Динамические системы, 2017, том 7(35), №4, 395–403

УДК 517.925.51

Бифуркации периодических решений дифференциального уравнения с импульсным воздействием

О. В. Анашкин*, **Н. О. Седова****, **О. В. Юсупова***

*Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: oanashkin@yandex.ru, olgayusupova@mail.ru*
**Ульяновский госуниверситет,
Ульяновск

Аннотация. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием демонстрируют существенно более сложное поведение решений, чем обыкновенные дифференциальные уравнения. Эта сложность обусловлена разрывами интегральных кривых в моменты импульсных воздействий. В докладе изучаются бифуркации интегральных кривых одномерной импульсной системы, приводящие к рождению или исчезновению периодических решений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, бифуркация, периодическое решение, устойчивость.

Bifurcations of periodic solutions of a differential equation with impulse action

O. V. Anashkin, N. O. Sedova, O. V. Yusupova

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007
Ul'yanovsk State University, Ul'yanovsk.

Abstract. Differential equations with impulsive effects demonstrate essentially more complex behavior of solutions than ordinary differential equations. This complexity is due to discontinuities in the integral curves at the moments of impulse actions. In this paper, bifurcations of integral curves of a one-dimensional impulse system are studied, leading to the birth or disappearance of periodic solutions.

Keywords: differential equations with impulse effect, bifurcation, periodic solution, stability.
MSC 2010: 34A37, 34D20

Введение

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (импульсные системы) являются инструментом моделирования разнообразных процессов, параметры которых в определенные моменты времени подвергаются резким изменениям под влиянием кратковременных (импульсных) внешних воздействий. Примеры таких процессов дают различные отрасли науки и технологии (физика, химия, теория управления, популяционная динамика, биотехнология, промышленная робототехника, экономика и другие). Учитывая пренебрежимо малую продолжительность воздействий по сравнению с характерным временем эволюции исследуемого процесса, в математической модели допускается, что параметры процесса изменяются мгновенно. Теория импульсных систем активно развивается с конца 60-х годов прошлого столетия [1-4]. Будем предполагать, что моменты импульсного воздействия известны заранее, тогда импульсную систему можно описать в следующем виде [1]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad t \neq \tau_k, \tag{0.1}$$

$$\Delta x(t) = h_k(x(t)) - x(t), \qquad t = \tau_k, \tag{0.2}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t-0)$ — разность правого и левого предельных значений функции $x(t)$ в точке t, τ_k — моменты импульсного воздействия, $\tau_0 = 0$, $\tau_{k+1} = \tau_k + \theta_k$, $\theta_k > 0$ — заданные вещественные числа, $\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \infty$, $\sum_{k=0}^{-\infty} \theta_k = \infty$. Решением системы является непрерывная слева ($x(t) = x(t-0)$) кусочно-гладкая функция с разрывами первого рода в точках τ_k, удовлетворяющая уравнениям (0.1)-(0.2) на некотором интервале изменения независимой переменной t. Начальное условие задачи Коши для импульсной системы (0.1)-(0.2) имеет вид

$$x(t_0 + 0; t_0, x^0) = x^0, \tag{0.3}$$

то есть, начальное значение x^0 является правым предельным значением решения импульсной системы в начальный момент времени t_0. Предполагается, что функции f и h_k обеспечивают однозначную разрешимость начальной задачи (0.1)-(0.3).

Система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием состоит из аналоговой составляющей, которая представлена системой обыкновенных дифференциальных уравнений (0.1), и дискретной составляющей — условия скачка (0.2), задающего оператор импульсного воздействия. Поэтому решения импульсной системы наследуют типичные свойства решений разностных уравнений. По этой причине уже одномерные импульсные системы могут иметь сколь угодно сложную структуру решений, в частности, предельными множествами траекторий могут быть не только точки покоя, но и траектории периодических решений.

Рассмотрим одномерную периодическую систему с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени

$$\begin{aligned} dx/dt = f(x) &= a_1 x + a_2 x^2 + r(x), && t \neq \tau_k, \\ x(t+0) = h(x) &= b_1 x(t) + q(x), && t = \tau_k, \end{aligned} \tag{0.4}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$, $r(x) = a_s x^s + o(|x|^s)$, $s \geq 3$, $q(x) = b_l x^l + o(|x|^l)$, $l \geq 2$ при $|x| \to 0$, последовательность $\{\theta_k\}$ предполагается периодической периода $p \in \mathbb{N}$. Для сокращения выкладок ограничимся случаем $p = 1$, т. е., $\theta_k = \theta > 0$.

Положим $\rho = b_1 e^{a_1 \theta}$. Легко видеть, что решения линеаризации системы (0.4) в нуле

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x, && t \neq \tau_k, \\ x(t+0) &= b_1 x(t), && t = \tau_k, \end{aligned}$$

являются ограниченными на всей числовой оси лишь при условии $|\rho| = 1$, когда все решения θ-периодические (при $\rho = 1$) или 2θ-периодические (при $\rho = -1$).

Будем далее предполагать, что $b_1 > 0$ (тогда $\rho > 0$) и рассмотрим *укороченную систему*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + a_2 x^2, \quad t \neq \tau_k, \\ x(t+0) &= b_1 x(t), \qquad\quad t = \tau_k. \end{aligned} \tag{0.5}$$

Сразу отметим, что при $b_1 \neq 1$ система имеет только тривиальное стационарное решение $x = 0$. Обозначим через $\varphi(t, \xi)$ решение начальной задачи для дифференциального уравнения в укороченной импульсной системе, удовлетворяющее условию $\varphi(0, \xi) = \xi$. Тогда

$$\varphi(t, \xi) = \frac{a_1 \xi \exp(a_1 t)}{a_1 + a_2 \xi [1 - \exp(a_1 t)]}. \tag{0.6}$$

Отсюда получаем формулу для решения $x(t) = x(t; t_0, x^0)$ укороченной импульсной системы (0.5), удовлетворяющего начальному условию (0.3):

$$x(t) = \frac{b_1 x(\tau_k) e^{a_1(t-\tau_k)}}{1 + b_1 x(\tau_k) \frac{a_2}{a_1}(1 - e^{a_1(t-\tau_k)})} \text{ при } \tau_k < t \leq \tau_{k+1}, \ k = 1, 2, \dots. \tag{0.7}$$

Учитывая периодичность системы, мы полагаем, что $0 \leq t_0 < \theta$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$x(\tau_1) = x(\theta) = \varphi(\theta - t_0, x_0) = \frac{x_0 e^{a(\theta - t_0)}}{1 + x_0 \frac{a_2}{a_1}(1 - e^{a_1(\theta - t_0)})}. \tag{0.8}$$

Нашей целью является изучение бифуркаций — условий, при которых происходит качественное изменение структуры решений системы (0.4), в частности, рождение и исчезновение периодических решений. Сначала мы изучим структуру решений укороченной системы (0.5). Для этого в первом разделе исследуем свойства последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному уравнению, связывающему значения решений системы (0.5) в соседних моментах импульсного воздействия. Используя эти свойства, во втором разделе мы опишем структуру множества всех решений укороченной системы (0.5), в частности, установим наличие и тип устойчивости периодических решений. На основании этого анализа в последующих разделах будут изложены определенные выводы о бифуркациях решений одномерной импульсной системы (0.4).

1. Свойства решений рекуррентного уравнения

Из (0.7) находим рекуррентное уравнение, связывающее значения решений укороченной импульсной системы (0.5) в соседних моментах импульсного воздействия:

$$x(\tau_{k+1}) = F(x(\tau_k)) = \frac{A x(\tau_k)}{1 + B x(\tau_k)}, \tag{1.1}$$

где

$$A = b_1 e^{a_1\theta} > 0, \quad B = \frac{b_1 a_2}{a_1}(1 - e^{a_1\theta}). \tag{1.2}$$

Обозначим $z_k = x(\tau_k)$. Решение дробно-линейного разностного уравнения (1.1) нетрудно выписать в явном виде

$$z_k = F^k(z_0) = \frac{A^k z_0}{1 + B\,(1 + A + \cdots + A^{k-1})\,z_0}, \tag{1.3}$$

где $F^k = F \circ F^{k-1}$ — k-я степень отображения F, $k \in \mathbb{N}$, $F^0 = \mathrm{id}$, $\mathrm{id}\colon x \mapsto x$.

Отметим основные свойства функции $F(z)$, определенной в (1.1):

1) функция определена и непрерывно дифференцируема всюду на $\mathbb{R}$, кроме полюса $z = -\dfrac{1}{B}$;

2) монотонно возрастает, т. к. $F'(z) = A/(1 + Bz)^2 > 0$;

3) отображение $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет только одну ненулевую неподвижную точку $\hat{z} = (A-1)/B$ (при $A \neq 1$) и при этом $F'(0) = A$, $F'(\hat{z}) = 1/A$.

Заметим также, что у k-й степени отображения F при любом $k \geq 2$ нет неподвижных точек, отличных от $\hat{z}$.

Пусть для определенности $a_1 > 0$ и $a_2 < 0$. Согласно (1.2) величины A и B являются положительными. Тогда из формулы (1.3) следует: если $z_0 > 0$, то $z_k(z_0) > 0$ при любом $k \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{z_k(z_0)\}_{k\geq 1}$ сходится, а именно,

$$\lim_{k\to\infty} z_k(z_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < A \leq 1; \\ \frac{A-1}{B}, & \text{если } 1 < A. \end{cases} \tag{1.4}$$

При $z_0 < 0$ последовательность $\{z_k(z_0)\}_{k\geq 1}$ является бесконечной, если $z_0 \neq A_0^-$, где

$$A_0^- = \left\{ z_0^{(k)} = \frac{-1}{B(1 + A + \cdots + A^k)}, k = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Очевидно, что при $0 < A < 1$ множество A_0^- локализовано на сегменте $[-1/B, (A-1)/B]$, а при $A \geq 1$ — на сегменте $[-1/B, 0]$. Подробный анализ, детали которого мы опускаем, показывает, что предел (1.4) существует для любой последовательности $\{z_k(z_0)\}_{k\geq 1}$, если $z_0 \notin A_0^-$.

При $z_0 \in A_0^-$ последовательность $\{z_k(z_0)\}_{k\geq 1}$ конечная, но решение $\{z_k(z_0)\}$ разностного уравнения (1.1) неограниченно продолжается влево, т. е. при $k \to -\infty$.

Итак, мы убедились, что разностное уравнение (1.1) имеет при $A \neq 1$ две неподвижные точки: $z = 0$ и $z = \hat{z} = \dfrac{A-1}{B}$, при $A \to 1$ $\hat{z} \to 0$ и при $A = 1$ остается только нулевая точка покоя. Начало координат $z = 0$ асимптотически устойчиво при $0 < A < 1$ и неустойчиво при $A \geq 1$. Если $A \neq 1$, то ненулевая точка покоя

$\hat{z}$ разностного уравнения (1.1) неустойчива при $0 < A < 1$ и асимптотически устойчива при $1 < A$.

При $b_1 = 1$ одномерная импульсная система (0.5) превращается в одномерную динамическую систему. Отметим, что при $b_1 \to 1$

$$\hat{z} = \frac{A-1}{B} = \frac{b_1 e^{a_1\theta} - 1}{b_1(1 - e^{a_1\theta})} \cdot \frac{a_1}{a_2} \to -\frac{a_1}{a_2},$$

где $\hat{x} = -\dfrac{a_1}{a_2}$ — нетривиальное положение равновесия дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 x^2. \tag{1.5}$$

в системе (0.5). Как легко видеть, при заданном условии $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ нулевое решение уравнения (1.5) неустойчиво, а ненулевая точка покоя $\hat{x} = -\dfrac{a_1}{a_2}$ асимптотически устойчива. Таким образом, при $b_1 \to 1$ асимптотически устойчивая стационарная точка разностного уравнения (1.1) стремится к асимптотически устойчивому положению равновесия дифференциального уравнения (1.5). При этом соответствующее асимптотически устойчивое периодическое решение импульсной системы (0.5) также стремится к точке покоя $\hat{x} = -\dfrac{a_1}{a_2}$ предельного дифференциального уравнения.

При других предположениях относительно знаков коэффициентов уравнения (1.5) поведение решений рекуррентного уравнения (1.1) аналогичное.

2. Бифуркации периодических решений укороченной системы

Пусть $a_1 > 0$ и $a_2 < 0$. В этом случае, как уже отмечено выше, тривиальное решение $x = 0$ дифференциального уравнения импульсной системы (0.5) неустойчиво, а точка покоя $\hat{x} = -a_1/a_2 > 0$ является асимптотически устойчивой.

Свойства решений рекуррентного уравнения (1.1) определяют поведение решений импульсной системы (0.5) при $t \to \infty$. При всяком $t_0 \in [0, \theta)$ и $x_0 > 0$ последовательность $x(\tau_k; t_0, x_0)$ сходится согласно (1.4). Поэтому при $0 < A \leq 1$ $\lim_{t\to\infty} x(t; t_0, x_0) = 0$, а при $A > 1$ решение импульсной системы $x(t; t_0, x_0)$ экспоненциально стремится к положительному кусочно-гладкому θ-периодическому решению $\psi(t)$, которое при $\tau_k < t \leq \tau_{k+1}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{b_1 \frac{A-1}{B} \exp[a_1(t-\tau_k)]}{1 + \frac{a_2 b_1 (A-1)}{a_1 B}(1 - \exp[a_1(t-\tau_k)])} = \\ &= \frac{(b_1 \exp(a_1\theta) - 1)\exp[a_1(t-\tau_k)]}{\exp(a_1\theta) - 1 + (b_1\exp(a_1\theta) - 1)(\exp[a_1(t-\tau_k)] - 1)} \cdot \left(-\frac{a_1}{a_2}\right).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Единственное периодическое решение укороченной системы $\psi(t)$ определяет неподвижная точка $\hat{z} = (A-1)/B$ отображения F.

Пусть теперь $x_0 < 0$, тогда из (0.6) имеем

$$x(\theta) = x(\theta; t_0, x_0) = \frac{a_1 x_0 \exp[a_1(\theta - t_0)]}{a_1 + a_2 x_0 (1 - \exp[a_1(\theta - t_0)])}. \tag{2.2}$$

Поэтому для любого $x_0 < 0$ значение $x(\theta)$ будет отрицательным при достаточно близком к θ начальном моменте t_0. Из (2.2) следует, что при

$$x_0 \le \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{1}{\exp[a_1(\theta - t_0)] - 1} < 0$$

решение $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ системы (0.5) уходит на $-\infty$ при $t \to t_1 \le \theta$.

При

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{1}{\exp[a_1(\theta - t_0)] - 1} < x_0 < 0$$

значение $x(\theta)$ отрицательное и возможны три сценария поведения последовательности $\{z_k(z_0)\}_{k\ge1}$, удовлетворяющей рекуррентному уравнению (1.1) при $z_0 = x(\theta) < 0$: (а) последовательность $\{z_k(z_0)\}_{k\ge1}$ конечная; (б) $z_k(z_0) > 0$ при $k > k_0$ для некоторого $k_0 > 0$; (в) $z_k(z_0) < 0$ при всех $k \ge 0$. Тогда нетрудно проверить, что при реализации первых двух сценариев решение системы (0.5) уходит на $-\infty$ за конечное время. Из (1.3) следует, что последний сценарий реализуется лишь при $0 < A < 1$ и тогда $x(t; t_0, x_0) \to 0 - 0$ при $t \to \infty$.

Остается добавить, что при $0 < A < 1$ укороченная импульсная система (0.5) имеет неустойчивое отрицательное θ-периодическое решение (2.2).

Результаты проведенного анализа поведения решений укороченной системы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $a_1 > 0$ и $a_2 < 0$. Положим*

$$A = b_1 e^{a_1\theta} > 0, \quad B = \frac{b_1 a_2}{a_1}(1 - e^{a_1\theta}).$$

Тогда при $A \ne 1$ укороченная система (0.5) имеет единственное периодическое решение $\psi(t)$. Это решение имеет период θ, определяется начальным условием $\psi(0) = \dfrac{A-1}{B}$ и имеет вид (2.2).

При $0 < A < 1$ периодическое решение $\psi(t)$ неустойчиво, а при $1 < A$ все решения системы (0.5) с положительным начальным значением экспоненциально стремятся к $\psi(t)$.

При $A \to 1$ периодическое решение стремится к точке покоя $x = 0$. При этом при переходе параметра A через значение 1 происходит бифуркация следующего типа: неустойчивое отрицательное периодическое решение при $A = 1$ превращается в неустойчивую точку покоя $x = 0$, из которой при $1 < A$ рождается экспоненциально устойчивое положительное периодическое решение.

Анализ поведения решений рекуррентного уравнения (1.1) при других соотношениях между знаками коэффициентов $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ дифференциального уравнения (1.5) приводит к аналогичному выводу о бифуркациях единственного периодического решения укороченной импульсной системы (0.5).

3. Бифуркации периодических решений при нелинейном импульсном воздействии

Рассмотрим одномерную импульсную систему

$$\begin{aligned} dx/dt &= a_1 x + a_2 x^2, && t \neq \tau_k, \\ x(t+0) &= h(x) = b_1 x(t) + q(x), && t = \tau_k, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $q(x) = b_l x^l + o(|x|^l)$, $l \geq 2$ при $|x| \to 0$. Предположим также, что в достаточно малой δ-окрестности нуля функция $q(x)$ удовлетворяет полиномиальной оценке:

$$|q(x) - q(y)| \leq Const \cdot \delta^{l-1}|x - y|, \qquad x, y \in (-\delta, \delta). \tag{3.2}$$

Рекуррентное уравнение, связывающее значения решений системы (3.1) в соседних моментах импульсного воздействия, имеет вид:

$$x(\tau_{k+1}) = F_1(x(\tau_k)) = \varphi(\theta, b_1 x(\tau_k) + q(x(\tau_k))),$$

где $\varphi(t, x)$ — решение дифференциального уравнения в импульсной системе (3.1).

Принимая во внимание формулу (0.6), получаем условие периодичности — уравнение для определения неподвижных точек отображения F_1

$$\frac{(b_1 x + q(x))e^{a_1\theta}}{1 + (b_1 x + q(x))\frac{a_2}{a_1}(1 - e^{a_1\theta})} = x. \tag{3.3}$$

Покажем, что уравнение (3.3), ненулевые вещественные корни которого определяют θ-периодические решения импульсной системы (3.1), для всякого достаточно малого $|\varepsilon| > 0$ при значении $A = b_1 e^{a_1\theta} = 1 + \varepsilon$ имеет вещественный корень x_ε и $x_\varepsilon \to 0$, если $\varepsilon \to 0$. В самом деле, в наших предположениях уравнение (3.3) приводится к виду

$$b_1 e^{a_1\theta} + \frac{q(x)}{x}e^{a_1\theta} = 1 + (b_1 x + q(x))\frac{a_2}{a_1}(1 - e^{a_1\theta}) \tag{3.4}$$

или, с учетом введенных выше обозначений,

$$\varepsilon = Bx - \frac{q(x)}{x}e^{a_1\theta} + q(x)\frac{B}{b_1}. \tag{3.5}$$

Обозначим $P(x)$ правую часть уравнения (3.5). Заметим, принимая во внимание оценку (3.2), что функция $P(x)$ при $l > 2$ монотонно растет в малой окрестности нуля ($B > 0$) и $P(0) = 0$, поэтому уравнение (3.5) при достаточно малом $|\varepsilon|$ имеет единственное решение $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ такое, что $x_\varepsilon \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

При $l = 2$ функция $P(x)$ также монотонна в малой окрестности нуля, если $B - b_2 e^{a_1\theta} \neq 0$.

Если предположить, что $B = \frac{b_1 a_2}{a_1}(1 - e^{a_1\theta}) = b_2 e^{a_1\theta}$, что равносильно условию $b_1 a_2(1 - e^{a_1\theta}) = a_1 b_2 e^{a_1\theta}$ (заметим, что равенство возможно только при $b_2 > 0$), то вещественных решений типа x_ε при всяком достаточно малом $\varepsilon > 0$ будет уже два, а при $\varepsilon < 0$ таких решений вообще не будет.

Мы доказали, что в системе (3.1) при значении параметра A, близком к критическому $A_{cr} = 1$, в окрестности положения равновесия $x = 0$ имеется θ-периодическое решение, амплитуда которого стремится к нулю при стремлении A к 1.

Теперь рассмотрим полную систему (0.4). Обозначим через $\zeta(t, x)$ решение дифференциального уравнения в полной системе, удовлетворяющее условию $\zeta(0, x) = x$. Ненулевые корни уравнения

$$\zeta(\theta, b_1 x + q(x)) = x \tag{3.6}$$

определяют θ-периодические решения полной системы. Воспользуемся результатами исследования системы (3.1) с квадратичной нелинейностью в дифференциальном уравнении. Для этого представим последнее уравнение в виде

$$\varphi(\theta, b_1 x + q(x)) = x - u(x), \tag{3.7}$$

где

$$u(x) = \zeta(\theta, b_1 x + q(x)) - \varphi(\theta, b_1 x + q(x)). \tag{3.8}$$

Предполагая, что $A = 1 + \varepsilon$, получим из (3.3) и (3.7)

$$\frac{(b_1 x + q(x))e^{a_1\theta}}{1 + (b_1 x + q(x))\frac{a_2}{a_1}(1 - e^{a_1\theta})} = x - u(x).$$

или

$$b_1 e^{a_1\theta} + \frac{q(x)}{x} e^{a_1\theta} = \left[1 + (b_1 x + q(x))\frac{a_2}{a_1}(1 - e^{a_1\theta})\right]\left(1 - \frac{u(x)}{x}\right) =$$
$$= 1 - \frac{u(x)}{x} + \left[Bx + q(x)\frac{B}{b_1}\right]\left(1 - \frac{u(x)}{x}\right)$$

и окончательно

$$\varepsilon = Bx - \frac{q(x)}{x} e^{a_1\theta} + q(x)\frac{B}{b_1} - \frac{u(x)}{x}\left[Bx + q(x)\frac{B}{b_1}\right]. \tag{3.9}$$

Для функции $u(x)$ из (3.8) на основании оценки разности решений соответствующих дифференциальных уравнений при помощи леммы Гроноулла получим неравенство: $|u(x)| \leq Const|x|^s$, $s \geq 3$ при достаточно малом модуле $|x|$. Это неравенство позволяет распространить полученные выше выводы о бифуркациях периодических решений импульсной системы (3.8) на полную импульсную систему (0.4). Сформулируем основной вывод в виде теоремы

Теорема 2. *Предположим, что периодическая одномерная импульсная система (0.4) удовлетворяет условиям*

1) $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $b_1 > 0$;

2) $r(x) = a_s x^s + o(|x|^s)$, $s \geq 3$, $q(x) = b_l x^l + o(|x|^l)$, $l \geq 2$ *при* $|x| \to 0$;

3) *нелинейности* $r(x)$ *и* $q(x)$ *удовлетворяют полиномиальной оценке* (3.2) *в достаточно малой окрестности нуля.*

Тогда при $A = b_1 e^{a_1 \theta} = 1$ *в окрестности нулевого решения происходит бифуркация периодических решений, а именно:*

(I) *для всякого достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *при* $|A-1| = \varepsilon$ *в окрестности нулевого решения имеется* θ*-периодическое решение* $\psi_\varepsilon(t)$ *и* $\lim_{\varepsilon \to 0} \max_{t \in [0,\theta]} |\psi_\varepsilon(t)| = 0$;

(II) *при* $A = 1$ *существует окрестность нулевого решения* $x = 0$, *в которой нет* θ*-периодических решений.*

Отметим, что теорема остается справедливой и при других знаках ненулевых коэффициентов a_1 и a_2. В типичном случае при прохождении бифуркационного параметра A через критическое значение $A_{cr} = 1$ рождается (умирает) одно θ-периодическое решение, но их может быть несколько. Если система (0.4) имеет несколько стационарных решений (точек покоя), то в окрестности каждой точки покоя будут происходить бифуркации описанного типа при определенных соотношениях параметров.

Список цитируемых источников

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987. — 288 с.
2. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. — N.-Y., Halsted Press, 1989.
3. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. — World Scientific, Singapure – New Jersey – London, 1989.
4. *Samoilenko A. M., Perestyuk M. O.* Impulsive differential equations. — River Edge: World Scientific, 1995.
5. *D. Bainov and P. Simeonov*, Impulsive differential equations: periodic solutions and applications. New York: Longman Scientific & Technical, 1993.
6. *Stamov G. T.*, Almost periodic solutions of impulsive differential equations. Heidelberg – New York – Dordrecht – London: Springer, 2012.

Получена 10.05.2017 Переработана 15.10.2017