Динамические системы, 2017, том 7(35), №4, 351–371

УДК 512.643.8

О кватернионных соотношениях Дирака. I

Д. Л. Тышкевич

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: dtyshk@inbox.ru*

Аннотация. В данной части работы получены базовые результаты для изучения структуры кватернионных матриц, удовлетворяющих соотношениям Дирака. Все результаты сформулированы для комплексных матриц, имеющих специальную, т. н. *симплектическую* структуру, позволяющую строить по данным матрицам кватернионные при соответствующей процедуре кватернионизации. На данном этапе все выкладки проведены исключительно для комплексного случая. В следующей части предполагается провести кватернионизацию и сформулировать все основные результаты в кватернионном виде.

Ключевые слова: соотношения Дирака, гамма-матрица, кватернион.

On quaternionic Dirac anticommutation relations. I

D. L. Tyshkevich

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In this part of an investigation to be continued we obtain the basic results for studying quaternionic matrices that satisfy Dirac anticommutation relations. All the results are formulated for complex matrices of so–called *simplectic* structure which allows to build on the base of the matrices given the quaternionic ones via the corresponding quaternionization procedure. At the present stage, it is useful to formulate all the reasonings purely for the complex case. In the next part of the work to be continued we intend, via the quaternionization procedure, to finally formulate all the main results in the quaternionic form. All the results presented in the work are seemed to be new. Although there are a rather big amount of articles focusing on quaternionic Dirac equation, investigations of matrices satisfying Dirac anticommutation relations have not been carried out (as far as we know).
Keywords: Dirac anticommutation relations, gamma–matrices, quaternion.
MSC 2010: 15B33

Введение

В данной части работы получены базовые результаты для изучения структуры кватернионных матриц, удовлетворяющих соотношениям Дирака. Все результаты сформулированы для комплексных матриц, имеющих специальную, т. н. *симплектическую* структуру, позволяющую строить по данным матрицам кватернионные при соответствующей процедуре кватернионизации. На данном этапе удобно проводить все выкладки исключительно для комплексного случая. В следующей части мы намерены, осуществив кватернионизацию, окончательно сформулировать все основные результаты в кватернионном виде.

Результаты представленные в данной работе являются новыми; несмотря на то, что имеется достаточно много работ, посвящённых кватернионному уравнению

Дирака, исследование матриц, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям Дирака, насколько нам известно, не проводились.

Обозначения.

Через A^*, $\overline{A}$, A^T, $A^\vee$ будем обозначать соответственно *сопряжённую*, *комплексно сопряжённую*, *транспонированную* и *союзную* матрицы к матрице A. Через E_n будет обозначаться *единичная* матрица из $M_n(\mathbb{C})$ (нижний индекс в E_n, когда это не вызывает недоразумений, будет опускаться).

1. Матрицы Θ_k

1.1. Матрицы Θ_k, Θ^k. Соотношения Дирака.

Рассмотрим матрицы $t_k \in M_2(\mathbb{C})$, $k \in \overline{0,3}$:

$$t_0 := \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \ t_1 := \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \ t_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ t_3 := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Пусть $g = \|g_{ij}\|_{i,j\in\overline{0,3}}$ — метрический тензор специальной теории относительности:

$$\begin{aligned} g_{00} &:= 1; \\ g_{ii} &:= -1, \ i \in \overline{1,3}; \\ g_{ij} &:= 0, \ i,j \in \overline{1,3}, \ i \neq j. \end{aligned}$$

Как показывает простая проверка, матрицы t_k удовлетворяют соотношениям:

$$t_i\overline{t_j} + t_j\overline{t_i} = -2g_{ij}E_2, \quad i,j \in \overline{0,3}. \tag{1.1}$$

Матрицы t_k связаны с матрицами Паули σ_k следующим образом:

$$t_0 = -\sigma_2, \ t_1 = i\sigma_1, \ t_3 = i\sigma_3.$$

Определим матрицы $s_k \in M_4(\mathbb{C})$, $k \in \overline{0,3}$:

$$s_k := \begin{bmatrix} 0 & t_k \\ -t_k & 0 \end{bmatrix}.$$

Из (1.1) и определения матриц s_k следуют соотношения

$$s_i\overline{s_j} + s_j\overline{s_i} = 2g_{ij}E_4, \quad i,j \in \overline{0,3}. \tag{1.2}$$

Очевидно,

$$\textit{матрицы } s_k \textit{ унитарны } (k \in \overline{0,3}), \tag{1.3}$$

а матрицы $s_0 s_k$ являются *самосопряжёнными* ($k \in \overline{1,3}$):

$$s_0 s_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \ s_0 s_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}; \ s_0 s_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Определим, наконец, матрицы Θ_k, $\Theta^k \in M_8(\mathbb{C})$, $k \in \overline{0,3}$:

$$\Theta_k := \begin{bmatrix} 0 & s_k \\ -\overline{s_k} & 0 \end{bmatrix}, \ \Theta^k := i\Theta_k\,. \tag{1.5}$$

Из (1.1) и определения матриц Θ^k следует, что последние удовлетворяют известным соотношениям

$$\Theta^i\Theta^j + \Theta^j\Theta^i = 2g_{ij}E_8, \quad i,j \in \overline{0,3}\,, \tag{1.6}$$

которые в дальнейшем мы будем называть *соотношениями Дирака.* Также из (1.3), (1.4) и определения (1.5) следует, что

$$\textit{матрицы } \Theta_k,\ \Theta^k \textit{ унитарны } (k \in \overline{0,3})\,, \tag{1.7}$$

$$\textit{матрицы } \Theta_0\Theta_k,\ \Theta^0\Theta^k \textit{ — самосопряжённые } (k \in \overline{1,3})\,. \tag{1.8}$$

Из соотношений Дирака и (1.7) непосредственно следуют равенства

$$(\Theta^k)^*\Theta^0 = \Theta^0\Theta^k \ \ (k \in \overline{0,\,3}). \tag{1.9}$$

1.2. Общий вид матриц, коммутирующих и антикоммутирующих с матрицами Θ_k.

Рассмотрим отображение $\varphi^{(n)}\colon M_2(\mathbb{C}) \to M_{2n}(\mathbb{C})$ ($n \in \mathbb{N}$):

$$\varphi^{(n)}\big(\left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right]\big) := \begin{bmatrix} a_{11}E_n & a_{12}E_n \\ a_{21}E_n & a_{22}E_n \end{bmatrix}.$$

Следующее утверждение тривиально.

Предложение 1. Отображение $\varphi^{(n)}$ является инъективным гомоморфизмом линейных алгебр $M_2(\mathbb{C})$ и $M_{2n}(\mathbb{C})$, причём для любой матрицы A из $M_2(\mathbb{C})$ выполняются соотношения:

$$\varphi^{(n)}\big(op(A)\big) = op\big(\varphi^{(n)}(A)\big),$$

где op означает любую унарную операцию из $\{\ ^T, \ \overline{}, \ \ ^*, \ \ ^\vee\}$.

Следствие 1. *Множество матриц $\varphi^{(n)}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$ является линейной подалгеброй $M_{2n}(\mathbb{C})$, замкнутой относительно операций транспонирования и комплексного сопряжения (а, следовательно, и просто сопряжения).*

Определим теперь отображения $\Phi_{\pm}^{(n)}\colon M_2(\mathbb{C}) \to M_{4n}(\mathbb{C})$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$\Phi_{\pm}^{(n)}(A) := \begin{bmatrix} \varphi^{(n)}(A) & 0 \\ 0 & \pm\varphi^{(n)}(A^{\vee}) \end{bmatrix}, \quad A \in M_2(\mathbb{C}).$$

Замечание 1. Для отображения $\Phi_{+}^{(n)}$ также справедливы аналоги предложения 1 и следствия 1.

Отметим также, что

$$\Phi_{-}^{(n)}(A_1)\Phi_{-}^{(n)}(A_2) = \Phi_{+}^{(n)}(A_1A_2) \quad (A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{C})). \tag{1.10}$$

Лемма 1. *Пусть $A \in M_2(\mathbb{C})$.*

(a) *Матрица $t_k^{-1}At_k$ не зависит от $k \in \overline{0,3}$ тогда и только тогда, когда A — скалярная матрица.*

(b) *Матрица $t_k^{-1}A\overline{t_k}$ не зависит от $k \in \overline{0,3}$ тогда и только тогда, когда A — нулевая матрица.*

Доказательство. Пусть $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

(**a**). Имеем:

$$t_0^{-1}At_0 = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}, \ t_1^{-1}At_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix},$$
$$t_2^{-1}At_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ t_3^{-1}At_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

откуда заключаем, что $t_k^{-1}At_k$ не зависит от k тогда и только тогда, когда $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21} = 0$.

(**b**). Аналогично,

$$t_0^{-1}A\overline{t_0} = \begin{bmatrix} -a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & -a_{11} \end{bmatrix}, \ t_1^{-1}A\overline{t_1} = \begin{bmatrix} -a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & -a_{11} \end{bmatrix},$$
$$t_2^{-1}A\overline{t_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ t_3^{-1}A\overline{t_3} = \begin{bmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix},$$

откуда следует, что $t_k^{-1}A\overline{t_k}$ не зависит от k тогда и только тогда, когда $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0$. □

Лемма 2. *Пусть $A \in M_4(\mathbb{C})$.*

(a) *Матрица $s_k^{-1}As_k$ не зависит от $k \in \overline{0,3}$ тогда и только тогда, когда $A \in \varphi^{(2)}(M_2(\mathbb{C}))$.*

(b) *Матрица $s_k^{-1}A\overline{s_k}$ не зависит от $k \in \overline{0,3}$ тогда и только тогда, когда A — нулевая матрица.*

Доказательство. Пусть $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $A_{ij} \in M_2(\mathbb{C})$ $(i, j \in \overline{1,2})$.

(**a**). Имеем

$$s_k^{-1} A s_k = \begin{bmatrix} t_k^{-1} A_{22} t_k & -t_k^{-1} A_{21} t_k \\ -t_k^{-1} A_{12} t_k & t_k^{-1} A_{11} t_k \end{bmatrix} , \tag{1.11}$$

откуда заключаем, что $s_k^{-1} A s_k$ не зависит от k тогда и только тогда, когда $t_k^{-1} A_{ij} t_k$ не зависят от k $(i, j \in \overline{1,2})$. Согласно п. (a) леммы 1 это возможно тогда и только тогда, когда существуют такие комплексные числа a_{ij}, что $A_{ij} = a_{ij} E_2$ $(i, j \in \overline{1,2})$, т.е. $A = \varphi^{(2)} \left(\left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right] \right)$. При этом, в силу (1.11) и предложения 1

$$s_k^{-1} A s_k = A^{\vee} \ (k \in \overline{0,3}) \,. \tag{1.12}$$

(**b**). Доказывается аналогично с использованием соответствующего пункта леммы 1. □

Теорема 1. *Матрица P коммутирует (антикоммутирует) со всеми матрицами Θ_k (а, следовательно, и с Θ^k) $(k \in \overline{0,3})$ тогда и только тогда, когда P лежит в $\Phi_+^{(2)}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$ (в $\Phi_-^{(2)}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$).*

Доказательство. Пусть

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} , \ P_{ij} \in M_4(\mathbb{C}) \ (i, j \in \overline{1,2}).$$

Рассмотрим подробно случай коммутирования. Равенство

$$P\Theta_k = \Theta_k P \tag{1.13}$$

эквивалентно системе из четырёх равенств

$$P_{11} s_k = s_k P_{22}; \tag{1.14}$$

$$P_{22} \overline{s_k} = \overline{s_k} P_{11}; \tag{1.15}$$

$$P_{12} \overline{s_k} = -s_k P_{21}; \tag{1.16}$$

$$P_{21} s_k = -\overline{s_k} P_{12}. \tag{1.17}$$

В силу (1.2) $s_k^{-1} = g_{kk} \overline{s_k}$, поэтому справедливы импликации (1.14) $\Rightarrow$ (1.15), (1.16) $\Rightarrow$ (1.17). Таким образом, равенство (1.13) эквивалентно двум равенствам

$$P_{22} = s_k^{-1} P_{11} s_k \,; \tag{1.18}$$

$$P_{21} = -s_k^{-1} P_{12} \overline{s_k} \,. \tag{1.19}$$

Используя лемму 2, заключаем, что (1.18), (1.19) выполняются тогда и только тогда, когда $P_{12} = P_{21} = 0$, $P_{11} \in \varphi^{(2)}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$ и $P_{22} = P_{11}^{\vee}$ (см. (1.12)), т.е. $P \in \Phi_+^{(2)}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$.

В случае антикоммутирования доказательство схоже с проведённым, при этом, однако матрицы P_{11} и P_{22} будут связаны равенством $P_{22} = -s_k^{-1} P_{11} s_k = -P_{11}^{\vee}$. □

В дальнейшем (в связи с теоремой 1) отображения $\Phi_+^{(2)}$ и $\Phi_-^{(2)}$ будем обозначать соответственно через $\mathcal{C}$ и $\mathcal{A}$. Заметим, что по (1.10)

$$\mathcal{A}(A_1)\,\mathcal{A}(A_2) = \mathcal{C}(A_1 A_2) \quad (A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{C})). \tag{1.20}$$

1.3. Связь между 8–мерными комплексными матрицами, удовлетворяющими соотношениям Дирака.

Пусть $\{\widehat{\Theta}^k\}_{k\in\overline{0,3}}$ — некоторые матрицы из $M_8(\mathbb{C})$, удовлетворяющие соотношениям Дирака (1.6). Как известно, любая комплексная линейная алгебра, порождённая четырьмя элементами, удовлетворяющими соотношениям Дирака, обладает единственным (с точностью до эквивалентности) неприводимым комплексным представлением, размерность которого равна *четырём* (см. [4, Гл. XX], [2, Гл. I, § 6], [1, Гл. 7, Дополн. Д]). Данное представление может быть реализовано при помощи известных матриц Дирака:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в силу того, что размерность матриц $\widehat{\Theta}^k$ равна *восьми*, любое представление четвёрки $\{\widehat{\Theta}^k\}_{k\in\overline{0,3}}$ раскладывается в прямую сумму *двух* неприводимых четырёхмерных представлений, и, следовательно, существует такая обратимая матрица T из $M_8(\mathbb{C})$, что

$$\widehat{\Theta}^k = T^{-1}\Gamma^k T\,, \tag{1.21}$$

где $\Gamma^k := \begin{bmatrix} \gamma^k & 0 \\ 0 & \gamma^k \end{bmatrix}$. Из (1.21) следует существование обратимой матрицы Λ из $M_8(\mathbb{C})$, сплетающей $\widehat{\Theta}^k$ и Θ^k (см. (1.5)):

$$\widehat{\Theta}^k = \Lambda^{-1}\Theta^k\Lambda\,. \tag{1.22}$$

Связь между матрицами, сплетающими $\widehat{\Theta}^k$ и Θ^k, устанавливает следующее утверждение.

Предложение 2. Любые две обратимые матрицы Λ_1 и Λ_2, удовлетворяющие (1.22), связаны равенством

$$\Lambda_2 = P\Lambda_1\,,$$

где P — некоторая обратимая матрица из $\mathcal{C}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$.

Доказательство. Пусть $\widehat{\Theta}^k = \Lambda_1^{-1}\Theta^k\Lambda_1$, $\widehat{\Theta}^k = \Lambda_2^{-1}\Theta^k\Lambda_2$. Отсюда следует равенство $\Lambda_2\Lambda_1^{-1}\Theta^k = \Theta^k\Lambda_2\Lambda_1^{-1}$. Таким образом, матрица $P := \Lambda_2\Lambda_1^{-1}$ коммутирует со всеми матрицами Θ^k. Доказательство завершается применением теоремы 1. $\square$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что справедливо и обратное: если матрица Λ_1 удовлетворяет (1.22), то для произвольной обратимой матрицы P из $\mathcal{C}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$ матрица $\Lambda_2 := P\Lambda_1$ также удовлетворяет (1.22).

1.4. О решении одного матричного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$\overline{A}A^{-1} = B \tag{1.23}$$

с известной матрицей B и искомой матрицей A.

Предложение 3. Произвольное решение A уравнения (1.23) может быть представлено в виде $A = A_0U$, где A_0 — некоторое фиксированное решение (1.23), а U — обратимая вещественная матрица.

Доказательство. Очевидно, $A = A_0U$ является решением (1.23):

$$\overline{A}A^{-1} = \overline{A}_0\overline{U}U^{-1}A_0^{-1} = \overline{A_0}UU^{-1}A_0^{-1} = \overline{A_0}A_0^{-1} = B\,.$$

Обратно, пусть A_0 —некоторое фиксированное решение, и A — также некоторое решение (1.23). Положим $U := A_0^{-1}A$. Тогда

$$\overline{U} = \overline{A}_0^{-1}\overline{A} = (A_0^{-1}B^{-1})(BA) = A_0^{-1}A = U\,,$$

т.е. обратимая матрица U — вещественна, и $A = A_0U$. $\square$

Выясним вопрос о существовании *унитарных* решений уравнения (1.23). Очевидно, необходимым условием разрешимости (1.23) (без каких–либо ограничений на A) является следующее:

$$\overline{B} = B^{-1}\,. \tag{1.24}$$

Кроме того, для существования унитарных решений матрица B сама должна быть унитарной.

Предложение 4. Если унитарная матрица B удовлетворяет (1.24), то существует унитарное решение уравнения (1.23). Произвольное такое решение A может быть представлено в виде $A = A_0U$, где A_0 — некоторое фиксированное унитарное решение (1.23), а U — ортогональная вещественная матрица. Если $B \in \Phi_+^{(n)}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$ $(n \in \mathbb{N})$, то существует унитарное решение (1.23), лежащее в $\Phi_+^{(n)}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$.

Доказательство. **I**. Пусть $B = VDV^{-1}$ — спектральное представление унитарной матрицы B с унитарной матрицей V и диагональной D. Как легко проверить, из унитарности B и условия (1.24) следует, что матрица $\overline{V}^{-1}V$ коммутирует с D. Пусть $\mathcal{D}$ — некоторая диагональная матрица, удовлетворяющая условию $\mathcal{D}^{-2} = D$. Так как функция $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $f(t) := e^{-it/2}$, может быть равномерно приближена тригонометрическими полиномами, то матрица $\mathcal{D}$ может быть приближена (относительно какой–либо матричной нормы[1]) полиномами от матрицы D (чуть ниже эта ситуация будет рассмотрена подробнее), откуда заключаем, что $\overline{V}^{-1}V$ коммутирует с $\mathcal{D}$, а, следовательно, и с $\mathcal{D}^{-1}$. Положим $A_0 := V\mathcal{D}V^{-1}$. Тогда

$$\overline{A_0}A_0^{-1} = \overline{V}\mathcal{D}^{-1}\overline{V}^{-1}V\mathcal{D}^{-1}V^{-1} = \overline{V}\,\overline{V}^{-1}V\mathcal{D}^{-2}V^{-1} = VDV^{-1} = B\,,$$

т.е. A_0 — решение (1.23) (заметим, что A_0 коммутирует с B).

Далее применяем предложение 3.

II. Пусть $B \in \Phi_+^{(n)}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$. Покажем, что $A_0 = V\mathcal{D}V^{-1}$ лежит в $\Phi_+^{(n)}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$. Имеем разложения

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix},\ \mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_2 \end{bmatrix}, \quad D_i,\, \mathcal{D}_i,\, V_{ij} \in M_{2n}(\mathbb{C})\ (i, j \in \overline{1,\,2}),$$

и

$$B = \begin{bmatrix} \varphi^{(n)}(U) & 0 \\ 0 & \varphi^{(n)}(U^{\vee}) \end{bmatrix}, \quad U \in M_2(\mathbb{C}),$$

где D_i, $\mathcal{D}_i$ $(i \in \overline{1,\,2})$ — диагональные матрицы, а U — унитарная. Тогда равенство $VD = A_0V$ эквивалентно четырём равенствам

$$\begin{aligned} &V_{1i}D_i = \varphi^{(n)}(U)V_{1i}\,; \\ &V_{2i}D_i = \varphi^{(n)}(U^{\vee})V_{2i}\ (i \in \overline{1,\,2}), \end{aligned} \tag{1.25}$$

Пусть $U = V_0D_0V_0^{-1}$ — спектральное представление U. По предложению 1

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(U) &= \varphi^{(n)}(V_0)\varphi^{(n)}(D_0)\varphi^{(n)}(V_0)^{-1}\,, \\ \varphi^{(n)}(U^{\vee}) &= \varphi^{(n)}(V_0)\varphi^{(n)}(D_0^{\vee})\varphi^{(n)}(V_0)^{-1}\,. \end{aligned}$$

Положим $\mathcal{V}_{ij} := \varphi^{(n)}(V_0)^{-1}V_{ij}$ $(i, j \in \overline{1,\,2})$. Тогда равенства (1.25) можно записать как

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}_{1i}D_i = \varphi^{(n)}(D_0)\mathcal{V}_{1i}\,; \\ &\mathcal{V}_{2i}D_i = \varphi^{(n)}(D_0^{\vee})\mathcal{V}_{2i}\ (i \in \overline{1,\,2}). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Пусть $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность "полиномов", $p_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_kx^k$, что

$$p_n(e^{it}) \to e^{-it/2}\ (n \to \infty)\ \textit{равномерно по}\ t \in [0, 2\pi]. \tag{1.27}$$

[1]Напомним, что в конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Далее, пусть

$$D_0 = \begin{bmatrix} e^{it_1} & 0 \\ 0 & e^{it_2} \end{bmatrix}$$

для некоторых $t_1,\ t_2 \in [0, 2\pi]$, и положим

$$\mathcal{D}_0 := \begin{bmatrix} e^{-it_1/2} & 0 \\ 0 & e^{-it_2/2} \end{bmatrix}.$$

Тогда из (1.27) следуют сходимости (относительно любой матричной нормы)

$$p_n(D_i) \to \mathcal{D}_i\ (i \in \overline{1,2}),\ p_n(D_0) \to \mathcal{D}_0,\ p_n(D_0^{\vee}) \to \mathcal{D}_0^{\vee}\ (n \to \infty). \tag{1.28}$$

Из (1.26), (1.28) и предложения 1 следуют равенства

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}_{1i}\mathcal{D}_i = \varphi^{(n)}(\mathcal{D}_0)\mathcal{V}_{1i}\,; \\ &\mathcal{V}_{2i}\mathcal{D}_i = \varphi^{(n)}(\mathcal{D}_0^{\vee})\mathcal{V}_{2i}\ (i \in \overline{1,\,2}). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Положим $\mathcal{A}_0 := V_0\mathcal{D}_0V_0^{-1}$. Тогда равенства (1.29) эквивалентны равенствам

$$\begin{aligned} &V_{1i}\mathcal{D}_i = \varphi^{(n)}(\mathcal{A}_0)V_{1i}\,; \\ &V_{2i}\mathcal{D}_i = \varphi^{(n)}(\mathcal{A}_0^{\vee})V_{2i}\ (i \in \overline{1,\,2}), \end{aligned}$$

которые, в свою очередь, равносильны одному равенству $V\mathcal{D} = \Phi_+^{(n)}(\mathcal{A}_0)V$. Таким образом, $A_0 = \Phi_+^{(n)}(\mathcal{A}_0)$. □

1.5. Группа Лоренца.

Пусть L — *полная* группа Лоренца, состоящая из всех вещественных g–ортогональных матриц $\Omega = \|\Omega_{ij}\|_{i,\,j\in\overline{0,\,3}}$, т.е. матриц, удовлетворяющих равенству

$$\Omega^T g\Omega = g\,. \tag{1.30}$$

Из (1.30), в частности, следует равенство

$$\Omega_{00}^2 = 1 + \sum_{k=1}^{3}\Omega_{0k}^2\,, \tag{1.31}$$

откуда видно, что для Ω_{00} существуют две возможности:

$$\Omega_{00} \le -1 \quad \textit{или} \quad \Omega_{00} \ge 1.$$

Если $\Omega_{00} \ge 1$, то говорят, что матрица Ω *ортохронна* (не меняет направления времени). Совокупность всех ортохронных матриц образует подгруппу группы L, обозначаемую через $L_0^{\uparrow}$.

Совокупность всех ортохронных матриц с определителем 1 образует подгруппу ортохронной группы, которая называется *собственной* группой Лоренца и обозначается $L_+^\uparrow$. Ортохронная группа $L_0^\uparrow$ порождается собственной группой $L_+^\uparrow$ и матрицей *пространственного отражения* s; полная группа Лоренца L порождается ортохронной группой $L_0^\uparrow$ и матрицей *отражения времени* t:

$$s := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; t := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как следует из (1.31), для ортохронной матрицы Ω

$$\Omega_{00} = \Big(1 + \sum_{k=1}^{3} \Omega_{0k}^2\Big)^{1/2}. \tag{1.32}$$

Лемма 3. *Пусть Ω — ортохронная матрица, и $A := \sum_{k=0}^{3} \Omega_{0k}\Theta^0\Theta^k$. Тогда A — положительная самосопряжённая матрица.*

Доказательство. В силу (1.8) и вещественности Ω_{0k} ($k \in \overline{0,\,3}$) матрица A является самосопряжённой. Докажем её положительность.

Пусть $\|\cdot\|$ — норма в $M_8(\mathbb{C})$, порождённая скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ в $\mathbb{C}^8$. Рассмотрим вспомогательную (самосопряжённую) матрицу $\widehat{A} := \sum_{k=1}^{3} \Omega_{0k}\Theta^0\Theta^k$. В силу антикоммутационных соотношений (1.6)

$$\widehat{A}^2 = \Big(\sum_{k=1}^{3} \Omega_{0k}^2\Big) E_8,$$

следовательно,

$$\|\widehat{A}\| = \Big(\sum_{k=1}^{3} \Omega_{0k}^2\Big)^{1/2}. \tag{1.33}$$

Отсюда для произвольного x из $\mathbb{C}^8$

$$(Ax, x) = \Omega_{00}(x,x) + (\widehat{A}x, x) \geq \Omega_{00}(x,x) - \|\widehat{A}\|(x,x) = c(x,x),$$

где $c := \Omega_{00} - \|\widehat{A}\|$. Согласно (1.32) и (1.33) $c > 0$. Положительность матрицы A доказана. $\square$

1.6. Матрица B.

Рассмотрим матрицу

$$B := \begin{bmatrix} 0 & \varphi^{(2)}\big(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\big) \\ \varphi^{(2)}\big(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\big) & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидны следующие соотношения (см. также предложение 1):

$$\overline{B} = B, \quad B^T = B^{-1} = -B. \tag{1.34}$$

При помощи прямой проверки с использованием (1.34) и предложения 1 нетрудно убедиться в справедливости следующих свойств матрицы B.

Предложение 5. Справедливы следующие утверждения.

(a) Матрица B удовлетворяет соотношениям:

$$B\overline{\Theta}^k = \Theta^k B, \quad \overline{\Theta}^k B = B\Theta^k \ (k \in \overline{0,\,3}).$$

(b) Матрица B коммутирует с произвольной матрицей из $\mathcal{C}(M_2(\mathbb{C}))$ и антикоммутирует с произвольной матрицей из $\mathcal{A}(M_2(\mathbb{C}))$.

2. Лоренц–инвариантность матриц Θ^k

Здесь мы рассмотрим связь между матрицами Θ^k и матрицами

$$\widehat{\Theta}^k := \sum_{i=0}^{4} \Omega_{ki}\Theta^i, \tag{2.1}$$

где Ω — матрица из группы Лоренца L.

Из (1.30) и соотношений Дирака для матриц Θ^k непосредственно следует, что матрицы $\widehat{\Theta}^k$ также удовлетворяют соотношениям Дирака. Действительно,

$$\widehat{\Theta}^i\widehat{\Theta}^j + \widehat{\Theta}^j\widehat{\Theta}^i = \sum_{k,\,p\in\,\overline{0,\,3}} \Omega_{ik}\Omega_{jp}\left(\Theta^k\Theta^p + \Theta^p\Theta^k\right) = 2\sum_{k,\,p\in\,\overline{0,\,3}} \Omega_{ik}g_{kp}\Omega_{jp} = 2g_{ij}E\,.$$

Согласно рассуждениям п. 1.3 существует обратимая матрица Λ из $M_8(\mathbb{C})$, сплетающая $\widehat{\Theta}^k$ и Θ^k (равенство (1.22)). Как явствует из предложения 2, матрица Λ задана с точностью до обратимой матрицы P из $\mathcal{C}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$. Далее будут рассмотрены условия, позволяющие выбирать матрицу Λ с точностью до знака, как и в классической теории матриц Дирака. Вначале рассмотрим вспомогательные рассуждения. Зафиксируем $\Omega \in L$; под $\widehat{\Theta}^k$ далее будем подразумевать матрицы (2.1), а под Λ — некоторую матрицу, удовлетворяющую (1.22) для данных матриц $\widehat{\Theta}^k$.

Лемма 4. *Справедливы следующие утверждения.*

(a) *Если* $P \in \mathcal{C}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$, *то* $\Lambda P\Lambda^{-1} \in \mathcal{C}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$.

(b) *Если* $P \in \mathcal{A}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$, *то* $\Lambda P\Lambda^{-1} \in \mathcal{A}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$.

Доказательство. (**a**). В силу того, что матрица P коммутирует с матрицами Θ^k, то, согласно (2.1), она коммутирует также и с матрицами $\widehat{\Theta}^k$. Поэтому выполняется следующая цепочка:

$$\Theta^k \Lambda P \Lambda^{-1} = \Lambda \widehat{\Theta}^k P \Lambda^{-1} = \Lambda P \widehat{\Theta}^k \Lambda^{-1} = \Lambda P \Lambda^{-1} \Theta^k.$$

(**b**). Доказательство аналогично. □

Лемма 5. *Пусть $R \in \mathcal{A}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$, а матрица Λ дополнительно удовлетворяет условиям:*

$$\Lambda^* = \Theta^0 \Lambda^{-1} \Theta^0, \quad \overline{\Lambda} = B^{-1} \Lambda B, \tag{2.2}$$

где B — матрица из п. 1.6. Тогда справедливы следующие утверждения.

(a) *Если R — вещественная матрица, то и $\Lambda R \Lambda^{-1}$ вещественна.*

(b) *Если R — симметрическая матрица, то и $\Lambda R \Lambda^{-1}$ симметрична.*

(c) *Если R — антисимметрическая матрица, то и $\Lambda R \Lambda^{-1}$ антисимметрична.*

Доказательство. (**a**). В силу равенств (2.2), п. (b) предложения 5 и п. (b) леммы 4 получим:

$$\overline{\Lambda R \Lambda^{-1}} = \overline{\Lambda}\,\overline{R}\,\overline{\Lambda}^{-1} = B^{-1} \Lambda B R B^{-1} \Lambda^{-1} B = -B^{-1} \Lambda R \Lambda^{-1} B = B^{-1} B \Lambda R \Lambda^{-1} = \Lambda R \Lambda^{-1}.$$

(**b**). В силу тех же, что и в п. (a), условий, а также равенств $\overline{\Theta^0} = (\Theta^0)^{-1} = \Theta^0$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
&(\Lambda R \Lambda^{-1})^T = (\Lambda^T)^{-1} R^T \Lambda^T = (\overline{\Lambda^*})^{-1} R \overline{\Lambda^*} = (\overline{\Theta^0 \Lambda^{-1} \Theta^0})^{-1} R (\overline{\Theta^0 \Lambda^{-1} \Theta^0}) = \\
&= \overline{\Theta^0}\,\overline{\Lambda}\,\overline{\Theta^0}\,R\,\overline{\Theta^0}\,\overline{\Lambda}^{-1}\,\overline{\Theta^0} = \Theta^0 B^{-1} \Lambda B \Theta^0 R \Theta^0 B^{-1} \Lambda^{-1} B \Theta^0 = \\
&= -\Theta^0 B^{-1} \Lambda B R (\Theta^0)^2 B^{-1} \Lambda^{-1} B \Theta^0 = \Theta^0 B^{-1} \Lambda R B B^{-1} \Lambda^{-1} B \Theta^0 = \\
&= -\Theta^0 B^{-1} B \Lambda R \Lambda^{-1} \Theta^0 = (\Theta^0)^2 \Lambda R \Lambda^{-1} = \Lambda R \Lambda^{-1}.
\end{aligned}$$

(**c**). Доказывается аналогично п. (b). □

Рассмотрим матрицы $R_- := \mathcal{A}\big(\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]\big)$, $R_+ := \mathcal{A}\big(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\big)$. Под B опять подразумевается матрица из п. 1.6.

Теорема 2. *Пусть Ω — ортохронная матрица. Существуют ровно две матрицы Λ, отличающиеся знаком и удовлетворяющие равенствам*

$$\sum_{i=0}^{4} \Omega_{ki} \Theta^i = \Lambda^{-1} \Theta^k \Lambda\,; \tag{2.3}$$

$$\Lambda^* = \Theta^0 \Lambda^{-1} \Theta^0\,; \tag{2.4}$$

$$\overline{\Lambda} = B^{-1} \Lambda B\,; \tag{2.5}$$

$$\Lambda R_- = R_- \Lambda\,; \tag{2.6}$$

$$\Lambda R_+ = R_+ \Lambda\,. \tag{2.7}$$

Доказательство.

I. Пусть матрица Λ удовлетворяет (2.3). Покажем, что матрица $P := \Theta^0\Lambda^*\Theta^0\Lambda$ коммутирует с матрицами Θ^k. Заметим, что из (1.9) и (2.1) следуют равенства $\Theta^0(\widehat{\Theta}^k)^* = \widehat{\Theta}^k\Theta^0$ $(k \in \overline{0,\,3})$; поэтому, применяя (2.3), получим цепочку:

$$\begin{aligned} P\Theta^k =&\Theta^0\Lambda^*\Theta^0\Lambda\Theta^k = \Theta^0\Lambda^*\Theta^0\Theta^k\Lambda = \Theta^0\Lambda^*(\widehat{\Theta}^k)^*\Theta^0\Lambda = \\ &= \Theta^0(\Theta^k)^*\Lambda^*\Theta^0\Lambda = \Theta^k\Theta^0\Lambda^*\Theta^0\Lambda = \Theta^k P\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Покажем теперь, что матрица P является *положительной.* Действительно, согласно (2.8)

$$\Lambda^*\Lambda = \Theta^0 P\Lambda^{-1}\Theta^0\Lambda = P\Theta^0\Lambda^{-1}\Theta^0\Lambda = P\Theta^0\widehat{\Theta}^0\,. \tag{2.9}$$

Матрица $\Theta^0\widehat{\Theta}^0 = \sum_{k=0}^{3}\Omega_{0k}\Theta^0\Theta^k$ является положительной согласно лемме 3. Положительность матрицы P следует теперь из условия коммутирования матриц P и $\Theta^0\widehat{\Theta}^0$, равенства (2.9) и положительности $\Theta^0\widehat{\Theta}^0$.

Применяя замечание 1 и теорему 1 к матрице P, получим существование такой *положительной* матрицы A из $M_2(\mathbb{C})$, что $P = \mathcal{C}(A)$. При этом, согласно замечанию 1 выполнено равенство $P^{-1/2} = \mathcal{C}(A^{-1/2})$ (т.е. матрица $P^{-1/2}$ коммутирует со всеми Θ^k). Положим $P_1 := \Lambda P^{-1/2}\Lambda^{-1}$ и $\Lambda_1 := P_1\Lambda$. Согласно лемме 4 матрица P_1 коммутирует со всеми Θ^k, поэтому по предложению 2 матрица Λ_1 удовлетворяет (2.3). Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \Theta^0\Lambda_1^*\Theta^0\Lambda_1 &= \Theta^0\Lambda^*P_1^*\Theta^0P_1\Lambda = \Theta^0\Lambda^*(\Lambda^*)^{-1}P^{-1/2}\Lambda^*\Theta^0\Lambda P^{-1/2}\Lambda^{-1}\Lambda \\ &= \Theta^0P^{-1/2}\Lambda^*\Theta^0\Lambda P^{-1/2} = \Theta^0P^{-1/2}P^*\Theta^0P^{-1/2} = E\,, \end{aligned}$$

т.е. матрица Λ_1 удовлетворяет также и (2.4).

Пусть теперь Λ_1 и Λ_2 — некоторые матрицы, удовлетворяющие (2.3) и (2.4). Тогда

$$\begin{aligned} (\Lambda_2\Lambda_1^{-1})^* &= (\Lambda_1^*)^{-1}\Lambda_2^* = (\Theta^0\Lambda_1^{-1}\Theta^0)^{-1}(\Theta^0\Lambda_2^{-1}\Theta^0) = \Theta^0\Lambda_2\Lambda_1^{-1}\Theta^0 = \\ &= \Theta^0(\Lambda_2\Lambda_1^{-1})^{-1}\Theta^0 = (\Lambda_2\Lambda_1^{-1})^{-1}(\Theta^0)^2 = (\Lambda_2\Lambda_1^{-1})^{-1}\,, \end{aligned}$$

таким образом, матрица $\Lambda_2\Lambda_1^{-1}$ унитарна, что согласно замечанию 1 означает, что $\Lambda_2\Lambda_1^{-1}$ лежит в $\mathcal{C}\big(U(2)\big)$ ($U(n)$ — группа унитарных матриц размерности n).

Обратно, легко проверить, что если матрица Λ удовлетворяет (2.3) и (2.4), то для произвольной матрицы V из $\mathcal{C}\big(U(2)\big)$ матрица $V\Lambda$ также удовлетворяет (2.3) и (2.4). Таким образом, показано, что *существуют* матрицы Λ, удовлетворяющие (2.3) и (2.4), при этом

$$\begin{aligned} &\Lambda_1 \text{ \textit{и} } \Lambda_2 \text{ \textit{удовлетворяют} } (2.3) \text{ \textit{и} } (2.4) \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\Lambda_1 \text{ \textit{удовлетворяет} } (2.3) \text{ \textit{и} } (2.4)\;) \;\wedge\; \big(\exists\, V \in \mathcal{C}\big(U(2)\big) \quad \Lambda_2 = V\Lambda_1\big)\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

II. Заметим, что для матрицы Λ, удовлетворяющей (2.3) и (2.4) выполняется равенство

$$\Lambda^*\Lambda = \Theta^0\Lambda^{-1}\Theta^0\Lambda = \Theta^0\widehat{\Theta}^0\,. \tag{2.11}$$

Рассмотрим матрицу $V := B\overline{\Lambda}B\Lambda^{-1}$. Покажем, что матрица V коммутирует с матрицами Θ^k. Прежде заметим, что в силу (2.1) и п. (a) предложения 5 справедливы соотношения

$$B\overline{\widehat{\Theta}^k} = \widehat{\Theta}^k B, \quad \overline{\widehat{\Theta}^k} B = B\widehat{\Theta}^k \ (k \in \overline{0,\,3}). \tag{2.12}$$

Применяя (2.3), (2.4), предложение 5 и (2.12), получим:

$$V\Theta^k = B\overline{\Lambda}B\Lambda^{-1}\Theta^k = B\overline{\Lambda}B\widehat{\Theta}^k\Lambda^{-1} = B\overline{\Lambda}\overline{\widehat{\Theta}^k}B\Lambda^{-1} = B\overline{\Theta^k\Lambda}B\Lambda^{-1} = \Theta^k B\overline{\Lambda}B\Lambda^{-1} = \Theta^k V\,.$$

Покажем теперь, что V является *унитарной* матрицей. Действительно, используя (2.11) и уже указанные свойства B, будем иметь:

$$V^*V = (B\overline{\Lambda}B\Lambda^{-1})^* B\overline{\Lambda}B\Lambda^{-1} = (\Lambda^*)^{-1}B^*\overline{\Lambda^*}B^*B\overline{\Lambda}B\Lambda^{-1} = -(\Lambda^*)^{-1}B(\overline{\Lambda^*\Lambda})B\Lambda^{-1} =$$
$$= -(\Lambda^*)^{-1}B\Theta^0\widehat{\Theta}^0B\Lambda^{-1} = -(\Lambda^*)^{-1}\overline{\Theta^0}B^2\overline{\widehat{\Theta}^0}\Lambda^{-1} = (\Lambda^*)^{-1}(\Lambda^*\Lambda)\Lambda^{-1} = E\,.$$

Согласно предложению 4 существует *унитарное* решение V_1 уравнения $\overline{V_1}V_1^{-1} = V$, лежащее в $\mathcal{C}\big(M_2(\mathbb{C})\big)$, т.е. $V_1 \in \mathcal{C}\big(U(2)\big)$. Положим $\Lambda_1 := iV_1\Lambda$. Согласно (2.10), Λ_1 удовлетворяет (2.3) и (2.4). При этом, согласно п. (b) предложения 5

$$B\overline{\Lambda_1}\,B\Lambda_1^{-1} = -B\overline{V_1}\,\overline{\Lambda}B\Lambda^{-1}V_1^{-1} = -\overline{V_1}B\overline{\Lambda}B\Lambda^{-1}V_1^{-1} = -\overline{V_1}\,VV_1^{-1} = -E,$$

откуда, в силу (1.34), следует, что Λ_1 удовлетворяет (2.5).

Пусть теперь Λ_1 и Λ_2 — некоторые матрицы, удовлетворяющие (2.3) — (2.5). Согласно (2.10) $V := \Lambda_2\Lambda_1^{-1} \in \mathcal{C}\big(U(2)\big)$, при этом (см. п. (b) предложения 5)

$$(\overline{\Lambda_2\Lambda_1^{-1}}) = \overline{\Lambda_2}\,(\overline{\Lambda_1})^{-1} = B^{-1}\Lambda_2BB^{-1}\Lambda_1^{-1}B = B^{-1}\Lambda_2\Lambda_1^{-1}B = B^{-1}B\Lambda_2\Lambda_1^{-1} = \Lambda_2\Lambda_1^{-1}\,,$$

т.е. $V \in \mathcal{C}\big(O(2)\big)$ ($O(n)$ — группа вещественных ортогональных матриц порядка n). Нетрудно убедиться и в обратном: если домножить слева матрицу Λ, удовлетворяющую (2.3) — (2.5), на произвольную матрицу из $\mathcal{C}\big(O(2)\big)$, то полученная матрица тоже будет удовлетворять (2.3) — (2.5).

Таким образом, мы приходим к заключению: *существуют* матрицы Λ, удовлетворяющие (2.3) — (2.5), при этом

$$\begin{aligned}&\Lambda_1 \text{ и } \Lambda_2 \textit{ удовлетворяют } (2.3)-(2.5) \ \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (\Lambda_1 \textit{ удовлетворяет } (2.3)-(2.5)\ ) \ \wedge\ (\exists V \in \mathcal{C}\big(O(2)\big) \quad \Lambda_2 = V\Lambda_1)\,.\end{aligned} \tag{2.13}$$

III. Отметим следующие факты. Ортогональная группа $O(n)$ состоит из двух непересекающихся частей: (подгруппы) $O_+(n)$, состоящей из матриц с детерминантом 1, и $O_-(n)$, состоящей из матриц с детерминантом -1. В связи с этим очевидны соотношения:

$$O_\pm(n)O_\pm(n) \subseteq O_+(n),\ O_\pm(n)O_\mp(n) \subseteq O_-(n),\ O_\mp(n)O_\pm(n) \subseteq O_-(n). \tag{2.14}$$

В случае $n = 2$ подгруппа $O_+(2)$ состоит из матриц вида

$$u(t) := \begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix},$$

а множество $O_-(2)$ — из матриц вида

$$\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-\cos t & \sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix}\ (t\in[0,2\pi)).$$

При этом можно непосредственно убедиться в справедливости равенства

$$\mathcal{C}\big(u(t)\big)R_-\,\mathcal{C}\big(u(t)\big)^{-1}R_- = \mathcal{C}\big(u(2t)\big)\ (t\in[0,2\pi)). \tag{2.15}$$

Пусть теперь матрица Λ удовлетворяет (2.3) — (2.5).

В силу п. (b) леммы 4 и леммы 5 заключаем, что $\Lambda R_-\,\Lambda^{-1}$ — *симметрическая* матрица из $\mathcal{A}\big(O(2)\big)$, откуда делаем вывод, что

$$\Lambda R_-\,\Lambda^{-1}\in\mathcal{A}\big(O_-(2)\big). \tag{2.16}$$

Из (1.20), (2.14) и (2.16) следует, что

$$\Lambda R_-\,\Lambda^{-1}R_-\in\mathcal{C}\big(O_+(2)\big). \tag{2.17}$$

Включение (2.17) означает существование такого числа t_0 из $[0,2\pi)$, что

$$\Lambda R_-\,\Lambda^{-1}R_- = \mathcal{C}\big(u(t_0)\big). \tag{2.18}$$

Положим $V_1 := \mathcal{C}\big(u(t_0/2)\big)$, $\Lambda_1 := V_1\Lambda$. Матрица Λ_1 согласно (2.13) также будет удовлетворять (2.3) — (2.5), при этом из (2.15), (2.18) и равенства $R_-^2 = E$ следует цепочка

$$\begin{aligned}\Lambda_1 R_-\,\Lambda_1^{-1}R_- &= V_1\Lambda R_-\,\Lambda^{-1}V_1^{-1}R_- = V_1(\Lambda R_-\,\Lambda^{-1}R_-)R_-V_1^{-1}R_- =\\ &= (\Lambda R_-\,\Lambda^{-1}R_-)V_1R_-V_1^{-1}R_- = E,\end{aligned}$$

т.е. Λ_1 удовлетворяет и равенству (2.6).

Пусть $V\in\mathcal{C}\big(O(2)\big)$. Непосредственно проверяется следующее утверждение:

$$R_-\,V = VR_- \Leftrightarrow V \text{ — \textit{одна из матриц} } \pm E_8,\ \pm\mathcal{C}\big(\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right]\big). \tag{2.19}$$

Из (2.19) немедленно следует утверждение: *существуют* матрицы Λ, удовлетворяющие (2.3) — (2.6), при этом

$$\begin{aligned}&\Lambda_1 \text{ \textit{и} } \Lambda_2 \text{ \textit{удовлетворяют} (2.3) — (2.6)} \Leftrightarrow (\Lambda_1 \text{ \textit{удовлетворяет} (2.3) — (2.6)}) \wedge\\ &\wedge \Big(\Lambda_2 = V\Lambda_1,\ \text{\textit{где} } V \text{ — \textit{одна из матриц} } \pm E_8,\ \pm\mathcal{C}\big(\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right]\big)\Big).\end{aligned} \tag{2.20}$$

IV. Пусть матрица Λ удовлетворяет (2.3) — (2.6).

В силу п. (c) леммы 4 и леммы 5 заключаем, что $\Lambda R_+\,\Lambda^{-1}$ — *антисимметрическая* матрица из $\mathcal{A}\big(O(2)\big)$, откуда делаем вывод, что

$$\Lambda R_+\,\Lambda^{-1} = \pm R_+\,,$$

т.е. (отметим, что $R_+^2 = -E$)

$$\Lambda R_+ = \pm R_+ \Lambda. \tag{2.21}$$

Непосредственно проверяется, что

$$\textit{матрицы } R_+ \textit{ и } \mathcal{C}\big(\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right]\big) \textit{ антикоммутируют.} \tag{2.22}$$

Положим $V := \mathcal{C}\big(\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right]\big)$ и определим $\Lambda_1 := \Lambda$, если в формуле (2.21) — знак "+ и $\Lambda_1 := V\Lambda$, если в (2.21) — знак "$-$". Матрица Λ_1 в силу (2.20) также будет удовлетворять (2.3) — (2.6), при этом в случае "$-$" согласно (2.22) имеем:

$$\Lambda_1 R_+ - R_+\Lambda_1 = V\Lambda R_+ - R_+ V\Lambda = V\Lambda R_+ - R_+ V\Lambda = -(VR_+ + R_+V)\Lambda = 0,$$

т.е. Λ_1 удовлетворяет и равенству (2.7).

Пусть теперь Λ_1 и Λ_2 — некоторые матрицы, удовлетворяющие (2.3) — (2.7). Из (2.20) и (2.22) немедленно следует, что $\Lambda_2\Lambda_1^{-1} = \pm E$. Доказательство теоремы завершается на том очевидном факте, что если матрица Λ удовлетворяет соотношениям (2.3) — (2.7), то и противоположная ей матрица также будет удовлетворять этим соотношениям. □

Следствие 2. *Пусть Ω — ортохронная матрица. Существуют ровно две матрицы Λ, отличающиеся знаком и удовлетворяющие равенствам*

$$\sum_{i=0}^{4} \Omega_{ki}\Theta_i = \Lambda^{-1}\Theta_k\Lambda\,; \tag{2.23}$$

$$\Lambda^* = -\Theta_0\Lambda^{-1}\Theta_0\,; \tag{2.24}$$

$$\overline{\Lambda} = B^{-1}\Lambda B\,; \tag{2.25}$$

$$\Lambda R_- = R_-\,\Lambda\,; \tag{2.26}$$

$$\Lambda R_+ = R_+\Lambda\,. \tag{2.27}$$

Доказательство. Вытекает из теоремы 2 и связи матриц Θ^k и Θ_k (см. (1.5)). При этом в соотношениях (2.23) — (2.27) участвуют те же матрицы Λ, что и в соотношениях (2.3) — (2.7). □

Замечание 3. Из соотношений (2.23) — (2.27) элементарно следует, что множество всех матриц Λ, удовлетворяющих соотношениям (2.23) — (2.27), когда Ω пробегает ортохронную группу $L_0^{\uparrow}$, *образует группу*, которую обозначим $\mathfrak{L}_0^{\uparrow}$. При этом группа $\mathfrak{L}_0^{\uparrow}$ *гомоморфна* группе $L_0^{\uparrow}$; пусть $\chi_0^{\uparrow}$ — соответствующий гомоморфизм $\mathfrak{L}_0^{\uparrow}$ на $L_0^{\uparrow}$, тогда ядро гомоморфизма $\chi_0^{\uparrow}$ есть $\ker\chi_0^{\uparrow} = \{-E, E\}$.

3. Вид матрицы Λ в случае поворотов и отражений

3.1. Повороты.

Обозначим через $\Omega^{\alpha\beta}(\varphi)$ матрицу поворота на угол φ в плоскости $x^\alpha x^\beta$ пространства Минковского M ($\alpha, \beta \in \overline{0,\,3}$; *здесь и далее* $\alpha \neq \beta$). Когда $\alpha, \beta \in \overline{1,\,3}$ — это обычный поворот на угол φ, в противном случае — гиперболический поворот, т.е.

$$\Omega^{12}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \Omega^{10}(\varphi) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \textit{и т.д.}$$

Нетрудно видеть, что существует предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big(E - \Omega^{\alpha\beta}(\varepsilon)\big)$, который мы обозначим через $Z^{\alpha\beta}$. Матрица $Z^{\alpha\beta}$ называется *инфинитезимальной* матрицей поворота в плоскости $x^\alpha x^\beta$ (см. [4, 3]). При этом компоненты матрицы $Z^{\alpha\beta}$ выражаются через компоненты метрического тензора g следующим образом:

$$Z^{\alpha\beta}_{ij} = \delta_{i\alpha} g_{j\beta} - \delta_{i\beta} g_{j\alpha} \ (i, j \in \overline{0, 3}), \tag{3.1}$$

откуда непосредственно видно, что $Z^{\beta\alpha} = -Z^{\alpha\beta}$ (формула (3.1) означает следующее: при $\alpha < \beta$ минорная матрица, стоящая на пересечении строк и столбцов с номерами α и β в $Z^{\alpha\beta}$ имеет вид $\left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, если $\alpha > 0$ и $\left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, если $\alpha = 0$; остальные компоненты матрицы $Z^{\alpha\beta}$ — нулевые).

Предложение 6. Матрицы $Z^{\alpha\beta}$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=0}^{3} Z^{\alpha\beta}_{ki}\Theta_i = \delta_{k\beta}\Theta_\alpha^{-1} - \delta_{k\alpha}\Theta_\beta^{-1} \quad (\alpha, \beta \in \overline{0,\,3})$$

(δ_{ij} — символ Кронекера).

Доказательство. Непосредственно из определения метрического тензора g и свойств матриц Θ_k ($\Theta_k^{-1} = -g_{kk}\Theta_k$) получаем цепочку:

$$\sum_{i=0}^{3} Z^{\alpha\beta}_{ki}\Theta_i = \sum_{i=0}^{3}(\delta_{k\alpha} g_{i\beta} - \delta_{k\beta} g_{i\alpha})\Theta_i = \delta_{k\alpha}\sum_{i=0}^{3} g_{i\beta}\Theta_i - \delta_{k\beta}\sum_{i=0}^{3} g_{i\alpha}\Theta_i =$$
$$= \delta_{k\alpha} g_{\beta\beta}\Theta_\beta - \delta_{k\beta} g_{\alpha\alpha}\Theta_\alpha = \delta_{k\beta}\Theta_\alpha^{-1} - \delta_{k\alpha}\Theta_\beta^{-1}.$$

□

Рассмотрим матрицы

$$\kappa^{\alpha\beta} := \Theta_\alpha^{-1}\Theta_\beta^{-1} \quad (\alpha, \beta \in \overline{0,\,3}). \tag{3.2}$$

Пусть $[A, B] := AB - BA$ — *коммутатор* матриц A и B.

Предложение 7. Матрицы $\kappa^{\alpha\beta}$ удовлетворяют следующим соотношениям ($\alpha, \beta \in \overline{0,\, 3}$):

$$\kappa^{\beta\alpha} = -\kappa^{\alpha\beta}\,; \tag{3.3}$$

$$(\kappa^{\alpha\beta})^2 = \begin{cases} -E & , \ \alpha, \beta \in \overline{1,\, 3} \\ E & , \ (\alpha = 0) \vee (\beta = 0) \end{cases}\;; \tag{3.4}$$

$$[\frac{1}{2}\,\kappa^{\alpha\beta}, \Theta_k] = \delta_{k\beta}\Theta_\alpha^{-1} - \delta_{k\alpha}\Theta_\beta^{-1} \quad (k \in \overline{0,3})\,. \tag{3.5}$$

Доказательство. Равенства (3.3), (3.4) тривиально вытекают из антикоммутационных соотношений для матриц Θ^k (см. (1.5), (1.6)). Докажем равенства (3.5). Из тех же антикоммутационных соотношений и очевидного равенства $g_{ii}g_{ik} = \delta_{ki}$ получим:

$$[\frac{1}{2}\,\kappa^{\alpha\beta}, \Theta_k] = \frac{1}{2}\,(\Theta_\alpha^{-1}\Theta_\beta^{-1}\Theta_k - \Theta_k\Theta_\alpha^{-1}\Theta_\beta^{-1}) = \frac{1}{2}\,(-g_{\alpha\alpha})(-g_{\beta\beta})(\Theta_\alpha\Theta_\beta\Theta_k - \Theta_k\Theta_\alpha\Theta_\beta) =$$
$$= \frac{1}{2}\,g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}\big(\Theta_\alpha(-2g_{\beta k} - \Theta_k\Theta_\beta) - \Theta_k\Theta_\alpha\Theta_\beta\big) =$$
$$= \frac{1}{2}\,g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}\big(-2g_{\beta k}\Theta_\alpha - (-2g_{\alpha k} - \Theta_k\Theta_\alpha)\Theta_\beta - \Theta_k\Theta_\alpha\Theta_\beta\big) =$$
$$= \frac{1}{2}\,g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}\,(2g_{\alpha k}\Theta_\beta - 2g_{\beta k}\Theta_\alpha) = \delta_{k\beta}\Theta_\alpha^{-1} - \delta_{k\alpha}\Theta_\beta^{-1}\,.$$

□

Рассмотрим матрицу

$$\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi) := \begin{cases} \cos\frac{\varphi}{2}\,E + \sin\frac{\varphi}{2}\,\kappa^{\alpha\beta} & , \ \alpha, \beta \in \overline{1,\, 3} \\ \operatorname{ch}\frac{\varphi}{2}\,E + \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}\,\kappa^{\alpha\beta} & , \ (\alpha = 0) \vee (\beta = 0) \end{cases} \quad (\varphi \in \mathbb{R}). \tag{3.6}$$

Теорема 3. *Матрицы $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$ обладают следующими свойствами:*

$$\textit{функция} \quad \varphi \to \Lambda^{\alpha\beta}(\varphi) \qquad \textit{непрерывна}; \tag{3.7}$$
$$\Lambda^{\alpha\beta}(0) = E; \tag{3.8}$$
$$\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi_1 + \varphi_2) = \Lambda^{\alpha\beta}(\varphi_1)\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi_2) \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}); \tag{3.9}$$
$$\chi_0^{\uparrow}\big(\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)\big) = \Omega^{\alpha\beta}(\varphi) \quad (\varphi \in \mathbb{R}). \tag{3.10}$$

Доказательство. Свойство (3.7) и равенство (3.8) очевидны. Равенство (3.9) элементарно следует из (3.4) и свойств круговых и гиперболических функций.

Соотношение (3.10) также непосредственно проверяется: используются свойства круговых и гиперболических функций, антикоммутационные свойства матриц Θ_k, а также соотношения между матрицами B, R_-, R_+ и Θ_k (заметим, что (3.10) есть краткое выражение того, что матрица $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$ удовлетворяет соотношениям (2.23) — (2.27) при $\Omega = \Omega^{\alpha\beta}(\varphi)$, см. замечание 3). Для иллюстрации проведём доказательство равенства (2.23) для частного случая $k = \alpha$, $\alpha \in \overline{1,3}\,$.

Пусть $\widehat{\Theta}_k := \sum_{i=0}^{3} \Omega_{ki}^{\alpha\beta}(\varphi)\Theta_i$. Замечая, что $\Theta_i^{-1} = \Theta_i$, $\Theta_i^{-1}\Theta_j^{-1}\Theta_i = -\Theta_j$ для $i, j \in \overline{1,3}$, $i \neq j$, получим цепочку:

$$\begin{aligned}
&\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)\widehat{\Theta}_\alpha = (\cos\frac{\varphi}{2}\,E + \sin\frac{\varphi}{2}\,\Theta_\alpha^{-1}\Theta_\beta^{-1})(\cos\varphi\,\Theta_\alpha + \sin\varphi\,\Theta_\beta) = \\
&= \cos\frac{\varphi}{2}\,\cos\varphi\,\Theta_\alpha + \sin\frac{\varphi}{2}\,\cos\varphi\,\Theta_\alpha^{-1}\Theta_\beta^{-1}\Theta_\alpha + \cos\frac{\varphi}{2}\,\sin\varphi\,\Theta_\beta + \sin\frac{\varphi}{2}\,\sin\varphi\,\Theta_\alpha^{-1} = \\
&= \big(\cos\frac{\varphi}{2}\,\cos\varphi + \sin\frac{\varphi}{2}\,\sin\varphi\big)\Theta_\alpha + \big(\cos\frac{\varphi}{2}\,\sin\varphi - \sin\frac{\varphi}{2}\,\cos\varphi\big)\Theta_\beta = \\
&= \cos\big(\varphi - \frac{\varphi}{2}\big)\Theta_\alpha + \sin\big(\varphi - \frac{\varphi}{2}\big)\Theta_\beta = \Theta_\alpha\big(\cos\frac{\varphi}{2}\,E + \sin\frac{\varphi}{2}\,\Theta_\alpha^{-1}\Theta_\beta^{-1}\big) = \Theta_\alpha\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Заметим, что при любом φ матрица $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$ обратима, и $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)^{-1} = \Lambda^{\alpha\beta}(-\varphi)$ в силу (3.9). □

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 4. *Если матрицы* $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$ $(\varphi \in \mathbb{R})$ *из* $M_8(\mathbb{C})$ *удовлетворяют* (3.7) – (3.10) *теоремы 3, то* $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$ *есть матрица вида* (3.6).

Доказательство. Как известно, если отображение $\varphi \to \Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$ непрерывно и удовлетворяет (3.8), (3.9), то оно является *аналитическим* (см., например, [5, Гл. III, § 3][2]). Существует инфинитезимальная матрица

$$K^{\alpha\beta} := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\,\big(\Lambda^{\alpha\beta}(\varepsilon) - E\big),$$

при этом $\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi)$ выражается через $K^{\alpha\beta}$ экспоненциально:

$$\Lambda^{\alpha\beta}(\varphi) = e^{\varphi K^{\alpha\beta}}\,. \tag{3.11}$$

Далее, с точностью до $o(\varepsilon)$ запишем:

$$\Omega^{\alpha\beta}(\varepsilon) \approx E - \varepsilon Z^{\alpha\beta}, \quad \Lambda^{\alpha\beta}(\varepsilon) \approx E + \varepsilon K^{\alpha\beta}, \quad \Lambda^{\alpha\beta}(\varepsilon)^{-1} \approx E - \varepsilon K^{\alpha\beta}\,,$$

откуда получим

$$\Lambda^{\alpha\beta}(\varepsilon)^{-1}\Theta_k\Lambda^{\alpha\beta}(\varepsilon) \approx (E - \varepsilon K^{\alpha\beta})\Theta_k(E + \varepsilon K^{\alpha\beta}) \approx \Theta_k - \varepsilon[K^{\alpha\beta}, \Theta_k]; \tag{3.12}$$

$$\sum_{i=0}^{3}\Omega_{ki}^{\alpha\beta}(\varepsilon)\Theta_i \approx \sum_{i=0}^{3}(\delta_{ki} - \varepsilon Z_{ki}^{\alpha\beta})\Theta_i = \Theta_k - \varepsilon\sum_{i=0}^{3} Z_{ki}^{\alpha\beta}\Theta_i\,. \tag{3.13}$$

Сравнивая (3.12) и (3.13), приходим к равенствам

$$[K^{\alpha\beta}, \Theta_k] = \sum_{i=0}^{3} Z_{ki}^{\alpha\beta}\Theta_i \quad (k \in \overline{0,3}). \tag{3.14}$$

[2] В [5] рассматриваются скалярные функции, однако соответствующие рассуждения легко могут быть перенесены на матричный случай.

Из (3.14), предложения 6 и равенств (3.5) предложения 7 следует, что матрица $K^{\alpha\beta}$ удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям, что и матрица $\frac{1}{2}\,\kappa^{\alpha\beta}$. Следовательно, их разность $P := K^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\kappa^{\alpha\beta}$ *коммутирует* с матрицами Θ_k.

Далее, равенства (2.24) — (2.26) для $\Lambda^{\alpha\beta}(\varepsilon)$ дают:

$$
\begin{aligned}
&E + \varepsilon\Big(\frac{1}{2}\,(\kappa^{\alpha\beta})^* + P^*\Big) \approx -\Theta_0\big(E - \varepsilon\big(\frac{1}{2}\,\kappa^{\alpha\beta} + P\big)\big)\Theta_0\,,\\
&E + \varepsilon\Big(\frac{1}{2}\,\overline{\kappa^{\alpha\beta}} + \overline{P}\,\Big) \approx B^{-1}\big(E + \varepsilon\big(\frac{1}{2}\,\kappa^{\alpha\beta} + P\big)\big)B\,,\\
&\big(E + \varepsilon\big(\frac{1}{2}\,(\kappa^{\alpha\beta}) + P\big)\big)R_- \approx R_-\big(E + \varepsilon\big(\frac{1}{2}\,\kappa^{\alpha\beta} + P\big)\big)\,,
\end{aligned}
$$

откуда, в силу равенств $(\kappa^{\alpha\beta})^* = -\Theta_0\kappa^{\alpha\beta}\Theta_0$, $\overline{\kappa^{\alpha\beta}} = B^{-1}\kappa^{\alpha\beta}B$, $\kappa^{\alpha\beta}R_- = R_-\kappa^{\alpha\beta}$, справедливость которых следует из определения (3.2) и антикоммутационных соотношений для матриц Θ_k, получаем условия на матрицу P (см. п. (a) предложения 5):

$$
\begin{aligned}
&P^* = \Theta_0 P\Theta_0 = \Theta_0^2 P = -P\,, &(3.15)\\
&\overline{P} = B^{-1}PB = B^{-1}BP = P\,, &(3.16)\\
&PR_- = R_-P\,. &(3.17)
\end{aligned}
$$

Теперь используем теорему 1. Из условий (3.15), (3.15) следует равенство $P = \mathcal{C}\big(\big[\begin{smallmatrix} 0 & r\\ -r & 0\end{smallmatrix}\big]\big)$ для некоторого $r \in \mathbb{R}$; но матрица такого вида *антикоммутирует* с R_- (так как антикоммутируют матрицы $\big[\begin{smallmatrix} 0 & r\\ -r & 0\end{smallmatrix}\big]$ и $\big[\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\big]$). Таким образом, $P = 0$, и

$$
K^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\kappa^{\alpha\beta}\,. \tag{3.18}
$$

Доказательство теоремы завершается применением равенства (3.4) к равенствам (3.18) и (3.11). □

3.2. Отражения s и t.

Из антикоммутационных соотношений для матриц Θ_k непосредственно вытекает следующий результат.

Предложение 8. Справедливы следующие утверждения.

(a) $\chi_0^{\uparrow}(\Theta_0) = s$;

(b) матрица $\Lambda := \Theta_1\Theta_2\Theta_3$ удовлетворяет (2.23) для $\Omega := t$

(т.е. пространственному отражению соответствует матрица Θ_0, а отражению времени — $\Theta_1\Theta_2\Theta_3$).

Замечание 4. Из предложения 8 следует, что группа $\mathfrak{L}$, порождённая группой $\mathfrak{L}_0^{\uparrow}$ и матрицей $\Theta_1\Theta_2\Theta_3$, гомоморфна полной группе Лоренца L; пусть χ — соответствующий гомоморфизм $\mathfrak{L}$ на L, тогда $\ker\chi = \{-E, E\}$.

Замечание 5. Из теоремы 3 и предложения 8 следует, что группа $\mathfrak{L}$ *содержится в вещественной линейной оболочке* матриц Θ_k:

$$\mathfrak{L} \subseteq Lin_{\mathbb{R}}\{\Theta_k \mid k \in \overline{0,3}\}\,.$$

Список цитируемых источников

1. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т.* Общие принципы квантовой теории поля. — Москва: Наука, 1987. — 615 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — Москва: Наука, 1984. — 600 с.
3. *Гельфанд И М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. — Москва: Наука, 1958. — 367 с.
4. *Мессиа А.* Квантовая механика. — Т. 1: Квантовая механика: Пер. с франц. — Москва: Наука, 1978. — 478 с.
5. *Наймарк М. А.* Теория представлений групп. — Москва: Наука, 1976. — 564 с.

Получена 20.11.2017