Динамические системы, 2017, том 7(35), №4, 339–350

УДК 517.9:532

Индефинитный подход к исследованеию спектральных задач с большой внутренней диссипацией энергии[1]

О. А. Андронова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: o.andronova@list.ru*

Аннотация. В статье рассмотрены спектральные проблемы, порожденные начально-краевыми задачами с внутренней диссипацией энергии. Спектр рассматриваемых задач достаточно своеобразен, его локализация зависит от интенсивности внутренней диссипации: малой, средней и большой. Отметим, что в работе исследуется наиболее сложная ситуация, когда диссипация в системе велика. В каждом случае происходит перестройка спектра, что обосновывает рассмотрение нескольких различных подходов к исследованию таких спектральных задач. Один из них — это подход, основанный на теории самосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Применение этого подхода позволяет сформулировать утверждения о полноте системы собственных элементов, доказать, что при определенных условия система образует даже $\mathcal{J}$-ортонормированный базисы и p-базисы.

Ключевые слова: компактный самосопряжённый оператор, классы компактности, характеристическое уравнение, динамика изменения собственных значений.

Application of indefinite metric in spectral problems with the strong internal dissipation of an energy

O. A. Andronova

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. We consider the spectral problem with the strong internal dissipation of an energy. The aim of consideration of this problem is a desire to trace, as spectrum mutates at different positive β and to obtain the statements about localization of the spectrum and the properties of own and joined elements. Earlier it was found out that behavior of spectrum substantially depends on intensity of internal dissipation in the system. It can be weak, middle and strong. The two methods of the spectral theory of the operator bundles and the theory of the self-adjoint operators in idefinite metric spaces can be used. Both methods confirm the results got before. They open new effects in a spectral problem and give the new properties of root elements. The first one give that the spectrum has two branches of positive eigenvalues with limit points not only in infinity, but also in zero. Eigenfunctions answering to each branch in the case of strong intensity of internal dissipation in all range of β form basis Rissa in some Hilbert spaces. By indefinite approach it was proved that chains of eigenelements and adjoint elements form $\mathcal{J}$-orthonormal basis. Furthermore, under certain conditions on the classes of compact of operators of the problem the system of root elements form p-basis.

Keywords: Hilbert space, compact self-adjoint operator, classes of compact operators, dynamics of the eigenvalues' motion.

[1]Автор благодарит проф. Н.Д. Копачевского за руководство написанием статьи.

MSC 2010: 35P05, 35P10

1. Введение

Системы, в которых энергия упорядоченного движения с течением времени убывает за счёт диссипации, переходя в другие виды энергии, например в теплоту или излучение, называются диссипативными. Они формируют важный класс задач, который в настоящее время является предметом активного исследования. Главная особенность таких задач заключается в наличии механизмов «перераспределения» и выделения энергии. Взаимодействие этих двух механизмов ведет за собой появление особых режимов в динамической системе. Рост интереса к диссипативным системам был стимулирован попыткой найти адекватные математические модели для объяснения турбулентности в жидкости, основанные на понятии аттрактора. Отметим, что исследованием аттракторов (притягивающих множеств) динамических систем занимались многие другие ученые. Упоминаем лишь монографию А. В. Бабина и М. И. Вишика (1992) [14], работу О. А. Ладыженской [19], Р. Темама (1988) [22]. Приведем авторов, которыми исследовались задачи с диссипацией на границе. Так, Дж. Лагнез в работе [20] исследовал вопрос затухания решений волнового уравнения в ограниченной области при наличии диссипации на границе. Работа [21] посвящена изучению равномерной стабилизации решений на границе области для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе. Работы И. Д. Чуешова с соавторами и его монография (см. [15] — [16]) посвящены изучению бесконечномерных диссипативных динамических систем, в частности, систем с поверхностной диссипацией энергии. Так, в [15] исследуется проблема существования конечномерного аттрактора для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе области. В [16] изучается глобальные аттракторы для уравнения Кармана с нелинейной поверхностной диссипацией.

Настоящая статья посвящена исследованию спектральных задач, порожденных начально-краевыми задачами с внутренней диссипацией энергии. Отметим, что этим исследованиям предшествовало детальное изучение эволюционных и спектральных проблем с поверхностной диссипацией энергии. Результаты исследования линейной начально-краевой задачи с поверхностной диссипацией энергии изложены в статье [3]. Далее, в работе [4] задача видоизменялась и исследовалась начально-краевая и спектральная задача при различной интенсивности внутренней диссипацией энергии. Оказалось, что при большой внутренней диссипации возможно применение нескольких подходов к ее исследованию: теории операторных пучков и теории самосопряженных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Каждый из них выявляет новые эффекты локализации спектра, уточняет и дополняет утверждения о полноте и базисности корневых элементов. Материалы данной работы отмечены в монографии Т. Я. Азизова и Н. Д. Копачевского [2] (см. параграф 2.1 «Динамика диссипативных систем»).

В работе применены методы теории пространств с индефинитной метрикой, обобщающих пространства Понтрягина на случай, когда ранг индефинитности квадратичной формы, задающей индефинитную метрику, равен бесконечности. Выдающийся вклад в развитие теории таких пространств и операторов, действующих в них, внес М.Г. Крейн и потому такие пространства названы его именем. Здесь хочется отметить монографию М.Г. Крейна, Г. Лангера, И.С. Иохвидова [18], а также другие исследования авторов, их коллег и учеников. Они отражены, в частности, в монографии Т.Я. Азизова и И.С. Иохвидова [1] и в их обзорах.

2. Спектральная задача с внутренней диссипацией энергии

Рассматривается начально-краевая задача математической физики с внутренней диссипацией энергии. Ее формулировка такова. В области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ требуется найти функцию $u = u(t, x)$, для которой выполнено уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta K \frac{\partial u}{dt} - \triangle u = f(t, x)\,(\text{в}\,\Omega), \quad \beta > 0, \tag{2.1}$$

а также граничные и начальные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0\,(\text{на}\,\Gamma), \quad u(0, x) = u^0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u^1(x)\ (\text{в}\,\Omega). \tag{2.2}$$

Далее будем считать, что $K = K^* \gg 0$ — неограниченный положительно определенный оператор, область определения которого "сравнима" с областью определения оператора $A := -\triangle$ (см. формулу (2.4) ниже). Здесь слагаемое $\beta K(\partial u/\partial t)$, $\beta > 0$, появляется вследствие наличия в динамической системе внутренней диссипации энергии; при $\beta = 0$ задача (2.1) — (2.2) является гиперболической, т. е. консервативной.

Далее изучаются нормальные движения системы, т. е. такие решения однородной задачи (2.1) — (2.2) без начальных условий, для которых $u(t, x) = exp(-\lambda t)u(x)$, $x \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{C}$, тогда для амплитудных элементов $u(x)$ возникает спектральная задача

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u - \triangle u = 0\ (\text{в}\ \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0\ (\text{ на}\ \Gamma). \tag{2.3}$$

Далее вводятся, как в работе [3], [4] гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$, $\widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma} u \cdot \overline{v}\, d\Gamma$$

и $L_2(\Gamma)$, а также порождающий оператор A гильбертовой пары $\left(\widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega); L_2(\Omega)\right)$,

$$Au := -\triangle u,\ \mathcal{D}(A) := \left\{u \in \widetilde{\mathcal{H}^1}(\Omega) :\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0\ (\text{на}\ \Gamma),\ \mathcal{R}(A) = L_2(\Omega)\right\}. \tag{2.4}$$

Отметим, что из теорем вложения и теорем о следах для областей Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$ следует, что норма в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ эквивалентна стандартной норме пространства $\mathcal{H}^1(\Omega)$, т.е. норме $\|u\|^2_{\mathcal{H}^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) \, d\Omega$.

Замечание. Оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ называют оператором гильбертовой пары $(\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega); L_2(\Omega))$, (см. [12], с. 32 - 38). По нему можно построить шкалу пространств E^α, $-\infty < \alpha < \infty$, так, что $E^0 = L_2(\Omega)$, $E^{1/2} = \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $E^{-1/2} = \left(\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)\right)^*$.

Тогда задачу (2.3) можно переписать в виде

$$L_\beta(\lambda)u := (\lambda^2 I - \lambda\beta K + A)u = 0, \tag{2.5}$$

где $L_\beta(\lambda)$ — квадратичный операторный пучок с операторными коэффициентами A и K. Здесь оператор $K = K^* \gg 0$ — неограниченный положительно определенный оператор, область определения которого "сравнима" с $\mathcal{D}(A)$, т. е. выполнено одно из условий: $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(K)$, либо $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(K)$. Отметим, что оператор A также обладает свойствами $A = A^* \gg 0$.

Спектральная задача (2.3) допускает обобщение на случай тройки пространств E, F, G и оператора следа γ, для которых справедлива абстрактная формула Грина (см. [8], [9]). Введя здесь оператор A гильбертовой пары $(F; E)$,

$$Au := Lu, \ \mathcal{D}(A) := \{u \in F : \partial u = 0 \text{ (в } G\text{)}, \mathcal{R}(L) = E\} \subset F,$$

приходим к проблеме, рассматриваемой теперь в пространстве F. Выше L и ∂ — операторы, фигурирующие в абстрактной формуле Грина
$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G$, $\forall \eta, u \in F$. Итак, далее будем рассматривать абстрактную спектральную проблему с внутренней диссипацией энергии. Её формулировка такова: требуется найти элемент $u \in \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(K) \subset F$ такой, что

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u + Au = 0 \text{ (в } E\text{)}, \quad u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(K) \subset F. \tag{2.6}$$

Так как $A \gg 0$, то число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (2.6). Отсюда следует, что эту задачу можно привести к исследованию спектральной задачи для линейного по λ операторного пучка. Именно, введем в (2.6) новый искомый элемент ζ согласно формуле $iA^{1/2}u = \lambda\zeta$. Тогда задача (2.6) будет равносильна проблеме

$$\begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \ u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(K), \ \zeta \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \ A \gg 0, \tag{2.7}$$

которая рассматривается в пространстве $E^2 := E \oplus E$.

Ранее в работе [4] были показано, что собственные значения задач (2.6), (2.7) расположены в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. При параметре внутренней диссипации $\beta = 0$ спектр задачи дискретен, расположен на мнимой оси. Было установлено (см. [5], [6]), что локализация спектра существенно зависит от уровня внутренней диссипации. В случае большой внутренней диссипации исследование сводиться к изучению сильнодемпфированного пучка операторов, т. е. происходит перестройка спектра, по сравнению со случаями малой и средней внутренней диссипации энергии. Теперь задача имеет две положительных ветви собственных значений с предельными точками не только на бесконечности, но и в нуле. Таким образом, в динамической системе имеются не только как угодно быстро затухающие апериодические нормальные движения, отвечающие собственным значениям $\lambda_k^+ \to +\infty$, $(k \to \infty)$ и множителям $\exp(-\lambda_k^+ t)$, но и как угодно медленно затухающие, отвечающие собственным значениям λ_k^- и множителям $\exp(-\lambda_k^- t)$, $\lambda_k^- \to +0\,(k \to \infty)$.

3. Случай большой интенсивности внутренней диссипации

Будем теперь считать, что выполнены все условия, приведенные в постановке задачи. Рассмотрим случай большой интенсивности внутренней диссипации энергии, т. е. $\mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(K^{1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$. Снова рассмотрим спектральную задачу

$$\mathcal{A}_\beta z = \lambda z, \quad z = (u; \zeta)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\beta), \tag{3.1}$$

$$\mathcal{A}_\beta = \begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_\beta) = \mathcal{D}(K) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2}).$$

При исследовании этой задачи при описанных выше связях областей определения, как выясняется, полезно осуществить сдвижку спектра, т. е. изучать задачу

$$\mathcal{A}_{\beta,a} z = \widetilde{\lambda} z, \quad \mathcal{A}_{\beta,a} := \mathcal{A}_\beta + a\mathcal{I}, \quad a > 0, \quad \widetilde{\lambda} := \lambda + a. \tag{3.2}$$

Лемма 1. *Оператор $\mathcal{A}_{\beta,a}$ является равномерно аккретивным, т. е. $\operatorname{Re}(\mathcal{A}_{\beta,a} z; z)_{E^2} \geq a\|z\|^2$, $z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\beta,a})$, и допускает факторизацию в следующем виде*

$$\mathcal{A}_{\beta,a} = \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta I + aK^{-1} & iK^{-1/2}A^{1/2} \\ iA^{1/2}K^{-1/2} & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Свойство (3.3) проверяется непосредственно. □

Введем в рассмотрение операторы $Q := A^{1/2}K^{-1/2}$, $Q^+ := K^{-1/2}A^{1/2}$, где $\mathcal{D}(Q^+) := \mathcal{D}(A^{1/2})$.

Лемма 2. *Операторы Q и Q^+ имеют следующие свойства: $Q \in \mathcal{L}(E)$, $Q^+ = Q^*|_{\mathcal{D}(A^{1/2})}$, $\overline{Q^+} = Q^* \in \mathcal{L}(E)$.*

Следствием лемм 1 и 2 является такое утверждение.

Утверждение 1. *Оператор $\mathcal{A}_{\beta,a}$ допускает замыкание до максимального равномерно аккретивного оператора*

$$\mathcal{A}_a := \overline{\mathcal{A}_{\beta,a}} = \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta I + aK^{-1} & iQ^* \\ iQ & aI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

заданного на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_a) := \left\{ z = (u;\zeta)^t \in E^2 : \beta K^{1/2}u + iQ^*\zeta \in \mathcal{D}(K^{1/2}) \right\}.$$

Доказательство. Как известно (см. [10], стр. 109), любой аккретивный (равномерно аккретивный) оператор допускает замыкание до максимального аккретивного (равномерно аккретивного) оператора. Из этого факта следует, во-первых, что оператор $\mathcal{A}_a$ замкнут и равномерно аккретивен, а во-вторых, он имеет ограниченный обратный оператор

$$\mathcal{A}_a^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta I + aK^{-1} & iQ^* \\ iQ & aI \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

заданный на всем пространстве E^2. Значит, область значений $\mathcal{R}(\mathcal{A}_a)$ оператора $\mathcal{A}_a$ есть все пространство E^2, т. е. $\mathcal{A}_a$ максимален. Отметим еще, что для элементов из $\mathcal{D}(\mathcal{A}_a)$ должно быть $\beta K^{1/2}u + aK^{-1/2}u + iQ^*\zeta \in \mathcal{D}(K^{1/2})$, и так как $K^{-1/2}u \in \mathcal{D}(K^{1/2})$, то выполнено свойство $\beta K^{1/2}u + iQ^*\zeta \in \mathcal{D}(K^{1/2})$. Отметим еще, что отсюда же следует свойство $u \in \mathcal{D}(K^{1/2})$. □

Лемма 3. *Матричный оператор $\mathcal{A}_a^{-1}$ допускает факторизацию в форме*

$$\mathcal{A}_a^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_Q^{-1} & -ia^{-1}B_Q^{-1}Q^* \\ -ia^{-1}QB_Q^{-1} & A_Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

где $B_Q := \beta I + aK^{-1} + a^{-1}Q^*Q, \quad A_Q := aI + Q(\beta I + aK^{-1})^{-1}Q^*$.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь формула

$$\begin{pmatrix} \beta I + aK^{-1} & iQ^* \\ iQ & aI \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_Q^{-1} & -ia^{-1}B_Q^{-1}Q^* \\ -ia^{-1}QB_Q^{-1} & A_Q^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Для ее вывода рассмотрим задачу $(\beta I + aK^{-1})u + iQ^*\zeta = u_1,\ iQu + a\zeta = \zeta_1$. Отсюда имеем:

$$u = (\beta I + aK^{-1})^{-1}(u_1 - iQ^*\zeta), \quad \zeta = a^{-1}(\zeta_1 - iQu).$$

Подставляя эти выражения в задачу выше, будем иметь

$$B_Q u = u_1 - ia^{-1}Q^*\zeta_1, \quad A_Q\zeta = -iQ(\beta I + aK^{-1})^{-1}u_1 + \zeta_1.$$

Отсюда, а также из соотношения $a^{-1}B_Q^{-1}Q^* = (\beta I + aK^{-1})^{-1}Q^*A_Q^{-1}$, которое проверяется непосредственно, следует формула (3.6). □

Опираясь на доказанные утверждения, рассмотрим спектральную задачу

$$\mathcal{A}_a z = \widetilde{\lambda} z, \quad z = (u;\zeta)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a), \quad \widetilde{\lambda} = \lambda + a, \tag{3.7}$$

порожденную задачей (3.2). Назовем ее ассоциированной с исходной спектральной задачей. Применим к ассоциированной задаче подход, основанный на теории самосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Опираясь на формулы (3.5), рассмотрим вместо (3.7) равносильную ей задачу

$$\mathcal{A}_a^{-1} z = \mu z, \quad \mu = \widetilde{\lambda}^{-1}, \quad z = (u; \zeta)^t \in E^2, \tag{3.8}$$

которую в векторно-матричной форме можно переписать в виде

$$L_{11} u + L_{12} \zeta = \mu \zeta, \quad L_{21} u + L_{22} \zeta = \mu \zeta,$$

$$\begin{aligned} L_{11} &:= K^{-1/2} B_Q^{-1} K^{-1/2}, \\ L_{12} &:= -ia^{-1} K^{-1/2} B_Q^{-1} Q^*, \\ L_{21} &:= -ia^{-1} Q B_Q^{-1} K^{-1/2}, \\ L_{22} &:= A_Q^{-1}. \end{aligned}$$

Очевидно, как оператор $\mathcal{A}_a$ из (3.4), так и обратный ему оператор $\mathcal{A}_a^{-1}$ являются $\mathcal{J}$-самосопряженными операторами в пространстве М.Г. Крейна с индефинитной метрикой $[.\,,.]$, определяемой соотношением

$$[.\,,.] = (\mathcal{J}.\,,.). \tag{3.9}$$

Напомним, что гильбертово пространство $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$ называют пространством Крейна или $\mathcal{J}$-пространством, если оно снабжено помимо исходной гильбертовой метрики, то есть скалярного произведения $(.\,,.)$, дополнительной индефинитной метрикой (3.9), где $\mathcal{J} := P^+ - P^-$, $P^\pm$ – ортопректоры на $\mathfrak{K}^\pm$, т.е. $\mathcal{J} = \mathrm{diag}(I^+, I^-)$. При этом оператор J является самосопряженным и унитарным одновременно: $\mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}$, $\mathcal{J}^2 = I$. И выполняются соотношения $(\mathcal{J}\mathcal{A}_a)^* = \mathcal{J}\mathcal{A}_a$, $(\mathcal{J}\mathcal{A}_a^{-1})^* = \mathcal{J}\mathcal{A}_a^{-1}$.

Отметим теперь свойства операторов L_{ij}. При этом будем считать, что выполнены условия $0 < K^{-1} \in \mathcal{S}_\infty(E)$, $Q \in \mathcal{S}_\infty(E) \Rightarrow 0 < Q^*Q = B \in \mathcal{S}_\infty(E)$. Тогда, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} &L_{11} = {L_{11}}^* \in \mathcal{S}_\infty(E), \quad L_{12} = -{L_{21}}^* \in \mathcal{S}_\infty(E), \\ &L_{22} = {L_{22}}^* = A_Q^{-1}, \quad 0 \ll {L_{22}}^{-1} = A_Q \in \mathcal{L}(E). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Отсюда из условия $L_{12} \in \mathcal{S}_\infty(E)$ по известной теореме Х. Лангера (см., например, [1], гл. 3, §5) получаем, что $\mathcal{J}$-самосопряженный оператор $\mathcal{A}_a^{-1}$ имеет максимальную инвариантную дуальную пару подпространств $\{\mathcal{L}_+; \mathcal{L}_-\}$. Пусть $\widetilde{K} = \widetilde{K}_+ : E \to E$ — угловой оператор максимального инвариантного подпространства $\mathcal{L}_+$. Тогда $\|\widetilde{K}_+\| \le 1$ и $\mathcal{L}_+ = \{z = (u; \widetilde{K}_+ u)^t \in E^2 : \forall u \in E\}$. Неотрицательное подпространство $\mathfrak{L}_+$ пространства Крейна $\mathfrak{K}$ принадлежит классу h^+, если оно допускает разложение в прямую $\mathcal{J}$-ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства и равномерно положительного подпространства. В частности, $\mathfrak{L}_+ \in h^+$, если отвечающий этому подпространству угловой оператор – компактный ($\widetilde{K}_+ \in \mathfrak{S}_\infty$). Будем записывать $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\} \in h$, если $\mathfrak{L}_\pm \in h^\pm$.

Так как в силу инвариантности $\mathcal{L}_+$ будет $\mathcal{A}_a^{-1} z \in \mathcal{L}_+$ при любом $z \in \mathcal{L}_+$, то

$$\begin{pmatrix} L_{11}u + & L_{12}\widetilde{K}_+ u \\ L_{21}u + & L_{22}\widetilde{K}_+ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \widetilde{K}_+ v \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_+, \quad v \in E,$$

а потому, в силу произвольности $u \in E$, оператор $\widetilde{K}_+$ должен быть решением уравнения

$$\widetilde{K}_+ L_{11} + \widetilde{K}_+ L_{12} \widetilde{K}_+ = L_{21} + L_{22}\widetilde{K}_+, \quad \|\widetilde{K}_+\| \leq 1.$$

Поскольку оператор L_{22} имеет ограниченный обратный (см. (3.10)), то отсюда имеем следующее представление для оператора $\widetilde{K}_+$:

$$\widetilde{K}_+ = L_{22}^{-1}(\widetilde{K}_+ L_{11} + \widetilde{K}_+ L_{12}\widetilde{K}_+ - L_{21}). \tag{3.11}$$

Так как здесь L_{11}, L_{12}, L_{21} — компактные операторы, а L_{22}^{-1} и $\widetilde{K}_+$ ограничены, то для оператора $\widetilde{K}_+$ выполнено важное свойство $\widetilde{K}_+ \in \mathcal{S}_\infty(E)$.

Будем говорить, что ограниченный оператор принадлежит классу (H), если у него есть хотя бы одна дуальная пара $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\} \in h$ инвариантных подпространств и каждые инвариантные относительно него дуальные пары принадлежат классу h. Из свойства $\widetilde{K}_+ \in \mathcal{S}_\infty(E)$, в частности, следует (см. [1]), что максимальная дуальная пара инвариантных подпространств $\{\mathcal{L}_+; \mathcal{L}_-\}$ принадлежит классу h и тогда оператор $\mathcal{A}_a^{-1}$ принадлежит классу (H) (см. [1], с. 232). Поэтому, в силу компактности углового оператора $\widetilde{K}_+$, невещественный спектр оператора $\mathcal{A}_a^{-1}$, а потому и оператора $\mathcal{A}_a$, состоит из не более чем конечного числа конечнократных собственных значений, симметрично расположенных относительно вещественной оси. Предположим, что

$$K^{-1/2} \in \mathcal{S}_p(E), \quad p = p(K^{-1/2}); \quad Q \in \mathcal{S}_q(E), \quad q = q(Q). \tag{3.12}$$

Напомним (см. [7], с. 46, 120), что компактный (вполне непрерывный) оператор C принадлежит классу $\mathcal{S}_p$, если его s-числа, т.е. собственные значения оператора $(C^*C)^{1/2}$, суммируются со степенью p:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (s_j(C))^p = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\lambda_j \left(C^*C\right)^{1/2}\right)^p < \infty.$$

(Здесь под p понимается инфимум тех степеней, при которых ряд сходится). Далее понадобится также следующая теорема В.И. Мацаева (см. [7], с.267). Тогда из определений операторов L_{ij} получаем, что

$$p(L_{11}) = p(K^{-1}) = p/2, \quad p(L_{12}) = p(L_{21}) = p(QK^{-1/2}) = p_0,$$

$$p_0^{-1} = p^{-1}(Q) + p^{-1}(K^{-1/2}) = q^{-1} + p^{-1} \Rightarrow p_0 = \frac{pq}{p+q}.$$

Значит, согласно представлению (3.11),

$$p(\widetilde{K}_+) = \max\,(p/2; pq/(p+q)) =: \widetilde{p}_0. \qquad (3.13)$$

Таким образом, если выполнены условия (3.12), угловой оператор $\widetilde{K}_+$ максимального инвариантного подпространства $\mathcal{L}_+$ оператора $\mathcal{A}_a^{-1}$ принадлежит классу $\mathcal{S}_{\widetilde{p}_0}(E)$, где $\widetilde{p}_0$ выражается формулой (3.13).

Теорема. *Пусть в задаче* (3.8) *выполнены условия* $0 < K^{-1} \in \mathcal{S}_\infty(E)$, $B \in \mathcal{S}_\infty(E)$. *Тогда имеют место следующие свойства.*

1^0. *Система корневых (собственных и присоединенных) элементов оператора* $\mathcal{A}_a^{-1}$ *является полной в гильбертовом пространстве* E^2.

2^0. *Эта система образует почти* $\mathcal{J}$*-ортонормированный базис в* E^2.

3^0. *Если выполнено условие*

$$\beta^2 > 4\|K^{-1/2}\|^2 \cdot \|Q\|^2, \qquad (3.14)$$

то система собственных элементов оператора $\mathcal{A}_a^{-1}$ *образует* $\mathcal{J}$*-ортонормированный базис в* E^2.

4^0. *Если выполнены условия* (3.12), *то упомянутые выше базисы являются* $\widetilde{p}$*-базисами в пространстве* E^2 *при*

$$\widetilde{p} \geq \widetilde{p}_0 = \max\,(p/2; pq/(p+q)).$$

Доказательство. Оно основано на теоремах 2.12, 3.7 и замечаниях 2.13, 3.8 к ним из монографии [1], см. стр. 271, 275, 287, 289. Отметим некоторые этапы доказательства свойств 1^0 – 4^0.

1^0. Это свойство следует непосредственно из утверждения в) теоремы 2.12 с учетом замечания 2.13: достаточно проверить, что подпространство $\mathcal{L}_0(\mathcal{A}_a^{-1})$, отвечающее собственному значению $\lambda = 0$ оператора $\mathcal{A}_a^{-1}$, невырождено, т. е. не имеет ненулевого элемента, $\mathcal{J}$-ортогонального этому подпространству. Однако оператор $\mathcal{A}_a^{-1}$ обратим, т. е. $\mathcal{L}_0(\mathcal{A}_a^{-1}) = \{0\}$, и поэтому свойство 1^0 выполнено.

2^0. Так как в задаче (3.8) количество невещественных собственных значений, а также тех вещественных, которым отвечают присоединенные элементы, конечно, то остальным собственным значениям отвечают дефинитные собственные подпространства, $\mathcal{J}$-ортогональные между собой. Из этого факта и утверждения г) теоремы 2.12 следует, что система собственных элементов оператора $\mathcal{A}_a^{-1}$ образует почти $\mathcal{J}$-ортонормированный базис в E^2.

3^0. Если выполнено свойство (3.14), то задача (3.8) не имеет невещественных собственных значений и присоединенных элементов. Поэтому утверждение 3^0 данной теоремы следует из утверждения д) теоремы 2.12.

4^0. Утверждение 4^0 следует непосредственно из утверждения е) теоремы 2.12 из монографии [1], если заметить, что при выполнении условий (3.12) имеет место неравенство определяющее класс компактности $\tilde{p}$. □

Замечание. Формула (3.13) уточняет свойство p-базисности в задаче (3.8) по сравнению с соответствующим утверждением e) теоремы 2.12 на тот случай, когда в (3.12) имеется не только первое условие, но и второе, т. е. для оператора Q.

Заключение

Этим завершается общее рассмотрение случая большой внутренней диссипации энергии в исследуемой динамической системе, основанное на применении двух различных методах исследования. А именно, на методах теории операторных пучков и методах теории самосопряженных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Эти методы дополняют друг друга: дают не только полную картину локализации спектра исследуемой задачи, но и приводят свойства ее корневых элементов. Применение индефинитного подхода позволяет сформулировать утверждения о полноте системы собственных элементов ассоциированной задачи. Удалось доказать, что при определенных условиях система образует даже $\mathcal{J}$-ортонормированный базисы. Если же операторы задачи имеют указанные классы компактности, то система образует p-базисы.

Список цитируемых источников

1. *Азизов, Т. Я., Иохвидов, И. С.* Основы теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986. — 352 с.

   Azizov, T. Ya., Iohvidov, I. S. The basis of theory of the self-adjoint operators in idefinite metric space. Moscow: Nauka, 1986. (in Russian)
2. *Азизов, Т. Я., Копачевский, Н. Д.* Приложения индефинитной метрики. -— Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 276 с.

   Azizov, T. Ya., Kopachevsky, N. D. Applications of idefinite metric. Simferopol: Daypi, 2014. (in Russian)
3. *Андронова, О. А., Копачевский, Н. Д.* О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т.29. — С. 11–28.

   Andronova, O. A., Kopachevsky, N. D. About liner problems with surface dissipation of an energy. Modern mathematics. Fundamental direction 29, 11-28 (2008). (in Russian)
4. *Андронова, О. А.* Начально-краевые и спектральные задачи с поверхностной и внутренней диссипацией энергии // Ученые записки Таврического Национального Университета им. В. И. Вернадского, серия Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. — Год. — Т.22(61).1. — С. 1–13.

   Andronova, O. A. Boundary-value and spectral problems with surface and initial dissipation of an energy. Scientific notes of Tavrida National University named after V. I. Vernadsky, series Mathematics. Mechanics. Informatics and Cybernetics 22(61).1, 1-13 (2009). (in Russian)
5. *Андронова, О. А.* Случай малой интенсивности в спектральных задачах с внутренней диссипацией энергии // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 3 (28). — С. 8–23.

Andronova, O. A. The case of weak intensity in spectral problems with the internal dissipation of an energy. Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics 28, No. 3, 8-23 (2015). (in Russian)

6. *Андронова О.А* Случай средней интенсивности в спектральных задачах с внутренней диссипацией энергии // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 4 (29). — С. 17–31.

   Andronova, O. A. The case of middle intensity in spectral problems with the internal dissipation of an energy. Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics 29, No. 4, 17-31 (2015). (in Russian)

7. *Гохберг, И. Ц.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

   Gohberg, I. C. Introduction in the theory of liner selfadjoint operators. Moscow: Nauka, 1965. (in Russian)

8. *Копачевский, Н.Ḋ.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи // Украинский математический вестник. — 2004. — Т.1, №1. — С. 69–97.

   Kopachevsky, N. D. Abstract Creen's for the triple of hilbert spaces, abstract boundary value and spectral and problems. Ukrainian mathematical Herald 1, No. 1, 69-97 (2004). (in Russian)

9. *Копачевский, Н. Д.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложения к задаче Стокса // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2004. — №2. — С. 52–80.

   Kopachevsky, N. D. Abstract Creen's for the triple of hilbert spaces and it's applications in Stock's problem. Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics, No. 2, 52-80 (2004). (in Russian)

10. *Копачевский, Н. Д.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

    Kopachevsky, N. D., Krein, S. G. Linear differential equations in Banach space. — Moscow: Nauka, 1967. (in Russian)

11. *Крейн, С. Г.* Функциональный анализ. Серия «Справочная математическая библиотека». — М.: Наука, 1972. — 544 с.

    Krein, S. G. Functional analysis. Series "Mathematical Reference library". Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)

12. *Копачевский, Н. Д.; Крейн, С. Г.; Нго, Зуй. Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

    Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo, Z. Operator methods in linear hydrodynamics. Evolution and spectral problems. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)

13. *Маркус, А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986. — 260 с.

    Markus, A. Introduction in the spectral theory of polynomial operator bundles. Kishinev: Shiintsa, 1986. (in Russian)

14. *Babin, A. V., Vishik, M. I.* Attractors of evolution equations. — North-Holland: Elsevier, 1992. — 532 p.
15. *Chueshov, I., Eller, M., Lasiecka, I.* Finite Dimensionality of the Attractor for a Semilinear Wave Equation with Nonlinear Boundary Dissipation // Comunications in Partial Differential Equations. — 2004. — 29. — P. 1847–1876.
16. *Chueshov, I., Lasiecka, I.* Global attractors for von Karman evolutions with a nonliner boundary dissipations // J. Diff. Equations. — 2004. — 198. — P. 196–231.
17. *Chueshov, I.* Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems // Kharkov: Acta, 2006. — 100 p.
18. *Iohvidov, I. S., Krein, M. G.,Langer, H.* Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Infinite Metric //Akademie-Verlag, Berlin, 1982. — 120 p.
19. *Ladyzhenskaya, O. A.* A dynamical system generated by Navier-Stokes equations // J. of Soviet Mathematics. — 1975. — Vol. 3. — P. 458–479.
20. *Lagnese, J.* Decay of the solution of the wave equation in a bounded region wiyh boundary dissipation // J. Diff. Equations. — 1983. — 50. — P. 163–182.
21. *Lasiecka, I., Taratu, D.* Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation // Diff. Integral Equations. — 1993. — 6. — P. 507–533.
22. *Temam, R.* Infinite-dimensional dynamical system in Mechanics and Physics. — New York: Springer, 1988. — 500 p.

Получена 16.11.2017