Динамические системы, 2017, том 7(35), №4, 387–393

УДК 517.955.8

Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения внутренних волн

Е. В. Никитенко

Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВО "Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова",
Рубцовск 658207. *E-mail: evnikit@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения внутренних волн со специальной правой частью. Исследуется асимптотическое поведение решений при $t \to \infty$. Указан явный вид предельной функции и получена оценка на скорость сходимости.

Ключевые слова: уравнение внутренних волн, задача Коши, асимптотические свойства, скорость сходимости.

Asymptotic properties of solutions to the inhomogeneous equation of internal waves

E. V. Nikitenko

Rubtsovsk Industrial Institute,
Polzunov Altai State Technical University,
Rubtsovsk 658207.

Abstract. In this paper we consider the Cauchy problem for the inhomogeneous equation of internal waves with a special right-hand side. We investigate the asymptotic behavior of solutions as $t \to \infty$. We specify the explicit form of the limit function and estimate the rate of convergence.

Keywords: equation of internal waves, Cauchy problem, asymptotic properties, convergence rate.

MSC 2010: 35C20, 35C15

1. Введение

В работе рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения внутренних волн

$$\begin{array}{l} \Delta u_{tt} + u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0,\ x \in R^3, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = 0, \end{array} \tag{1.1}$$

где $f(x) \in S(R^3)$, $\lambda \geq 0$ — параметр. Установлены асимптотические оценки при $t \to \infty$ решений $u(t, x, \lambda)$ в зависимости от параметра λ.

Решение данной задачи однозначно определяется в классе функций, убывающих при $|x| \to \infty$ [2]. При выводе асимптотических оценок при $t \to \infty$ решений $u(t, x, \lambda)$ используется вариант метода стационарной фазы, изложенного в [3].

В настоящее время имеется большое число работ, в которых проводились исследования поведения асимптотики при $t \to \infty$ решений краевых задач для конкретных уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной. Среди них отметим работу [1], в которой рассматривалась задача Коши для неоднородного уравнения Соболева

$$\begin{aligned} &\Delta u_{tt} + u_{x_n x_n} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0,\ x \in R^n, \\ &u|_{t=0} = 0, \\ &u_t|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

где $f(x) \in S(R^n)$, $\lambda \geq 0$ — параметр, $n \geq 3$. В данной работе были установлены асимптотические разложения при $t \to \infty$ решений $u(t, x, \lambda)$ в зависимости от значений параметра λ.

2. Формулировка результатов

Сформулируем основные результаты об асимптотическом поведении решения задачи Коши (1.1).

Теорема 1. Пусть $\lambda > 1$, тогда на любом компакте $K \subset R^3$ для решения задачи (1.1) имеет место оценка

$$\left| u(t,x,\lambda) + e^{i\lambda t} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int\limits_{R^3} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \lambda^2 |\xi|^2)} d\xi \right| \leq \frac{c(K,\lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1, \tag{2.1}$$

где $c(K, \lambda)$ — константа, зависящая от K и λ.

Теорема 2. Пусть $0 < \lambda \leq 1$, тогда на любом компакте $K \subset R^3$ справедлива асимптотическая оценка

$$|(D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 - \lambda^2 \Delta) u(t,x,\lambda) - e^{i\lambda t} f(x)| \leq \frac{c(K,\lambda)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1. \tag{2.2}$$

Теорема 3. Пусть $\lambda = 0$. Тогда на любом компакте $K \subset R^3$ для решения задачи Коши имеет место

$$|(D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2) u(t,x) - f(x)| \leq \frac{c(K)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

3. Вывод асимптотических оценок

Доказательство теоремы 1. Используя интегральное преобразование Фурье, нетрудно проверить, что решение задачи (1.1) при $\lambda > 1$ можно представить в следующем виде

$$u(t,x,\lambda) = u^1(t,x,\lambda) + u^2(t,x,\lambda) + u^3(t,x,\lambda)$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int\limits_{R^3} e^{ix\xi} \frac{i\lambda|\xi|\hat{f}(\xi)}{(\xi_1^2+\xi_2^2-\lambda^2|\xi|^2)\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} \sin\Big(\frac{t\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}{|\xi|}\Big) d\xi$$

$$+\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int\limits_{R^3} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(\xi_1^2+\xi_2^2-\lambda^2|\xi|^2)} \cos\Big(\frac{t\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}{|\xi|}\Big) d\xi \qquad (3.1)$$

$$-e^{i\lambda t} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int\limits_{R^3} e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{(\xi_1^2+\xi_2^2-\lambda^2|\xi|^2)} d\xi.$$

Рассмотрим вначале функцию $u^1(t,x,\lambda)$. Переходя к сферическим координатам

$$\xi_3 = \rho\cos\theta_1,\ \xi_2 = \rho\sin\theta_1\cos\theta_2,\ \xi_1 = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2, \qquad (3.2)$$

получим

$$u^1(t,x,\lambda) = \frac{i\lambda}{(\sqrt{2\pi})^3} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)} \hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)) d\theta_1 d\theta_2 d\rho.$$

Рассмотрим следующий интеграл при $t \gg 1$

$$J_1 = \int\limits_0^{\pi} e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)} \hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)) d\theta_1$$

$$= \Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi} \Big) e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)} \hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)) d\theta_1 = J_1^1 + J_1^2 + J_1^3.$$

Так как оба интеграла J_1^1, J_1^3 оцениваются по одной схеме, то рассмотрим, например, J_1^1. Используя тождество

$$\sin(t\sin\theta_1) = \frac{-1}{t\cos\theta_1} D_{\theta_1} \cos(t\sin\theta_1),$$

получим

$$J_1^1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)} \frac{-1}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)t\cos\theta_1} D_{\theta_1} \cos(t\sin\theta_1) \hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)) d\theta_1$$

$$= e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)} \frac{-\cos(t\sin\theta_1)}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)t\cos\theta_1} \hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

$$+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\cos(t\sin\theta_1)}{t}\Big[\frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho,\theta_1,\theta_2)\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))}{\cos\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}$$

$$+\frac{\sin\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))}{\cos^2\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}+\frac{1}{\cos\theta_1}D_{\theta_1}\Big(\frac{\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\Big)\Big]d\theta_1 = J_1^{1,1}+J_1^{1,2}.$$

В силу того, что при достаточно больших t выполнено неравенство

$$|\cos\theta_1| \geq \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \theta_1 \in \Big[0, \frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}\Big], \tag{3.3}$$

получим

$$|J_1^{1,1}| \leq \frac{c(\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Очевидно, что для первого и третьего слагаемых в $J_1^{1,2}$ справедливы оценки

$$\Big|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\cos(t\sin\theta_1)}{t}\frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho,\theta_1,\theta_2)\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))}{\cos\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}d\theta_1\Big| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1,$$

$$\Big|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\cos(t\sin\theta_1)}{t}\frac{1}{\cos\theta_1}D_{\theta_1}\Big(\frac{\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\Big)d\theta_1\Big| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Оценим второе слагаемое в $J_1^{1,2}$. Имеем

$$\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}\Big)e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\cos(t\sin\theta_1)}{t}\frac{\sin\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))}{\cos^2\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}d\theta_1 = J_1^{1,2,1}+J_1^{1,2,2},$$

где $\delta > 0$ — достаточно маленькое фиксированное число такое, что

$$|\cos\theta_1| \geq \frac{\frac{\pi}{2}-\theta_1}{2}, \quad \theta_1 \in \Big[\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}\Big]. \tag{3.4}$$

Очевидно, что

$$|J_1^{1,2,1}| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{t}, \quad t \gg 1.$$

По аналогии с [3, стр. 187] имеем

$$|J_1^{1,2,2}| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Таким образом,

$$|J_1^1| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Аналогично получаем, что

$$|J_1^3| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Учитывая, что $\lambda > 1$, имеем следующую оценку

$$|J_1^2| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Таким образом, для функции $u^1(t,x,\lambda)$ получено неравенство:

$$|u^1(t,x,\lambda)| \le \frac{c(K,\lambda)}{\sqrt{t}}, \quad x \in K, \quad t \gg 1. \tag{3.5}$$

Оценим функцию $u^2(t,x,\lambda)$ по той же схеме, что и функцию $u^1(t,x,\lambda)$. Переходя к сферическим координатам (3.2), получим

$$u^2(t,x,\lambda) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^\pi e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\sin\theta_1\cos(t\sin\theta_1)}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))d\theta_1 d\theta_2 d\rho.$$

Рассмотрим следующий интеграл при $t \gg 1$

$$J_2 = \int\limits_0^\pi e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\sin\theta_1\cos(t\sin\theta_1)}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))d\theta_1$$

$$= \Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi}\Big)e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\sin\theta_1\cos(t\sin\theta_1)}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))d\theta_1 = J_2^1+J_2^2+J_2^3.$$

Так как интегралы J_2^1 и J_2^3 оцениваются по одной схеме, то рассмотрим, например, J_2^1. Используя тождество

$$\cos(t\sin\theta_1) = \frac{1}{t\cos\theta_1}D_{\theta_1}\sin(t\sin\theta_1),$$

имеем

$$J_2^1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\sin\theta_1}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)t\cos\theta_1}D_{\theta_1}\sin(t\sin\theta_1)\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))d\theta_1$$

$$= e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\sin\theta_1\sin(t\sin\theta_1)}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)t\cos\theta_1}\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))|_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

$$-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\sin(t\sin\theta_1)}{t}\Big[\frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho,\theta_1,\theta_2)\sin\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))}{\cos\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}$$

$$+\frac{\sin^2\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))}{\cos^2\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}+\frac{1}{\cos\theta_1}D_{\theta_1}\Big(\frac{\sin\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\Big)\Big]d\theta_1 = J_2^{1,1}+J_2^{1,2}.$$

Воспользовавшись неравенством (3.3), получим, что

$$|J_2^{1,1}| \le \frac{c(\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Очевидно, что для первого и третьего слагаемых в $J_2^{1,2}$ справедливы оценки

$$\Big|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\sin(t\sin\theta_1)}{t}\frac{ix\xi_{\theta_1}(\rho,\theta_1,\theta_2)\sin\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))}{\cos\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}d\theta_1\Big| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}},\ t\gg 1,$$

$$\Big|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}} e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\sin(t\sin\theta_1)}{t}\frac{1}{\cos\theta_1}D_{\theta_1}\Big(\frac{\sin\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))}{(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}\Big)d\theta_1\Big| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}},\ t\gg 1.$$

Оценим второе слагаемое в $J_2^{1,2}$. Имеем

$$\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}\Big)e^{ix\xi(\rho,\theta_1,\theta_2)}\frac{\sin(t\sin\theta_1)}{t}\frac{\sin^2\theta_1\hat{f}(\xi(\rho,\theta_1,\theta_2))}{\cos^2\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}d\theta_1 = J_2^{1,2,1}+J_2^{1,2,2},$$

где $\delta > 0$ — достаточно маленькое фиксированное число такое, что выполняется оценка (3.4). Очевидно, как и ранее имеем

$$|J_2^{1,2,1}| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{t}, \quad |J_2^{1,2,2}| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Следовательно,

$$|J_2^1| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Аналогично получаем, что

$$|J_2^3| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Учитывая, что $\lambda > 1$, имеем следующую оценку

$$|J_2^2| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Таким образом, для функции $u^2(t,x,\lambda)$ получено неравенство:

$$|u^2(t,x,\lambda)| \le \frac{c(K,\lambda)}{\sqrt{t}}, \quad x \in K, \quad t \gg 1. \tag{3.6}$$

Следовательно, из представления (3.1) в силу неравенств (3.5), (3.6) вытекает оценка (2.1). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Применим к решению (3.1) задачи Коши (1.1) оператор $[D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 - \lambda^2\Delta]$. Тогда результат можно представить в следующем виде

$$(D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 - \lambda^2\Delta)u(t,x,\lambda) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int\limits_{R^3} e^{ix\xi}\frac{\lambda|\xi|\hat{f}(\xi)}{i\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\sin\Big(\frac{t\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}{|\xi|}\Big)d\xi$$

$$-\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int\limits_{R^3} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\cos\Big(\frac{t\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}{|\xi|}\Big)d\xi + e^{i\lambda t}f(x).$$

Первое и второе слагаемые в правой части оцениваются по той же схеме, что $u^1(t,x,\lambda)$ и $u^2(t,x,\lambda)$ для случая $\lambda > 1$ соответственно. Поэтому, по аналогии с предыдущим, получаем оценку (2.2).

Доказательство теоремы 3 вытекает из явной формулы (3.1) решения задачи (1.1).

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

Список цитируемых источников

1. *Булдыгерова Л. Н., Демиденко Г. В.* Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения Соболева // Неклассические уравнения математической физики. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2005. — С. 50–59.

   Buldygerova L. N., Demidenko G. V. (2005). Asymptotic properties of solutions for the Sobolev inhomogeneous equation. Nonclassical equations of mathematical physics. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics SB RAS. P. 50–59. (in Russian)
2. *Секерж-Зенькович С. Я.* Теорема единственности и явное представление решения задачи Коши для уравнения внутренних волн // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 256, № 2. — С. 320–324.

   Sekerzh-Zen'kovich S. Ya. (1981). A uniqueness theorem and an explicit representation of the solution of the Cauchy problem for the equation of internal waves. Sov. Phys., Dokl., 26, 21–23.
3. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. — Новосибирск: Наука, 1984.

   Uspenskii S. V., Demidenko G. V., Perepelkin V. G. (1984). Imbedding theorems and applications to differential equations. Novosibirsk: Nauka. (in Russian)

Получена 24.02.2018