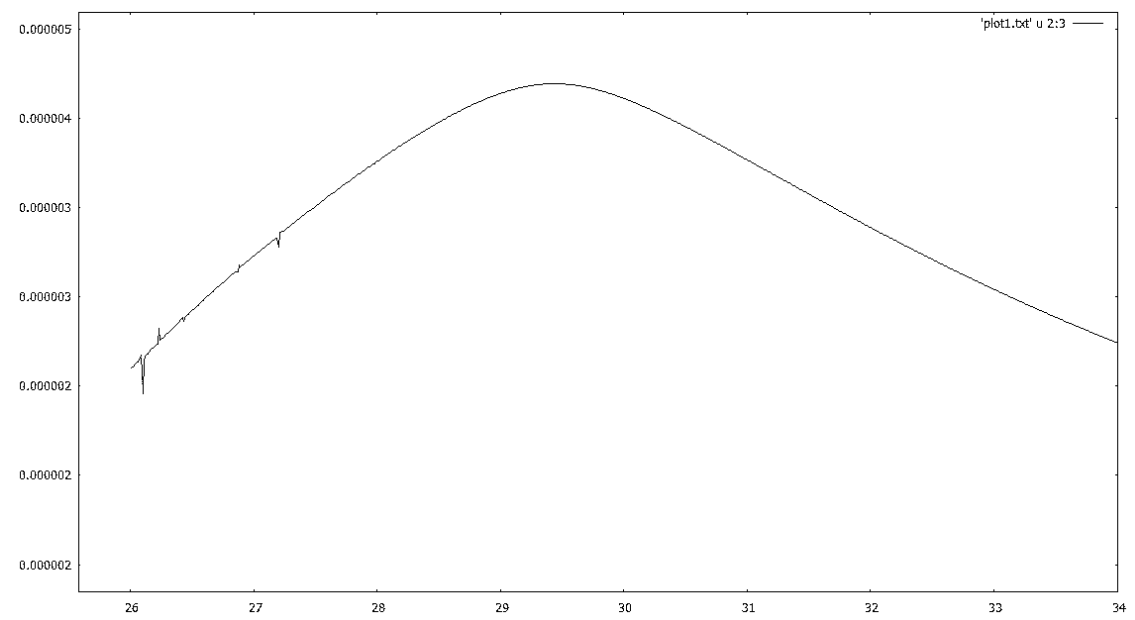


Рис. 2 График зависимости MinS-числа от волнового числа. Узкие провалы – область локализации собственных мод.

Так как для случая мелкой гофры входящие в функцию Грина (3.8) функции Бесселя зависят от параметра  $h$ , то для движения вдоль дисперсионной кривой, соответствующей «дну» узкого глубокого оврага, необходимо упростить способ вариации минимального  $s$ -числа, для чего необходимо упростить сначала варьирование коэффициентов исходной матрицы.

Введем величину  $h_0$  и будем искать приращение  $\delta$  значения  $h_0$  при фиксированной величине  $l$

$$h_0^2 = l^2 - \left( \frac{2\pi(m + h_f)}{l} \right)^2, \quad h_{0,\delta}^2 = h_0^2$$

и теперь по найденному значению  $h_f = \frac{l}{2L} (h_0 + \delta)$  находим соответствующее значение  $h$ .

$$h_{jmn} = \left( \frac{0L}{2\pi(j_{mn})} \right)^2 - 1 + \frac{2Lm}{lj_{mn}} + \frac{h_0}{j_{mn}},$$

$$j_{mn} = \frac{2\pi}{L} |j_{mn}| \kappa_{jmn},$$

$$j_{mn,\delta} = \frac{2\pi}{L} |j_{mn}| \sqrt{\kappa_{jmn}^2 + \delta/j_{mn}},$$

$$\Delta_{jmn,\delta} = \frac{j_{mn,\delta}}{j_{mn}} = \sqrt{1 + \delta/j_{mn}\kappa_{jmn}^2}.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{jmn}^2 &= 1 - \left( \frac{{}_0L}{2\pi jmn} \right)^2 - \frac{2Lm}{ljmn} - \frac{h_0}{jmn}, \\ \chi_{j_m,n} &= \frac{2\pi}{L} |jmn| \tilde{\kappa}_{jmn}, \\ \chi_{jmn,\delta} &= \frac{2\pi}{L} |jmn| \sqrt{\tilde{\kappa}_{jmn}^2 - \delta/jmn}, \\ \tilde{\Delta}_{jmn,\delta} &= \frac{\chi_{jmn,\delta}}{\chi_{jmn}} = \sqrt{1 - \delta/jmn \tilde{\kappa}_{jmn}^2}.\end{aligned}$$

Воспользуемся известными разложениями теоремы умножения для функций Бесселя:

$$J_p(a_{jmn,\delta}) = J_p(a_{jmn} \Delta_{jmn,\delta}) = (-1)^p \Delta_{jmn,\delta}^{|p|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_{|p|+k}(a_{jmn}) \left( a_{jmn} \frac{1 - \Delta_{jmn,\delta}^2}{2} \right)^k.$$

Это разложение Ломмеля, (Ватсон, стр. 154), справедливо при  $p \geq 0$ .

$$\begin{aligned}J_p(a_{jmn,\delta}) &= (-1)^p \Delta_{jmn,\delta}^{|p|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_{|p|+k}(a_{jmn}) \left( \frac{a_{jmn}}{2} \left( 1 - \frac{2}{jmn} \right) \right)^k = \\ &= (-1)^p \Delta_{jmn,\delta}^{|p|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_{|p|+k}(a_{jmn}) \left( \frac{a_{jmn} \frac{2}{jmn} - \frac{2}{jmn,\delta}}{2} \right)^k = \\ &= (-1)^p \Delta_{jmn,\delta}^{|p|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_{|p|+k}(a_{jmn}) \left( -\frac{a \left( \frac{2\pi}{L} (jmn) \right)^2 \frac{\delta}{jmn}}{2} \right)^k = \\ &= (-1)^p \Delta_{jmn,\delta}^{|p|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_{|p|+k}(a_{jmn}) \left( -\frac{\pi a \delta}{L \kappa_{jmn}} \right)^k, \\ I_p(a \chi_{jmn,\delta}) &= I_p(a \chi_{jmn} \tilde{\Delta}_{jmn,\delta}) \tilde{\Delta}_{jmn,\delta}^{|p|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} I_{|p|+k}(a \chi_{jmn}) \left( \frac{\pi a \delta}{L \tilde{\kappa}_{jmn}} \right)^k.\end{aligned}$$

Аналогичные разложения получаются и для коэффициента  $b/2$ .

Мы получили многоиндексное (тензорное) представление для элементов коэффициентов матрицы нашей линейной системы. Для его реализации можно воспользоваться идеями работ [25], [27]. Для этого преобразуем произведение рядов по степеням  $\delta$  приращения  $h_0$ .

$$\begin{aligned}&J_s(b_{jmn} \Delta_{jmn,\delta}/2) J_{k-s}(b_{jmn} \Delta_{jmn,\delta}/2) = \\ &= q_b(k, s) \Delta_{jmn,\delta}^{|k-s|+|s|} \sum_{j_1=0}^{+\infty} \sum_{j_2=0}^{+\infty} \frac{1}{j_1! j_2!} J_{|s|+j_1}(b_{jmn}/2) J_{|k-s|+j_2}(b_{jmn}/2) \left( -\frac{\pi b \delta}{2L \kappa_{jmn}} \right)^{j_1+j_2}.\end{aligned}$$

Здесь

$$q_b(k, s) = \begin{cases} 1 & k > s \geq 0, \\ (-1)^k & k < s \leq 0, \\ (-1)^{s-k} & s > k > 0, \\ (-1)^s & s < k \leq 0. \end{cases}$$

Взяв за новые индексы  $j_3 = j_1 + j_2$  и  $j_4 = j_2$  и опять в полученных выражениях обозначая их через  $j_1, j_2$ , находим

$$q_b(k, s) \Delta_{jmn, \delta}^{|k-s|+|s|} \sum_{j_1=0}^{+\infty} \left[ \sum_{j_2=0}^{j_1} \frac{1}{(j_1 - j_2)! j_2!} J_{|s|+j_2}(b_{jmn}/2) J_{|k-s|+j_1-j_2}(b_{jmn}/2) \right] \left( -\frac{\pi b \delta}{2L\kappa_{jmn}} \right)^{j_1}.$$

Выражение в квадратных скобках обозначим  $db_{jmn, s, k}(j_1)$

$$db_{jmn, s, k}(j_1) = \sum_{j_2=0}^{j_1} \frac{1}{(j_1 - j_2)! j_2!} J_{|s|+j_2}(b_{jmn}/2) J_{|k-s|+j_1-j_2}(b_{jmn}/2).$$

Может быть посчитано с помощью Быстрого Преобразования Фурье (БПФ). Для этого зададим два вектора длины  $M = 2^K, 2j_1 + 2 \leq M$ :

$$\left\{ \frac{1}{0!} J_{|s|}(b_{jmn}/2), \frac{1}{1!} J_{|s|+1}(b_{jmn}/2), \dots, \frac{1}{j_1!} J_{|s|+j_1}(b_{jmn}/2), 0, \dots, 0 \right\},$$

$$\left\{ \frac{1}{0!} J_{|k-s|}(b_{jmn}/2), \frac{1}{1!} J_{|k-s|+1}(b_{jmn}/2), \dots, \frac{1}{j_1!} J_{|k-s|+j_1}(b_{jmn}/2), 0, \dots, 0 \right\}.$$

Тогда, взяв от обоих векторов дискретное преобразование Фурье с помощью БПФ, перемножив результаты и применив к произведению обратное к БПФ преобразование, получим вектор длины  $M$ , у которого на первых  $j_1 + 1$  местах будут стоять элементы  $db_{jmn, s, k}(j), j = 0, 1, \dots, j_1$ . Теперь, обозначив

$$kns = |k - jmn - 2s|, \quad ksn_s = |k - s| + |s| + kns,$$

$$q_a(k, s) = \begin{cases} 1 & k - jmn - 2s \geq 0, \\ (-1)^{kns} & k - jmn - 2s < 0, \end{cases}$$

и учитывая, что значение  $j_m$  указано в  $jmn$ , запишем выражение для  $d_{jmn, mk}(\delta)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{i^k}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} q_b(k, s) \Delta_{jmn, \delta}^{|k-s|+|s|} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^s q_a(k, s) J_{kns}(a_{jmn} \Delta_{jmn, \delta}) db_{jmn, s, k}(j) \left( -\frac{\pi b \delta}{2L\kappa_{jmn}} \right)^j = \\ & = \frac{i^k}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s q_a(k, s) q_b(k, s) \Delta_{jmn, \delta}^{ksns} \sum_{j_3=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j_3!} J_{kns+j_3}(a_{jmn}) db_{jmn, s, k}(j) \left( \frac{b}{2a} \right)^j \left( -\frac{\pi a \delta}{L\kappa_n} \right)^{j+j_3}. \end{aligned}$$

Теперь поступим аналогично предыдущему

$$\frac{i^k}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s q_a(k, s) q_b(k, s) \Delta_{jmn, \delta}^{ksns} \sum_{j=0}^{+\infty} dab_{jmn, s, k}(j) \left( -\frac{\pi a \delta}{L \kappa_n} \right)^j.$$

где

$$dab_{jmn, s, k}(j) = \sum_{j_3=0}^j \frac{1}{j_3!} J_{kns+j_3}(a_{jmn}) db_{jmn, s, k}(j-j_3) \left( \frac{b}{2a} \right)^{j-j_3}.$$

Оно также считается с помощью БПФ. Поменяв порядок суммирования, окончательно получаем ряд по малому параметру  $\left( -\frac{\pi a \delta}{L \kappa_n} \right)$

$$d_{jmn, mk}(\delta) = \frac{i^k}{2\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s q_a(k, s) q_b(k, s) \Delta_{jmn, \delta}^{ksns} dab_{jmn, s, k}(j) \right] \left( -\frac{\pi a \delta}{L \kappa_n} \right)^j.$$

Обозначим

$$q_a^{\pm}(k, s) = \begin{cases} 1, & k - j_{mn} - 2s \pm 1 \geq 0, \\ (-1)^{kns}, & k - j_{mn} - 2s \pm 1 < 0, \end{cases}$$

$$dab_{jmn, s, k}^{\pm}(j) = \sum_{j_3=0}^j \frac{1}{j_3!} J_{kns \mp 1 + j_3}(a_{jmn}) db_{jmn, s, k}(j-j_3) \left( \frac{b}{2a} \right)^{j-j_3}.$$

Тогда

$$d_{jmn, m(k-n)}^{\pm}(\delta) = \frac{i^k}{2\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s q_a^{\pm}(k, s) q_b(k, s) \Delta_{jmn, \delta}^{ksns \mp 1} dab_{jmn, s, k}^{\pm}(j) \right] \left( -\frac{\pi a \delta}{L \kappa_n} \right)^j.$$

Здесь  $n$  меняется в пределах  $\alpha_- < n < \alpha_+$ , где  $\alpha_{\pm} = \frac{L}{2\pi}(h_{\pm})$ . Для остальных значений  $n$

$$db_{n, s, s+k}(j_1) = \sum_{j_2=0}^{j_1} \frac{1}{(j_1 - j_2)! j_2!} I_{s+j_2}(b_n/2) I_{k-s+j_1-j_2}(b_n/2),$$

$$dab_{n, s, k-s}(j) = \sum_{j_3=0}^j \frac{1}{j_3!} I_{k-n-2s+j_3}(a_n) db_{n, s, k-s}(j-j_3) \left( \frac{b}{2a} \right)^{j-j_3},$$

$$dab_{n, s, k-s}^{\pm}(j) = \sum_{j_3=0}^j \frac{1}{j_3!} I_{k-n \mp 1 - 2s + j_3}(a_n) db_{n, s, k-s}(j-j_3) \left( \frac{b}{2a} \right)^{j-j_3}.$$

Применение алгоритмов БПФ к тензорному многоиндексному представлению матрицы системы линейных уравнений для случая мелкой гофры дополнительно сокращает время счета.

В случае глубокой гофры в выражении (3.18) для функции Грина от величины зависят только коэффициенты  $g_n^k$ , что, существенно облегчает нахождение вариации рассматриваемого функционала. Ценой за это упрощение является дополнительное суммирование по номерам корней функций Бесселя в выражениях (6.1)-(6.3). Напомним, что коэффициенты  $d_{j_m+mj, m(q-j)}^k$  в этих выражениях считаются только один раз.

## Заключение

Мы разбили исходную задачу поиска дисперсионных кривых на  $m$  подзадач, где  $m$  — число заходов винта гофрированной поверхности. Каждая из подзадач эквивалентна исходной, но «однозаходной» задаче для области с границей типа  $r = f(\varphi) = a + b \sin \varphi$  с разрезом по радиусу при  $\varphi = 0$ . Значения неизвестных функций на границе разреза связаны соотношением

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi)e^{i2\pi j/m} \quad \text{где } j = \overline{0, m-1}.$$

Аналогичные двумерные задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца вне разомкнутых кривых (разрезов) на плоскости с импедансным краевым условием рассмотрены в [10, 11].

К сожалению, как стало известно лишь из некролога В. С. Рябенского уже после принятия статьи в печать, им был рассмотрен альтернативный метод решения рассмотренных задач [16].

## Список цитируемых источников

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: ФМ, 1961.— 245 с.  
Bari N. K. A treatise on trigonometric series. Oxford-New York: Pergamon Press, 1964.
2. *Братман В. Л., Денисов Г. Г., Самсонов С. В., Кросс А. У., Фелмс А. Д. Р., Хе В.* Высокоэффективные широкополостные gyro-ЛБВ и gyro-ЛОВ со спирально-гофрированной поверхности волноводами. // изв. ВУЗ-ов. Радиофизика. — 2007. — Т. 507, No 2. — С. 104–117. (in Russian)  
Bratman V. L., Denisov G. G., Samsonov S. V., Kross A. W., Phelps A. D. R., He W. High-efficiency wideband gyro-TWTs and gyro-BWOs with helically corrugated waveguides. Radiophysics and Quantum Electronics, 50, 2, 104–117 (2007). (in Russian)
3. *Бутковский А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. — М.: Наука. 1979.— 224 с.  
Butkovsky A. G. Characteristics of systems with distributed parameters. Moscow, Science Publishers, 1979. (in Russian)
4. *Галишников Т. Н., Ильинский А. С.* Численные методы в задачах дифракции. — М.: изд-во МГУ, 1987. — 208 с.  
Galishnikova T. N., Ilinsky A. S. Numerical methods in diffraction problems. Moscow, MSU Publishers, 1987. (in Russian)



5. *Ильин В. А., Моисеев Е. М.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. // УМН. — 2005. — Т. 60, No 6 (366) — С. 89–114.  
 Il'in V. A., Moiseev E. M. Optimization of boundary controls by string oscillations. Uspekhi Math Nauk, 60, 6 (366), 89–114 (2005). (in Russian)
6. *Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Математические модели электродинамики. — М.: Высшая школа, 1991. — 224 с.  
 Il'insky A. S., Kravtsov V. V., Sveshnikov A. G. Mathematical models of electrodynamics. M.: High School, 1991. (in Russian)
7. *Ковалев Н. Ф., Орлова М. М., Петелин М. М.* Трансформация волн в многомодовом волноводе с гофрированными стенками. // изв. ВУЗ-ов. Радиофизика. — 1968. — Т. 11, No 5. — С. 783–786.  
 Kovalev N. F., Orlova I. M., Petelin M. I. Wave transformation in a multimode waveguide with corrugated walls. Notes of Hight Schools. Radiophysics and Quantum Electronics 11, 5, 783–786 (1968). (in Russian)
8. *Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л.* Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. — М.: ФизМАТЛит, 2006. — 416 с.  
 Kravchenko V. F., Rvachev V. L. Algebra of logic, atomic functions and wavelets in physical applications. Moscow: FIZMATLIT, 2006. (in Russian)
9. *Кулыгин М. Л.* Расчет дисперсионных характеристик круглого волновода с глубокой винтовой гофрировкой методом ФДТР. // Изв. вузов. Радиофизика. — 2004. — Т. 47, No 1.— С. 69.  
 Kulygin M. L. Calculation of the dispersion characteristics of a circular waveguide with deep screw corrugated using the FDTD method. Notes of Hight Schools. Radiophysics and Quantum Electronics, 47, 1, 69 (2004). (in Russian)
10. *Крутницкий П. А.* О потенциалах Стокса для скоростей // УМН. — 2007. — Т. 62, No 6 (378). — С. 179–180.  
 Krutitsky P. A. On Stokes potentials for velocities. Differential equations. Russian Math. Surveys, 62, 6, 1212–1214 (2007).
11. *Крутницкий П. А.* О потенциале Стокса для давления // УМН. — 2007. — Т. 62, No 2 (374). — С. 177–178.  
 Krutitsky P. A. On Stokes potential for pressure. Russian Math. Surveys, 62, 2, 385–387 (2007).
12. *Лифанов М. К.* Особые интегральные уравнения и методы их численного решения. — Москва: МАКС-Пресс, 2006. — 68 с.  
 Lifanov M. K. (2006). Special integral equations and methods for their numerical solution. Moscow: MAKS-Press. (in Russian)
13. *Мишакин С. В., Самсонов С. В.* Метод расчета собственных мод винтового волновода, основанный на решении эквивалентной двумерной задачи путем разложения полей по модам круглого волновода. // Изв. вузов. Радиофизика. — 2011. — Т. 54, No 3. — С. 195–206.  
 Mishakin S. V., Samsonov S. V. The method for calculating the eigen modes of a helical waveguide based on solving an equivalent two-dimensional problem by expanding the

- fields by modes of a circular waveguide. Notes of High Schools. Radiophysics, 54, 3, 195–206 (2011). (in Russian)
14. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. — Москва: Издательство иностранной литературы, 1957. — 256 с.  
Miranda C. Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1955.
15. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Вычисление функций на ЭВМ. Справочник. — Киев: Наукова думка, 1984. — 600 с.  
Popov B. A., Tesler G. S. Calculation of functions on a computer. Reference book. Kiev: Naukova Dumka, 1984.
16. *Рябенский В. С., Утюжников С. В.* Алгоритм вычисления решения модельной разностной задачи с краевыми условиями на разрезе на базе потенциала с плотностью из пространства скачков. // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша, 2013.
17. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I — СМФН, РУДН, М., 2007. — 26.— С. 3–132.  
Skubachevsky A. L. Nonclassical boundary value problems I. Contemporary Math Fundamental Directions, 26, 3–132 (2007). (in Russian)
18. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1964. — 424 с.  
Reference mathematical library. Functional Analysis. Moscow: Nauka, 1964. (in Russian)
19. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: изд-во МГУ; изд-во «Наука», 2004. — 798 с.  
Tikhonov A. N., Samarsky A. A. Equations of mathematical physics. Moscow: MSU Publishers, 2004. (in Russian)
20. *Фиктэнгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. II. 8 изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 864 с.  
Fiktengol'ts G. M. Course of differential and integral calculus. Vol.2, Moscow: FIZMATLIT, 2003. (in Russian)
21. *Юнаковский А. Д.* Быстрые алгоритмы расчета функций Грина для моделирования распространяющихся мод винтового волновода. // Труды XIV научной конференции по радиоп физике, ННГУ. — 2010. — С. 269–271.  
Yunakovsky A. D. Fast algorithms for calculating Green's functions for modeling propagating modes of a screw waveguide. Proceedings of the XIV Scientific Conference on Radiophysics, NSU. 269–271 2010. (in Russian)
22. *Denisov G. G., Kulygin M. L.* Numerical modeling of processes in circular waveguide with deep helical corrugation. // Proc. of 5th Int. conf. «Strong Microwaves in Plasmas», Nyzhny Novgorod. — 2002.
23. *Ewald P. P.* Die berechnung optischer und gitterpotentiale. // Ann. Phys. — 2001. — Vol. 64. — P. 253–287; translated by A. Cornell Atomic International Library, 1964.
24. *Keller J. B.* Singularities and Rayleigh's hypothesis for diffraction gratings. // J. Opt. Soc. Am. A. — 2000. — Vol. 17, No 3, — P. 456–457.

25. *Oseledets I. V., Savostyanov D. V., Tyrtyshnikov E. E.* Fast simultaneous orthogonal reduction to triangular matrices. // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* — 2009. — Vol. 31. — P. 316–330.
26. *Oseledets I. V., Tyrtyshnikov E. E., Zamarashkin N. L.* Matrix inversion cases with size-independent tensor rank estimates. // *Linear Algebra Appl.*, submitted, 2008.
27. *Oseledets I. V., Savostyanov D. V., Tyrtyshnikov E. E.* Tucker dimensionality reduction of three-dimensional arrays in linear time. // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* — 2008. — Vol. 30, No 3. — P. 939–956.
28. *Petit R., Cadilhac M.* Sur la diffraction d'une onde plane par un reseau infiniment conducteur. // *C. R Acad. Sci., Paris, Ser B.* — 1966. — Vol. 262. — P. 468–471.
29. *Sevgi L.* Complex Electromagnetic Problems and Numerical Simulation Approaches.— New York: IEEE Press and John Wiley, 2003.
30. *Yunakovsky A. D.* Fast Algorithms for Implementation of the Green's Function // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2012. — Vol. 180, No 6. — P. 817–833.

Получена 16.01.2018

УДК 517.9:532

# Индефинитный подход к исследованию спектральных задач с большой внутренней диссипацией энергии<sup>1</sup>

О. А. Андропова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. E-mail: o.andronova@list.ru

**Аннотация.** В статье рассмотрены спектральные проблемы, порожденные начально-краевыми задачами с внутренней диссипацией энергии. Спектр рассматриваемых задач достаточно своеобразен, его локализация зависит от интенсивности внутренней диссипации: малой, средней и большой. Отметим, что в работе исследуется наиболее сложная ситуация, когда диссипация в системе велика. В каждом случае происходит перестройка спектра, что обосновывает рассмотрение нескольких различных подходов к исследованию таких спектральных задач. Один из них — это подход, основанный на теории самосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Применение этого подхода позволяет сформулировать утверждения о полноте системы собственных элементов, доказать, что при определенных условиях система образует даже  $\mathcal{J}$ -ортонормированный базисы и  $p$ -базисы.

**Ключевые слова:** компактный самосопряженный оператор, классы компактности, характеристическое уравнение, динамика изменения собственных значений.

## Application of indefinite metric in spectral problems with the strong internal dissipation of an energy

О. А. Andronova

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** We consider the spectral problem with the strong internal dissipation of an energy. The aim of consideration of this problem is a desire to trace, as spectrum mutates at different positive  $\beta$  and to obtain the statements about localization of the spectrum and the properties of own and joined elements. Earlier it was found out that behavior of spectrum substantially depends on intensity of internal dissipation in the system. It can be weak, middle and strong. The two methods of the spectral theory of the operator bundles and the theory of the self-adjoint operators in indefinite metric spaces can be used. Both methods confirm the results got before. They open new effects in a spectral problem and give the new properties of root elements. The first one give that the spectrum has two branches of positive eigenvalues with limit points not only in infinity, but also in zero. Eigenfunctions answering to each branch in the case of strong intensity of internal dissipation in all range of  $\beta$  form basis Rissa in some Hilbert spaces. By indefinite approach it was proved that chains of eigenelements and adjoint elements form  $\mathcal{J}$ -orthonormal basis. Furthermore, under certain conditions on the classes of compact of operators of the problem the system of root elements form  $p$ -basis.

**Keywords:** Hilbert space, compact self-adjoint operator, classes of compact operators, dynamics of the eigenvalues' motion.

---

<sup>1</sup>Автор благодарит проф. Н.Д. Копачевского за руководство написанием статьи.

MSC 2010: 35P05, 35P10

## 1. Введение

Системы, в которых энергия упорядоченного движения с течением времени убывает за счёт диссипации, переходя в другие виды энергии, например в теплоту или излучение, называются диссипативными. Они формируют важный класс задач, который в настоящее время является предметом активного исследования. Главная особенность таких задач заключается в наличии механизмов «перераспределения» и выделения энергии. Взаимодействие этих двух механизмов ведет за собой появление особых режимов в динамической системе. Рост интереса к диссипативным системам был стимулирован попыткой найти адекватные математические модели для объяснения турбулентности в жидкости, основанные на понятии аттрактора. Отметим, что исследованием аттракторов (притягивающих множеств) динамических систем занимались многие другие ученые. Упоминаем лишь монографию А. В. Бабина и М. И. Вишика (1992) [14], работу О. А. Ладыженской [19], Р. Темама (1988) [22]. Приведем авторов, которыми исследовались задачи с диссипацией на границе. Так, Дж. Лагнез в работе [20] исследовал вопрос затухания решений волнового уравнения в ограниченной области при наличии диссипации на границе. Работа [21] посвящена изучению равномерной стабилизации решений на границе области для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе. Работы И. Д. Чуешова с соавторами и его монография (см. [15] — [16]) посвящены изучению бесконечномерных диссипативных динамических систем, в частности, систем с поверхностной диссипацией энергии. Так, в [15] исследуется проблема существования конечномерного аттрактора для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе области. В [16] изучаются глобальные аттракторы для уравнения Кармана с нелинейной поверхностной диссипацией.

Настоящая статья посвящена исследованию спектральных задач, порожденных начально-краевыми задачами с внутренней диссипацией энергии. Отметим, что этим исследованиям предшествовало детальное изучение эволюционных и спектральных проблем с поверхностной диссипацией энергии. Результаты исследования линейной начально-краевой задачи с поверхностной диссипацией энергии изложены в статье [3]. Далее, в работе [4] задача видоизменялась и исследовалась начально-краевая и спектральная задача при различной интенсивности внутренней диссипацией энергии. Оказалось, что при большой внутренней диссипации возможно применение нескольких подходов к ее исследованию: теории операторных пучков и теории самосопряженных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Каждый из них выявляет новые эффекты локализации спектра, уточняет и дополняет утверждения о полноте и базисности корневых элементов. Материалы данной работы отмечены в монографии Т. Я. Азизова и Н. Д. Копачевского [2] (см. параграф 2.1 «Динамика диссипативных систем»).

В работе применены методы теории пространств с индефинитной метрикой, обобщающих пространства Понтрягина на случай, когда ранг индефинитности

квадратичной формы, задающей индефинитную метрику, равен бесконечности. Выдающийся вклад в развитие теории таких пространств и операторов, действующих в них, внес М.Г. Крейн и потому такие пространства названы его именем. Здесь хочется отметить монографию М.Г. Крейна, Г. Лангера, И.С. Иохвидова [18], а также другие исследования авторов, их коллег и учеников. Они отражены, в частности, в монографии Т.Я. Азизова и И.С. Иохвидова [1] и в их обзорах.

## 2. Спектральная задача с внутренней диссипацией энергии

Рассматривается начально-краевая задача математической физики с внутренней диссипацией энергии. Ее формулировка такова. В области  $\Omega$  с липшицевой границей  $\Gamma = \partial\Omega$  требуется найти функцию  $u = u(t, x)$ , для которой выполнено уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta K \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t, x) \text{ (в } \Omega), \quad \beta > 0, \quad (2.1)$$

а также граничные и начальные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \text{ (на } \Gamma), \quad u(0, x) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u^1(x) \text{ (в } \Omega). \quad (2.2)$$

Далее будем считать, что  $K = K^* \gg 0$  — неограниченный положительно определенный оператор, область определения которого "сравнима" с областью определения оператора  $A := -\Delta$  (см. формулу (2.4) ниже). Здесь слагаемое  $\beta K(\partial u/\partial t)$ ,  $\beta > 0$ , появляется вследствие наличия в динамической системе внутренней диссипации энергии; при  $\beta = 0$  задача (2.1) — (2.2) является гиперболической, т. е. консервативной.

Далее изучаются нормальные движения системы, т. е. такие решения однородной задачи (2.1) — (2.2) без начальных условий, для которых  $u(t, x) = \exp(-\lambda t)u(x)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , тогда для амплитудных элементов  $u(x)$  возникает спектральная задача

$$\lambda^2 u - \lambda \beta K u - \Delta u = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \text{ (на } \Gamma). \quad (2.3)$$

Далее вводятся, как в работе [3], [4] гильбертовы пространства  $L_2(\Omega)$ ,  $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$  со скалярным произведением

$$(u, v)_{1, \Omega} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} d\Omega + \int_{\Gamma} u \cdot \bar{v} d\Gamma$$

и  $L_2(\Gamma)$ , а также порождающий оператор  $A$  гильбертовой пары  $(\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega); L_2(\Omega))$ ,

$$Au := -\Delta u, \quad \mathcal{D}(A) := \left\{ u \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \text{ (на } \Gamma), \mathcal{R}(A) = L_2(\Omega) \right\}. \quad (2.4)$$

Отметим, что из теорем вложения и теорем о следах для областей  $\Omega$  с липшицевой границей  $\partial\Omega$  следует, что норма в  $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$  эквивалентна стандартной норме пространства  $\mathcal{H}^1(\Omega)$ , т.е. норме  $\|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) d\Omega$ .

*Замечание.* Оператор  $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$  называют оператором гильбертовой пары  $(\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega); L_2(\Omega))$ , (см. [12], с. 32 - 38). По нему можно построить шкалу пространств  $E^\alpha$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ , так, что  $E^0 = L_2(\Omega)$ ,  $E^{1/2} = \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$ ,  $E^{-1/2} = (\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega))^*$ .

Тогда задачу (2.3) можно переписать в виде

$$L_\beta(\lambda)u := (\lambda^2 I - \lambda\beta K + A)u = 0, \quad (2.5)$$

где  $L_\beta(\lambda)$  — квадратичный операторный пучок с операторными коэффициентами  $A$  и  $K$ . Здесь оператор  $K = K^* \gg 0$  — неограниченный положительно определенный оператор, область определения которого "сравнима" с  $\mathcal{D}(A)$ , т.е. выполнено одно из условий:  $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(K)$ , либо  $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(K)$ . Отметим, что оператор  $A$  также обладает свойствами  $A = A^* \gg 0$ .

Спектральная задача (2.3) допускает обобщение на случай тройки пространств  $E, F, G$  и оператора следа  $\gamma$ , для которых справедлива абстрактная формула Грина (см. [8], [9]). Введя здесь оператор  $A$  гильбертовой пары  $(F; E)$ ,

$$Au := Lu, \quad \mathcal{D}(A) := \{u \in F : \partial u = 0 \text{ (в } G), \mathcal{R}(L) = E\} \subset F,$$

приходим к проблеме, рассматриваемой теперь в пространстве  $F$ . Выше  $L$  и  $\partial$  — операторы, фигурирующие в абстрактной формуле Грина  $\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G$ ,  $\forall \eta, u \in F$ . Итак, далее будем рассматривать абстрактную спектральную проблему с внутренней диссипацией энергии. Её формулировка такова: требуется найти элемент  $u \in \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(K) \subset F$  такой, что

$$\lambda^2 u - \lambda\beta Ku + Au = 0 \text{ (в } E), \quad u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(K) \subset F. \quad (2.6)$$

Так как  $A \gg 0$ , то число  $\lambda = 0$  не является собственным значением задачи (2.6). Отсюда следует, что эту задачу можно привести к исследованию спектральной задачи для линейного по  $\lambda$  операторного пучка. Именно, введем в (2.6) новый искомый элемент  $\zeta$  согласно формуле  $iA^{1/2}u = \lambda\zeta$ . Тогда задача (2.6) будет равносильна проблеме

$$\begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(K), \quad \zeta \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad A \gg 0, \quad (2.7)$$

которая рассматривается в пространстве  $E^2 := E \oplus E$ .

Ранее в работе [4] было показано, что собственные значения задач (2.6), (2.7) расположены в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. При параметре внутренней диссипации  $\beta = 0$  спектр задачи дискретен, расположен на мнимой оси. Было установлено (см. [5], [6]), что локализация спектра существенно зависит от уровня внутренней диссипации. В случае

большой внутренней диссипации исследование сводится к изучению сильнодемпфированного пучка операторов, т. е. происходит перестройка спектра, по сравнению со случаями малой и средней внутренней диссипации энергии. Теперь задача имеет две положительные ветви собственных значений с предельными точками не только на бесконечности, но и в нуле. Таким образом, в динамической системе имеются не только как угодно быстро затухающие апериодические нормальные движения, отвечающие собственным значениям  $\lambda_k^+ \rightarrow +\infty$ , ( $k \rightarrow \infty$ ) и множителям  $\exp(-\lambda_k^+ t)$ , но и как угодно медленно затухающие, отвечающие собственным значениям  $\lambda_k^-$  и множителям  $\exp(-\lambda_k^- t)$ ,  $\lambda_k^- \rightarrow +0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

### 3. Случай большой интенсивности внутренней диссипации

Будем теперь считать, что выполнены все условия, приведенные в постановке задачи. Рассмотрим случай большой интенсивности внутренней диссипации энергии, т. е.  $\mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(K^{1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ . Снова рассмотрим спектральную задачу

$$\mathcal{A}_\beta z = \lambda z, \quad z = (u; \zeta)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\beta), \quad (3.1)$$

$$\mathcal{A}_\beta = \begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_\beta) = \mathcal{D}(K) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2}).$$

При исследовании этой задачи при описанных выше связях областей определения, как выясняется, полезно осуществить сдвигку спектра, т. е. изучать задачу

$$\mathcal{A}_{\beta,a} z = \tilde{\lambda} z, \quad \mathcal{A}_{\beta,a} := \mathcal{A}_\beta + a\mathcal{I}, \quad a > 0, \quad \tilde{\lambda} := \lambda + a. \quad (3.2)$$

**Лемма 1.** *Оператор  $\mathcal{A}_{\beta,a}$  является равномерно аккретивным, т. е.  $\operatorname{Re}(\mathcal{A}_{\beta,a} z; z)_{E^2} \geq a \|z\|^2$ ,  $z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta,a})$ , и допускает факторизацию в следующем виде*

$$\mathcal{A}_{\beta,a} = \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta I + aK^{-1} & iK^{-1/2}A^{1/2} \\ iA^{1/2}K^{-1/2} & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

*Доказательство.* Свойство (3.3) проверяется непосредственно.  $\square$

Введем в рассмотрение операторы  $Q := A^{1/2}K^{-1/2}$ ,  $Q^+ := K^{-1/2}A^{1/2}$ , где  $\mathcal{D}(Q^+) := \mathcal{D}(A^{1/2})$ .

**Лемма 2.** *Операторы  $Q$  и  $Q^+$  имеют следующие свойства:  $Q \in \mathcal{L}(E)$ ,  $Q^+ = Q^*|_{\mathcal{D}(A^{1/2})}$ ,  $\overline{Q^+} = Q^* \in \mathcal{L}(E)$ .*

Следствием лемм 1 и 2 является такое утверждение.

**Утверждение 1.** *Оператор  $\mathcal{A}_{\beta,a}$  допускает замыкание до максимального равномерно аккретивного оператора*

$$\mathcal{A}_a := \overline{\mathcal{A}_{\beta,a}} = \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta I + aK^{-1} & iQ^* \\ iQ & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$



заданного на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_a) := \{z = (u; \zeta)^t \in E^2 : \beta K^{1/2}u + iQ^*\zeta \in \mathcal{D}(K^{1/2})\}.$$

*Доказательство.* Как известно (см. [10], стр. 109), любой аккретивный (равномерно аккретивный) оператор допускает замыкание до максимального аккретивного (равномерно аккретивного) оператора. Из этого факта следует, во-первых, что оператор  $\mathcal{A}_a$  замкнут и равномерно аккретивен, а во-вторых, он имеет ограниченный обратный оператор

$$\mathcal{A}_a^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta I + aK^{-1} & iQ^* \\ iQ & aI \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

заданный на всем пространстве  $E^2$ . Значит, область значений  $\mathcal{R}(\mathcal{A}_a)$  оператора  $\mathcal{A}_a$  есть все пространство  $E^2$ , т. е.  $\mathcal{A}_a$  максимален. Отметим еще, что для элементов из  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_a)$  должно быть  $\beta K^{1/2}u + aK^{-1/2}u + iQ^*\zeta \in \mathcal{D}(K^{1/2})$ , и так как  $K^{-1/2}u \in \mathcal{D}(K^{1/2})$ , то выполнено свойство  $\beta K^{1/2}u + iQ^*\zeta \in \mathcal{D}(K^{1/2})$ . Отметим еще, что отсюда же следует свойство  $u \in \mathcal{D}(K^{1/2})$ .  $\square$

**Лемма 3.** Матричный оператор  $\mathcal{A}_a^{-1}$  допускает факторизацию в форме

$$\mathcal{A}_a^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_Q^{-1} & -ia^{-1}B_Q^{-1}Q^* \\ -ia^{-1}QB_Q^{-1} & A_Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

где  $B_Q := \beta I + aK^{-1} + a^{-1}Q^*Q$ ,  $A_Q := aI + Q(\beta I + aK^{-1})^{-1}Q^*$ .

*Доказательство.* В доказательстве нуждается лишь формула

$$\begin{pmatrix} \beta I + aK^{-1} & iQ^* \\ iQ & aI \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_Q^{-1} & -ia^{-1}B_Q^{-1}Q^* \\ -ia^{-1}QB_Q^{-1} & A_Q^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Для ее вывода рассмотрим задачу  $(\beta I + aK^{-1})u + iQ^*\zeta = u_1$ ,  $iQu + a\zeta = \zeta_1$ . Отсюда имеем:

$$u = (\beta I + aK^{-1})^{-1}(u_1 - iQ^*\zeta), \quad \zeta = a^{-1}(\zeta_1 - iQu).$$

Подставляя эти выражения в задачу выше, будем иметь

$$B_Q u = u_1 - ia^{-1}Q^*\zeta_1, \quad A_Q \zeta = -iQ(\beta I + aK^{-1})^{-1}u_1 + \zeta_1.$$

Отсюда, а также из соотношения  $a^{-1}B_Q^{-1}Q^* = (\beta I + aK^{-1})^{-1}Q^*A_Q^{-1}$ , которое проверяется непосредственно, следует формула (3.6).  $\square$

Опираясь на доказанные утверждения, рассмотрим спектральную задачу

$$\mathcal{A}_a z = \tilde{\lambda} z, \quad z = (u; \zeta)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a), \quad \tilde{\lambda} = \lambda + a, \quad (3.7)$$

порожденную задачей (3.2). Назовем ее ассоциированной с исходной спектральной задачей. Применим к ассоциированной задаче подход, основанный на теории самосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Опираясь на формулы (3.5), рассмотрим вместо (3.7) равносильную ей задачу

$$\mathcal{A}_a^{-1}z = \mu z, \quad \mu = \tilde{\lambda}^{-1}, \quad z = (u; \zeta)^t \in E^2, \quad (3.8)$$

которую в векторно-матричной форме можно переписать в виде

$$L_{11}u + L_{12}\zeta = \mu\zeta, \quad L_{21}u + L_{22}\zeta = \mu\zeta,$$

$$\begin{aligned} L_{11} &:= K^{-1/2}B_Q^{-1}K^{-1/2}, \\ L_{12} &:= -ia^{-1}K^{-1/2}B_Q^{-1}Q^*, \\ L_{21} &:= -ia^{-1}QB_Q^{-1}K^{-1/2}, \\ L_{22} &:= A_Q^{-1}. \end{aligned}$$

Очевидно, как оператор  $\mathcal{A}_a$  из (3.4), так и обратный ему оператор  $\mathcal{A}_a^{-1}$  являются  $\mathcal{J}$ -самосопряженными операторами в пространстве М.Г. Крейна с индефинитной метрикой  $[\cdot, \cdot]$ , определяемой соотношением

$$[\cdot, \cdot] = (\mathcal{J}\cdot, \cdot). \quad (3.9)$$

Напомним, что гильбертово пространство  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$  называют пространством Крейна или  $\mathcal{J}$ -пространством, если оно снабжено помимо исходной гильбертовой метрики, то есть скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)$ , дополнительной индефинитной метрикой (3.9), где  $\mathcal{J} := P^+ - P^-$ ,  $P^\pm$  – ортопректоры на  $\mathfrak{K}^\pm$ , т.е.  $\mathcal{J} = \text{diag}(I^+, I^-)$ . При этом оператор  $\mathcal{J}$  является самосопряженным и унитарным одновременно:  $\mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}$ ,  $\mathcal{J}^2 = I$ . И выполняются соотношения  $(\mathcal{J}\mathcal{A}_a)^* = \mathcal{J}\mathcal{A}_a$ ,  $(\mathcal{J}\mathcal{A}_a^{-1})^* = \mathcal{J}\mathcal{A}_a^{-1}$ .

Отметим теперь свойства операторов  $L_{ij}$ . При этом будем считать, что выполнены условия  $0 < K^{-1} \in \mathcal{S}_\infty(E)$ ,  $Q \in \mathcal{S}_\infty(E) \Rightarrow 0 < Q^*Q = B \in \mathcal{S}_\infty(E)$ . Тогда, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} L_{11} &= L_{11}^* \in \mathcal{S}_\infty(E), \quad L_{12} = -L_{21}^* \in \mathcal{S}_\infty(E), \\ L_{22} &= L_{22}^* = A_Q^{-1}, \quad 0 \ll L_{22}^{-1} = A_Q \in \mathcal{L}(E). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отсюда из условия  $L_{12} \in \mathcal{S}_\infty(E)$  по известной теореме Х. Лангера (см., например, [1], гл. 3, §5) получаем, что  $\mathcal{J}$ -самосопряженный оператор  $\mathcal{A}_a^{-1}$  имеет максимальную инвариантную дуальную пару подпространств  $\{\mathcal{L}_+; \mathcal{L}_-\}$ . Пусть  $\tilde{K} = \tilde{K}_+ : E \rightarrow E$  – угловой оператор максимального инвариантного подпространства  $\mathcal{L}_+$ . Тогда  $\|\tilde{K}_+\| \leq 1$  и  $\mathcal{L}_+ = \{z = (u; \tilde{K}_+u)^t \in E^2 : \forall u \in E\}$ . Неотрицательное подпространство  $\mathfrak{L}_+$  пространства Крейна  $\mathfrak{K}$  принадлежит классу  $h^+$ ,

если оно допускает разложение в прямую  $\mathcal{J}$ -ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства и равномерно положительного подпространства. В частности,  $\mathfrak{L}_+ \in h^+$ , если отвечающий этому подпространству угловой оператор – компактный ( $\tilde{K}_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ ). Будем записывать  $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\} \in h$ , если  $\mathfrak{L}_\pm \in h^\pm$ .

Так как в силу инвариантности  $\mathcal{L}_+$  будет  $\mathcal{A}_a^{-1}z \in \mathcal{L}_+$  при любом  $z \in \mathcal{L}_+$ , то

$$\begin{pmatrix} L_{11}u + L_{12}\tilde{K}_+u \\ L_{21}u + L_{22}\tilde{K}_+u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \tilde{K}_+v \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_+, \quad v \in E,$$

а потому, в силу произвольности  $u \in E$ , оператор  $\tilde{K}_+$  должен быть решением уравнения

$$\tilde{K}_+L_{11} + \tilde{K}_+L_{12}\tilde{K}_+ = L_{21} + L_{22}\tilde{K}_+, \quad \|\tilde{K}_+\| \leq 1.$$

Поскольку оператор  $L_{22}$  имеет ограниченный обратный (см. (3.10)), то отсюда имеем следующее представление для оператора  $\tilde{K}_+$ :

$$\tilde{K}_+ = L_{22}^{-1}(\tilde{K}_+L_{11} + \tilde{K}_+L_{12}\tilde{K}_+ - L_{21}). \quad (3.11)$$

Так как здесь  $L_{11}, L_{12}, L_{21}$  – компактные операторы, а  $L_{22}^{-1}$  и  $\tilde{K}_+$  ограничены, то для оператора  $\tilde{K}_+$  выполнено важное свойство  $\tilde{K}_+ \in \mathfrak{S}_\infty(E)$ .

Будем говорить, что ограниченный оператор принадлежит классу (H), если у него есть хотя бы одна дуальная пара  $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\} \in h$  инвариантных подпространств и каждые инвариантные относительно него дуальные пары принадлежат классу  $h$ . Из свойства  $\tilde{K}_+ \in \mathfrak{S}_\infty(E)$ , в частности, следует (см. [1]), что максимальная дуальная пара инвариантных подпространств  $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$  принадлежит классу  $h$  и тогда оператор  $\mathcal{A}_a^{-1}$  принадлежит классу (H) (см. [1], с. 232). Поэтому, в силу компактности углового оператора  $\tilde{K}_+$ , не вещественный спектр оператора  $\mathcal{A}_a^{-1}$ , а потому и оператора  $\mathcal{A}_a$ , состоит из не более чем конечного числа конечнократных собственных значений, симметрично расположенных относительно вещественной оси. Предположим, что

$$K^{-1/2} \in \mathcal{S}_p(E), \quad p = p(K^{-1/2}); \quad Q \in \mathcal{S}_q(E), \quad q = q(Q). \quad (3.12)$$

Напомним (см. [7], с. 46, 120), что компактный (вполне непрерывный) оператор  $C$  принадлежит классу  $\mathcal{S}_p$ , если его  $s$ -числа, т.е. собственные значения оператора  $(C^*C)^{1/2}$ , суммируются со степенью  $p$ :

$$\sum_{j=1}^{\infty} (s_j(C))^p = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j(C^*C)^{1/2})^p < \infty.$$

(Здесь под  $p$  понимается инфимум тех степеней, при которых ряд сходится). Далее понадобится также следующая теорема В.И. Мацаева (см. [7], с.267). Тогда из определений операторов  $L_{ij}$  получаем, что

$$p(L_{11}) = p(K^{-1}) = p/2, \quad p(L_{12}) = p(L_{21}) = p(QK^{-1/2}) = p_0,$$

$$p_0^{-1} = p^{-1}(Q) + p^{-1}(K^{-1/2}) = q^{-1} + p^{-1} \Rightarrow p_0 = \frac{pq}{p+q}.$$

Значит, согласно представлению (3.11),

$$p(\tilde{K}_+) = \max(p/2; pq/(p+q)) =: \tilde{p}_0. \quad (3.13)$$

Таким образом, если выполнены условия (3.12), угловой оператор  $\tilde{K}_+$  максимального инвариантного подпространства  $\mathcal{L}_+$  оператора  $\mathcal{A}_a^{-1}$  принадлежит классу  $\mathcal{S}_{\tilde{p}_0}(E)$ , где  $\tilde{p}_0$  выражается формулой (3.13).

**Теорема.** Пусть в задаче (3.8) выполнены условия  $0 < K^{-1} \in \mathcal{S}_\infty(E)$ ,  $B \in \mathcal{S}_\infty(E)$ . Тогда имеют место следующие свойства.

1<sup>0</sup>. Система корневых (собственных и присоединенных) элементов оператора  $\mathcal{A}_a^{-1}$  является полной в гильбертовом пространстве  $E^2$ .

2<sup>0</sup>. Эта система образует почти  $\mathcal{J}$ -ортонормированный базис в  $E^2$ .

3<sup>0</sup>. Если выполнено условие

$$\beta^2 > 4\|K^{-1/2}\|^2 \cdot \|Q\|^2, \quad (3.14)$$

то система собственных элементов оператора  $\mathcal{A}_a^{-1}$  образует  $\mathcal{J}$ -ортонормированный базис в  $E^2$ .

4<sup>0</sup>. Если выполнены условия (3.12), то упомянутые выше базисы являются  $\tilde{p}$ -базисами в пространстве  $E^2$  при

$$\tilde{p} \geq \tilde{p}_0 = \max(p/2; pq/(p+q)).$$

*Доказательство.* Оно основано на теоремах 2.12, 3.7 и замечаниях 2.13, 3.8 к ним из монографии [1], см. стр. 271, 275, 287, 289. Отметим некоторые этапы доказательства свойств 1<sup>0</sup> – 4<sup>0</sup>.

1<sup>0</sup>. Это свойство следует непосредственно из утверждения в) теоремы 2.12 с учетом замечания 2.13: достаточно проверить, что подпространство  $\mathcal{L}_0(\mathcal{A}_a^{-1})$ , отвечающее собственному значению  $\lambda = 0$  оператора  $\mathcal{A}_a^{-1}$ , невырождено, т. е. не имеет ненулевого элемента,  $\mathcal{J}$ -ортогонального этому подпространству. Однако оператор  $\mathcal{A}_a^{-1}$  обратим, т. е.  $\mathcal{L}_0(\mathcal{A}_a^{-1}) = \{0\}$ , и поэтому свойство 1<sup>0</sup> выполнено.

2<sup>0</sup>. Так как в задаче (3.8) количество невещественных собственных значений, а также тех вещественных, которым отвечают присоединенные элементы, конечно, то остальным собственным значениям отвечают дефинитные собственные подпространства,  $\mathcal{J}$ -ортогональные между собой. Из этого факта и утверждения г) теоремы 2.12 следует, что система собственных элементов оператора  $\mathcal{A}_a^{-1}$  образует почти  $\mathcal{J}$ -ортонормированный базис в  $E^2$ .

3<sup>0</sup>. Если выполнено свойство (3.14), то задача (3.8) не имеет невещественных собственных значений и присоединенных элементов. Поэтому утверждение 3<sup>0</sup> данной теоремы следует из утверждения д) теоремы 2.12.

4<sup>0</sup>. Утверждение 4<sup>0</sup> следует непосредственно из утверждения е) теоремы 2.12 из монографии [1], если заметить, что при выполнении условий (3.12) имеет место неравенство определяющее класс компактности  $\tilde{p}$ .  $\square$

*Замечание.* Формула (3.13) уточняет свойство  $p$ -базисности в задаче (3.8) по сравнению с соответствующим утверждением  $\epsilon$ ) теоремы 2.12 на тот случай, когда в (3.12) имеется не только первое условие, но и второе, т. е. для оператора  $Q$ .

## Заключение

Этим завершается общее рассмотрение случая большой внутренней диссипации энергии в исследуемой динамической системе, основанное на применении двух различных методов исследования. А именно, на методах теории операторных пучков и методах теории самосопряженных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Эти методы дополняют друг друга: дают не только полную картину локализации спектра исследуемой задачи, но и приводят свойства ее корневых элементов. Применение индефинитного подхода позволяет сформулировать утверждения о полноте системы собственных элементов ассоциированной задачи. Удалось доказать, что при определенных условиях система образует даже  $\mathcal{J}$ -ортонормированный базисы. Если же операторы задачи имеют указанные классы компактности, то система образует  $p$ -базисы.

### Список цитируемых источников

1. *Азизов, Т. Я., Иохвидов, И. С.* Основы теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986. — 352 с.  
Azizov, T. Ya., Iohvidov, I. S. The basis of theory of the self-adjoint operators in indefinite metric space. Moscow: Nauka, 1986. (in Russian)
2. *Азизов, Т. Я., Копачевский, Н. Д.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 276 с.  
Azizov, T. Ya., Kopachevsky, N. D. Applications of indefinite metric. Simferopol: Daypi, 2014. (in Russian)
3. *Андропова, О. А., Копачевский, Н. Д.* О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т.29. — С. 11–28.  
Andronova, O. A., Kopachevsky, N. D. About liner problems with surface dissipation of an energy. Modern mathematics. Fundamental direction 29, 11-28 (2008). (in Russian)
4. *Андропова, О. А.* Начально-краевые и спектральные задачи с поверхностной и внутренней диссипацией энергии // Ученые записки Таврического Национального Университета им. В. И. Вернадского, серия Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. — Год. — Т.22(61).1. — С. 1–13.  
Andronova, O. A. Boundary-value and spectral problems with surface and initial dissipation of an energy. Scientific notes of Tavrida National University named after V. I. Vernadsky, series Mathematics. Mechanics. Informatics and Cybernetics 22(61).1, 1-13 (2009). (in Russian)
5. *Андропова, О. А.* Случай малой интенсивности в спектральных задачах с внутренней диссипацией энергии // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 3 (28). — С. 8–23.

- Andronova, O. A. The case of weak intensity in spectral problems with the internal dissipation of an energy. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics* 28, No. 3, 8-23 (2015). (in Russian)
6. *Андропова О.А* Случай средней интенсивности в спектральных задачах с внутренней диссипацией энергии // *Таврический вестник информатики и математики*. — 2015. — № 4 (29). — С. 17–31.
- Andronova, O. A. The case of middle intensity in spectral problems with the internal dissipation of an energy. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics* 29, No. 4, 17-31 (2015). (in Russian)
7. *Гохберг, И. Ц.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448 с.
- Gohberg, I. C. Introduction in the theory of liner selfadjoint operators. Moscow: Nauka, 1965. (in Russian)
8. *Копачевский, Н.Д.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи // *Украинский математический вестник*. — 2004. — Т.1, №1. — С. 69–97.
- Korachevsky, N. D. Abstract Green's for the triple of hilbert spaces, abstract boundary value and spectral and problems. *Ukrainian mathematical Herald* 1, No. 1, 69-97 (2004). (in Russian)
9. *Копачевский, Н. Д.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложения к задаче Стокса // *Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ)*. — 2004. — №2. — С. 52–80.
- Korachevsky, N. D. Abstract Green's for the triple of hilbert spaces and it's applications in Stock's problem. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, No. 2, 52-80 (2004). (in Russian)
10. *Копачевский, Н. Д.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
- Korachevsky, N. D., Krein, S. G. Linear differential equations in Banach space. — Moscow: Nauka, 1967. (in Russian)
11. *Крейн, С. Г.* Функциональный анализ. Серия «Справочная математическая библиотека». — М.: Наука, 1972. — 544 с.
- Krein, S. G. Functional analysis. Series "Mathematical Reference library". Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)
12. *Копачевский, Н. Д.; Крейн, С. Г.; Нго, Зуи. Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
- Korachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo, Z. Operator methods in linear hydrodynamics. Evolution and spectral problems. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)
13. *Маркус, А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986. — 260 с.
- Markus, A. Introduction in the spectral theory of polynomial operator bundles. Kishinev: Shiintsa, 1986. (in Russian)

14. *Babin, A. V., Vishik, M. I.* Attractors of evolution equations. — North-Holland: Elsevier, 1992. — 532 p.
15. *Chueshov, I., Eller, M., Lasiecka, I.* Finite Dimensionality of the Attractor for a Semilinear Wave Equation with Nonlinear Boundary Dissipation // Communications in Partial Differential Equations. — 2004. — 29. — P. 1847–1876.
16. *Chueshov, I., Lasiecka, I.* Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipations // J. Diff. Equations. — 2004. — 198. — P. 196–231.
17. *Chueshov, I.* Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems // Kharkov: Acta, 2006. — 100 p.
18. *Iohvidov, I. S., Krein, M. G., Langer, H.* Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Infinite Metric // Akademie-Verlag, Berlin, 1982. — 120 p.
19. *Ladyzhenskaya, O. A.* A dynamical system generated by Navier-Stokes equations // J. of Soviet Mathematics. — 1975. — Vol. 3. — P. 458–479.
20. *Lagnese, J.* Decay of the solution of the wave equation in a bounded region with boundary dissipation // J. Diff. Equations. — 1983. — 50. — P. 163–182.
21. *Lasiecka, I., Taratu, D.* Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation // Diff. Integral Equations. — 1993. — 6. — P. 507–533.
22. *Temam, R.* Infinite-dimensional dynamical system in Mechanics and Physics. — New York: Springer, 1988. — 500 p.

Получена 16.11.2017

УДК 512.643.8

## О кватернионных соотношениях Дирака. I

Д. Л. Тышкевич

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. E-mail: [dtyshk@inbox.ru](mailto:dtyshk@inbox.ru)

**Аннотация.** В данной части работы получены базовые результаты для изучения структуры кватернионных матриц, удовлетворяющих соотношениям Дирака. Все результаты сформулированы для комплексных матриц, имеющих специальную, т. н. *симплектическую* структуру, позволяющую строить по данным матрицам кватернионные при соответствующей процедуре кватернионизации. На данном этапе все выкладки проведены исключительно для комплексного случая. В следующей части предполагается провести кватернионизацию и сформулировать все основные результаты в кватернионном виде.

**Ключевые слова:** соотношения Дирака, гамма-матрица, кватернион.

## On quaternionic Dirac anticommutation relations. I

D. L. Tyshkevich

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** In this part of an investigation to be continued we obtain the basic results for studying quaternionic matrices that satisfy Dirac anticommutation relations. All the results are formulated for complex matrices of so-called *symplectic* structure which allows to build on the base of the matrices given the quaternionic ones via the corresponding quaternionization procedure. At the present stage, it is useful to formulate all the reasonings purely for the complex case. In the next part of the work to be continued we intend, via the quaternionization procedure, to finally formulate all the main results in the quaternionic form. All the results presented in the work are seemed to be new. Although there are a rather big amount of articles focusing on quaternionic Dirac equation, investigations of matrices satisfying Dirac anticommutation relations have not been carried out (as far as we know).

**Keywords:** Dirac anticommutation relations, gamma-matrices, quaternion.

**MSC 2010:** 15B33

### Введение

В данной части работы получены базовые результаты для изучения структуры кватернионных матриц, удовлетворяющих соотношениям Дирака. Все результаты сформулированы для комплексных матриц, имеющих специальную, т. н. *симплектическую* структуру, позволяющую строить по данным матрицам кватернионные при соответствующей процедуре кватернионизации. На данном этапе удобно проводить все выкладки исключительно для комплексного случая. В следующей части мы намерены, осуществив кватернионизацию, окончательно сформулировать все основные результаты в кватернионном виде.

Результаты представленные в данной работе являются новыми; несмотря на то, что имеется достаточно много работ, посвящённых кватернионному уравнению



Дирака, исследование матриц, удовлетворяющих антикоммутиационным соотношениям Дирака, насколько нам известно, не проводились.

### Обозначения.

Через  $A^*$ ,  $\bar{A}$ ,  $A^T$ ,  $A^\vee$  будем обозначать соответственно сопряжённую, комплексно сопряжённую, транспонированную и союзную матрицы к матрице  $A$ . Через  $E_n$  будет обозначаться единичная матрица из  $M_n(\mathbb{C})$  (нижний индекс в  $E_n$ , когда это не вызывает недоразумений, будет опускаться).

## 1. Матрицы $\Theta_k$

### 1.1. Матрицы $\Theta_k$ , $\Theta^k$ . Соотношения Дирака.

Рассмотрим матрицы  $t_k \in M_2(\mathbb{C})$ ,  $k \in \overline{0, 3}$ :

$$t_0 := \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad t_1 := \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad t_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t_3 := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Пусть  $g = \|g_{ij}\|_{i,j \in \overline{0,3}}$  — метрический тензор специальной теории относительности:

$$\begin{aligned} g_{00} &:= 1; \\ g_{ii} &:= -1, \quad i \in \overline{1, 3}; \\ g_{ij} &:= 0, \quad i, j \in \overline{1, 3}, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Как показывает простая проверка, матрицы  $t_k$  удовлетворяют соотношениям:

$$t_i \bar{t}_j + t_j \bar{t}_i = -2g_{ij} E_2, \quad i, j \in \overline{0, 3}. \quad (1.1)$$

Матрицы  $t_k$  связаны с матрицами Паули  $\sigma_k$  следующим образом:

$$t_0 = -\sigma_2, \quad t_1 = i\sigma_1, \quad t_3 = i\sigma_3.$$

Определим матрицы  $s_k \in M_4(\mathbb{C})$ ,  $k \in \overline{0, 3}$ :

$$s_k := \begin{bmatrix} 0 & t_k \\ -t_k & 0 \end{bmatrix}.$$

Из (1.1) и определения матриц  $s_k$  следуют соотношения

$$s_i \bar{s}_j + s_j \bar{s}_i = 2g_{ij} E_4, \quad i, j \in \overline{0, 3}. \quad (1.2)$$

Очевидно,

$$\text{матрицы } s_k \text{ унитарны } (k \in \overline{0, 3}), \quad (1.3)$$

а матрицы  $s_0 s_k$  являются самосопряжёнными ( $k \in \overline{1, 3}$ ):

$$s_0 s_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad s_0 s_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}; \quad s_0 s_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Определим, наконец, матрицы  $\Theta_k, \Theta^k \in M_8(\mathbb{C}), k \in \overline{0, 3}$ :

$$\Theta_k := \begin{bmatrix} 0 & s_k \\ -\overline{s_k} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta^k := i\Theta_k. \quad (1.5)$$

Из (1.1) и определения матриц  $\Theta^k$  следует, что последние удовлетворяют известным соотношениям

$$\Theta^i \Theta^j + \Theta^j \Theta^i = 2g_{ij} E_8, \quad i, j \in \overline{0, 3}, \quad (1.6)$$

которые в дальнейшем мы будем называть соотношениями Дирака. Также из (1.3), (1.4) и определения (1.5) следует, что

$$\text{матрицы } \Theta_k, \Theta^k \text{ унитарны } (k \in \overline{0, 3}), \quad (1.7)$$

$$\text{матрицы } \Theta_0 \Theta_k, \Theta^0 \Theta^k \text{ — самосопряжённые } (k \in \overline{1, 3}). \quad (1.8)$$

Из соотношений Дирака и (1.7) непосредственно следуют равенства

$$(\Theta^k)^* \Theta^0 = \Theta^0 \Theta^k \quad (k \in \overline{0, 3}). \quad (1.9)$$

## 1.2. Общий вид матриц, коммутирующих и антикоммутирующих с матрицами $\Theta_k$ .

Рассмотрим отображение  $\varphi^{(n)}: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2n}(\mathbb{C})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$\varphi^{(n)} \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) := \begin{bmatrix} a_{11} E_n & a_{12} E_n \\ a_{21} E_n & a_{22} E_n \end{bmatrix}.$$

Следующее утверждение тривиально.

**Предложение 1.** Отображение  $\varphi^{(n)}$  является инъективным гомоморфизмом линейных алгебр  $M_2(\mathbb{C})$  и  $M_{2n}(\mathbb{C})$ , причём для любой матрицы  $A$  из  $M_2(\mathbb{C})$  выполняются соотношения:

$$\varphi^{(n)}(op(A)) = op(\varphi^{(n)}(A)),$$

где  $op$  означает любую унарную операцию из  $\{ T, \overline{\phantom{x}}, *, \vee \}$ .

**Следствие 1.** Множество матриц  $\varphi^{(n)}(M_2(\mathbb{C}))$  является линейной подалгеброй  $M_{2n}(\mathbb{C})$ , замкнутой относительно операций транспонирования и комплексного сопряжения (а, следовательно, и просто сопряжения).

Определим теперь отображения  $\Phi_{\pm}^{(n)} : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_{4n}(\mathbb{C})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$\Phi_{\pm}^{(n)}(A) := \begin{bmatrix} \varphi^{(n)}(A) & 0 \\ 0 & \pm \varphi^{(n)}(A^{\vee}) \end{bmatrix}, \quad A \in M_2(\mathbb{C}).$$

*Замечание 1.* Для отображения  $\Phi_{+}^{(n)}$  также справедливы аналоги предложения 1 и следствия 1.

Отметим также, что

$$\Phi_{-}^{(n)}(A_1)\Phi_{-}^{(n)}(A_2) = \Phi_{+}^{(n)}(A_1A_2) \quad (A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{C})). \quad (1.10)$$

**Лемма 1.** Пусть  $A \in M_2(\mathbb{C})$ .

- (а) Матрица  $t_k^{-1}At_k$  не зависит от  $k \in \overline{0,3}$  тогда и только тогда, когда  $A$  — скалярная матрица.
- (б) Матрица  $t_k^{-1}A\bar{t}_k$  не зависит от  $k \in \overline{0,3}$  тогда и только тогда, когда  $A$  — нулевая матрица.

*Доказательство.* Пусть  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ .

(а). Имеем:

$$t_0^{-1}At_0 = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}, \quad t_1^{-1}At_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix},$$

$$t_2^{-1}At_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad t_3^{-1}At_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

откуда заключаем, что  $t_k^{-1}At_k$  не зависит от  $k$  тогда и только тогда, когда  $a_{11} = a_{22}$ ,  $a_{12} = a_{21} = 0$ .

(б). Аналогично,

$$t_0^{-1}A\bar{t}_0 = \begin{bmatrix} -a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & -a_{11} \end{bmatrix}, \quad t_1^{-1}A\bar{t}_1 = \begin{bmatrix} -a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & -a_{11} \end{bmatrix},$$

$$t_2^{-1}A\bar{t}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad t_3^{-1}A\bar{t}_3 = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix},$$

откуда следует, что  $t_k^{-1}A\bar{t}_k$  не зависит от  $k$  тогда и только тогда, когда  $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0$ .  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $A \in M_4(\mathbb{C})$ .

- (а) Матрица  $s_k^{-1}As_k$  не зависит от  $k \in \overline{0,3}$  тогда и только тогда, когда  $A \in \varphi^{(2)}(M_2(\mathbb{C}))$ .
- (б) Матрица  $s_k^{-1}A\bar{s}_k$  не зависит от  $k \in \overline{0,3}$  тогда и только тогда, когда  $A$  — нулевая матрица.

*Доказательство.* Пусть  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ,  $A_{ij} \in M_2(\mathbb{C})$  ( $i, j \in \overline{1, 2}$ ).

(a). Имеем

$$s_k^{-1} A s_k = \begin{bmatrix} t_k^{-1} A_{22} t_k & -t_k^{-1} A_{21} t_k \\ -t_k^{-1} A_{12} t_k & t_k^{-1} A_{11} t_k \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

откуда заключаем, что  $s_k^{-1} A s_k$  не зависит от  $k$  тогда и только тогда, когда  $t_k^{-1} A_{ij} t_k$  не зависят от  $k$  ( $i, j \in \overline{1, 2}$ ). Согласно п. (a) леммы 1 это возможно тогда и только тогда, когда существуют такие комплексные числа  $a_{ij}$ , что  $A_{ij} = a_{ij} E_2$  ( $i, j \in \overline{1, 2}$ ), т.е.  $A = \varphi^{(2)} \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right)$ . При этом, в силу (1.11) и предложения 1

$$s_k^{-1} A s_k = A^\vee \quad (k \in \overline{0, 3}). \quad (1.12)$$

(b). Доказывается аналогично с использованием соответствующего пункта леммы 1.  $\square$

**Теорема 1.** Матрица  $P$  коммутирует (антикоммутирует) со всеми матрицами  $\Theta_k$  ( $a$ , следовательно, и с  $\Theta^k$ ) ( $k \in \overline{0, 3}$ ) тогда и только тогда, когда  $P$  лежит в  $\Phi_+^{(2)}(M_2(\mathbb{C}))$  (в  $\Phi_-^{(2)}(M_2(\mathbb{C}))$ ).

*Доказательство.* Пусть

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad P_{ij} \in M_4(\mathbb{C}) \quad (i, j \in \overline{1, 2}).$$

Рассмотрим подробно случай коммутирования. Равенство

$$P \Theta_k = \Theta_k P \quad (1.13)$$

эквивалентно системе из четырёх равенств

$$P_{11} s_k = s_k P_{22}; \quad (1.14)$$

$$P_{22} \bar{s}_k = \bar{s}_k P_{11}; \quad (1.15)$$

$$P_{12} \bar{s}_k = -s_k P_{21}; \quad (1.16)$$

$$P_{21} s_k = -\bar{s}_k P_{12}. \quad (1.17)$$

В силу (1.2)  $s_k^{-1} = g_{kk} \bar{s}_k$ , поэтому справедливы импликации (1.14)  $\Rightarrow$  (1.15), (1.16)  $\Rightarrow$  (1.17). Таким образом, равенство (1.13) эквивалентно двум равенствам

$$P_{22} = s_k^{-1} P_{11} s_k; \quad (1.18)$$

$$P_{21} = -s_k^{-1} P_{12} \bar{s}_k. \quad (1.19)$$

Используя лемму 2, заключаем, что (1.18), (1.19) выполняются тогда и только тогда, когда  $P_{12} = P_{21} = 0$ ,  $P_{11} \in \varphi^{(2)}(M_2(\mathbb{C}))$  и  $P_{22} = P_{11}^\vee$  (см. (1.12)), т.е.  $P \in \Phi_+^{(2)}(M_2(\mathbb{C}))$ .

В случае антикоммутирования доказательство схоже с проведённым, при этом, однако матрицы  $P_{11}$  и  $P_{22}$  будут связаны равенством  $P_{22} = -s_k^{-1} P_{11} s_k = -P_{11}^\vee$ .  $\square$

В дальнейшем (в связи с теоремой 1) отображения  $\Phi_+^{(2)}$  и  $\Phi_-^{(2)}$  будем обозначать соответственно через  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{A}$ . Заметим, что по (1.10)

$$\mathcal{A}(A_1)\mathcal{A}(A_2) = \mathcal{C}(A_1A_2) \quad (A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{C})). \quad (1.20)$$

### 1.3. Связь между 8-мерными комплексными матрицами, удовлетворяющими соотношениям Дирака.

Пусть  $\{\widehat{\Theta}^k\}_{k \in \overline{0,3}}$  — некоторые матрицы из  $M_8(\mathbb{C})$ , удовлетворяющие соотношениям Дирака (1.6). Как известно, любая комплексная линейная алгебра, порождённая четырьмя элементами, удовлетворяющими соотношениям Дирака, обладает единственным (с точностью до эквивалентности) неприводимым комплексным представлением, размерность которого равна *четырёх* (см. [4, Гл. XX], [2, Гл. I, § 6], [1, Гл. 7, Дополн. Д]). Данное представление может быть реализовано при помощи известных матриц Дирака:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в силу того, что размерность матриц  $\widehat{\Theta}^k$  равна *восьми*, любое представление четвёрки  $\{\widehat{\Theta}^k\}_{k \in \overline{0,3}}$  раскладывается в прямую сумму *двух* неприводимых четырёхмерных представлений, и, следовательно, существует такая обратимая матрица  $T$  из  $M_8(\mathbb{C})$ , что

$$\widehat{\Theta}^k = T^{-1}\Gamma^k T, \quad (1.21)$$

где  $\Gamma^k := \begin{bmatrix} \gamma^k & 0 \\ 0 & \gamma^k \end{bmatrix}$ . Из (1.21) следует существование обратимой матрицы  $\Lambda$  из  $M_8(\mathbb{C})$ , сплетающей  $\widehat{\Theta}^k$  и  $\Theta^k$  (см. (1.5)):

$$\widehat{\Theta}^k = \Lambda^{-1}\Theta^k\Lambda. \quad (1.22)$$

Связь между матрицами, сплетающими  $\widehat{\Theta}^k$  и  $\Theta^k$ , устанавливает следующее утверждение.

**Предложение 2.** Любые две обратимые матрицы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , удовлетворяющие (1.22), связаны равенством

$$\Lambda_2 = P\Lambda_1,$$

где  $P$  — некоторая обратимая матрица из  $\mathcal{C}(M_2(\mathbb{C}))$ .

*Доказательство.* Пусть  $\widehat{\Theta}^k = \Lambda_1^{-1}\Theta^k\Lambda_1$ ,  $\widehat{\Theta}^k = \Lambda_2^{-1}\Theta^k\Lambda_2$ . Отсюда следует равенство  $\Lambda_2\Lambda_1^{-1}\Theta^k = \Theta^k\Lambda_2\Lambda_1^{-1}$ . Таким образом, матрица  $P := \Lambda_2\Lambda_1^{-1}$  коммутирует со всеми матрицами  $\Theta^k$ . Доказательство завершается применением теоремы 1.  $\square$

*Замечание 2.* Нетрудно видеть, что справедливо и обратное: если матрица  $\Lambda_1$  удовлетворяет (1.22), то для произвольной обратимой матрицы  $P$  из  $\mathcal{C}(M_2(\mathbb{C}))$  матрица  $\Lambda_2 := P\Lambda_1$  также удовлетворяет (1.22).

#### 1.4. О решении одного матричного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$\overline{A}A^{-1} = B \quad (1.23)$$

с известной матрицей  $B$  и искомой матрицей  $A$ .

**Предложение 3.** Произвольное решение  $A$  уравнения (1.23) может быть представлено в виде  $A = A_0U$ , где  $A_0$  — некоторое фиксированное решение (1.23), а  $U$  — обратимая вещественная матрица.

*Доказательство.* Очевидно,  $A = A_0U$  является решением (1.23):

$$\overline{A}A^{-1} = \overline{A_0U}U^{-1}A_0^{-1} = \overline{A_0}UU^{-1}A_0^{-1} = \overline{A_0}A_0^{-1} = B.$$

Обратно, пусть  $A_0$  — некоторое фиксированное решение, и  $A$  — также некоторое решение (1.23). Положим  $U := A_0^{-1}A$ . Тогда

$$\overline{U} = \overline{A_0^{-1}A} = (A_0^{-1}B^{-1})(BA) = A_0^{-1}A = U,$$

т.е. обратимая матрица  $U$  — вещественна, и  $A = A_0U$ .  $\square$

Выясним вопрос о существовании *унитарных* решений уравнения (1.23). Очевидно, необходимым условием разрешимости (1.23) (без каких-либо ограничений на  $A$ ) является следующее:

$$\overline{B} = B^{-1}. \quad (1.24)$$

Кроме того, для существования унитарных решений матрица  $B$  сама должна быть унитарной.

**Предложение 4.** Если унитарная матрица  $B$  удовлетворяет (1.24), то существует унитарное решение уравнения (1.23). Произвольное такое решение  $A$  может быть представлено в виде  $A = A_0U$ , где  $A_0$  — некоторое фиксированное унитарное решение (1.23), а  $U$  — ортогональная вещественная матрица. Если  $B \in \Phi_+^{(n)}(M_2(\mathbb{C}))$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), то существует унитарное решение (1.23), лежащее в  $\Phi_+^{(n)}(M_2(\mathbb{C}))$ .

*Доказательство. I.* Пусть  $B = VDV^{-1}$  — спектральное представление унитарной матрицы  $B$  с унитарной матрицей  $V$  и диагональной  $D$ . Как легко проверить, из унитарности  $B$  и условия (1.24) следует, что матрица  $\bar{V}^{-1}V$  коммутирует с  $D$ . Пусть  $\mathcal{D}$  — некоторая диагональная матрица, удовлетворяющая условию  $\mathcal{D}^{-2} = D$ . Так как функция  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(t) := e^{-it/2}$ , может быть равномерно приближена тригонометрическими полиномами, то матрица  $\mathcal{D}$  может быть приближена (относительно какой-либо матричной нормы<sup>1</sup>) полиномами от матрицы  $D$  (чуть ниже эта ситуация будет рассмотрена подробнее), откуда заключаем, что  $\bar{V}^{-1}V$  коммутирует с  $\mathcal{D}$ , а, следовательно, и с  $\mathcal{D}^{-1}$ . Положим  $A_0 := VDV^{-1}$ . Тогда

$$\bar{A}_0 A_0^{-1} = \bar{V} \mathcal{D}^{-1} \bar{V}^{-1} V \mathcal{D}^{-1} V^{-1} = \bar{V} \bar{V}^{-1} V \mathcal{D}^{-2} V^{-1} = VDV^{-1} = B,$$

т.е.  $A_0$  — решение (1.23) (заметим, что  $A_0$  коммутирует с  $B$ ).

Далее применяем предложение 3.

*II.* Пусть  $B \in \Phi_+^{(n)}(M_2(\mathbb{C}))$ . Покажем, что  $A_0 = VDV^{-1}$  лежит в  $\Phi_+^{(n)}(M_2(\mathbb{C}))$ . Имеем разложения

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_2 \end{bmatrix}, \quad D_i, \mathcal{D}_i, V_{ij} \in M_{2n}(\mathbb{C}) \quad (i, j \in \overline{1, 2}),$$

и

$$B = \begin{bmatrix} \varphi^{(n)}(U) & 0 \\ 0 & \varphi^{(n)}(U^\vee) \end{bmatrix}, \quad U \in M_2(\mathbb{C}),$$

где  $D_i, \mathcal{D}_i$  ( $i \in \overline{1, 2}$ ) — диагональные матрицы, а  $U$  — унитарная. Тогда равенство  $VD = A_0V$  эквивалентно четырём равенствам

$$\begin{aligned} V_{1i}D_i &= \varphi^{(n)}(U)V_{1i}; \\ V_{2i}D_i &= \varphi^{(n)}(U^\vee)V_{2i} \quad (i \in \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (1.25)$$

Пусть  $U = V_0D_0V_0^{-1}$  — спектральное представление  $U$ . По предложению 1

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(U) &= \varphi^{(n)}(V_0)\varphi^{(n)}(D_0)\varphi^{(n)}(V_0)^{-1}, \\ \varphi^{(n)}(U^\vee) &= \varphi^{(n)}(V_0)\varphi^{(n)}(D_0^\vee)\varphi^{(n)}(V_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Положим  $\mathcal{V}_{ij} := \varphi^{(n)}(V_0)^{-1}V_{ij}$  ( $i, j \in \overline{1, 2}$ ). Тогда равенства (1.25) можно записать как

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{1i}D_i &= \varphi^{(n)}(D_0)\mathcal{V}_{1i}; \\ \mathcal{V}_{2i}D_i &= \varphi^{(n)}(D_0^\vee)\mathcal{V}_{2i} \quad (i \in \overline{1, 2}). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Пусть  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — такая последовательность "полиномов",  $p_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k x^k$ , что

$$p_n(e^{it}) \rightarrow e^{-it/2} \quad (n \rightarrow \infty) \text{ равномерно по } t \in [0, 2\pi]. \quad (1.27)$$

<sup>1</sup>Напомним, что в конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Далее, пусть

$$D_0 = \begin{bmatrix} e^{it_1} & 0 \\ 0 & e^{it_2} \end{bmatrix}$$

для некоторых  $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ , и положим

$$\mathcal{D}_0 := \begin{bmatrix} e^{-it_1/2} & 0 \\ 0 & e^{-it_2/2} \end{bmatrix}.$$

Тогда из (1.27) следуют сходимости (относительно любой матричной нормы)

$$p_n(D_i) \rightarrow \mathcal{D}_i \ (i \in \overline{1, 2}), \quad p_n(D_0) \rightarrow \mathcal{D}_0, \quad p_n(D_0^\vee) \rightarrow \mathcal{D}_0^\vee \ (n \rightarrow \infty). \quad (1.28)$$

Из (1.26), (1.28) и предложения 1 следуют равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{1i} \mathcal{D}_i &= \varphi^{(n)}(\mathcal{D}_0) \mathcal{V}_{1i}; \\ \mathcal{V}_{2i} \mathcal{D}_i &= \varphi^{(n)}(\mathcal{D}_0^\vee) \mathcal{V}_{2i} \ (i \in \overline{1, 2}). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Положим  $\mathcal{A}_0 := V_0 \mathcal{D}_0 V_0^{-1}$ . Тогда равенства (1.29) эквивалентны равенствам

$$\begin{aligned} V_{1i} \mathcal{D}_i &= \varphi^{(n)}(\mathcal{A}_0) V_{1i}; \\ V_{2i} \mathcal{D}_i &= \varphi^{(n)}(\mathcal{A}_0^\vee) V_{2i} \ (i \in \overline{1, 2}), \end{aligned}$$

которые, в свою очередь, равносильны одному равенству  $V \mathcal{D} = \Phi_+^{(n)}(\mathcal{A}_0) V$ . Таким образом,  $A_0 = \Phi_+^{(n)}(\mathcal{A}_0)$ .  $\square$

### 1.5. Группа Лоренца.

Пусть  $L$  — полная группа Лоренца, состоящая из всех вещественных  $g$ -ортогональных матриц  $\Omega = \|\Omega_{ij}\|_{i,j \in \overline{0,3}}$ , т.е. матриц, удовлетворяющих равенству

$$\Omega^T g \Omega = g. \quad (1.30)$$

Из (1.30), в частности, следует равенство

$$\Omega_{00}^2 = 1 + \sum_{k=1}^3 \Omega_{0k}^2, \quad (1.31)$$

откуда видно, что для  $\Omega_{00}$  существуют две возможности:

$$\Omega_{00} \leq -1 \quad \text{или} \quad \Omega_{00} \geq 1.$$

Если  $\Omega_{00} \geq 1$ , то говорят, что матрица  $\Omega$  ортохронна (не меняет направления времени). Совокупность всех ортохронных матриц образует подгруппу группы  $L$ , обозначаемую через  $L_0^\uparrow$ .



Совокупность всех ортохронных матриц с определителем 1 образует подгруппу ортохронной группы, которая называется *собственной* группой Лоренца и обозначается  $L_+^\uparrow$ . Ортохронная группа  $L_0^\uparrow$  порождается собственной группой  $L_+^\uparrow$  и матрицей *пространственного отражения*  $s$ ; полная группа Лоренца  $L$  порождается ортохронной группой  $L_0^\uparrow$  и матрицей *отражения времени*  $t$ :

$$s := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad t := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как следует из (1.31), для ортохронной матрицы  $\Omega$

$$\Omega_{00} = \left(1 + \sum_{k=1}^3 \Omega_{0k}^2\right)^{1/2}. \quad (1.32)$$

**Лемма 3.** Пусть  $\Omega$  — ортохронная матрица, и  $A := \sum_{k=0}^3 \Omega_{0k} \Theta^0 \Theta^k$ . Тогда  $A$  — положительная самосопряжённая матрица.

*Доказательство.* В силу (1.8) и вещественности  $\Omega_{0k}$  ( $k \in \overline{0, 3}$ ) матрица  $A$  является самосопряжённой. Докажем её положительность.

Пусть  $\|\cdot\|$  — норма в  $M_8(\mathbb{C})$ , порождённая скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  в  $\mathbb{C}^8$ . Рассмотрим вспомогательную (самосопряжённую) матрицу  $\hat{A} := \sum_{k=1}^3 \Omega_{0k} \Theta^0 \Theta^k$ . В силу антикоммутирующих соотношений (1.6)

$$\hat{A}^2 = \left(\sum_{k=1}^3 \Omega_{0k}^2\right) E_8,$$

следовательно,

$$\|\hat{A}\| = \left(\sum_{k=1}^3 \Omega_{0k}^2\right)^{1/2}. \quad (1.33)$$

Отсюда для произвольного  $x$  из  $\mathbb{C}^8$

$$(Ax, x) = \Omega_{00}(x, x) + (\hat{A}x, x) \geq \Omega_{00}(x, x) - \|\hat{A}\|(x, x) = c(x, x),$$

где  $c := \Omega_{00} - \|\hat{A}\|$ . Согласно (1.32) и (1.33)  $c > 0$ . Положительность матрицы  $A$  доказана.  $\square$

## 1.6. Матрица $B$ .

Рассмотрим матрицу

$$B := \begin{bmatrix} 0 & \varphi^{(2)}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ \varphi^{(2)}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидны следующие соотношения (см. также предложение 1):

$$\bar{B} = B, \quad B^T = B^{-1} = -B. \tag{1.34}$$

При помощи прямой проверки с использованием (1.34) и предложения 1 нетрудно убедиться в справедливости следующих свойств матрицы  $B$ .

**Предложение 5.** Справедливы следующие утверждения.

(a) Матрица  $B$  удовлетворяет соотношениям:

$$B\bar{\Theta}^k = \Theta^k B, \quad \bar{\Theta}^k B = B\Theta^k \quad (k \in \overline{0, 3}).$$

(b) Матрица  $B$  коммутирует с произвольной матрицей из  $\mathcal{C}(M_2(\mathbb{C}))$  и антикоммутирует с произвольной матрицей из  $\mathcal{A}(M_2(\mathbb{C}))$ .

## 2. Лоренц-инвариантность матриц $\Theta^k$

Здесь мы рассмотрим связь между матрицами  $\Theta^k$  и матрицами

$$\widehat{\Theta}^k := \sum_{i=0}^4 \Omega_{ki} \Theta^i, \tag{2.1}$$

где  $\Omega$  — матрица из группы Лоренца  $L$ .

Из (1.30) и соотношений Дирака для матриц  $\Theta^k$  непосредственно следует, что матрицы  $\widehat{\Theta}^k$  также удовлетворяют соотношениям Дирака. Действительно,

$$\widehat{\Theta}^i \widehat{\Theta}^j + \widehat{\Theta}^j \widehat{\Theta}^i = \sum_{k, p \in \overline{0, 3}} \Omega_{ik} \Omega_{jp} (\Theta^k \Theta^p + \Theta^p \Theta^k) = 2 \sum_{k, p \in \overline{0, 3}} \Omega_{ik} g_{kp} \Omega_{jp} = 2g_{ij} E.$$

Согласно рассуждениям п. 1.3 существует обратимая матрица  $\Lambda$  из  $M_8(\mathbb{C})$ , сплетающая  $\widehat{\Theta}^k$  и  $\Theta^k$  (равенство (1.22)). Как явствует из предложения 2, матрица  $\Lambda$  задана с точностью до обратимой матрицы  $P$  из  $\mathcal{C}(M_2(\mathbb{C}))$ . Далее будут рассмотрены условия, позволяющие выбирать матрицу  $\Lambda$  с точностью до знака, как и в классической теории матриц Дирака. Вначале рассмотрим вспомогательные рассуждения. Зафиксируем  $\Omega \in L$ ; под  $\widehat{\Theta}^k$  далее будем подразумевать матрицы (2.1), а под  $\Lambda$  — некоторую матрицу, удовлетворяющую (1.22) для данных матриц  $\widehat{\Theta}^k$ .

**Лемма 4.** Справедливы следующие утверждения.

(a) Если  $P \in \mathcal{C}(M_2(\mathbb{C}))$ , то  $\Lambda P \Lambda^{-1} \in \mathcal{C}(M_2(\mathbb{C}))$ .

(b) Если  $P \in \mathcal{A}(M_2(\mathbb{C}))$ , то  $\Lambda P \Lambda^{-1} \in \mathcal{A}(M_2(\mathbb{C}))$ .

*Доказательство.* (а). В силу того, что матрица  $P$  коммутирует с матрицами  $\Theta^k$ , то, согласно (2.1), она коммутирует также и с матрицами  $\widehat{\Theta}^k$ . Поэтому выполняется следующая цепочка:

$$\Theta^k \Lambda P \Lambda^{-1} = \Lambda \widehat{\Theta}^k P \Lambda^{-1} = \Lambda P \widehat{\Theta}^k \Lambda^{-1} = \Lambda P \Lambda^{-1} \Theta^k.$$

(b). Доказательство аналогично.  $\square$

**Лемма 5.** Пусть  $R \in \mathcal{A}(M_2(\mathbb{C}))$ , а матрица  $\Lambda$  дополнительно удовлетворяет условиям:

$$\Lambda^* = \Theta^0 \Lambda^{-1} \Theta^0, \quad \bar{\Lambda} = B^{-1} \Lambda B, \quad (2.2)$$

где  $B$  — матрица из п. 1.6. Тогда справедливы следующие утверждения.

(а) Если  $R$  — вещественная матрица, то и  $\Lambda R \Lambda^{-1}$  вещественна.

(b) Если  $R$  — симметрическая матрица, то и  $\Lambda R \Lambda^{-1}$  симметрична.

(с) Если  $R$  — антисимметрическая матрица, то и  $\Lambda R \Lambda^{-1}$  антисимметрична.

*Доказательство.* (а). В силу равенств (2.2), п. (b) предложения 5 и п. (b) леммы 4 получим:

$$\overline{\Lambda R \Lambda^{-1}} = \bar{\Lambda} \bar{R} \bar{\Lambda}^{-1} = B^{-1} \Lambda B R B^{-1} \Lambda^{-1} B = -B^{-1} \Lambda R \Lambda^{-1} B = B^{-1} B \Lambda R \Lambda^{-1} = \Lambda R \Lambda^{-1}.$$

(b). В силу тех же, что и в п. (а), условий, а также равенств  $\overline{\Theta^0} = (\Theta^0)^{-1} = \Theta^0$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} (\Lambda R \Lambda^{-1})^T &= (\Lambda^T)^{-1} R^T \Lambda^T = (\bar{\Lambda}^*)^{-1} R \bar{\Lambda}^* = (\overline{\Theta^0 \Lambda^{-1} \Theta^0})^{-1} R (\overline{\Theta^0 \Lambda^{-1} \Theta^0}) = \\ &= \overline{\Theta^0} \bar{\Lambda} \overline{\Theta^0} R \overline{\Theta^0} \bar{\Lambda}^{-1} \overline{\Theta^0} = \Theta^0 B^{-1} \Lambda B \Theta^0 R \Theta^0 B^{-1} \Lambda^{-1} B \Theta^0 = \\ &= -\Theta^0 B^{-1} \Lambda B R (\Theta^0)^2 B^{-1} \Lambda^{-1} B \Theta^0 = \Theta^0 B^{-1} \Lambda R B B^{-1} \Lambda^{-1} B \Theta^0 = \\ &= -\Theta^0 B^{-1} B \Lambda R \Lambda^{-1} \Theta^0 = (\Theta^0)^2 \Lambda R \Lambda^{-1} = \Lambda R \Lambda^{-1}. \end{aligned}$$

(с). Доказывается аналогично п. (b).  $\square$

Рассмотрим матрицы  $R_- := \mathcal{A}(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix})$ ,  $R_+ := \mathcal{A}(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix})$ . Под  $B$  опять подразумевается матрица из п. 1.6.

**Теорема 2.** Пусть  $\Omega$  — ортохронная матрица. Существуют ровно две матрицы  $\Lambda$ , отличающиеся знаком и удовлетворяющие равенствам

$$\sum_{i=0}^4 \Omega_{ki} \Theta^i = \Lambda^{-1} \Theta^k \Lambda; \quad (2.3)$$

$$\Lambda^* = \Theta^0 \Lambda^{-1} \Theta^0; \quad (2.4)$$

$$\bar{\Lambda} = B^{-1} \Lambda B; \quad (2.5)$$

$$\Lambda R_- = R_- \Lambda; \quad (2.6)$$

$$\Lambda R_+ = R_+ \Lambda. \quad (2.7)$$

*Доказательство.*

I. Пусть матрица  $\Lambda$  удовлетворяет (2.3). Покажем, что матрица  $P := \Theta^0 \Lambda^* \Theta^0 \Lambda$  коммутирует с матрицами  $\Theta^k$ . Заметим, что из (1.9) и (2.1) следуют равенства  $\Theta^0(\widehat{\Theta}^k)^* = \widehat{\Theta}^k \Theta^0$  ( $k \in \overline{0, 3}$ ); поэтому, применяя (2.3), получим цепочку:

$$\begin{aligned} P\Theta^k &= \Theta^0 \Lambda^* \Theta^0 \Lambda \Theta^k = \Theta^0 \Lambda^* \Theta^0 \Theta^k \Lambda = \Theta^0 \Lambda^* (\widehat{\Theta}^k)^* \Theta^0 \Lambda = \\ &= \Theta^0 (\Theta^k)^* \Lambda^* \Theta^0 \Lambda = \Theta^k \Theta^0 \Lambda^* \Theta^0 \Lambda = \Theta^k P. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Покажем теперь, что матрица  $P$  является *положительной*. Действительно, согласно (2.8)

$$\Lambda^* \Lambda = \Theta^0 P \Lambda^{-1} \Theta^0 \Lambda = P \Theta^0 \Lambda^{-1} \Theta^0 \Lambda = P \Theta^0 \widehat{\Theta}^0. \quad (2.9)$$

Матрица  $\Theta^0 \widehat{\Theta}^0 = \sum_{k=0}^3 \Omega_{0k} \Theta^0 \Theta^k$  является положительной согласно лемме 3. Положительность матрицы  $P$  следует теперь из условия коммутирования матриц  $P$  и  $\Theta^0 \widehat{\Theta}^0$ , равенства (2.9) и положительности  $\Theta^0 \widehat{\Theta}^0$ .

Применяя замечание 1 и теорему 1 к матрице  $P$ , получим существование такой *положительной* матрицы  $A$  из  $M_2(\mathbb{C})$ , что  $P = \mathcal{C}(A)$ . При этом, согласно замечанию 1 выполнено равенство  $P^{-1/2} = \mathcal{C}(A^{-1/2})$  (т.е. матрица  $P^{-1/2}$  коммутирует со всеми  $\Theta^k$ ). Положим  $P_1 := \Lambda P^{-1/2} \Lambda^{-1}$  и  $\Lambda_1 := P_1 \Lambda$ . Согласно лемме 4 матрица  $P_1$  коммутирует со всеми  $\Theta^k$ , поэтому по предложению 2 матрица  $\Lambda_1$  удовлетворяет (2.3). Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \Theta^0 \Lambda_1^* \Theta^0 \Lambda_1 &= \Theta^0 \Lambda^* P_1^* \Theta^0 P_1 \Lambda = \Theta^0 \Lambda^* (\Lambda^*)^{-1} P^{-1/2} \Lambda^* \Theta^0 \Lambda P^{-1/2} \Lambda^{-1} \Lambda \\ &= \Theta^0 P^{-1/2} \Lambda^* \Theta^0 \Lambda P^{-1/2} = \Theta^0 P^{-1/2} P^* \Theta^0 P^{-1/2} = E, \end{aligned}$$

т.е. матрица  $\Lambda_1$  удовлетворяет также и (2.4).

Пусть теперь  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  — некоторые матрицы, удовлетворяющие (2.3) и (2.4). Тогда

$$\begin{aligned} (\Lambda_2 \Lambda_1^{-1})^* &= (\Lambda_1^*)^{-1} \Lambda_2^* = (\Theta^0 \Lambda_1^{-1} \Theta^0)^{-1} (\Theta^0 \Lambda_2^{-1} \Theta^0) = \Theta^0 \Lambda_2 \Lambda_1^{-1} \Theta^0 = \\ &= \Theta^0 (\Lambda_2 \Lambda_1^{-1})^{-1} \Theta^0 = (\Lambda_2 \Lambda_1^{-1})^{-1} (\Theta^0)^2 = (\Lambda_2 \Lambda_1^{-1})^{-1}, \end{aligned}$$

таким образом, матрица  $\Lambda_2 \Lambda_1^{-1}$  унитарна, что согласно замечанию 1 означает, что  $\Lambda_2 \Lambda_1^{-1}$  лежит в  $\mathcal{C}(U(2))$  ( $U(n)$  — группа унитарных матриц размерности  $n$ ).

Обратно, легко проверить, что если матрица  $\Lambda$  удовлетворяет (2.3) и (2.4), то для произвольной матрицы  $V$  из  $\mathcal{C}(U(2))$  матрица  $V\Lambda$  также удовлетворяет (2.3) и (2.4). Таким образом, показано, что *существуют* матрицы  $\Lambda$ , удовлетворяющие (2.3) и (2.4), при этом

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \text{ и } \Lambda_2 \text{ удовлетворяют (2.3) и (2.4)} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\Lambda_1 \text{ удовлетворяет (2.3) и (2.4)}) \wedge (\exists V \in \mathcal{C}(U(2)) \quad \Lambda_2 = V\Lambda_1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

II. Заметим, что для матрицы  $\Lambda$ , удовлетворяющей (2.3) и (2.4) выполняется равенство

$$\Lambda^* \Lambda = \Theta^0 \Lambda^{-1} \Theta^0 \Lambda = \Theta^0 \widehat{\Theta}^0. \quad (2.11)$$

Рассмотрим матрицу  $V := B\bar{\Lambda}B\Lambda^{-1}$ . Покажем, что матрица  $V$  коммутирует с матрицами  $\Theta^k$ . Прежде заметим, что в силу (2.1) и п. (а) предложения 5 справедливы соотношения

$$B\overline{\widehat{\Theta}^k} = \widehat{\Theta}^k B, \quad \overline{\widehat{\Theta}^k} B = B\widehat{\Theta}^k \quad (k \in \overline{0, 3}). \quad (2.12)$$

Применяя (2.3), (2.4), предложение 5 и (2.12), получим:

$$V\Theta^k = B\bar{\Lambda}B\Lambda^{-1}\Theta^k = B\bar{\Lambda}B\widehat{\Theta}^k\Lambda^{-1} = B\bar{\Lambda}\overline{\widehat{\Theta}^k}B\Lambda^{-1} = B\overline{\widehat{\Theta}^k}\bar{\Lambda}B\Lambda^{-1} = \Theta^k B\bar{\Lambda}B\Lambda^{-1} = \Theta^k V.$$

Покажем теперь, что  $V$  является *унитарной* матрицей. Действительно, используя (2.11) и уже указанные свойства  $B$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} V^*V &= (B\bar{\Lambda}B\Lambda^{-1})^*B\bar{\Lambda}B\Lambda^{-1} = (\Lambda^*)^{-1}B^*\bar{\Lambda}^*B^*B\bar{\Lambda}B\Lambda^{-1} = -(\Lambda^*)^{-1}B(\bar{\Lambda}^*\bar{\Lambda})B\Lambda^{-1} = \\ &= -(\Lambda^*)^{-1}B\Theta^0\widehat{\Theta}^0B\Lambda^{-1} = -(\Lambda^*)^{-1}\overline{\Theta^0}B^2\overline{\widehat{\Theta}^0}\Lambda^{-1} = (\Lambda^*)^{-1}(\Lambda^*\Lambda)\Lambda^{-1} = E. \end{aligned}$$

Согласно предложению 4 существует *унитарное* решение  $V_1$  уравнения  $\bar{V}_1V_1^{-1} = V$ , лежащее в  $\mathcal{C}(M_2(\mathbb{C}))$ , т.е.  $V_1 \in \mathcal{C}(U(2))$ . Положим  $\Lambda_1 := iV_1\Lambda$ . Согласно (2.10),  $\Lambda_1$  удовлетворяет (2.3) и (2.4). При этом, согласно п. (b) предложения 5

$$B\bar{\Lambda}_1V\Lambda_1^{-1} = -B\bar{V}_1\bar{\Lambda}B\Lambda^{-1}V_1^{-1} = -\bar{V}_1B\bar{\Lambda}B\Lambda^{-1}V_1^{-1} = -\bar{V}_1VV_1^{-1} = -E,$$

откуда, в силу (1.34), следует, что  $\Lambda_1$  удовлетворяет (2.5).

Пусть теперь  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  — некоторые матрицы, удовлетворяющие (2.3) — (2.5). Согласно (2.10)  $V := \Lambda_2\Lambda_1^{-1} \in \mathcal{C}(U(2))$ , при этом (см. п. (b) предложения 5)

$$(\overline{\Lambda_2\Lambda_1^{-1}}) = \bar{\Lambda}_2(\bar{\Lambda}_1)^{-1} = B^{-1}\Lambda_2BB^{-1}\Lambda_1^{-1}B = B^{-1}\Lambda_2\Lambda_1^{-1}B = B^{-1}B\Lambda_2\Lambda_1^{-1} = \Lambda_2\Lambda_1^{-1},$$

т.е.  $V \in \mathcal{C}(O(2))$  ( $O(n)$  — группа вещественных ортогональных матриц порядка  $n$ ). Нетрудно убедиться и в обратном: если домножить слева матрицу  $\Lambda$ , удовлетворяющую (2.3) — (2.5), на произвольную матрицу из  $\mathcal{C}(O(2))$ , то полученная матрица тоже будет удовлетворять (2.3) — (2.5).

Таким образом, мы приходим к заключению: *существуют* матрицы  $\Lambda$ , удовлетворяющие (2.3) — (2.5), при этом

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \text{ и } \Lambda_2 \text{ удовлетворяют (2.3) — (2.5)} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\Lambda_1 \text{ удовлетворяет (2.3) — (2.5)}) \wedge (\exists V \in \mathcal{C}(O(2)) \quad \Lambda_2 = V\Lambda_1). \end{aligned} \quad (2.13)$$

**III.** Отметим следующие факты. Ортогональная группа  $O(n)$  состоит из двух непересекающихся частей: (подгруппы)  $O_+(n)$ , состоящей из матриц с детерминантом 1, и  $O_-(n)$ , состоящей из матриц с детерминантом  $-1$ . В связи с этим очевидны соотношения:

$$O_{\pm}(n)O_{\pm}(n) \subseteq O_+(n), \quad O_{\pm}(n)O_{\mp}(n) \subseteq O_-(n), \quad O_{\mp}(n)O_{\pm}(n) \subseteq O_-(n). \quad (2.14)$$

В случае  $n = 2$  подгруппа  $O_+(2)$  состоит из матриц вида

$$u(t) := \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

а множество  $O_-(2)$  — из матриц вида

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \quad (t \in [0, 2\pi)).$$

При этом можно непосредственно убедиться в справедливости равенства

$$\mathcal{C}(u(t))R_- \mathcal{C}(u(t))^{-1}R_- = \mathcal{C}(u(2t)) \quad (t \in [0, 2\pi)). \quad (2.15)$$

Пусть теперь матрица  $\Lambda$  удовлетворяет (2.3) — (2.5).

В силу п. (b) леммы 4 и леммы 5 заключаем, что  $\Lambda R_- \Lambda^{-1}$  — симметрическая матрица из  $\mathcal{A}(O(2))$ , откуда делаем вывод, что

$$\Lambda R_- \Lambda^{-1} \in \mathcal{A}(O_-(2)). \quad (2.16)$$

Из (1.20), (2.14) и (2.16) следует, что

$$\Lambda R_- \Lambda^{-1} R_- \in \mathcal{C}(O_+(2)). \quad (2.17)$$

Включение (2.17) означает существование такого числа  $t_0$  из  $[0, 2\pi)$ , что

$$\Lambda R_- \Lambda^{-1} R_- = \mathcal{C}(u(t_0)). \quad (2.18)$$

Положим  $V_1 := \mathcal{C}(u(t_0/2))$ ,  $\Lambda_1 := V_1 \Lambda$ . Матрица  $\Lambda_1$  согласно (2.13) также будет удовлетворять (2.3) — (2.5), при этом из (2.15), (2.18) и равенства  $R_-^2 = E$  следует цепочка

$$\begin{aligned} \Lambda_1 R_- \Lambda_1^{-1} R_- &= V_1 \Lambda R_- \Lambda^{-1} V_1^{-1} R_- = V_1 (\Lambda R_- \Lambda^{-1} R_-) R_- V_1^{-1} R_- = \\ &= (\Lambda R_- \Lambda^{-1} R_-) V_1 R_- V_1^{-1} R_- = E, \end{aligned}$$

т.е.  $\Lambda_1$  удовлетворяет и равенству (2.6).

Пусть  $V \in \mathcal{C}(O(2))$ . Непосредственно проверяется следующее утверждение:

$$R_- V = V R_- \Leftrightarrow V - \text{одна из матриц } \pm E_8, \pm \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right). \quad (2.19)$$

Из (2.19) немедленно следует утверждение: существуют матрицы  $\Lambda$ , удовлетворяющие (2.3) — (2.6), при этом

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \text{ и } \Lambda_2 \text{ удовлетворяют (2.3) — (2.6)} &\Leftrightarrow (\Lambda_1 \text{ удовлетворяет (2.3) — (2.6)}) \wedge \\ &\wedge \left( \Lambda_2 = V \Lambda_1, \text{ где } V - \text{одна из матриц } \pm E_8, \pm \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

**IV.** Пусть матрица  $\Lambda$  удовлетворяет (2.3) — (2.6).

В силу п. (c) леммы 4 и леммы 5 заключаем, что  $\Lambda R_+ \Lambda^{-1}$  — антисимметрическая матрица из  $\mathcal{A}(O(2))$ , откуда делаем вывод, что

$$\Lambda R_+ \Lambda^{-1} = \pm R_+,$$

т.е. (отметим, что  $R_+^2 = -E$ )

$$\Lambda R_+ = \pm R_+ \Lambda. \quad (2.21)$$

Непосредственно проверяется, что

$$\text{матрицы } R_+ \text{ и } \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \text{ антикоммутируют.} \quad (2.22)$$

Положим  $V := \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$  и определим  $\Lambda_1 := \Lambda$ , если в формуле (2.21) — знак "+ и  $\Lambda_1 := V\Lambda$ , если в (2.21) — знак "-". Матрица  $\Lambda_1$  в силу (2.20) также будет удовлетворять (2.3) — (2.6), при этом в случае "-" согласно (2.22) имеем:

$$\Lambda_1 R_+ - R_+ \Lambda_1 = V\Lambda R_+ - R_+ V\Lambda = V\Lambda R_+ - R_+ V\Lambda = -(VR_+ + R_+V)\Lambda = 0,$$

т.е.  $\Lambda_1$  удовлетворяет и равенству (2.7).

Пусть теперь  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  — некоторые матрицы, удовлетворяющие (2.3) — (2.7). Из (2.20) и (2.22) немедленно следует, что  $\Lambda_2 \Lambda_1^{-1} = \pm E$ . Доказательство теоремы завершается на том очевидном факте, что если матрица  $\Lambda$  удовлетворяет соотношениям (2.3) — (2.7), то и противоположная ей матрица также будет удовлетворять этим соотношениям.  $\square$

**Следствие 2.** Пусть  $\Omega$  — ортохронная матрица. Существуют ровно две матрицы  $\Lambda$ , отличающиеся знаком и удовлетворяющие равенствам

$$\sum_{i=0}^4 \Omega_{ki} \Theta_i = \Lambda^{-1} \Theta_k \Lambda; \quad (2.23)$$

$$\Lambda^* = -\Theta_0 \Lambda^{-1} \Theta_0; \quad (2.24)$$

$$\bar{\Lambda} = B^{-1} \Lambda B; \quad (2.25)$$

$$\Lambda R_- = R_- \Lambda; \quad (2.26)$$

$$\Lambda R_+ = R_+ \Lambda. \quad (2.27)$$

*Доказательство.* Вытекает из теоремы 2 и связи матриц  $\Theta^k$  и  $\Theta_k$  (см. (1.5)). При этом в соотношениях (2.23) — (2.27) участвуют те же матрицы  $\Lambda$ , что и в соотношениях (2.3) — (2.7).  $\square$

*Замечание 3.* Из соотношений (2.23) — (2.27) элементарно следует, что множество всех матриц  $\Lambda$ , удовлетворяющих соотношениям (2.23) — (2.27), когда  $\Omega$  пробегает ортохронную группу  $L_0^\uparrow$ , образует группу, которую обозначим  $\mathfrak{L}_0^\uparrow$ . При этом группа  $\mathfrak{L}_0^\uparrow$  гомоморфна группе  $L_0^\uparrow$ ; пусть  $\chi_0^\uparrow$  — соответствующий гомоморфизм  $\mathfrak{L}_0^\uparrow$  на  $L_0^\uparrow$ , тогда ядро гомоморфизма  $\chi_0^\uparrow$  есть  $\ker \chi_0^\uparrow = \{-E, E\}$ .

### 3. Вид матрицы $\Lambda$ в случае поворотов и отражений

#### 3.1. Повороты.

Обозначим через  $\Omega^{\alpha\beta}(\varphi)$  матрицу поворота на угол  $\varphi$  в плоскости  $x^\alpha x^\beta$  пространства Минковского  $M$  ( $\alpha, \beta \in \overline{0, 3}$ ; здесь и далее  $\alpha \neq \beta$ ). Когда  $\alpha, \beta \in \overline{1, 3}$  — это обычный поворот на угол  $\varphi$ , в противном случае — гиперболический поворот, т.е.

$$\Omega^{12}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega^{10}(\varphi) = \begin{bmatrix} \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi & 0 & 0 \\ \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{и т.д.}$$

Нетрудно видеть, что существует предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (E - \Omega^{\alpha\beta}(\varepsilon))$ , который мы обозначим через  $Z^{\alpha\beta}$ . Матрица  $Z^{\alpha\beta}$  называется *инфинитезимальной* матрицей поворота в плоскости  $x^\alpha x^\beta$  (см. [4, 3]). При этом компоненты матрицы  $Z^{\alpha\beta}$  выражаются через компоненты метрического тензора  $g$  следующим образом:

$$Z_{ij}^{\alpha\beta} = \delta_{i\alpha} g_{j\beta} - \delta_{i\beta} g_{j\alpha} \quad (i, j \in \overline{0, 3}), \quad (3.1)$$

откуда непосредственно видно, что  $Z^{\beta\alpha} = -Z^{\alpha\beta}$  (формула (3.1) означает следующее: при  $\alpha < \beta$  минорная матрица, стоящая на пересечении строк и столбцов с номерами  $\alpha$  и  $\beta$  в  $Z^{\alpha\beta}$  имеет вид  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , если  $\alpha > 0$  и  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ , если  $\alpha = 0$ ; остальные компоненты матрицы  $Z^{\alpha\beta}$  — нулевые).

**Предложение 6.** Матрицы  $Z^{\alpha\beta}$  удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=0}^3 Z_{ki}^{\alpha\beta} \Theta_i = \delta_{k\beta} \Theta_\alpha^{-1} - \delta_{k\alpha} \Theta_\beta^{-1} \quad (\alpha, \beta \in \overline{0, 3})$$

( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера).

*Доказательство.* Непосредственно из определения метрического тензора  $g$  и свойств матриц  $\Theta_k$  ( $\Theta_k^{-1} = -g_{kk} \Theta_k$ ) получаем цепочку:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 Z_{ki}^{\alpha\beta} \Theta_i &= \sum_{i=0}^3 (\delta_{k\alpha} g_{i\beta} - \delta_{k\beta} g_{i\alpha}) \Theta_i = \delta_{k\alpha} \sum_{i=0}^3 g_{i\beta} \Theta_i - \delta_{k\beta} \sum_{i=0}^3 g_{i\alpha} \Theta_i = \\ &= \delta_{k\alpha} g_{\beta\beta} \Theta_\beta - \delta_{k\beta} g_{\alpha\alpha} \Theta_\alpha = \delta_{k\beta} \Theta_\alpha^{-1} - \delta_{k\alpha} \Theta_\beta^{-1}. \end{aligned}$$

□

Рассмотрим матрицы

$$\kappa^{\alpha\beta} := \Theta_\alpha^{-1} \Theta_\beta^{-1} \quad (\alpha, \beta \in \overline{0, 3}). \quad (3.2)$$

Пусть  $[A, B] := AB - BA$  — коммутатор матриц  $A$  и  $B$ .



**Предложение 7.** Матрицы  $\kappa^{\alpha\beta}$  удовлетворяют следующим соотношениям ( $\alpha, \beta \in \overline{0, 3}$ ):

$$\kappa^{\beta\alpha} = -\kappa^{\alpha\beta}; \quad (3.3)$$

$$(\kappa^{\alpha\beta})^2 = \begin{cases} -E & , \alpha, \beta \in \overline{1, 3} \\ E & , (\alpha = 0) \vee (\beta = 0) \end{cases}; \quad (3.4)$$

$$\left[\frac{1}{2} \kappa^{\alpha\beta}, \Theta_k\right] = \delta_{k\beta} \Theta_\alpha^{-1} - \delta_{k\alpha} \Theta_\beta^{-1} \quad (k \in \overline{0, 3}). \quad (3.5)$$

*Доказательство.* Равенства (3.3), (3.4) тривиально вытекают из антикоммутиационных соотношений для матриц  $\Theta^k$  (см. (1.5), (1.6)). Докажем равенства (3.5). Из тех же антикоммутиационных соотношений и очевидного равенства  $g_{ii}g_{ik} = \delta_{ki}$  получим:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \kappa^{\alpha\beta}, \Theta_k\right] &= \frac{1}{2} (\Theta_\alpha^{-1} \Theta_\beta^{-1} \Theta_k - \Theta_k \Theta_\alpha^{-1} \Theta_\beta^{-1}) = \frac{1}{2} (-g_{\alpha\alpha})(-g_{\beta\beta})(\Theta_\alpha \Theta_\beta \Theta_k - \Theta_k \Theta_\alpha \Theta_\beta) = \\ &= \frac{1}{2} g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} (\Theta_\alpha (-2g_{\beta k} - \Theta_k \Theta_\beta) - \Theta_k \Theta_\alpha \Theta_\beta) = \\ &= \frac{1}{2} g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} (-2g_{\beta k} \Theta_\alpha - (-2g_{\alpha k} - \Theta_k \Theta_\alpha) \Theta_\beta - \Theta_k \Theta_\alpha \Theta_\beta) = \\ &= \frac{1}{2} g_{\alpha\alpha} g_{\beta\beta} (2g_{\alpha k} \Theta_\beta - 2g_{\beta k} \Theta_\alpha) = \delta_{k\beta} \Theta_\alpha^{-1} - \delta_{k\alpha} \Theta_\beta^{-1}. \end{aligned}$$

□

Рассмотрим матрицу

$$\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi) := \begin{cases} \cos \frac{\varphi}{2} E + \sin \frac{\varphi}{2} \kappa^{\alpha\beta} & , \alpha, \beta \in \overline{1, 3} \\ \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2} E + \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2} \kappa^{\alpha\beta} & , (\alpha = 0) \vee (\beta = 0) \end{cases} \quad (\varphi \in \mathbb{R}). \quad (3.6)$$

**Теорема 3.** Матрицы  $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$  обладают следующими свойствами:

$$\text{функция } \varphi \rightarrow \Lambda^{\alpha\beta}(\varphi) \text{ непрерывна}; \quad (3.7)$$

$$\Lambda^{\alpha\beta}(0) = E; \quad (3.8)$$

$$\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi_1 + \varphi_2) = \Lambda^{\alpha\beta}(\varphi_1) \Lambda^{\alpha\beta}(\varphi_2) \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}); \quad (3.9)$$

$$\chi_0^\uparrow(\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)) = \Omega^{\alpha\beta}(\varphi) \quad (\varphi \in \mathbb{R}). \quad (3.10)$$

*Доказательство.* Свойство (3.7) и равенство (3.8) очевидны. Равенство (3.9) элементарно следует из (3.4) и свойств круговых и гиперболических функций.

Соотношение (3.10) также непосредственно проверяется: используются свойства круговых и гиперболических функций, антикоммутиационные свойства матриц  $\Theta_k$ , а также соотношения между матрицами  $B$ ,  $R_-$ ,  $R_+$  и  $\Theta_k$  (заметим, что (3.10) есть краткое выражение того, что матрица  $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$  удовлетворяет соотношениям (2.23) — (2.27) при  $\Omega = \Omega^{\alpha\beta}(\varphi)$ , см. замечание 3). Для иллюстрации проведём доказательство равенства (2.23) для частного случая  $k = \alpha$ ,  $\alpha \in \overline{1, 3}$ .

Пусть  $\widehat{\Theta}_k := \sum_{i=0}^3 \Omega_{ki}^{\alpha\beta}(\varphi)\Theta_i$ . Замечая, что  $\Theta_i^{-1} = \Theta_i$ ,  $\Theta_i^{-1}\Theta_j^{-1}\Theta_i = -\Theta_j$  для  $i, j \in \overline{1,3}$ ,  $i \neq j$ , получим цепочку:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)\widehat{\Theta}_\alpha &= (\cos \frac{\varphi}{2} E + \sin \frac{\varphi}{2} \Theta_\alpha^{-1}\Theta_\beta^{-1})(\cos \varphi \Theta_\alpha + \sin \varphi \Theta_\beta) = \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \Theta_\alpha + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \Theta_\alpha^{-1}\Theta_\beta^{-1}\Theta_\alpha + \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \Theta_\beta + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \Theta_\alpha^{-1} = \\ &= (\cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \varphi)\Theta_\alpha + (\cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi)\Theta_\beta = \\ &= \cos(\varphi - \frac{\varphi}{2})\Theta_\alpha + \sin(\varphi - \frac{\varphi}{2})\Theta_\beta = \Theta_\alpha (\cos \frac{\varphi}{2} E + \sin \frac{\varphi}{2} \Theta_\alpha^{-1}\Theta_\beta^{-1}) = \Theta_\alpha \Lambda^{\alpha\beta}(\varphi). \end{aligned}$$

Заметим, что при любом  $\varphi$  матрица  $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$  обратима, и  $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)^{-1} = \Lambda^{\alpha\beta}(-\varphi)$  в силу (3.9). □

Справедливо и обратное утверждение.

**Теорема 4.** Если матрицы  $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$  ( $\varphi \in \mathbb{R}$ ) из  $M_8(\mathbb{C})$  удовлетворяют (3.7) – (3.10) теоремы 3, то  $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$  есть матрица вида (3.6).

*Доказательство.* Как известно, если отображение  $\varphi \rightarrow \Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$  непрерывно и удовлетворяет (3.8), (3.9), то оно является *аналитическим* (см., например, [5, Гл. III, § 3]<sup>2</sup>). Существует инфинитезимальная матрица

$$K^{\alpha\beta} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\Lambda^{\alpha\beta}(\varepsilon) - E),$$

при этом  $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$  выражается через  $K^{\alpha\beta}$  экспоненциально:

$$\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi) = e^{\varphi K^{\alpha\beta}}. \tag{3.11}$$

Далее, с точностью до  $o(\varepsilon)$  запишем:

$$\Omega^{\alpha\beta}(\varepsilon) \approx E - \varepsilon Z^{\alpha\beta}, \quad \Lambda^{\alpha\beta}(\varepsilon) \approx E + \varepsilon K^{\alpha\beta}, \quad \Lambda^{\alpha\beta}(\varepsilon)^{-1} \approx E - \varepsilon K^{\alpha\beta},$$

откуда получим

$$\Lambda^{\alpha\beta}(\varepsilon)^{-1}\Theta_k\Lambda^{\alpha\beta}(\varepsilon) \approx (E - \varepsilon K^{\alpha\beta})\Theta_k(E + \varepsilon K^{\alpha\beta}) \approx \Theta_k - \varepsilon[K^{\alpha\beta}, \Theta_k]; \tag{3.12}$$

$$\sum_{i=0}^3 \Omega_{ki}^{\alpha\beta}(\varepsilon)\Theta_i \approx \sum_{i=0}^3 (\delta_{ki} - \varepsilon Z_{ki}^{\alpha\beta})\Theta_i = \Theta_k - \varepsilon \sum_{i=0}^3 Z_{ki}^{\alpha\beta} \Theta_i. \tag{3.13}$$

Сравнивая (3.12) и (3.13), приходим к равенствам

$$[K^{\alpha\beta}, \Theta_k] = \sum_{i=0}^3 Z_{ki}^{\alpha\beta} \Theta_i \quad (k \in \overline{0,3}). \tag{3.14}$$

---

<sup>2</sup>В [5] рассматриваются скалярные функции, однако соответствующие рассуждения легко могут быть перенесены на матричный случай.

Из (3.14), предложения 6 и равенств (3.5) предложения 7 следует, что матрица  $K^{\alpha\beta}$  удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям, что и матрица  $\frac{1}{2}\kappa^{\alpha\beta}$ . Следовательно, их разность  $P := K^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\kappa^{\alpha\beta}$  коммутирует с матрицами  $\Theta_k$ .

Далее, равенства (2.24) – (2.26) для  $\Lambda^{\alpha\beta}(\varepsilon)$  дают:

$$\begin{aligned} E + \varepsilon\left(\frac{1}{2}(\kappa^{\alpha\beta})^* + P^*\right) &\approx -\Theta_0\left(E - \varepsilon\left(\frac{1}{2}\kappa^{\alpha\beta} + P\right)\right)\Theta_0, \\ E + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\overline{\kappa^{\alpha\beta}} + \overline{P}\right) &\approx B^{-1}\left(E + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\kappa^{\alpha\beta} + P\right)\right)B, \\ \left(E + \varepsilon\left(\frac{1}{2}(\kappa^{\alpha\beta}) + P\right)\right)R_- &\approx R_-\left(E + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\kappa^{\alpha\beta} + P\right)\right), \end{aligned}$$

откуда, в силу равенств  $(\kappa^{\alpha\beta})^* = -\Theta_0\kappa^{\alpha\beta}\Theta_0$ ,  $\overline{\kappa^{\alpha\beta}} = B^{-1}\kappa^{\alpha\beta}B$ ,  $\kappa^{\alpha\beta}R_- = R_-\kappa^{\alpha\beta}$ , справедливость которых следует из определения (3.2) и антикоммутационных соотношений для матриц  $\Theta_k$ , получаем условия на матрицу  $P$  (см. п. (а) предложения 5):

$$P^* = \Theta_0 P \Theta_0 = \Theta_0^2 P = -P, \quad (3.15)$$

$$\overline{P} = B^{-1} P B = B^{-1} B P = P, \quad (3.16)$$

$$P R_- = R_- P. \quad (3.17)$$

Теперь используем теорему 1. Из условий (3.15), (3.16) следует равенство  $P = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{bmatrix}\right)$  для некоторого  $r \in \mathbb{R}$ ; но матрица такого вида антикоммутирует с  $R_-$  (так как антикоммутируют матрицы  $\begin{bmatrix} 0 & r \\ -r & 0 \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ). Таким образом,  $P = 0$ , и

$$K^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\kappa^{\alpha\beta}. \quad (3.18)$$

Доказательство теоремы завершается применением равенства (3.4) к равенствам (3.18) и (3.11).  $\square$

### 3.2. Отражения $s$ и $t$ .

Из антикоммутационных соотношений для матриц  $\Theta_k$  непосредственно вытекает следующий результат.

**Предложение 8.** Справедливы следующие утверждения.

(a)  $\chi_0^\uparrow(\Theta_0) = s$ ;

(b) матрица  $\Lambda := \Theta_1\Theta_2\Theta_3$  удовлетворяет (2.23) для  $\Omega := t$

(т.е. пространственному отражению соответствует матрица  $\Theta_0$ , а отражению времени —  $\Theta_1\Theta_2\Theta_3$ ).

*Замечание 4.* Из предложения 8 следует, что группа  $\mathfrak{L}$ , порождённая группой  $\mathfrak{L}_0^\uparrow$  и матрицей  $\Theta_1\Theta_2\Theta_3$ , гомоморфна полной группе Лоренца  $L$ ; пусть  $\chi$  — соответствующий гомоморфизм  $\mathfrak{L}$  на  $L$ , тогда  $\ker \chi = \{-E, E\}$ .

*Замечание 5.* Из теоремы 3 и предложения 8 следует, что группа  $\mathfrak{L}$  содержится в вещественной линейной оболочке матриц  $\Theta_k$ :

$$\mathfrak{L} \subseteq \text{Lin}_{\mathbb{R}}\{\Theta_k \mid k \in \overline{0,3}\}.$$

### Список цитируемых источников

1. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля. — Москва: Наука, 1987. — 615 с.
2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — Москва: Наука, 1984. — 600 с.
3. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. — Москва: Наука, 1958. — 367 с.
4. Мессиа А. Квантовая механика. — Т. 1: Квантовая механика: Пер. с франц. — Москва: Наука, 1978. — 478 с.
5. Наймарк М. А. Теория представлений групп. — Москва: Наука, 1976. — 564 с.

Получена 20.11.2017



УДК 517.929.4

# Об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с периодическими коэффициентами в линейных членах<sup>1</sup>

Т. К. Ыскак

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
Новосибирский государственный университет,  
Новосибирск 630090. E-mail: *istima92@mail.ru*

**Аннотация.** В работе рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием, при этом коэффициенты в линейных членах являются периодическими. Исследуется асимптотическая и робастная устойчивости нулевого решения данной системы, указывается оценка на решения и множество притяжения. На основе полученных результатов исследуется асимптотическая устойчивость нулевого решения одного класса систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с большим параметром.

**Ключевые слова:** системы с распределенным запаздыванием, асимптотическая устойчивость, робастная устойчивость, функционал Ляпунова – Красовского, дифференциальное уравнение Ляпунова.

## On stability of the zero solution to a system of differential equations with distributed delay and with periodic coefficients in linear terms

T. K. Yskak

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,  
Novosibirsk State University, Novosibirsk 630090.

**Abstract.** In the paper we consider a system of nonlinear differential equations with distributed delay and with periodic coefficients in linear terms. We study the asymptotic stability and robust stability of the zero solution to this system, obtain an estimate of solutions and an attraction domain. On the basis of the obtained results we investigate the asymptotic stability of the zero solution to a class of systems of differential equations with distributed delay and with a large parameter.

**Keywords:** systems with distributed delay, asymptotic stability, robust stability, Lyapunov–Krasovskii functional, Lyapunov differential equation.

**MSC 2010:** 34K20

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

## 1. Введение

В работе мы будем рассматривать систему нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int_{t-\tau}^t B(t, t-s)y(s)ds + F(t, y(t)), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

где  $A(t)$  — матрица размера  $n \times n$  с непрерывными  $T$ -периодическими элементами,  $B(t, \xi)$  — матрица размера  $n \times n$  с непрерывными элементами,  $T$ -периодическими по первой переменной, т. е.  $A(t+T) \equiv A(t)$ ,  $B(t+T, \xi) \equiv B(t, \xi)$ ,  $F(t, v)$  — непрерывная вектор-функция, липшицева по второму аргументу. Вектор-функция  $F(t, v)$  удовлетворяет следующей оценке

$$\|F(t, v)\| < q\|v\|^{1+\varepsilon},$$

где  $q > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Основной целью работы является исследование асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.1), робастной устойчивости, нахождение множества притяжения и получение оценок решений. На основе полученных результатов будет установлен аналог теоремы Крейна [2] об устойчивости решений системы дифференциальных уравнений с большим параметром следующего вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mu A(t)y(t) + \int_{t-\tau}^t B(t, t-s)y(s)ds + F(t, y(t)), \quad t > 0, \quad (1.2)$$

где  $\mu \gg 1$  — параметр,  $A(t)$ ,  $B(t, \xi)$ ,  $F(t, v)$  удовлетворяют условиям, указанным выше. Будем предполагать, что для любого  $t \in [0, T]$  спектр матрицы  $A(t)$  принадлежит левой полуплоскости  $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ .

При получении результатов будет использоваться модификация функционала Ляпунова – Красовского, введенного в [4, 5]

$$V(t, y) = \langle H(t)y(t), y(t) \rangle + \int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds d\eta. \quad (1.3)$$

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание и ценные советы.

## 2. Устойчивость решений

Рассмотрим для системы (1.1) следующую начальную задачу

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int_{t-\tau}^t B(t, t-s)y(s)ds + F(t, y(t)), & t > 0, \\ y(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\varphi(t) \in C[-\tau, 0]$  — заданная вектор-функция.

Для формулировки утверждения введем следующее обозначение:

$$V(0, \varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0) \rangle + \int_0^\tau \int_{-\eta}^0 \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s) \rangle dsd\eta.$$

**Теорема 1.** Пусть существуют гладкая  $T$ -периодическая матрица  $H(t) = H^*(t)$  и матрица  $K(\xi) = K^*(\xi) \in C^1[0, \tau]$  такие, что

$$H(t) > 0, \quad t \in [0, T], \quad K(\xi) > 0, \quad \frac{d}{d\xi}K(\xi) < 0, \quad \xi \in [0, \tau].$$

Обозначим через  $p_1(t)$  минимальное собственное число матрицы

$$P(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t) \left( -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \tau K(0) - H(t) \left[ \int_{t-\tau}^t B^*(t, t-s)K^{-1}(t-s)B(t, t-s)ds \right] H(t) \right) H^{-\frac{1}{2}}(t).$$

Выберем число  $k > 0$  такое, что

$$\frac{d}{d\xi}K(\xi) + kK(\xi) \leq 0, \quad \xi \in [0, \tau].$$

Введем множество

$$\mathcal{E} = \left\{ \varphi(t) \in C[-\tau, 0] : V(0, \varphi) < \left( \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\infty \beta(\xi) \exp \left( -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\xi \gamma(s)ds \right) d\xi \right)^{-2/\varepsilon} \right\},$$

где

$$\gamma(t) = \min \{p_1(t), k\}, \quad \beta(t) = 2q \|H(t)\| \|H^{-1}(t)\|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}.$$



При этом  $\int_0^T \gamma(s) ds > 0$ . Тогда при любых  $\varphi(t) \in \mathcal{E}$  решение начальной задачи (2.1) существует на всей полусоси  $\{t > 0\}$ . При этом справедлива следующая оценка

$$\|y(t)\| \leq \|H^{-1}(t)\|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\int_0^t \frac{\gamma(s)}{2} ds\right) \times \left(V^{-\varepsilon/2}(0, \varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \beta(\xi) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\xi \gamma(s) ds\right) d\xi\right)^{-1/\varepsilon}. \quad (2.2)$$

Здесь и далее используется спектральная норма матрицы.

*Доказательство.* В силу условий на матрицы  $A(t)$ ,  $B(t, \xi)$  и вектор-функцию  $F(t, v)$  начальная задача (2.1) однозначно разрешима. Пусть  $y(t)$  — непродолжаемое решение начальной задачи (2.1), определенное на промежутке  $[0, \tau')$ .

Рассмотрим функционал (1.3) на решении  $y(t)$ . Дифференцируя  $V(t, y)$  по  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, y) &\equiv \left\langle \frac{d}{dt} H(t) y(t), y(t) \right\rangle \\ &+ \left\langle H(t) \left( A(t) y(t) + \int_{t-\tau}^t B(t, t-s) y(s) ds + F(t, y(t)) \right), y(t) \right\rangle \\ &+ \left\langle H(t) y(t), \left( A(t) y(t) + \int_{t-\tau}^t B(t, t-s) y(s) ds + F(t, y(t)) \right) \right\rangle \\ &+ \tau \langle K(0) y(t), y(t) \rangle - \int_0^\tau \langle K(\eta) y(t-\eta), y(t-\eta) \rangle d\eta \\ &+ \int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s) y(s), y(s) \right\rangle ds d\eta. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_0^\tau \langle K(\eta) y(t-\eta), y(t-\eta) \rangle d\eta = \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s) y(s), y(s) \rangle ds,$$

производную  $V(t, y)$  в силу системы (1.1) можно представить следующим образом

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \equiv - \int_{t-\tau}^t \left\langle Q(t, s) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds$$

$$+ \int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds d\eta + 2\operatorname{Re} \langle H(t)y(t), F(t, y(t)) \rangle,$$

где

$$Q(t, s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} \left( \frac{d}{dt} H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) \right) - K(0) & -H(t)B(t, t-s) \\ -B^*(t, t-s)H(t) & K(t-s) \end{pmatrix}.$$

Пользуясь следующим представлением

$$\left\langle \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{12}^* & O_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle (O_{11} - O_{12}O_{22}^{-1}O_{12}^*)z_1, z_1 \rangle \\ + \langle O_{22}^{-1}(O_{22}z_2 + O_{12}^*z_1), (O_{22}z_2 + O_{12}^*z_1) \rangle$$

и учитывая, что  $K(\xi)$  — положительно определенная матрица, имеем следующее неравенство

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq - \left\langle H^{\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{\frac{1}{2}}(t)y(t), y(t) \right\rangle + \int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds d\eta \\ + 2\operatorname{Re} \langle H(t)y(t), F(t, y(t)) \rangle.$$

Поскольку  $p_1(t)$  — минимальное собственное значение матрицы  $P(t)$ , получаем

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq -p_1(t) \langle H(t)y(t), y(t) \rangle + \int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds d\eta \\ + 2\operatorname{Re} \langle H(t)y(t), F(t, y(t)) \rangle.$$

Из определения вектор-функции  $F(t, y(t))$  следует

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq -p_1(t) \langle H(t)y(t), y(t) \rangle + \int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds d\eta \\ + 2q \|H(t)\| \|y(t)\|^{2+\varepsilon}.$$

Учитывая определение функций  $\gamma(t)$ ,  $\beta(t)$ , имеет место неравенство

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq -\gamma(t)V(t, y) + \beta(t)V^{1+\frac{\varepsilon}{2}}(t, y).$$

Разделив обе части неравенства на  $V^{1+\frac{\varepsilon}{2}}(t, y)$ , получим

$$-\frac{2}{\varepsilon} \frac{d}{dt} V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(t, y) + \gamma(t)V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(t, y) \leq \beta(t).$$

Домножив обе части неравенства на  $-\frac{\varepsilon}{2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \gamma(s) ds\right)$ , имеем

$$\frac{d}{dt} \left( V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(t, y) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \gamma(s) ds\right) \right) \geq -\frac{\varepsilon}{2} \beta(t) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \gamma(s) ds\right).$$

Это эквивалентно

$$V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(t, y) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \gamma(s) ds\right) \geq V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(0, \varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \beta(\xi) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\xi \gamma(s) ds\right) d\xi.$$

Если  $\varphi(t) \in \mathcal{E}$ , то выражение справа всегда будет положительно, следовательно,

$$V(t, y) \leq \exp\left(-\int_0^t \gamma(s) ds\right) \left( V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(0, \varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \beta(\xi) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\xi \gamma(s) ds\right) d\xi \right)^{-\frac{2}{\varepsilon}}.$$

В силу определения функционала  $V(t, y)$  из (1.3) и положительной определенности матрицы  $K(\xi)$ , имеем оценку (2.2)

$$\|y(t)\| \leq \|H^{-1}(t)\|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\int_0^t \frac{\gamma(s)}{2} ds\right) \times \left( V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(0, \varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \beta(\xi) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\xi \gamma(s) ds\right) d\xi \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Отметим, что данное неравенство верно при  $t \in (0, \tau')$ . Поскольку  $y(t)$  — решение (1.1), то из данной оценки следует, что существует  $y(\tau') = \lim_{t \rightarrow \tau'} y(t)$ . Тогда, поставив начальную задачу типа (2.1) на отрезке  $[\tau' - \tau, \tau']$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z(t) = A(t)z(t) + \int_{t-\tau}^t B(t, t-s)z(s)ds, & t > \tau', \\ z(t) = y(t), & t \in [\tau' - \tau, \tau'], \\ z(\tau' + 0) = y(\tau'), \end{cases}$$

получим, что решение продолжается, следовательно, решение существует при всех  $t > 0$ . Повторив рассуждения выше, убеждаемся, что оценка (2.2) справедлива при всех  $t > 0$ .

Теорема доказана. □

Заметим, что оценка характеризует экспоненциальное убывание решений на бесконечности. Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво.

Рассмотрим вопрос робастной устойчивости системы (1.1). Наряду с системой (1.1) рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= (A(t) + A_1(t))y(t) \\ &+ \int_{t-\tau}^t (B(t, t-s) + B_1(t, t-s))y(s)ds + F(t, y(t)), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $A_1(t)$  — матрица возмущений с непрерывными  $T$ -периодическими элементами,  $B_1(t, \xi)$  — матрица возмущений с непрерывными элементами,  $T$ -периодическими по первой переменной, т. е.  $A_1(t+T) \equiv A_1(t)$ ,  $B_1(t+T, \xi) \equiv B_1(t, \xi)$ .

Введем функцию

$$\begin{aligned} r(t) &= 2\|A_1(t)\|\sqrt{\nu(H(t))} + \|H(t)\| \\ &\times \int_{t-\tau}^t \|K^{-1}(t-s)\| (2\|B_1(t, t-s)\|\|B(t, t-s)\| + \|B_1(t, t-s)\|^2) ds, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\nu(H(t)) = \|H(t)\|\|H^{-1}(t)\|$  — число обусловленности матрицы  $H(t)$ . Отметим, что функция  $r(t)$  — неотрицательная.

**Теорема 2.** Пусть для системы (1.1) выполнены условия теоремы 1, и матрицы возмущений из системы (2.3) такие, что имеет место

$$\int_0^T r(s)ds < \int_0^T \gamma(s)ds, \quad (2.5)$$

тогда нулевое решение системы (2.3) асимптотически устойчиво.

*Доказательство.* Поскольку выполнены условия теоремы 1, то определен функционал Ляпунова – Красовского (1.3). Рассмотрим этот функционал вдоль решения возмущенной системы (2.3). По теореме 1 асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2.3) следует из неравенства

$$\int_0^T \hat{\gamma}(s)ds > 0, \quad (2.6)$$

где  $\hat{\gamma}(t) = \min\{\hat{p}_1(t), k\}$ ,  $\hat{p}_1(t)$  — минимальное собственное число матрицы

$$\hat{P}(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t) \left( -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)(A(t) + A_1(t)) - (A(t) + A_1(t))^* H(t) - \tau K(0) - H(t) \right)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \int_{t-\tau}^t (B(t, t-s) + B_1(t, t-s))^* K^{-1}(t-s) \right. \\ & \left. \times (B(t, t-s) + B_1(t, t-s)) ds \right] H(t) \Big) H^{-\frac{1}{2}}(t). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\|H^{\frac{1}{2}}(t)\| = \|H(t)\|^{\frac{1}{2}}$ , несложно проверить, что для матрицы  $P(t)$  из формулировки теоремы 1 и функции  $r(t)$  из (2.4) справедливо следующее неравенство

$$P(t) + r(t)I > \widehat{P}(t) > P(t) - r(t)I.$$

Следовательно,

$$p_1(t) + r(t) > \widehat{p}_1(t) > p_1(t) - r(t). \quad (2.7)$$

Покажем справедливость неравенства (2.6), тем самым докажем теорему. Перепишем левую часть неравенства (2.6), используя определение функции  $\widehat{\gamma}(t)$

$$\int_0^T \widehat{\gamma}(s) ds = \int_0^T \min \{ \widehat{p}_1(s), k \} ds = \int_0^T \frac{1}{2} (\widehat{p}_1(s) + k - |\widehat{p}_1(s) - k|) ds.$$

В силу неравенства треугольника имеем

$$\widehat{p}_1(t) + k - |\widehat{p}_1(t) - k| > \widehat{p}_1(t) + k - |\widehat{p}_1(t) - p_1(t)| - |p_1(t) - k|.$$

Из неравенства (2.7) следует, что

$$\widehat{\gamma}(t) > \gamma(t) - r(t).$$

Следовательно, неравенство (2.6) вытекает из условия (2.5).  $\square$

### 3. Аналог теоремы Крейна

Используя достаточные условия асимптотической устойчивости, мы докажем асимптотическую устойчивость нулевого решения системы вида (1.2). Напомним, что для любого  $t \in [0, T]$  спектр матрицы  $A(t)$  принадлежит левой полуплоскости  $\mathbb{C}_-$ .

Отметим, что в литературе имеется ряд результатов об устойчивости решений для подобных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2] и дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [6–8]. Приведем некоторые из них.

Вначале рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром  $\mu > 0$

$$\frac{d}{dt}y = \mu A(t)y, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

где  $A(t)$  — матрица с непрерывными  $T$ -периодическими элементами. Имеет место следующая теорема Крейна [2].

**Теорема 3.** Если для любого  $t \in [0, T]$  спектр матрицы  $A(t)$  принадлежит левой полуплоскости  $\mathbb{C}_-$ , то при всех достаточно больших положительных  $\mu$  нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво.

Подчеркнем, что в теореме Крейна асимптотическая устойчивость решения системы (3.1) гарантируется только при достаточно больших  $\mu > 0$ . Это условие является важным, так как существуют примеры систем вида (3.1), нулевое решение которых при  $\mu \approx 0$  неустойчиво. Впервые данные примеры были указаны Р. Э. Виноградом (см., например, [1, стр. 124]). Отметим, что в работе [8] было получено некоторое “пороговое” значение  $\mu_0$ , начиная с которого можно гарантировать асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (3.1). Для формулировки соответствующего утверждения нам потребуется ввести некоторые обозначения.

Поскольку для любого  $t \in [0, T]$  спектр матрицы  $A(t)$  принадлежит левой полуплоскости  $\mathbb{C}_-$ , то по критерию Ляпунова существует решение  $\hat{H}(t) = \hat{H}^*(t) > 0$  матричного уравнения

$$\hat{H}A(t) + A^*(t)\hat{H} = -I.$$

Более того,  $\hat{H}(t) \in C[0, T]$ . Введем следующие обозначения

$$H_{\max} = \max_{t \in [0, T]} \|\hat{H}(t)\|, \quad \nu_{\max} = \max_{t \in [0, T]} \nu(\hat{H}(t)),$$

где  $\nu(\hat{H}(t))$  — число обусловленности матрицы  $\hat{H}(t)$ .

Справедлива следующая теорема [8].

**Теорема 4.** Пусть для любого  $t \in [0, T]$  спектр матрицы  $A(t)$  принадлежит левой полуплоскости  $\mathbb{C}_-$ , число  $N$  такое, что выполнено неравенство

$$\max_{|t-s| \leq \frac{T}{N}} \|A(t) - A(s)\| \leq \frac{1}{4H_{\max}\sqrt{\nu_{\max}}}, \quad (3.2)$$

и

$$\mu_0 = \frac{2NH_{\max}}{T} \ln \nu_{\max},$$

тогда при всех  $\mu > \mu_0$  нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво.

Отметим, что существование  $N$ , при котором выполнено неравенство (3.2), обеспечивается непрерывностью элементов матриц  $A(t)$ ,  $\hat{H}(t)$  и функции  $\nu(\hat{H}(t))$ . При доказательстве этой теоремы существенно использовался следующий критерий асимптотической устойчивости [3] системы

$$\frac{d}{dt}y = A(t)y, \quad (3.3)$$

где  $A(t)$  — непрерывная  $T$ -периодическая матрица размера  $n \times n$ .

**Теорема 5.** *I. Если нулевое решение системы (3.3) асимптотически устойчиво, то для любой непрерывной на  $[0, T]$  матрицы  $C(t)$  существует единственное решение  $L(t)$  краевой задачи*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}L + LA(t) + A^*(t)L = -C(t), & 0 < t < T, \\ L(0) = L(T), \end{cases} \quad (3.4)$$

при этом, если

$$C(t) = C^*(t) > 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.5)$$

то

$$L(t) = L^*(t) > 0, \quad t \in [0, T].$$

*II. Пусть правая часть  $C(t)$  непрерывна на  $[0, T]$  и удовлетворяет условиям (3.5). Если краевая задача (3.4) имеет эрмитово решение  $L(t)$  такое, что  $L(0) > 0$ , то нулевое решение системы (3.3) асимптотически устойчиво.*

Для систем (3.1) в силу критерия асимптотической устойчивости при  $\mu > \mu_0$  краевая задача для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}L + \mu LA(t) + \mu A^*(t)L = -I, & 0 < t < T, \\ L(0) = L(T) > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

имеет единственное решение  $L(t)$ , при этом  $L(t) = L^*(t) > 0$ . Причем, как было показано в [8], имеет место оценка

$$\|L(t)\| \leq \frac{2H_{\max}(\nu_{\max})^N}{\mu} \left( 1 - (\nu_{\max})^N \exp\left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}}\right) \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

Сформулируем и докажем аналог теорем 3, 4 для системы (1.2).

**Теорема 6.** *Пусть число  $N$  такое, что выполнено неравенство (3.2) и  $\mu_1 > 0$  — корень следующего уравнения*

$$\begin{aligned} & \mu \left( 1 - (\nu_{\max})^N \exp\left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}}\right) \right) \\ & = 4H_{\max}(\nu_{\max})^N \left( \max_{\xi \in [0, T]} \tau \left\| \int_{\xi-\tau}^{\xi} e^{\xi-s} B^*(\xi, \xi-s) B(\xi, \xi-s) ds \right\| \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

тогда при всех  $\mu > \mu_1$  нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво.

*Доказательство.* Для того чтобы доказать, что нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво при всех  $\mu > \mu_1$ , мы укажем матрицы  $H(t)$ ,  $K(s)$ , удовлетворяющие условиям теоремы 1, и такие, что  $P(t) > 0$ . Тогда из теоремы 1 получим требуемое.

Покажем, что уравнение (3.8) однозначно разрешимо. Действительно, в случае  $\mu > \mu_0$  в левой части стоит произведение двух положительных монотонно возрастающих функций, которое при  $\mu = \mu_0$  обращается в ноль, а справа стоит неотрицательная величина. В случае  $0 < \mu < \mu_0$  левая часть уравнения (3.8) отрицательна, а при увеличении  $\mu$  она неограниченно возрастает. Тогда найдется единственный корень  $\mu_1$  уравнения (3.8) и  $\mu_1 \geq \mu_0$ .

Заметим, что при  $\mu > \mu_1$  краевая задача (3.6) однозначно разрешима, причем  $L(t) = L^*(t) > 0$ . Возьмем в качестве матрицы  $H(t)$   $T$ -периодическое продолжение решения  $L(t)$  краевой задачи (3.6), тогда при  $\mu > \mu_1$  для  $H(t)$  справедлива оценка вида (3.7)

$$\|H(t)\| \leq \frac{2H_{\max}(\nu_{\max})^N}{\mu} \left(1 - (\nu_{\max})^N \exp\left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}}\right)\right)^{-1}, \quad t \geq 0. \quad (3.9)$$

Пусть  $K(s) = \frac{e^{-s}}{2\tau}I$ , тогда  $k = 1$  (см. теорему 1). В силу выбора матриц  $H(t)$  и  $K(s)$  матрица  $P(t)$  из теоремы 1 имеет вид

$$P(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t) \left( \frac{1}{2}I - 2\tau H(t) \left[ \int_{t-\tau}^t e^{t-s} B^*(t, t-s) B(t, t-s) ds \right] H(t) \right) H^{-\frac{1}{2}}(t).$$

Покажем, что эта матрица положительно определена. Ясно, что для этого достаточно показать положительную определенность матрицы

$$M(t) = \frac{1}{2}I - 2\tau H(t) \left[ \int_{t-\tau}^t e^{t-s} B^*(t, t-s) B(t, t-s) ds \right] H(t).$$

Вначале отметим, что справедливо неравенство

$$M(t) > \left( \frac{1}{2} - 2\tau \|H(t)\|^2 \left\| \int_{t-\tau}^t e^{t-s} B^*(t, t-s) B(t, t-s) ds \right\| \right) I,$$

тогда в силу оценки (3.9) имеем

$$M(t) \geq \left( \frac{1}{2} - 2\tau \left( \frac{2H_{\max}(\nu_{\max})^N}{\mu} \left(1 - (\nu_{\max})^N \exp\left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}}\right)\right)^{-1} \right)^2 \right. \\ \left. \times \left\| \int_{t-\tau}^t e^{t-s} B^*(t, t-s) B(t, t-s) ds \right\| \right) I.$$



Очевидно, из (3.8) следует, что при  $\mu = \mu_1$  матрица справа неотрицательно определена. Следовательно, при  $\mu > \mu_1$  матрица  $M(t)$  является положительно определенной. Это влечет за собой положительную определенность матрицы  $P(t)$ . Тогда, как отмечалось, минимальное собственное значение  $p_1(t)$  матрицы  $P(t)$  строго положительно. Из этого вытекает, что

$$\int_0^T \gamma(s) ds = \int_0^T \min\{p_1(s), 1\} ds > 0.$$

В силу теоремы 1 нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво при всех  $\mu > \mu_1$ .

Теорема доказана. □

### Список цитируемых источников

1. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966.  
Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytskii V. V. (1966). Theory of Lyapunov exponents and its applications to problems of stability. Moscow: Nauka. (in Russian)
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.  
Daleckii Ju. L., Krein M. G. (1974). Stability of solutions of differential equations in Banach space. Vol. 43: Translations of mathematical monographs. Providence: Amer. Math. Soc.
3. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 2. — С. 332–348.  
Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2001). On stability of solutions to linear systems with periodic coefficients. Sib. Math. J., 42, No. 2, 282–296.
4. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. — 2005. — Т. 5, № 3. — С. 20–28.  
Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2005). Asymptotic properties of solutions to delay differential equations. Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika, Mekhanika, Informatika, 5, No. 3, 20–28. (in Russian)
5. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 5. — С. 1025–1040.  
Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2007). Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. Siberian Math. J., 48, No. 5, 824–836.
6. *Матвеева И. И., Щеглова А. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами // Сиб. журн. индустр. матем. — 2011. — Т. 14, № 1. — С. 83–92.

- Matveeva I. I., Shcheglova A. A. (2011). Some estimates of the solutions to time-delay differential equations with parameters. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 5, No. 3, 391–399.
7. *Матвеева И. И., Щеглова А. А.* Оценки решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами // Математические заметки ЯГУ. — 2012. — Т. 19, № 1. — С. 60–69.
- Matveeva I. I., Shcheglova A. A. (2012). Estimates of the solutions of a class of nonlinear differential equations with retarded argument and parameters. *Mat. Zamet. YAGU*, 19, No. 1, 60–69. (in Russian)
8. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* (2015). Asymptotic stability of solutions to a class of linear time-delay systems with periodic coefficients and a large parameter. *Journal of Inequalities and Applications*, 2015, No. 331, 1–10.

*Получена 02.11.2017*



УДК 517.955.8

# Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения внутренних волн

**Е. В. Никитенко**

Рубцовский индустриальный институт (филиал)  
ФГБОУ ВО “Алтайский государственный технический  
университет им. И. И. Ползунова”,  
Рубцовск 658207. E-mail: evnikit@mail.ru

**Аннотация.** В работе рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения внутренних волн со специальной правой частью. Исследуется асимптотическое поведение решений при  $t \rightarrow \infty$ . Указан явный вид предельной функции и получена оценка на скорость сходимости.

**Ключевые слова:** уравнение внутренних волн, задача Коши, асимптотические свойства, скорость сходимости.

## Asymptotic properties of solutions to the inhomogeneous equation of internal waves

**E. V. Nikitenko**

Rubtsovsk Industrial Institute,  
Polzunov Altai State Technical University,  
Rubtsovsk 658207.

**Abstract.** In this paper we consider the Cauchy problem for the inhomogeneous equation of internal waves with a special right-hand side. We investigate the asymptotic behavior of solutions as  $t \rightarrow \infty$ . We specify the explicit form of the limit function and estimate the rate of convergence.

**Keywords:** equation of internal waves, Cauchy problem, asymptotic properties, convergence rate.

**MSC 2010:** 35C20, 35C15

### 1. Введение

В работе рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения внутренних волн

$$\begin{aligned} \Delta u_{tt} + u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} &= e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0, \quad x \in R^3, \\ u|_{t=0} &= 0, \\ u_t|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $f(x) \in S(R^3)$ ,  $\lambda \geq 0$  — параметр. Установлены асимптотические оценки при  $t \rightarrow \infty$  решений  $u(t, x, \lambda)$  в зависимости от параметра  $\lambda$ .

Решение данной задачи однозначно определяется в классе функций, убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  [2]. При выводе асимптотических оценок при  $t \rightarrow \infty$  решений  $u(t, x, \lambda)$  используется вариант метода стационарной фазы, изложенного в [3].

В настоящее время имеется большое число работ, в которых проводились исследования поведения асимптотики при  $t \rightarrow \infty$  решений краевых задач для конкретных уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной. Среди них отметим работу [1], в которой рассматривалась задача Коши для неоднородного уравнения Соболева

$$\begin{aligned} \Delta u_{tt} + u_{x_n x_n} &= e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0, \quad x \in R^n, \\ u|_{t=0} &= 0, \\ u_t|_{t=0} &= 0, \end{aligned}$$

где  $f(x) \in S(R^n)$ ,  $\lambda \geq 0$  — параметр,  $n \geq 3$ . В данной работе были установлены асимптотические разложения при  $t \rightarrow \infty$  решений  $u(t, x, \lambda)$  в зависимости от значений параметра  $\lambda$ .

## 2. Формулировка результатов

Сформулируем основные результаты об асимптотическом поведении решения задачи Коши (1.1).

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda > 1$ , тогда на любом компакте  $K \subset R^3$  для решения задачи (1.1) имеет место оценка

$$\left| u(t, x, \lambda) + e^{i\lambda t} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{R^3} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \lambda^2|\xi|^2)} d\xi \right| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1, \quad (2.1)$$

где  $c(K, \lambda)$  — константа, зависящая от  $K$  и  $\lambda$ .

**Теорема 2.** Пусть  $0 < \lambda \leq 1$ , тогда на любом компакте  $K \subset R^3$  справедлива асимптотическая оценка

$$|(D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 - \lambda^2 \Delta)u(t, x, \lambda) - e^{i\lambda t} f(x)| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1. \quad (2.2)$$

**Теорема 3.** Пусть  $\lambda = 0$ . Тогда на любом компакте  $K \subset R^3$  для решения задачи Коши имеет место

$$|(D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2)u(t, x) - f(x)| \leq \frac{c(K)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

## 3. Вывод асимптотических оценок

*Доказательство теоремы 1.* Используя интегральное преобразование Фурье, нетрудно проверить, что решение задачи (1.1) при  $\lambda > 1$  можно представить в следующем виде

$$u(t, x, \lambda) = u^1(t, x, \lambda) + u^2(t, x, \lambda) + u^3(t, x, \lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{R^3} e^{ix\xi} \frac{i\lambda|\xi|\hat{f}(\xi)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \lambda^2|\xi|^2)\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}{|\xi|}\right) d\xi \\
&\quad + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{R^3} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \lambda^2|\xi|^2)} \cos\left(\frac{t\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}{|\xi|}\right) d\xi \\
&\quad - e^{i\lambda t} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{R^3} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \lambda^2|\xi|^2)} d\xi.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Рассмотрим вначале функцию  $u^1(t, x, \lambda)$ . Переходя к сферическим координатам

$$\xi_3 = \rho \cos \theta_1, \quad \xi_2 = \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad \xi_1 = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2, \tag{3.2}$$

получим

$$u^1(t, x, \lambda) = \frac{i\lambda}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\sin(t \sin \theta_1)}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)) d\theta_1 d\theta_2 d\rho.$$

Рассмотрим следующий интеграл при  $t \gg 1$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^\pi e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\sin(t \sin \theta_1)}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)) d\theta_1 \\
&= \left( \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}} + \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}}^\pi \right) e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\sin(t \sin \theta_1)}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)) d\theta_1 = J_1^1 + J_1^2 + J_1^3.
\end{aligned}$$

Так как оба интеграла  $J_1^1, J_1^3$  оцениваются по одной схеме, то рассмотрим, например,  $J_1^1$ . Используя тождество

$$\sin(t \sin \theta_1) = \frac{-1}{t \cos \theta_1} D_{\theta_1} \cos(t \sin \theta_1),$$

получим

$$\begin{aligned}
J_1^1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{-1}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)t \cos \theta_1} D_{\theta_1} \cos(t \sin \theta_1) \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)) d\theta_1 \\
&= e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{-\cos(t \sin \theta_1)}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)t \cos \theta_1} \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\cos(t \sin \theta_1)}{t} \left[ \frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho, \theta_1, \theta_2) \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2))}{\cos \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \right. \\
& \left. + \frac{\sin \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2))}{\cos^2 \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} + \frac{1}{\cos \theta_1} D_{\theta_1} \left( \frac{\hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2))}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \right) \right] d\theta_1 = J_1^{1,1} + J_1^{1,2}.
\end{aligned}$$

В силу того, что при достаточно больших  $t$  выполнено неравенство

$$|\cos \theta_1| \geq \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right], \quad (3.3)$$

получим

$$|J_1^{1,1}| \leq \frac{c(\rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Очевидно, что для первого и третьего слагаемых в  $J_1^{1,2}$  справедливы оценки

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\cos(t \sin \theta_1)}{t} \frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho, \theta_1, \theta_2) \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2))}{\cos \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} d\theta_1 \right| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1,$$

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\cos(t \sin \theta_1)}{t} \frac{1}{\cos \theta_1} D_{\theta_1} \left( \frac{\hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2))}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \right) d\theta_1 \right| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Оценим второе слагаемое в  $J_1^{1,2}$ . Имеем

$$\left( \int_0^{\frac{\pi}{2} - \delta} + \int_{\frac{\pi}{2} - \delta}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} \right) e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\cos(t \sin \theta_1)}{t} \frac{\sin \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2))}{\cos^2 \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} d\theta_1 = J_1^{1,2,1} + J_1^{1,2,2},$$

где  $\delta > 0$  — достаточно маленькое фиксированное число такое, что

$$|\cos \theta_1| \geq \frac{\pi - \theta_1}{2}, \quad \theta_1 \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right]. \quad (3.4)$$

Очевидно, что

$$|J_1^{1,2,1}| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{t}, \quad t \gg 1.$$

По аналогии с [3, стр. 187] имеем

$$|J_1^{1,2,2}| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Таким образом,

$$|J_1^1| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Аналогично получаем, что

$$|J_1^3| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Учитывая, что  $\lambda > 1$ , имеем следующую оценку

$$|J_1^2| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Таким образом, для функции  $u^1(t, x, \lambda)$  получено неравенство:

$$|u^1(t, x, \lambda)| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad x \in K, \quad t \gg 1. \quad (3.5)$$

Оценим функцию  $u^2(t, x, \lambda)$  по той же схеме, что и функцию  $u^1(t, x, \lambda)$ . Переходя к сферическим координатам (3.2), получим

$$u^2(t, x, \lambda) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\sin \theta_1 \cos(t \sin \theta_1)}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)) d\theta_1 d\theta_2 d\rho.$$

Рассмотрим следующий интеграл при  $t \gg 1$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^\pi e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\sin \theta_1 \cos(t \sin \theta_1)}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)) d\theta_1 \\ &= \left( \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}} + \int_{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}}^\pi \right) e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\sin \theta_1 \cos(t \sin \theta_1)}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)) d\theta_1 = J_2^1 + J_2^2 + J_2^3. \end{aligned}$$

Так как интегралы  $J_2^1$  и  $J_2^3$  оцениваются по одной схеме, то рассмотрим, например,  $J_2^1$ . Используя тождество

$$\cos(t \sin \theta_1) = \frac{1}{t \cos \theta_1} D_{\theta_1} \sin(t \sin \theta_1),$$

имеем

$$\begin{aligned} J_2^1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\sin \theta_1}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2) t \cos \theta_1} D_{\theta_1} \sin(t \sin \theta_1) \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)) d\theta_1 \\ &= e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\sin \theta_1 \sin(t \sin \theta_1)}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2) t \cos \theta_1} \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\sin(t \sin \theta_1)}{t} \left[ \frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho, \theta_1, \theta_2) \sin \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2))}{\cos \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \right. \\
& \left. + \frac{\sin^2 \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2))}{\cos^2 \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} + \frac{1}{\cos \theta_1} D_{\theta_1} \left( \frac{\sin \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2))}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \right) \right] d\theta_1 = J_2^{1,1} + J_2^{1,2}.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством (3.3), получим, что

$$|J_2^{1,1}| \leq \frac{c(\rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Очевидно, что для первого и третьего слагаемых в  $J_2^{1,2}$  справедливы оценки

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\sin(t \sin \theta_1)}{t} \frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho, \theta_1, \theta_2) \sin \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2))}{\cos \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} d\theta_1 \right| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1, \\
& \left| \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\sin(t \sin \theta_1)}{t} \frac{1}{\cos \theta_1} D_{\theta_1} \left( \frac{\sin \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2))}{(\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} \right) d\theta_1 \right| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.
\end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое в  $J_2^{1,2}$ . Имеем

$$\left( \int_0^{\frac{\pi}{2} - \delta} + \int_{\frac{\pi}{2} - \delta}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}} \right) e^{ix\xi(\rho, \theta_1, \theta_2)} \frac{\sin(t \sin \theta_1)}{t} \frac{\sin^2 \theta_1 \hat{f}(\xi(\rho, \theta_1, \theta_2))}{\cos^2 \theta_1 (\sin^2 \theta_1 - \lambda^2)} d\theta_1 = J_2^{1,2,1} + J_2^{1,2,2},$$

где  $\delta > 0$  — достаточно маленькое фиксированное число такое, что выполняется оценка (3.4). Очевидно, как и ранее имеем

$$|J_2^{1,2,1}| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{t}, \quad |J_2^{1,2,2}| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Следовательно,

$$|J_2^1| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Аналогично получаем, что

$$|J_2^3| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Учитывая, что  $\lambda > 1$ , имеем следующую оценку

$$|J_2^2| \leq \frac{c(x, \rho, \theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Таким образом, для функции  $u^2(t, x, \lambda)$  получено неравенство:

$$|u^2(t, x, \lambda)| \leq \frac{c(K, \lambda)}{\sqrt{t}}, \quad x \in K, \quad t \gg 1. \quad (3.6)$$

Следовательно, из представления (3.1) в силу неравенств (3.5), (3.6) вытекает оценка (2.1). Теорема доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Применим к решению (3.1) задачи Коши (1.1) оператор  $[D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 - \lambda^2 \Delta]$ . Тогда результат можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} (D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 - \lambda^2 \Delta)u(t, x, \lambda) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{R^3} e^{ix\xi} \frac{\lambda|\xi|\hat{f}(\xi)}{i\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}{|\xi|}\right) d\xi \\ &\quad - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{R^3} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) \cos\left(\frac{t\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}{|\xi|}\right) d\xi + e^{i\lambda t} f(x). \end{aligned}$$

Первое и второе слагаемые в правой части оцениваются по той же схеме, что  $u^1(t, x, \lambda)$  и  $u^2(t, x, \lambda)$  для случая  $\lambda > 1$  соответственно. Поэтому, по аналогии с предыдущим, получаем оценку (2.2).

*Доказательство теоремы 3* вытекает из явной формулы (3.1) решения задачи (1.1).

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

### Список цитируемых источников

1. *Булдыгерова Л. Н., Демиденко Г. В.* Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения Соболева // Неклассические уравнения математической физики. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2005. — С. 50–59.  
Buldygerova L. N., Demidenko G. V. (2005). Asymptotic properties of solutions for the Sobolev inhomogeneous equation. Nonclassical equations of mathematical physics. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics SB RAS. P. 50–59. (in Russian)
2. *Секерж-Зенькович С. Я.* Теорема единственности и явное представление решения задачи Коши для уравнения внутренних волн // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 256, № 2. — С. 320–324.  
Sekerzh-Zen'kovich S. Ya. (1981). A uniqueness theorem and an explicit representation of the solution of the Cauchy problem for the equation of internal waves. Sov. Phys., Dokl., 26, 21–23.
3. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. — Новосибирск: Наука, 1984.  
Uspenskii S. V., Demidenko G. V., Perepelkin V. G. (1984). Imbedding theorems and applications to differential equations. Novosibirsk: Nauka. (in Russian)

Получена 24.02.2018



УДК 517.925.51

## Бифуркации периодических решений дифференциального уравнения с импульсным воздействием

О. В. Анашкин\*, Н. О. Седова\*\*, О. В. Юсупова\*

\*Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. E-mail: oanashkin@yandex.ru, olgayusupova@mail.ru

\*\*Ульяновский госуниверситет,  
Ульяновск

**Аннотация.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием демонстрируют существенно более сложное поведение решений, чем обыкновенные дифференциальные уравнения. Эта сложность обусловлена разрывами интегральных кривых в моменты импульсных воздействий. В докладе изучаются бифуркации интегральных кривых одномерной импульсной системы, приводящие к рождению или исчезновению периодических решений.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, бифуркация, периодическое решение, устойчивость.

## Bifurcations of periodic solutions of a differential equation with impulse action

O. V. Anashkin, N. O. Sedova, O. V. Yusupova

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007

Ul'yanovsk State University, Ul'yanovsk.

**Abstract.** Differential equations with impulsive effects demonstrate essentially more complex behavior of solutions than ordinary differential equations. This complexity is due to discontinuities in the integral curves at the moments of impulse actions. In this paper, bifurcations of integral curves of a one-dimensional impulse system are studied, leading to the birth or disappearance of periodic solutions.

**Keywords:** differential equations with impulse effect, bifurcation, periodic solution, stability.

**MSC 2010:** 34A37, 34D20

## Введение

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (импульсные системы) являются инструментом моделирования разнообразных процессов, параметры которых в определенные моменты времени подвергаются резким изменениям под влиянием кратковременных (импульсных) внешних воздействий. Примеры таких процессов дают различные отрасли науки и технологии (физика, химия, теория управления, популяционная динамика, биотехнология, промышленная робототехника, экономика и другие). Учитывая пренебрежимо малую продолжительность воздействий по сравнению с характерным

временем эволюции исследуемого процесса, в математической модели допускается, что параметры процесса изменяются мгновенно. Теория импульсных систем активно развивается с конца 60-х годов прошлого столетия [1-4]. Будем предполагать, что моменты импульсного воздействия известны заранее, тогда импульсную систему можно описать в следующем виде [1]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq \tau_k, \quad (0.1)$$

$$\Delta x(t) = h_k(x(t)) - x(t), \quad t = \tau_k, \quad (0.2)$$

где  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t-0)$  — разность правого и левого предельных значений функции  $x(t)$  в точке  $t$ ,  $\tau_k$  — моменты импульсного воздействия,  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_{k+1} = \tau_k + \theta_k$ ,  $\theta_k > 0$  — заданные вещественные числа,  $\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \infty$ ,  $\sum_{k=0}^{-\infty} \theta_k = \infty$ . Решением системы является непрерывная слева ( $x(t) = x(t-0)$ ) кусочно-гладкая функция с разрывами первого рода в точках  $\tau_k$ , удовлетворяющая уравнениям (0.1)-(0.2) на некотором интервале изменения независимой переменной  $t$ . Начальное условие задачи Коши для импульсной системы (0.1)-(0.2) имеет вид

$$x(t_0 + 0; t_0, x^0) = x^0, \quad (0.3)$$

то есть, начальное значение  $x^0$  является правым предельным значением решения импульсной системы в начальный момент времени  $t_0$ . Предполагается, что функции  $f$  и  $h_k$  обеспечивают однозначную разрешимость начальной задачи (0.1)-(0.3).

Система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием состоит из аналоговой составляющей, которая представлена системой обыкновенных дифференциальных уравнений (0.1), и дискретной составляющей — условия скачка (0.2), задающего оператор импульсного воздействия. Поэтому решения импульсной системы наследуют типичные свойства решений разностных уравнений. По этой причине уже одномерные импульсные системы могут иметь сколь угодно сложную структуру решений, в частности, предельными множествами траекторий могут быть не только точки покоя, но и траектории периодических решений.

Рассмотрим одномерную периодическую систему с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени

$$\begin{aligned} dx/dt = f(x) &= a_1x + a_2x^2 + r(x), & t \neq \tau_k, \\ x(t+0) = h(x) &= b_1x(t) + q(x), & t = \tau_k, \end{aligned} \quad (0.4)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $r(x) = a_s x^s + o(|x|^s)$ ,  $s \geq 3$ ,  $q(x) = b_l x^l + o(|x|^l)$ ,  $l \geq 2$  при  $|x| \rightarrow 0$ , последовательность  $\{\theta_k\}$  предполагается периодической периода  $p \in \mathbb{N}$ . Для сокращения выкладок ограничимся случаем  $p = 1$ , т. е.,  $\theta_k = \theta > 0$ .

Положим  $\rho = b_1 e^{a_1 \theta}$ . Легко видеть, что решения линеаризации системы (0.4) в нуле

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x, & t \neq \tau_k, \\ x(t+0) &= b_1 x(t), & t = \tau_k, \end{aligned}$$

являются ограниченными на всей числовой оси лишь при условии  $|\rho| = 1$ , когда все решения  $\theta$ -периодические (при  $\rho = 1$ ) или  $2\theta$ -периодические (при  $\rho = -1$ ).

Будем далее предполагать, что  $b_1 > 0$  (тогда  $\rho > 0$ ) и рассмотрим *укороченную систему*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x + a_2x^2, & t \neq \tau_k, \\ x(t+0) &= b_1x(t), & t = \tau_k. \end{aligned} \tag{0.5}$$

Сразу отметим, что при  $b_1 \neq 1$  система имеет только тривиальное стационарное решение  $x = 0$ . Обозначим через  $\varphi(t, \xi)$  решение начальной задачи для дифференциального уравнения в укороченной импульсной системе, удовлетворяющее условию  $\varphi(0, \xi) = \xi$ . Тогда

$$\varphi(t, \xi) = \frac{a_1\xi \exp(a_1t)}{a_1 + a_2\xi[1 - \exp(a_1t)]}. \tag{0.6}$$

Отсюда получаем формулу для решения  $x(t) = x(t; t_0, x^0)$  укороченной импульсной системы (0.5), удовлетворяющего начальному условию (0.3):

$$x(t) = \frac{b_1x(\tau_k)e^{a_1(t-\tau_k)}}{1 + b_1x(\tau_k)\frac{a_2}{a_1}(1 - e^{a_1(t-\tau_k)})} \text{ при } \tau_k < t \leq \tau_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{0.7}$$

Учитывая периодичность системы, мы полагаем, что  $0 \leq t_0 < \theta$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$x(\tau_1) = x(\theta) = \varphi(\theta - t_0, x_0) = \frac{x_0e^{a(\theta-t_0)}}{1 + x_0\frac{a_2}{a_1}(1 - e^{a_1(\theta-t_0)})}. \tag{0.8}$$

Нашей целью является изучение бифуркаций — условий, при которых происходит качественное изменение структуры решений системы (0.4), в частности, рождение и исчезновение периодических решений. Сначала мы изучим структуру решений укороченной системы (0.5). Для этого в первом разделе исследуем свойства последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному уравнению, связывающему значения решений системы (0.5) в соседних моментах импульсного воздействия. Используя эти свойства, во втором разделе мы опишем структуру множества всех решений укороченной системы (0.5), в частности, установим наличие и тип устойчивости периодических решений. На основании этого анализа в последующих разделах будут изложены определенные выводы о бифуркациях решений одномерной импульсной системы (0.4).

## 1. Свойства решений рекуррентного уравнения

Из (0.7) находим рекуррентное уравнение, связывающее значения решений укороченной импульсной системы (0.5) в соседних моментах импульсного воздействия:

$$x(\tau_{k+1}) = F(x(\tau_k)) = \frac{Ax(\tau_k)}{1 + Bx(\tau_k)}, \tag{1.1}$$

где

$$A = b_1 e^{a_1 \theta} > 0, \quad B = \frac{b_1 a_2}{a_1} (1 - e^{a_1 \theta}). \quad (1.2)$$

Обозначим  $z_k = x(\tau_k)$ . Решение дробно-линейного разностного уравнения (1.1) нетрудно выписать в явном виде

$$z_k = F^k(z_0) = \frac{A^k z_0}{1 + B(1 + A + \dots + A^{k-1}) z_0}, \quad (1.3)$$

где  $F^k = F \circ F^{k-1}$  —  $k$ -я степень отображения  $F$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $F^0 = \text{id}$ ,  $\text{id}: x \mapsto x$ .

Отметим основные свойства функции  $F(z)$ , определенной в (1.1):

- 1) функция определена и непрерывно дифференцируема всюду на  $\mathbb{R}$ , кроме полюса  $z = -\frac{1}{B}$ ;
- 2) монотонно возрастает, т. к.  $F'(z) = A/(1 + Bz)^2 > 0$ ;
- 3) отображение  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет только одну ненулевую неподвижную точку  $\hat{z} = (A - 1)/B$  (при  $A \neq 1$ ) и при этом  $F'(0) = A$ ,  $F'(\hat{z}) = 1/A$ .

Заметим также, что у  $k$ -й степени отображения  $F$  при любом  $k \geq 2$  нет неподвижных точек, отличных от  $\hat{z}$ .

Пусть для определенности  $a_1 > 0$  и  $a_2 < 0$ . Согласно (1.2) величины  $A$  и  $B$  являются положительными. Тогда из формулы (1.3) следует: если  $z_0 > 0$ , то  $z_k(z_0) > 0$  при любом  $k \in \mathbb{N}$  и последовательность  $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$  сходится, а именно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k(z_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < A \leq 1; \\ \frac{A-1}{B}, & \text{если } 1 < A. \end{cases} \quad (1.4)$$

При  $z_0 < 0$  последовательность  $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$  является бесконечной, если  $z_0 \neq A_0^-$ , где

$$A_0^- = \left\{ z_0^{(k)} = \frac{-1}{B(1 + A + \dots + A^k)}, k = 0, 1, \dots \right\}.$$

Очевидно, что при  $0 < A < 1$  множество  $A_0^-$  локализовано на сегменте  $[-1/B, (A - 1)/B]$ , а при  $A \geq 1$  — на сегменте  $[-1/B, 0]$ . Подробный анализ, детали которого мы опускаем, показывает, что предел (1.4) существует для любой последовательности  $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$ , если  $z_0 \notin A_0^-$ .

При  $z_0 \in A_0^-$  последовательность  $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$  конечная, но решение  $\{z_k(z_0)\}$  разностного уравнения (1.1) неограниченно продолжается влево, т. е. при  $k \rightarrow -\infty$ .

Итак, мы убедились, что разностное уравнение (1.1) имеет при  $A \neq 1$  две неподвижные точки:  $z = 0$  и  $z = \hat{z} = \frac{A - 1}{B}$ , при  $A \rightarrow 1$   $\hat{z} \rightarrow 0$  и при  $A = 1$  остается только нулевая точка покоя. Начало координат  $z = 0$  асимптотически устойчиво при  $0 < A < 1$  и неустойчиво при  $A \geq 1$ . Если  $A \neq 1$ , то ненулевая точка покоя

$\hat{z}$  разностного уравнения (1.1) неустойчива при  $0 < A < 1$  и асимптотически устойчива при  $1 < A$ .

При  $b_1 = 1$  одномерная импульсная система (0.5) превращается в одномерную динамическую систему. Отметим, что при  $b_1 \rightarrow 1$

$$\hat{z} = \frac{A - 1}{B} = \frac{b_1 e^{a_1 \theta} - 1}{b_1 (1 - e^{a_1 \theta})} \cdot \frac{a_1}{a_2} \rightarrow -\frac{a_1}{a_2},$$

где  $\hat{x} = -\frac{a_1}{a_2}$  — нетривиальное положение равновесия дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 x^2. \tag{1.5}$$

в системе (0.5). Как легко видеть, при заданном условии  $a_1 > 0, a_2 < 0$  нулевое решение уравнения (1.5) неустойчиво, а ненулевая точка покоя  $\hat{x} = -\frac{a_1}{a_2}$  асимптотически устойчива. Таким образом, при  $b_1 \rightarrow 1$  асимптотически устойчивая стационарная точка разностного уравнения (1.1) стремится к асимптотически устойчивому положению равновесия дифференциального уравнения (1.5). При этом соответствующее асимптотически устойчивое периодическое решение импульсной системы (0.5) также стремится к точке покоя  $\hat{x} = -\frac{a_1}{a_2}$  предельного дифференциального уравнения.

При других предположениях относительно знаков коэффициентов уравнения (1.5) поведение решений рекуррентного уравнения (1.1) аналогичное.

## 2. Бифуркации периодических решений укороченной системы

Пусть  $a_1 > 0$  и  $a_2 < 0$ . В этом случае, как уже отмечено выше, тривиальное решение  $x = 0$  дифференциального уравнения импульсной системы (0.5) неустойчиво, а точка покоя  $\hat{x} = -a_1/a_2 > 0$  является асимптотически устойчивой.

Свойства решений рекуррентного уравнения (1.1) определяют поведение решений импульсной системы (0.5) при  $t \rightarrow \infty$ . При всяком  $t_0 \in [0, \theta)$  и  $x_0 > 0$  последовательность  $x(\tau_k; t_0, x_0)$  сходится согласно (1.4). Поэтому при  $0 < A \leq 1$   $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; t_0, x_0) = 0$ , а при  $A > 1$  решение импульсной системы  $x(t; t_0, x_0)$  экспоненциально стремится к положительному кусочно-гладкому  $\theta$ -периодическому решению  $\psi(t)$ , которое при  $\tau_k < t \leq \tau_{k+1}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{b_1 \frac{A-1}{B} \exp[a_1(t - \tau_k)]}{1 + \frac{a_2 b_1 (A-1)}{a_1 B} (1 - \exp[a_1(t - \tau_k)])} = \\ &= \frac{(b_1 \exp(a_1 \theta) - 1) \exp[a_1(t - \tau_k)]}{\exp(a_1 \theta) - 1 + (b_1 \exp(a_1 \theta) - 1)(\exp[a_1(t - \tau_k)] - 1)} \cdot \left(-\frac{a_1}{a_2}\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Единственное периодическое решение укороченной системы  $\psi(t)$  определяет неподвижная точка  $\hat{z} = (A - 1)/B$  отображения  $F$ .



Пусть теперь  $x_0 < 0$ , тогда из (0.6) имеем

$$x(\theta) = x(\theta; t_0, x_0) = \frac{a_1 x_0 \exp[a_1(\theta - t_0)]}{a_1 + a_2 x_0 (1 - \exp[a_1(\theta - t_0)])}. \quad (2.2)$$

Поэтому для любого  $x_0 < 0$  значение  $x(\theta)$  будет отрицательным при достаточно близком к  $\theta$  начальном моменте  $t_0$ . Из (2.2) следует, что при

$$x_0 \leq \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{1}{\exp[a_1(\theta - t_0)] - 1} < 0$$

решение  $x(t) = x(t; t_0, x_0)$  системы (0.5) уходит на  $-\infty$  при  $t \rightarrow t_1 \leq \theta$ .

При

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{1}{\exp[a_1(\theta - t_0)] - 1} < x_0 < 0$$

значение  $x(\theta)$  отрицательное и возможны три сценария поведения последовательности  $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$ , удовлетворяющей рекуррентному уравнению (1.1) при  $z_0 = x(\theta) < 0$ : (а) последовательность  $\{z_k(z_0)\}_{k \geq 1}$  конечная; (б)  $z_k(z_0) > 0$  при  $k > k_0$  для некоторого  $k_0 > 0$ ; (в)  $z_k(z_0) < 0$  при всех  $k \geq 0$ . Тогда нетрудно проверить, что при реализации первых двух сценариев решение системы (0.5) уходит на  $-\infty$  за конечное время. Из (1.3) следует, что последний сценарий реализуется лишь при  $0 < A < 1$  и тогда  $x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0 - 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Остается добавить, что при  $0 < A < 1$  укороченная импульсная система (0.5) имеет неустойчивое отрицательное  $\theta$ -периодическое решение (2.2).

Результаты проведенного анализа поведения решений укороченной системы сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $a_1 > 0$  и  $a_2 < 0$ . Положим

$$A = b_1 e^{a_1 \theta} > 0, \quad B = \frac{b_1 a_2}{a_1} (1 - e^{a_1 \theta}).$$

Тогда при  $A \neq 1$  укороченная система (0.5) имеет единственное периодическое решение  $\psi(t)$ . Это решение имеет период  $\theta$ , определяется начальным условием  $\psi(0) = \frac{A-1}{B}$  и имеет вид (2.2).

При  $0 < A < 1$  периодическое решение  $\psi(t)$  неустойчиво, а при  $1 < A$  все решения системы (0.5) с положительным начальным значением экспоненциально стремятся к  $\psi(t)$ .

При  $A \rightarrow 1$  периодическое решение стремится к точке покоя  $x = 0$ . При этом при переходе параметра  $A$  через значение 1 происходит бифуркация следующего типа: неустойчивое отрицательное периодическое решение при  $A = 1$  превращается в неустойчивую точку покоя  $x = 0$ , из которой при  $1 < A$  рождается экспоненциально устойчивое положительное периодическое решение.

Анализ поведения решений рекуррентного уравнения (1.1) при других соотношениях между знаками коэффициентов  $a_1 \neq 0$ ,  $a_2 \neq 0$  дифференциального уравнения (1.5) приводит к аналогичному выводу о бифуркациях единственного периодического решения укороченной импульсной системы (0.5).

### 3. Бифуркации периодических решений при нелинейном импульсном воздействии

Рассмотрим одномерную импульсную систему

$$\begin{aligned} dx/dt &= a_1x + a_2x^2, & t \neq \tau_k, \\ x(t+0) &= h(x) = b_1x(t) + q(x), & t = \tau_k, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $q(x) = b_lx^l + o(|x|^l)$ ,  $l \geq 2$  при  $|x| \rightarrow 0$ . Предположим также, что в достаточно малой  $\delta$ -окрестности нуля функция  $q(x)$  удовлетворяет полиномиальной оценке:

$$|q(x) - q(y)| \leq Const \cdot \delta^{l-1}|x - y|, \quad x, y \in (-\delta, \delta). \tag{3.2}$$

Рекуррентное уравнение, связывающее значения решений системы (3.1) в соседних моментах импульсного воздействия, имеет вид:

$$x(\tau_{k+1}) = F_1(x(\tau_k)) = \varphi(\theta, b_1x(\tau_k) + q(x(\tau_k))),$$

где  $\varphi(t, x)$  — решение дифференциального уравнения в импульсной системе (3.1).

Принимая во внимание формулу (0.6), получаем условие периодичности — уравнение для определения неподвижных точек отображения  $F_1$

$$\frac{(b_1x + q(x))e^{a_1\theta}}{1 + (b_1x + q(x))\frac{a_2}{a_1}(1 - e^{a_1\theta})} = x. \tag{3.3}$$

Покажем, что уравнение (3.3), ненулевые вещественные корни которого определяют  $\theta$ -периодические решения импульсной системы (3.1), для всякого достаточно малого  $|\varepsilon| > 0$  при значении  $A = b_1e^{a_1\theta} = 1 + \varepsilon$  имеет вещественный корень  $x_\varepsilon$  и  $x_\varepsilon \rightarrow 0$ , если  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В самом деле, в наших предположениях уравнение (3.3) приводится к виду

$$b_1e^{a_1\theta} + \frac{q(x)}{x}e^{a_1\theta} = 1 + (b_1x + q(x))\frac{a_2}{a_1}(1 - e^{a_1\theta}) \tag{3.4}$$

или, с учетом введенных выше обозначений,

$$\varepsilon = Bx - \frac{q(x)}{x}e^{a_1\theta} + q(x)\frac{B}{b_1}. \tag{3.5}$$

Обозначим  $P(x)$  правую часть уравнения (3.5). Заметим, принимая во внимание оценку (3.2), что функция  $P(x)$  при  $l > 2$  монотонно растет в малой окрестности

нуля ( $B > 0$ ) и  $P(0) = 0$ , поэтому уравнение (3.5) при достаточно малом  $|\varepsilon|$  имеет единственное решение  $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$  такое, что  $x_\varepsilon \rightarrow 0$ , если  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

При  $l = 2$  функция  $P(x)$  также монотонна в малой окрестности нуля, если  $B - b_2 e^{a_1 \theta} \neq 0$ .

Если предположить, что  $B = \frac{b_1 a_2}{a_1} (1 - e^{a_1 \theta}) = b_2 e^{a_1 \theta}$ , что равносильно условию  $b_1 a_2 (1 - e^{a_1 \theta}) = a_1 b_2 e^{a_1 \theta}$  (заметим, что равенство возможно только при  $b_2 > 0$ ), то вещественных решений типа  $x_\varepsilon$  при всяком достаточно малом  $\varepsilon > 0$  будет уже два, а при  $\varepsilon < 0$  таких решений вообще не будет.

Мы доказали, что в системе (3.1) при значении параметра  $A$ , близком к критическому  $A_{cr} = 1$ , в окрестности положения равновесия  $x = 0$  имеется  $\theta$ -периодическое решение, амплитуда которого стремится к нулю при стремлении  $A$  к 1.

Теперь рассмотрим полную систему (0.4). Обозначим через  $\zeta(t, x)$  решение дифференциального уравнения в полной системе, удовлетворяющее условию  $\zeta(0, x) = x$ . Ненулевые корни уравнения

$$\zeta(\theta, b_1 x + q(x)) = x \quad (3.6)$$

определяют  $\theta$ -периодические решения полной системы. Воспользуемся результатами исследования системы (3.1) с квадратичной нелинейностью в дифференциальном уравнении. Для этого представим последнее уравнение в виде

$$\varphi(\theta, b_1 x + q(x)) = x - u(x), \quad (3.7)$$

где

$$u(x) = \zeta(\theta, b_1 x + q(x)) - \varphi(\theta, b_1 x + q(x)). \quad (3.8)$$

Предполагая, что  $A = 1 + \varepsilon$ , получим из (3.3) и (3.7)

$$\frac{(b_1 x + q(x)) e^{a_1 \theta}}{1 + (b_1 x + q(x)) \frac{a_2}{a_1} (1 - e^{a_1 \theta})} = x - u(x).$$

или

$$\begin{aligned} b_1 e^{a_1 \theta} + \frac{q(x)}{x} e^{a_1 \theta} &= \left[ 1 + (b_1 x + q(x)) \frac{a_2}{a_1} (1 - e^{a_1 \theta}) \right] \left( 1 - \frac{u(x)}{x} \right) = \\ &= 1 - \frac{u(x)}{x} + \left[ Bx + q(x) \frac{B}{b_1} \right] \left( 1 - \frac{u(x)}{x} \right) \end{aligned}$$

и окончательно

$$\varepsilon = Bx - \frac{q(x)}{x} e^{a_1 \theta} + q(x) \frac{B}{b_1} - \frac{u(x)}{x} \left[ Bx + q(x) \frac{B}{b_1} \right]. \quad (3.9)$$

Для функции  $u(x)$  из (3.8) на основании оценки разности решений соответствующих дифференциальных уравнений при помощи леммы Гронуолла получим неравенство:  $|u(x)| \leq \text{Const}|x|^s$ ,  $s \geq 3$  при достаточно малом модуле  $|x|$ . Это неравенство позволяет распространить полученные выше выводы о бифуркациях периодических решений импульсной системы (3.8) на полную импульсную систему (0.4). Сформулируем основной вывод в виде теоремы

**Теорема 2.** *Предположим, что периодическая одномерная импульсная система (0.4) удовлетворяет условиям*

- 1)  $a_1 > 0, a_2 < 0, b_1 > 0$ ;
- 2)  $r(x) = a_s x^s + o(|x|^s), s \geq 3, q(x) = b_l x^l + o(|x|^l), l \geq 2$  при  $|x| \rightarrow 0$ ;
- 3) *нелинейности  $r(x)$  и  $q(x)$  удовлетворяют полиномиальной оценке (3.2) в достаточно малой окрестности нуля.*

*Тогда при  $A = b_1 e^{a_1 \theta} = 1$  в окрестности нулевого решения происходит бифуркация периодических решений, а именно:*

- (I) *для всякого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  при  $|A - 1| = \varepsilon$  в окрестности нулевого решения имеется  $\theta$ -периодическое решение  $\psi_\varepsilon(t)$  и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{t \in [0, \theta]} |\psi_\varepsilon(t)| = 0$ ;*
- (II) *при  $A = 1$  существует окрестность нулевого решения  $x = 0$ , в которой нет  $\theta$ -периодических решений.*

Отметим, что теорема остается справедливой и при других знаках ненулевых коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ . В типичном случае при прохождении бифуркационного параметра  $A$  через критическое значение  $A_{cr} = 1$  рождается (умирает) одно  $\theta$ -периодическое решение, но их может быть несколько. Если система (0.4) имеет несколько стационарных решений (точек покоя), то в окрестности каждой точки покоя будут происходить бифуркации описанного типа при определенных соотношениях параметров.

#### Список цитируемых источников

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987. — 288 с.
2. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. — N.-Y., Halsted Press, 1989.
3. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. — World Scientific, Singapore – New Jersey – London, 1989.
4. *Samoilenko A. M., Perestyuk M. O.* Impulsive differential equations. — River Edge: World Scientific, 1995.
5. *D. Bainov and P. Simeonov,* Impulsive differential equations: periodic solutions and applications. New York: Longman Scientific & Technical, 1993.
6. *Stamov G. T.,* Almost periodic solutions of impulsive differential equations. Heidelberg – New York – Dordrecht – London: Springer, 2012.

*Получена 10.05.2017    Переработана 15.10.2017*

## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ за 2017 г.

**V. V. Chekhov.** Geometrically and physically nonlinear optimization problem for the 3-bar truss. №2, 131-148.

**A. Dolgonosova, E. Nozdrinova, O. Pochinka.** On obstructions to the existence of a simple arc, connecting the multidimensional Morse-Smale diffeomorphisms. №2, 103-112.

**E. D. Kurenkov, K. A. Ryazanova.** On periodic translations on  $n$ -torus. №2, 113-118.

**E. Nozdrinova** (см. A. Dolgonosova). №2, 103-112.

**O. Pochinka** (см. A. Dolgonosova). №2, 103-112.

**K. A. Ryazanova** (см. E. D. Kurenkov). №2, 113-118.

**О. В. Анашкин, Н. О. Седова, О. В. Юсупова.** Бифуркации периодических решений дифференциального уравнения с импульсным воздействием. №4, 395-403.

**А. С. Андрееенкова** (см. Ф. С. Стонякин). №2, 167-184.

**О. А. Андропова.** Индефинитный подход к исследованию спектральных задач с большой внутренней диссипацией энергии. №4, 339-350.

**И. В. Баран** (см. И. В. Орлов). №3, 245-256.

**В. И. Войтицкий.** О полном линейном дифференциальном уравнении второго порядка в гильбертовом пространстве с главным оператором диссипации энергии и ограниченным снизу оператором потенциальной энергии. №3, 285-294.

**Д. А. Загора.** Асимптотика решений в задаче о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости. №1, 81-93.

**А. О. Казаков** (см. Е. А. Самылина). №3, 229-244.

**А. В. Карапетян, А. С. Кулешов.** Об устойчивости стационарных движений механических систем с неизвестными первыми интегралами. №1, 3-16.

**Н. Д. Копачевский.** О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд. №1, 17-51.

**Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина.** О малых движениях гидросистемы «вязкоупругая жидкость-идеальная жидкость», заполняющей неподвижный сосуд. №3, 207-228.

**Е. М. Кузьменко, С. И. Смирнова.** Негладкие вариационные задачи с подвижной границей с точки зрения обобщенного метода множителей Лагранжа. №2, 149-156.

**А. С. Кулешов** (см. А. В. Карапетян). №1, 3-16.

**Е. В. Никитенко.** Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения внутренних волн. №4, 387-393.

**И. В. Орлов, И. В. Баран.** Локальная асимметрия и локальный эксцесс негладких распределений с точки зрения симметрического анализа. №3, 245-256.

**А. Ю. Переварюха.** Запаздывание в регуляции популяционной динамики — модель клеточного автомата. №2, 157-165.

- А. И. Песчанский.** Полумарковская модель однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным восстанавливаемым каналом. №1, 53-61.
- К. А. Радомирская.** Спектральные задачи сопряжения. №1, 63-79.
- И. А. Романенко.** Порядково доминантные классы субгладкости интегранта и субаналитические свойства вариационных функционалов в пространствах Соболева. №3, 275-284.
- Е. А. Самылина, А. И. Шыхмамедов, А. О. Казаков.** О структуре резонансов 1:3 и 1:4 при обратимых возмущениях консервативных кубических отображений Эно. №3, 229-244.
- Н. О. Седова** (см. О. В. Анашкин). №4, 395-403.
- Е. В. Сёмкина** (см. Н. Д. Копачевский). №3, 207-228.
- М. А. Скворцова.** Асимптотическая устойчивость положений равновесия и оценки решений в одной модели заболевания. №3, 257-274.
- С. И. Смирнова** (см. Е. М. Кузьменко). №2, 149-156.
- Ф. С. Стонякин, А. С. Андрееенкова.** Теоремы о функциональной отделимости в специальном классе нормированных конусов. №2, 167-184.
- А. К. Строев.** Моделирование сверхширокополосного радиолокатора, использующего двухполосный метод компенсации ионосферных искажений. №2, 185-195.
- Д. Л. Тышкевич.** О кватернионных соотношениях Дирака. I. №4, 351-371.
- Ю. А. Хазова.** Метаустойчивые структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной на отрезке. №2, 119-129.
- А. И. Шыхмамедов** (см. Е. А. Самылина). №3, 229-244.
- Т. К. Ыскак.** Об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с периодическими коэффициентами в линейных членах. №4, 373-385.
- А. Д. Юнаковский.** Факторизация спектральных задач винтовых волноводов. №4, 305-338.
- О. В. Юсупова** (см. О. В. Анашкин). №4, 395-403.

## РЕФЕРАТЫ

УДК 519.63

А. Д. ЮНАКОВСКИЙ. **Факторизация спектральных задач винтовых волноводов** (русский) // *Динамические системы*, 2017. — Том 7(35), №4. — С. 305–338.

В статье разработан метод граничных интегральных уравнений для нахождения дисперсионных характеристик круглого волновода с глубокой многозаходной винтовой гофрировкой. Изначально трехмерная задача посредством введения косоугольной системы координат, «раскручивающих» волновод, сведена к спектральной задаче для системы одномерных гиперсингулярных граничных интегральных уравнений. Введением дополнительной компоненты задача регуляризована, но разными способами для разной глубины гофрировки. Развитие современных электронных СВЧ приборов сопровождается повышением их мощности и эффективности, расширением частотных диапазонов, использованием новых режимов работы. Электродинамические системы таких приборов характеризуются наличием сложной геометрии. Определение их дисперсионных характеристик требует высокой точности расчетов. Оптимизация профилей для улучшения эффективности приборов приводит к перебору большого количества значений параметров. Поэтому задача поиска математических моделей и численных методов, обеспечивающих проведение оптимизации, является актуальной. Задачи для волноводов сложного и многозаходного профиля часто решают конечно-разностным методом и методом конечных элементов. Если заходов винта много, то крутизна профиля возрастает, что резко увеличивает размерность задачи. В статье приведен переход к расчету задачи с одним «зубцом» и неклассическими граничными условиями. Область при этом становится сильно негладкой, но задача остается доступной для пользователей метода конечных элементов.

**Ключевые слова:** волноводы, факторизация, спектральная задача

Библиогр. 30 назв.

УДК 517.9:532

О. А. АНДРОНОВА. **Индефинитный подход к исследованию спектральных задач с большой внутренней диссипацией энергии** (русский) // *Динамические системы*, 2017. — Том 7(35), №4. — С. 339–350.

В статье рассмотрены спектральные проблемы, порожденные начально-краевыми задачами с внутренней диссипацией энергии. Спектр рассматриваемых задач достаточно своеобразен, его локализация зависит от интенсивности внутренней диссипации: малой, средней и большой. Отметим, что в работе исследуется наиболее сложная ситуация, когда диссипация в системе велика. В каждом случае происходит перестройка спектра, что обосновывает рассмотрение нескольких различных подходов к исследованию таких спектральных задач. Один из них — это подход, основанный на теории самосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Применение этого подхода позволяет сформулировать утверждения о полноте системы собственных элементов, доказать, что при определенных условиях система образует даже  $\mathcal{J}$ -ортонормированный базисы и  $p$ -базисы.

**Ключевые слова:** компактный самосопряженный оператор, классы компактности, характеристическое уравнение, динамика изменения собственных значений.

Библиогр. 22 назв.

УДК 512.643.8

Д. Л. ТЫШКЕВИЧ. **О кватернионных соотношениях Дирака. I** (русский) // *Динамические системы*, 2017. — Том 7(35), №4. — С. 351–371.

В данной части работы получены базовые результаты для изучения структуры кватернионных матриц, удовлетворяющих соотношениям Дирака. Все результаты сформулированы для

комплексных матриц, имеющих специальную, т. н. *симплектическую* структуру, позволяющую строить по данным матрицам кватернионные при соответствующей процедуре кватернионизации. На данном этапе все выкладки проведены исключительно для комплексного случая. В следующей части предполагается провести кватернионизацию и сформулировать все основные результаты в кватернионном виде.

**Ключевые слова:** соотношения Дирака, гамма-матрица, кватернион.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.929.4

Т. К. БЫСКАК. **Об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с периодическими коэффициентами в линейных членах** (русский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №4. — С. 373–385.

В работе рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием, при этом коэффициенты в линейных членах являются периодически. Исследуется асимптотическая и робастная устойчивости нулевого решения данной системы, указывается оценка на решения и множество притяжения. На основе полученных результатов исследуется асимптотическая устойчивость нулевого решения одного класса систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с большим параметром.

**Ключевые слова:** системы с распределенным запаздыванием, асимптотическая устойчивость, робастная устойчивость, функционал Ляпунова – Красовского, дифференциальное уравнение Ляпунова.

Библиогр. 8 назв.

УДК 517.955.8

Е. В. НИКИТЕНКО. **Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения внутренних волн** (русский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №4. — С. 387–393.

В работе рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения внутренних волн со специальной правой частью. Исследуется асимптотическое поведение решений при  $t \rightarrow \infty$ . Указан явный вид предельной функции и получена оценка на скорость сходимости.

**Ключевые слова:** уравнение внутренних волн, задача Коши, асимптотические свойства, скорость сходимости.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.925.51

О. В. АНАШКИН, Н. О. СЕДОВА, О. В. ЮСУПОВА. **Бифуркации периодических решений дифференциального уравнения с импульсным воздействием** (русский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №4. — С. 395–403.

Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием демонстрируют существенно более сложное поведение решений, чем обыкновенные дифференциальные уравнения. Эта сложность обусловлена разрывами интегральных кривых в моменты импульсных воздействий. В докладе изучаются бифуркации интегральных кривых одномерной импульсной системы, приводящие к рождению или исчезновению периодических решений.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, бифуркация, периодическое решение, устойчивость.

Библиогр. 6 назв.



## ABSTRACTS

MSC 2010: 35K20, 35K59, 35Q60, 78A05, 37L10, 34I2

A. D. YUNAKOVSKIY. **Factorization of Spectral Problems of Helical Waveguides** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.4, 305–338 (2017).

The development of modern electronic microwave devices is accompanied by an increase in their power and efficiency, the expansion of frequency ranges, the use of new operating modes. Electrodynamic systems of such devices are characterized by the presence of complex geometry. Determination of their dispersion characteristics requires high accuracy of calculations. Optimization of profiles to improve the efficiency of devices leads to a search of a large number of parameter values. Therefore, the problem of finding mathematical models and numerical methods that provide optimization is urgent. The method of boundary integral equations is developed to find the dispersion characteristics of a circular waveguide with a deep multi-screw screw corrugation. This type of waveguides is used as a space for interaction of radiation with an electron beam in such devices of microwave electronics as gyro-TWT. Until recently, first-order perturbation theory based on coupled wave equations was used to calculate waveguides with screw corrugation. This theory allows a fairly accurate description of the case of a relatively small corrugation. Restrictions on the depth of corrugation were studied in papers. The method of finite difference in the time domain (FNDP), described in detail in the review and used in the work, made it possible to obtain results for a wider range of problems. The method of boundary integral equations is developed to find the dispersion characteristics of a circular waveguide with a deep multi-screw screw corrugation. Initially, the three-dimensional problem, by introducing an oblique-angled coordinate system  $\llcorner$ unwinding $\llcorner$  the waveguide, is reduced to the spectral problem for a system of one-dimensional hypersingular boundary integral equations. By introducing an additional component, the problem is regularized, but in different ways for different depths of corrugation. The intrinsic waves in the helical waveguides are not divided into waves of magnetic and electric type, as a result of which a solution of the complete vector problem is required to solve the system of Maxwell equations.

**Keywords:** optimal control, maximum principle, solid body with flexible rod

Ref. 30.

MSC 2010: 35P05, 35P10

O. A. ANDRONOVA. **Application of indefinite metric in spectral problems with the strong internal dissipation of an energy** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.4, 339–350 (2017).

We consider the spectral problem with the strong internal dissipation of an energy. The aim of consideration of this problem is a desire to trace, as spectrum mutates at different positive  $\beta$  and to obtain the statements about localization of the spectrum and the properties of own and joined elements. Earlier it was found out that behavior of spectrum substantially depends on intensity of internal dissipation in the system. It can be weak, middle and strong. The two methods of the spectral theory of the operator bundles and the theory of the self-adjoint operators in indefinite metric spaces can be used. Both methods confirm the results got before. They open new effects in a spectral problem and give the new properties of root elements. The first one give that the spectrum has two branches of positive eigenvalues with limit points not only in infinity, but also in zero. Eigenfunctions answering to each branch in the case of strong intensity of internal dissipation in all range of  $\beta$  form basis Rissa in some Hilbert spaces. By indefinite approach it was proved that chains of eigenelements and adjoint elements form  $\mathcal{J}$ -orthonormal basis. Furthermore, under certain conditions on the classes of compact of operators of the problem the system of root elements form  $p$ -basis.

**Keywords:** Hilbert space, compact self-adjoint operator, classes of compact operators, dynamics of the eigenvalues' motion.

Ref. 22.

MSC 2010: 15B33

D. L. TYSHKEVICH. **On quaternionic Dirac anticommutation relations. I** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.4, 351–371 (2017).

In this part of an investigation to be continued we obtain the basic results for studying quaternionic matrices that satisfy Dirac anticommutation relations. All the results are formulated for complex matrices of so-called *symplectic* structure which allows to build on the base of the matrices given the quaternionic ones via the corresponding quaternionization procedure. At the present stage, it is useful to formulate all the reasonings purely for the complex case. In the next part of the work to be continued we intend, via the quaternionization procedure, to finally formulate all the main results in the quaternionic form. All the results presented in the work are seemed to be new. Although there are a rather big amount of articles focusing on quaternionic Dirac equation, investigations of matrices satisfying Dirac anticommutation relations have not been carried out (as far as we know).

**Keywords:** Dirac anticommutation relations, gamma-matrices, quaternion.

Ref. 5.

MSC 2010: 34K20

T. K. YSKAK. **On stability of the zero solution to a system of differential equations with distributed delay and with periodic coefficients in linear terms** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.4, 373–385 (2017).

In the paper we consider a system of nonlinear differential equations with distributed delay and with periodic coefficients in linear terms. We study the asymptotic stability and robust stability of the zero solution to this system, obtain an estimate of solutions and an attraction domain. On the basis of the obtained results we investigate the asymptotic stability of the zero solution to a class of systems of differential equations with distributed delay and with a large parameter.

**Keywords:** systems with distributed delay, asymptotic stability, robust stability, Lyapunov–Krasovskii functional, Lyapunov differential equation.

Ref. 8.

MSC 2010: 35C20, 35C15

E. V. NIKITENKO. **Asymptotic properties of solutions to the inhomogeneous equation of internal waves** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.4, 387–393 (2017).

In this paper we consider the Cauchy problem for the inhomogeneous equation of internal waves with a special right-hand side. We investigate the asymptotic behavior of solutions as  $t \rightarrow \infty$ . We specify the explicit form of the limit function and estimate the rate of convergence.

**Keywords:** equation of internal waves, Cauchy problem, asymptotic properties, convergence rate.

Ref. 3.

MSC 2010: 34A37, 34D20

O. V. ANASHKIN, N. O. SEDOVA, O. V. YUSUPOVA. **Bifurcations of periodic solutions of a differential equation with impulse action** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.4, 395–403 (2017).

Differential equations with impulsive effects demonstrate essentially more complex behavior of solutions than ordinary differential equations. This complexity is due to discontinuities in the integral curves at the moments of impulse actions. In this paper, bifurcations of integral curves of a one-dimensional impulse system are studied, leading to the birth or disappearance of periodic solutions.

**Keywords:** differential equations with impulse effect, bifurcation, periodic solution, stability.

Ref. 6.

# Dinamicheskie sistemy (Dynamical Systems)

---

Volume 7(35) no.4

2017

---

## Table of Contents

A. D. YUNAKOVSKIY. Factorization of Spectral Problems of Helical Waveguides	305
O. A. ANDRONOVA. Application of indefinite metric in spectral problems with the strong internal dissipation of an energy	339
D. L. TYSHKEVICH. On quaternionic Dirac anticommutation relations. I	351
T. K. YSKAK. On stability of the zero solution to a system of differential equations with distributed delay and with periodic coefficients in linear terms	373
E. V. NIKITENKO. Asymptotic properties of solutions to the inhomogeneous equation of internal waves	387
O. V. ANASHKIN, N. O. SEDOVA, O. V. YUSUPOVA. Bifurcations of periodic solutions of a differential equation with impulse action	395
Author index (Russian)	404

Подписано в печать 21.12.2017. Формат 60x84/8. Усл. печ. л. 12.

Тираж 50 экз. Заказ № НП/190. Подписной индекс 64971.

Цена 400 руб. Дата выхода в свет 27.07.2018.

Отпечатано в управлении редакционно-издательской  
деятельности КФУ имени В. И. Вернадского  
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7.