Динамические системы, 2017, том 7(35), №4, 373–385

УДК 517.929.4

Об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с периодическими коэффициентами в линейных членах[1]

Т. К. Ыскак

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090. *E-mail: istima92@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием, при этом коэффициенты в линейных членах являются периодическими. Исследуется асимптотическая и робастная устойчивости нулевого решения данной системы, указывается оценка на решения и множество притяжения. На основе полученных результатов исследуется асимптотическая устойчивость нулевого решения одного класса систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с большим параметром.

Ключевые слова: системы с распределенным запаздыванием, асимптотическая устойчивость, робастная устойчивость, функционал Ляпунова – Красовского, дифференциальное уравнение Ляпунова.

On stability of the zero solution to a system of differential equations with distributed delay and with periodic coefficients in linear terms

T. K. Yskak

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University, Novosibirsk 630090.

Abstract. In the paper we consider a system of nonlinear differential equations with distributed delay and with periodic coefficients in linear terms. We study the asymptotic stability and robust stability of the zero solution to this system, obtain an estimate of solutions and an attraction domain. On the basis of the obtained results we investigate the asymptotic stability of the zero solution to a class of systems of differential equations with distributed delay and with a large parameter.

Keywords: systems with distributed delay, asymptotic stability, robust stability, Lyapunov–Krasovskii functional, Lyapunov differential equation.

MSC 2010: 34K20

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

© *Т. К. ЫСКАК*

1. Введение

В работе мы будем рассматривать систему нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds + F(t, y(t)), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t, \xi)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е. $A(t+T) \equiv A(t)$, $B(t+T, \xi) \equiv B(t, \xi)$, $F(t, v)$ — непрерывная вектор-функция, липшицева по второму аргументу. Вектор-функция $F(t, v)$ удовлетворяет следующей оценке

$$\|F(t, v)\| < q\|v\|^{1+\varepsilon},$$

где $q > 0$, $\varepsilon > 0$.

Основной целью работы является исследование асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.1), робастной устойчивости, нахождение множества притяжения и получение оценок решений. На основе полученных результатов будет установлен аналог теоремы Крейна [2] об устойчивости решений системы дифференциальных уравнений с большим параметром следующего вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mu A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds + F(t, y(t)), \quad t > 0, \tag{1.2}$$

где $\mu \gg 1$ — параметр, $A(t)$, $B(t, \xi)$, $F(t, v)$ удовлетворяют условиям, указанным выше. Будем предполагать, что для любого $t \in [0, T]$ спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$.

При получении результатов будет использоваться модификация функционала Ляпунова – Красовского, введенного в [4, 5]

$$V(t, y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau} \int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta. \tag{1.3}$$

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание и ценные советы.

2. Устойчивость решений

Рассмотрим для системы (1.1) следующую начальную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t,t-s)y(s)ds + F(t,y(t)), \quad t>0, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\varphi(t) \in C[-\tau, 0]$ — заданная вектор-функция.

Для формулировки утверждения введем следующее обозначение:

$$V(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{-\eta}^{0} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle \, ds d\eta.$$

Теорема 1. *Пусть существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$ и матрица $K(\xi) = K^*(\xi) \in C^1[0,\tau]$ такие, что*

$$H(t) > 0, \quad t \in [0,T], \quad K(\xi) > 0, \quad \frac{d}{d\xi}K(\xi) < 0, \quad \xi \in [0,\tau].$$

Обозначим через $p_1(t)$ минимальное собственное число матрицы

$$P(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)\Bigg(-\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \tau K(0)$$

$$-H(t)\Bigg[\int\limits_{t-\tau}^{t} B^*(t,t-s)K^{-1}(t-s)B(t,t-s)ds\Bigg]H(t)\Bigg)H^{-\frac{1}{2}}(t).$$

Выберем число $k > 0$ такое, что

$$\frac{d}{d\xi}K(\xi) + kK(\xi) \le 0, \quad \xi \in [0,\tau].$$

Введем множество

$$\mathcal{E} = \left\{ \varphi(t) \in C[-\tau, 0] : V(0,\varphi) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^{\infty} \beta(\xi)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^{\xi}\gamma(s)ds\right)d\xi \right)^{-2/\varepsilon} \right\},$$

где

$$\gamma(t) = \min\{p_1(t), k\}, \quad \beta(t) = 2q\|H(t)\|\|H^{-1}(t)\|^{1+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

При этом $\int\limits_0^T \gamma(s)ds > 0$. *Тогда при любых* $\varphi(t) \in \mathcal{E}$ *решение начальной задачи (2.1) существует на всей полуоси* $\{t > 0\}$. *При этом справедлива следующая оценка*

$$\|y(t)\| \le \|H^{-1}(t)\|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\gamma(s)}{2}ds\right)$$

$$\times\left(V^{-\varepsilon/2}(0,\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t \beta(\xi)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^\xi \gamma(s)ds\right)d\xi\right)^{-1/\varepsilon}. \qquad (2.2)$$

Здесь и далее используется спектральная норма матрицы.

Доказательство. В силу условий на матрицы $A(t)$, $B(t,\xi)$ и вектор-функцию $F(t,v)$ начальная задача (2.1) однозначно разрешима. Пусть $y(t)$ — непродолжаемое решение начальной задачи (2.1), определенное на промежутке $[0,\tau')$.

Рассмотрим функционал (1.3) на решении $y(t)$. Дифференцируя $V(t,y)$ по t, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \equiv \left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)\left(A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^t B(t,t-s)y(s)ds + F(t,y(t))\right), y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)y(t), \left(A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^t B(t,t-s)y(s)ds + F(t,y(t))\right)\right\rangle$$

$$+\tau\left\langle K(0)y(t), y(t)\right\rangle - \int\limits_0^\tau \left\langle K(\eta)y(t-\eta), y(t-\eta)\right\rangle d\eta$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^\tau \left\langle K(\eta)y(t-\eta), y(t-\eta)\right\rangle d\eta = \int\limits_{t-\tau}^t \left\langle K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds,$$

производную $V(t,y)$ в силу системы (1.1) можно представить следующим образом

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \equiv -\int\limits_{t-\tau}^t \left\langle Q(t,s)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds$$

$$+\int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta + 2\mathrm{Re}\langle H(t)y(t), F(t,y(t))\rangle,$$

где

$$Q(t,s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau}\left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t)\right) - K(0) & -H(t)B(t,t-s) \\ -B^*(t,t-s)H(t) & K(t-s) \end{pmatrix}.$$

Пользуясь следующим представлением

$$\left\langle \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{12}^* & O_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle (O_{11} - O_{12}O_{22}^{-1}O_{12}^*)z_1, z_1\rangle$$

$$+\langle O_{22}^{-1}(O_{22}z_2 + O_{12}^*z_1), (O_{22}z_2 + O_{12}^*z_1)\rangle$$

и учитывая, что $K(\xi)$ — положительно определенная матрица, имеем следующее неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\left\langle H^{\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{\frac{1}{2}}(t)y(t), y(t)\right\rangle + \int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta$$

$$+2\mathrm{Re}\langle H(t)y(t), F(t,y(t))\rangle.$$

Поскольку $p_1(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -p_1(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta$$

$$+2\mathrm{Re}\langle H(t)y(t), F(t,y(t))\rangle.$$

Из определения вектор-функции $F(t,y(t))$ следует

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -p_1(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_0^\tau \int\limits_{t-\eta}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle dsd\eta$$

$$+2q\|H(t)\|\|y(t)\|^{2+\varepsilon}.$$

Учитывая определение функций $\gamma(t)$, $\beta(t)$, имеет место неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma(t)V(t,y) + \beta(t)V^{1+\frac{\varepsilon}{2}}(t,y).$$

Разделив обе части неравенства на $V^{1+\frac{\varepsilon}{2}}(t,y)$, получим

$$-\frac{2}{\varepsilon}\frac{d}{dt}V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(t,y) + \gamma(t)V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(t,y) \le \beta(t).$$

Домножив обе части неравенства на $-\frac{\varepsilon}{2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t \gamma(s)ds\right)$, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(t,y)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t \gamma(s)ds\right)\right) \geq -\frac{\varepsilon}{2}\beta(t)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t \gamma(s)ds\right).$$

Это эквивалентно

$$V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(t,y)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t \gamma(s)ds\right) \geq V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(0,\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t \beta(\xi)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^\xi \gamma(s)ds\right)d\xi.$$

Если $\varphi(t)\in\mathcal{E}$, то выражение справа всегда будет положительно, следовательно,

$$V(t,y) \leq \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma(s)ds\right)\left(V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(0,\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t \beta(\xi)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^\xi \gamma(s)ds\right)d\xi\right)^{-\frac{2}{\varepsilon}}.$$

В силу определения функционала $V(t,y)$ из (1.3) и положительной определенности матрицы $K(\xi)$, имеем оценку (2.2)

$$\|y(t)\| \leq \|H^{-1}(t)\|^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\gamma(s)}{2}ds\right)$$

$$\times\left(V^{-\frac{\varepsilon}{2}}(0,\varphi) - \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^t \beta(\xi)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^\xi \gamma(s)ds\right)d\xi\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Отметим, что данное неравенство верно при $t\in(0,\tau')$. Поскольку $y(t)$ — решение (1.1), то из данной оценки следует, что существует $y(\tau') = \lim\limits_{t\to\tau'} y(t)$. Тогда, поставив начальную задачу типа (2.1) на отрезке $[\tau'-\tau,\tau']$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}z(t) = A(t)z(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^t B(t,t-s)z(s)ds, \quad t>\tau', \\ z(t) = y(t), \quad t\in[\tau'-\tau,\tau'], \\ z(\tau'+0) = y(\tau'), \end{cases}$$

получим, что решение продолжается, следовательно, решение существует при всех $t>0$. Повторив рассуждения выше, убеждаемся, что оценка (2.2) справедлива при всех $t>0$.

Теорема доказана. □

Заметим, что оценка характеризует экспоненциальное убывание решений на бесконечности. Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво.

Рассмотрим вопрос робастной устойчивости системы (1.1). Наряду с системой (1.1) рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{d}{dt}y(t) = (A(t) + A_1(t))y(t)$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} (B(t, t-s) + B_1(t, t-s))y(s)ds + F(t, y(t)), \quad t > 0, \tag{2.3}$$

где $A_1(t)$ — матрица возмущений с непрерывными T-периодическими элементами, $B_1(t, \xi)$ — матрица возмущений с непрерывными элементами, T-периодическими по первой переменной, т. е. $A_1(t+T) \equiv A_1(t)$, $B_1(t+T, \xi) \equiv B_1(t, \xi)$.

Введем функцию

$$r(t) = 2\|A_1(t)\|\sqrt{\nu(H(t))} + \|H(t)\|$$

$$\times \int\limits_{t-\tau}^{t} \|K^{-1}(t-s)\| \left(2\|B_1(t, t-s)\|\|B(t, t-s\| + \|B_1(t, t-s)\|^2\right) ds, \tag{2.4}$$

где $\nu(H(t)) = \|H(t)\|\|H^{-1}(t)\|$ — число обусловленности матрицы $H(t)$. Отметим, что функция $r(t)$ — неотрицательная.

Теорема 2. *Пусть для системы (1.1) выполнены условия теоремы 1, и матрицы возмущений из системы (2.3) такие, что имеет место*

$$\int\limits_0^T r(s)ds < \int\limits_0^T \gamma(s)ds, \tag{2.5}$$

тогда нулевое решение системы (2.3) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Поскольку выполнены условия теоремы 1, то определен функционал Ляпунова – Красовского (1.3). Рассмотрим этот функционал вдоль решения возмущенной системы (2.3). По теореме 1 асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2.3) следует из неравенства

$$\int\limits_0^T \widehat{\gamma}(s)ds > 0, \tag{2.6}$$

где $\widehat{\gamma}(t) = \min\{\widehat{p}_1(t), k\}$, $\widehat{p}_1(t)$ — минимальное собственное число матрицы

$$\widehat{P}(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)\bigg(-\frac{d}{dt}H(t) - H(t)\left(A(t) + A_1(t)\right) - \left(A(t) + A_1(t)\right)^* H(t) - \tau K(0) - H(t)$$

$$\times \Bigg[\int\limits_{t-\tau}^{t} \left(B(t, t-s) + B_1(t, t-s)\right)^* K^{-1}(t-s)$$

$$\times \left(B(t, t-s) + B_1(t, t-s)\right) ds \Bigg] H(t) \Bigg) H^{-\frac{1}{2}}(t).$$

Учитывая, что $\|H^{\frac{1}{2}}(t)\| = \|H(t)\|^{\frac{1}{2}}$, несложно проверить, что для матрицы $P(t)$ из формулировки теоремы 1 и функции $r(t)$ из (2.4) справедливо следующее неравенство

$$P(t) + r(t)I > \widehat{P}(t) > P(t) - r(t)I.$$

Следовательно,

$$p_1(t) + r(t) > \widehat{p_1}(t) > p_1(t) - r(t). \tag{2.7}$$

Покажем справедливость неравенства (2.6), тем самым докажем теорему. Перепишем левую часть неравенства (2.6), используя определение функции $\widehat{\gamma}(t)$

$$\int\limits_0^T \widehat{\gamma}(s) ds = \int\limits_0^T \min\left\{\widehat{p_1}(s), k\right\} ds = \int\limits_0^T \frac{1}{2}\left(\widehat{p_1}(s) + k - |\widehat{p_1}(s) - k|\right) ds.$$

В силу неравенства треугольника имеем

$$\widehat{p_1}(t) + k - |\widehat{p_1}(t) - k| > \widehat{p_1}(t) + k - |\widehat{p_1}(t) - p_1(t)| - |p_1(t) - k|.$$

Из неравенства (2.7) следует, что

$$\widehat{\gamma}(t) > \gamma(t) - r(t).$$

Следовательно, неравенство (2.6) вытекает из условия (2.5). □

3. Аналог теоремы Крейна

Используя достаточные условия асимптотической устойчивости, мы докажем асимптотическую устойчивость нулевого решения системы вида (1.2). Напомним, что для любого $t \in [0, T]$ спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$.

Отметим, что в литературе имеется ряд результатов об устойчивости решений для подобных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2] и дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [6–8]. Приведем некоторые из них.

Вначале рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $\mu > 0$

$$\frac{d}{dt} y = \mu A(t) y, \quad t > 0, \tag{3.1}$$

где $A(t)$ — матрица с непрерывными T-периодическими элементами. Имеет место следующая теорема Крейна [2].

Теорема 3. *Если для любого $t \in [0, T]$ спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$, то при всех достаточно больших положительных μ нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво.*

Подчеркнем, что в теореме Крейна асимптотическая устойчивость решения системы (3.1) гарантируется только при достаточно больших $\mu > 0$. Это условие является важным, так как существуют примеры систем вида (3.1), нулевое решение которых при $\mu \approx 0$ неустойчиво. Впервые данные примеры были указаны Р. Э. Виноградом (см., например, [1, стр. 124]). Отметим, что в работе [8] было получено некоторое "пороговое" значение μ_0, начиная с которого можно гарантировать асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (3.1). Для формулировки соответствующего утверждения нам потребуется ввести некоторые обозначения.

Поскольку для любого $t \in [0, T]$ спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$, то по критерию Ляпунова существует решение $\widehat{H}(t) = \widehat{H}^*(t) > 0$ матричного уравнения

$$\widehat{H}A(t) + A^*(t)\widehat{H} = -I.$$

Более того, $\widehat{H}(t) \in C[0, T]$. Введем следующие обозначения

$$H_{\max} = \max_{t \in [0,T]} \|\widehat{H}(t)\|, \quad \nu_{\max} = \max_{t \in [0,T]} \nu(\widehat{H}(t)),$$

где $\nu(\widehat{H}(t))$ — число обусловленности матрицы $\widehat{H}(t)$.

Справедлива следующая теорема [8].

Теорема 4. *Пусть для любого $t \in [0, T]$ спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$, число N такое, что выполнено неравенство*

$$\max_{|t-s| \le \frac{T}{N}} \|A(t) - A(s)\| \le \frac{1}{4H_{\max}\sqrt{\nu_{\max}}}, \tag{3.2}$$

и

$$\mu_0 = \frac{2NH_{\max}}{T} \ln \nu_{\max},$$

тогда при всех $\mu > \mu_0$ нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво.

Отметим, что существование N, при котором выполнено неравенство (3.2), обеспечивается непрерывностью элементов матриц $A(t)$, $\widehat{H}(t)$ и функции $\nu(\widehat{H}(t))$. При доказательстве этой теоремы существенно использовался следующий критерий асимптотической устойчивости [3] системы

$$\frac{d}{dt}y = A(t)y, \tag{3.3}$$

где $A(t)$ — непрерывная T-периодическая матрица размера $n \times n$.

Теорема 5. *I. Если нулевое решение системы (3.3) асимптотически устойчиво, то для любой непрерывной на $[0,T]$ матрицы $C(t)$ существует единственное решение $L(t)$ краевой задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}L + LA(t) + A^*(t)L = -C(t), \quad 0 < t < T, \\ \\ L(0) = L(T), \end{cases} \tag{3.4}$$

при этом, если

$$C(t) = C^*(t) > 0, \quad t \in [0,T], \tag{3.5}$$

то

$$L(t) = L^*(t) > 0, \quad t \in [0,T].$$

II. Пусть правая часть $C(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и удовлетворяет условиям (3.5). Если краевая задача (3.4) имеет эрмитово решение $L(t)$ такое, что $L(0) > 0$, то нулевое решение системы (3.3) асимптотически устойчиво.

Для систем (3.1) в силу критерия асимптотической устойчивости при $\mu > \mu_0$ краевая задача для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}L + \mu LA(t) + \mu A^*(t)L = -I, \quad 0 < t < T, \\ L(0) = L(T) > 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

имеет единственное решение $L(t)$, при этом $L(t) = L^*(t) > 0$. Причем, как было показано в [8], имеет место оценка

$$\|L(t)\| \le \frac{2H_{\max}(\nu_{\max})^N}{\mu}\left(1 - (\nu_{\max})^N \exp\left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}}\right)\right)^{-1}. \tag{3.7}$$

Сформулируем и докажем аналог теорем 3, 4 для системы (1.2).

Теорема 6. *Пусть число N такое, что выполнено неравенство (3.2) и $\mu_1 > 0$ — корень следующего уравнения*

$$\mu\left(1 - (\nu_{\max})^N \exp\left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}}\right)\right)$$

$$= 4H_{\max}(\nu_{\max})^N \left(\max_{\xi\in[0,T]} \tau \left\| \int\limits_{\xi-\tau}^{\xi} e^{\xi-s} B^*(\xi,\xi-s)B(\xi,\xi-s)ds \right\| \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.8}$$

тогда при всех $\mu > \mu_1$ нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Для того чтобы доказать, что нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво при всех $\mu > \mu_1$, мы укажем матрицы $H(t)$, $K(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, и такие, что $P(t) > 0$. Тогда из теоремы 1 получим требуемое.

Покажем, что уравнение (3.8) однозначно разрешимо. Действительно, в случае $\mu > \mu_0$ в левой части стоит произведение двух положительных монотонно возрастающих функций, которое при $\mu = \mu_0$ обращается в ноль, а справа стоит неотрицательная величина. В случае $0 < \mu < \mu_0$ левая часть уравнения (3.8) отрицательна, а при увеличении μ она неограниченно возрастает. Тогда найдется единственный корень μ_1 уравнения (3.8) и $\mu_1 \geq \mu_0$.

Заметим, что при $\mu > \mu_1$ краевая задача (3.6) однозначно разрешима, причем $L(t) = L^*(t) > 0$. Возьмем в качестве матрицы $H(t)$ T-периодическое продолжение решения $L(t)$ краевой задачи (3.6), тогда при $\mu > \mu_1$ для $H(t)$ справедлива оценка вида (3.7)

$$\|H(t)\| \leq \frac{2H_{\max}\left(\nu_{\max}\right)^N}{\mu}\left(1-\left(\nu_{\max}\right)^N \exp\left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}}\right)\right)^{-1}, \quad t \geq 0. \tag{3.9}$$

Пусть $K(s) = \frac{e^{-s}}{2\tau}I$, тогда $k = 1$ (см. теорему 1). В силу выбора матриц $H(t)$ и $K(s)$ матрица $P(t)$ из теоремы 1 имеет вид

$$P(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)\left(\frac{1}{2}I - 2\tau H(t)\left[\int\limits_{t-\tau}^{t} e^{t-s}B^*(t,t-s)B(t,t-s)ds\right]H(t)\right)H^{-\frac{1}{2}}(t).$$

Покажем, что эта матрица положительно определена. Ясно, что для этого достаточно показать положительную определенность матрицы

$$M(t) = \frac{1}{2}I - 2\tau H(t)\left[\int\limits_{t-\tau}^{t} e^{t-s}B^*(t,t-s)B(t,t-s)ds\right]H(t).$$

Вначале отметим, что справедливо неравенство

$$M(t) > \left(\frac{1}{2} - 2\tau\|H(t)\|^2\left\|\int\limits_{t-\tau}^{t} e^{t-s}B^*(t,t-s)B(t,t-s)ds\right\|\right)I,$$

тогда в силу оценки (3.9) имеем

$$M(t) \geq \left(\frac{1}{2} - 2\tau\left(\frac{2H_{\max}\left(\nu_{\max}\right)^N}{\mu}\left(1-\left(\nu_{\max}\right)^N \exp\left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}}\right)\right)^{-1}\right)^2\right.$$

$$\left.\times\left\|\int\limits_{t-\tau}^{t} e^{t-s}B^*(t,t-s)B(t,t-s)ds\right\|\right)I.$$

Очевидно, из (3.8) следует, что при $\mu = \mu_1$ матрица справа неотрицательно определена. Следовательно, при $\mu > \mu_1$ матрица $M(t)$ является положительно определенной. Это влечет за собой положительную определенность матрицы $P(t)$. Тогда, как отмечалось, минимальное собственное значение $p_1(t)$ матрицы $P(t)$ строго положительно. Из этого вытекает, что

$$\int_0^T \gamma(s)ds = \int_0^T \min\{p_1(s), 1\}ds > 0.$$

В силу теоремы 1 нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво при всех $\mu > \mu_1$.

Теорема доказана. □

Список цитируемых источников

1. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966.

   Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytskii V. V. (1966). Theory of Lyapunov exponents and its applications to problems of stability. Moscow: Nauka. (in Russian)

2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.

   Daleckii Ju. L., Krein M. G. (1974). Stability of solutions of differential equations in Banach space. Vol. 43: Translations of mathematical monographs. Providence: Amer. Math. Soc.

3. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 2. — С. 332–348.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2001). On stability of solutions to linear systems with periodic coefficients. Sib. Math. J., 42, No. 2, 282–296.

4. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. — 2005. — Т. 5, № 3. — С. 20–28.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2005). Asymptotic properties of solutions to delay differential equations. Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika, Mekhanika, Informatika, 5, No. 3, 20–28. (in Russian)

5. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 5. — С. 1025–1040.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2007). Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. Siberian Math. J., 48, No. 5, 824–836.

6. *Матвеева И. И., Щеглова А. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами // Сиб. журн. индустр. матем. — 2011. — Т. 14, № 1. — С. 83–92.

Matveeva I. I., Shcheglova A. A. (2011). Some estimates of the solutions to time-delay differential equations with parameters. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 5, No. 3, 391–399.

7. *Матвеева И. И., Щеглова А. А.* Оценки решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами // Математические заметки ЯГУ. — 2012. — Т. 19, № 1. — С. 60–69.

   Matveeva I. I., Shcheglova A. A. (2012). Estimates of the solutions of a class of nonlinear differential equations with retarded argument and parameters. Mat. Zamet. YAGU, 19, No. 1, 60–69. (in Russian)

8. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* (2015). Asymptotic stability of solutions to a class of linear time-delay systems with periodic coefficients and a large parameter. Journal of Inequalities and Applications, 2015, No. 331, 1–10.

Получена 02.11.2017