

УДК 519.63

## Факторизация спектральных задач винтовых волноводов<sup>1</sup>

А. Д. Юнаковский

ФИЦ «Институт прикладной физики РАН»

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»

Нижний Новгород 603950. E-mail: yun@appl.sci-nnov.ru

**Аннотация.** В статье разработан метод граничных интегральных уравнений для нахождения дисперсионных характеристик круглого волновода с глубокой многозаходной винтовой гофрировкой. Изначально трехмерная задача посредством введения косоугольной системы координат, «раскручивающих» волновод, сведена к спектральной задаче для системы одномерных гиперсингулярных граничных интегральных уравнений. Введением дополнительной компоненты задача регуляризована, но разными способами для разной глубины гофрировки. Развитие современных электронных СВЧ приборов сопровождается повышением их мощности и эффективности, расширением частотных диапазонов, использованием новых режимов работы. Электродинамические системы таких приборов характеризуются наличием сложной геометрии. Определение их дисперсионных характеристик требует высокой точности расчетов. Оптимизация профилей для улучшения эффективности приборов приводит к перебору большого количества значений параметров. Поэтому задача поиска математических моделей и численных методов, обеспечивающих проведение оптимизации, является актуальной. Задачи для волноводов сложного и многозаходного профиля часто решают конечно-разностным методом и методом конечных элементов. Если заходов винта много, то крутизна профиля возрастает, что резко увеличивает размерность задачи. В статье приведен переход к расчету задачи с одним «зубцом» и неклассическими граничными условиями. Область при этом становится сильно негладкой, но задача остается доступной для пользователей метода конечных элементов.

**Ключевые слова:** волноводы, факторизация, спектральная задача

## Factorization of Spectral Problems of Helical Waveguides

A. D. Yunakovskiy

Federal Research Center The Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences (IAP RAS),

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod 603950.

**Abstract.** The development of modern electronic microwave devices is accompanied by an increase in their power and efficiency, the expansion of frequency ranges, the use of new operating modes. Electrodynamical systems of such devices are characterized by the presence of complex geometry. Determination of their dispersion characteristics requires high accuracy of calculations. Optimization of profiles to improve the efficiency of devices leads to a search of a large number of parameter values. Therefore, the problem of finding mathematical models and numerical methods that provide

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00601.

optimization is urgent. The method of boundary integral equations is developed to find the dispersion characteristics of a circular waveguide with a deep multi-screw screw corrugation. This type of waveguides is used as a space for interaction of radiation with an electron beam in such devices of microwave electronics as gyro-TWT. Until recently, first-order perturbation theory based on coupled wave equations was used to calculate waveguides with screw corrugation. This theory allows a fairly accurate description of the case of a relatively small corrugation. Restrictions on the depth of corrugation were studied in papers. The method of finite difference in the time domain (FNDP), described in detail in the review and used in the work, made it possible to obtain results for a wider range of problems. The method of boundary integral equations is developed to find the dispersion characteristics of a circular waveguide with a deep multi-screw screw corrugation. Initially, the three-dimensional problem, by introducing an oblique-angled coordinate system «unwinding» the waveguide, is reduced to the spectral problem for a system of one-dimensional hypersingular boundary integral equations. By introducing an additional component, the problem is regularized, but in different ways for different depths of corrugation. The intrinsic waves in the helical waveguides are not divided into waves of magnetic and electric type, as a result of which a solution of the complete vector problem is required to solve the system of Maxwell equations.

**Keywords:** optimal control, maximum principle, solid body with flexible rod

**MSC 2010:** 35K20, 35K59, 35Q60, 78A05, 37L10, 34O12

## 1. Введение

Развитие современных электронных СВЧ приборов сопровождается повышением их мощности и эффективности, расширением частотных диапазонов, использованием новых режимов работы. Электродинамические системы таких приборов характеризуются наличием сложной геометрии. Определение их дисперсионных характеристик требует высокой точности расчетов. Оптимизация профилей для улучшения эффективности приборов приводит к перебору большого количества значений параметров. Поэтому задача поиска математических моделей и численных методов, обеспечивающих проведение оптимизации, является актуальной.

В статье разработан метод граничных интегральных уравнений для нахождения дисперсионных характеристик круглого волновода с глубокой многозаходной винтовой гофрировкой. Данный тип волноводов применяется в качестве пространства взаимодействия излучения с электронным пучком в таких приборах СВЧ-электроники, как gyro-ЛБВ. До недавнего времени для расчетов волноводов с винтовой гофрировкой использовалась теория возмущений первого порядка, основанная на уравнениях связанных волн [7]. Данная теория позволяет достаточно точно описывать случай мелкой гофрировки. Ограничения на глубину гофрировки исследовались в работах [24, 28]. Метод конечных разностей во временной области (FNDP), подробно описанный в обзоре [29] и применявшийся в работах [9], позволил получать результаты для более широкого круга задач.

В [2] дан обзор исследований СВЧ-приборов гиротронного типа с электродинамической системой в виде сверхразмерного металлического волновода с винтовой гофрировкой. При определенных параметрах такая гофрировка радикальным образом изменяет волноводную дисперсию, обеспечивая в широкой полосе частот почти постоянную по величине групповую скорость нормальной волны при малом продольном волновом числе.

Собственные волны в винтовых волноводах не разделяются на волны магнитного и электрического типа, вследствие чего для решения системы уравнений Максвелла требуется решение полной векторной задачи. «Раскрутка», т. е. переход к «винтовым» координатам, преобразующим геометрию винтового волновода к прямой цилиндрической конструкции, давно использовалась механиками в декартовой системе координат [8]. Она сводила задачу к исследованию волновода с тем же поперечным сечением, но с анизотропным диэлектрическим и магнитным заполнением, однородным в продольном направлении. Другими словами, в уравнении Гельмгольца вместо лапласиана появлялся эллиптический оператор с зависящими от поперечных координат коэффициентами. В этом случае так же, как и в изотропном случае, возможен поиск распространяющихся волн методом граничных интегральных уравнений, но с ядрами, выраженными через функцию Грина «анизотропного» уравнения. При использовании этой функции происходит скачок производной по конормали при переходе через граничную поверхность волновода, что меняет смысл производных по направлению нормали и касательной в граничных условиях для электрического поля. Оказалось возможным получить и решить слабо некорректную задачу, используя представление полей через соответствующую функцию Грина и ее нормальную, а не конормальную производную. В [8] отмечено, что «малые углы закрутки, как и следовало ожидать, слабо влияют на картину поведения физического поля. С ростом угла закрутки линии уровня в центральной зоне раздвигаются, что свидетельствует об образовании зон «плато» и больших градиентов». В цилиндрических координатах «раскрутка» была реализована в [21].

В работе [13] представлен метод расчета дисперсии нормальных волн металлических волноводов с винтовой гофрировкой внутренней поверхности, основанный на переходе к новой неортогональной системе координат. Система используемых базисных функций образует базис Бари [1] и может применяться лишь при небольшой глубине гофрировки.

При представлении полей в волноводе в цилиндрических координатах через электрический  $u$  и магнитный  $v$  векторы Герца с единственными отличными от нуля  $z$ -компонентами наиболее перспективным оказалось введение дополнительной  $w$ -компоненты. В работе изначально трехмерная задача посредством введения косоугольной системы координат, «раскручивающих» волновод, сведена к спектральной задаче для системы одномерных гиперсингулярных граничных интегральных уравнений [12]. Это понизило до предела размерность задачи, но, к сожалению, «перевело» проблему к задаче точного вычисления гиперсингулярных интегралов. Введением дополнительной  $w$ -компоненты задача регуляризована, но разными способами для разной глубины гофрировки. При малой глубине аналитически избавились от «электрической» составляющей электромагнитного поля, сведя задачу к системе двух уравнений относительно «магнитной» составляющей и вновь введенной компоненты. Для большой глубины гофрировки регуляризация достигается естественным путем за счет анизотропии пространства. В систему граничных интегральных уравнений входят производные по нормали и по касательной.

тельному направлению к граничной поверхности, а разрыв при предельном переходе в интегральном представлении полей к граничной поверхности, т. е. переход к интегральным уравнениям второго рода достигается по направлению конормали. Другими словами, система уравнений становится аналогичной системе с косою производной относительно конормали, т. е. с операторами Фредгольма 3-го рода. Увеличение глубины гофрировки требует в граничных интегральных уравнениях перейти от интегрирования по объемлющей окружности к интегрированию по близкому к поверхности волновода контуру (например, для контура волновода в поперечном сечении  $(a + b \cos 3\varphi)$  интегрирование вести по объемлющему контуру  $(a + \delta + b \cos 3\varphi)$ ). Это обусловлено тем, что при аналитическом продолжении поля до границы минимального объемлющего цилиндра у продолжения возможен полюс, расположенный между цилиндром и поверхностью волновода.

Задачи для волноводов сложного и многозаходного профиля часто решают конечно-разностным методом и методом конечных элементов [22, 9]. Если заходов винта много, то крутизна профиля возрастает, что резко увеличивает размерность задачи. В статье приведен переход к расчету задачи с одним «зубцом», но с неклассическими граничными условиями, примеры которых приведены в [17], [5]. Область при этом становится сильно негладкой, но задача остается доступной для пользователей метода конечных элементов.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим волновод с винтовой гофрировкой. Профиль волновода в цилиндрических координатах описывается уравнением:

$$F(r, \varphi, z) = r - f\left(\varphi - \frac{2\pi}{L}z\right) = 0; \quad f(\xi + 2\pi) = f(\xi); \quad -\infty < z < +\infty; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (2.1)$$

где функция  $f(\xi)$  непрерывно дифференцируемая и периодическая с периодом  $2\pi$ .

Поля в волноводе удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла

$$\vec{E} = ik \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \vec{H} = -ik \operatorname{rot} \vec{E}, \quad (2.2)$$

Решение системы уравнений Максвелла в специальных системах координат, для которых одна из локальных единиц длины  $e_i$  является функцией только этой координаты  $x_i$ , а отношение остальных локальных единиц длины не зависит от этой координаты  $x_i$ , может быть найдено методом Бромвича [6]. При этом для компоненты вектора Герца  $\Pi_i$  должно выполняться так называемое уравнение Боргниса, решение которого находится с точностью до функции только от координаты  $x_i$ .

В случае цилиндрической симметрии электромагнитное поле выражается через электрическую  $u$  и магнитную  $v$  функции Боргниса, что эквивалентно введению электрического и магнитного векторов Герца с единственными отличными от нуля  $z$ -компонентами:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m, \quad \vec{H} = \vec{H}_e + \vec{H}_m, \quad (2.3)$$

$$\vec{E}_e = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (u \vec{i}_z), \quad \vec{H}_e = -i \operatorname{rot} (v \vec{i}_z), \quad (2.4)$$

$$\vec{E}_m = i \operatorname{rot} (v \vec{i}_z), \quad \vec{H}_m = \operatorname{rot} \operatorname{rot} (v \vec{i}_z). \tag{2.5}$$

При этом функции  $u$  и  $v$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + {}^2 u = 0, \quad \Delta v + {}^2 v = 0. \tag{2.6}$$

Кроме того, функции  $u$  и  $v$ , а, следовательно, и все компоненты электрического и магнитного полей удовлетворяют условию Флоке:

$$u, v, E_j, H_j(r, \varphi + 2\pi l/L, z + l) = \exp(i\pi h_f) u, v, E_j, H_j(r, \varphi, z), \quad j = r, \varphi, z. \tag{2.7}$$

Здесь  $k = \omega/c$  — волновое число,  $\omega$  — круговая частота,  $c$  — скорость света,  $r = f(\varphi - \frac{2\pi}{L}z) - 0$  — обозначение внутренней поверхности волновода,  $h_f$  — параметр Флоке. Полный «оборот» винтовой гофрировки происходит на расстоянии  $L$  по оси  $z$ , а периодичность полей с набегом фазы по Флоке — на расстоянии  $l$ .

Электрическая и магнитная составляющие электрического поля запишутся в виде

$$\vec{E}_e = \begin{cases} E_{er} = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} \\ E_{e\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial z} \\ E_{ez} = {}^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{cases}, \quad \vec{E}_m = \begin{cases} E_{mr} = \frac{i}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ E_{m\varphi} = -i \frac{\partial v}{\partial r} \\ E_{mz} = 0 \end{cases}. \tag{2.8}$$

Граничное условие на внутренней поверхности волновода является условием равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля на металлической поверхности и записывается в форме

$$\vec{E}_\tau \Big|_S = 0,$$

$$S = \{F \equiv r - f(\varphi - \frac{2\pi}{L}z) = 0; f(\xi + 2\pi) = f(\xi); -\infty < z < +\infty; 0 \leq \varphi < 2\pi\},$$

$$T_s : \left\{ \frac{2\pi}{L} E_\varphi + \frac{1}{r} E_z \right\} \Big|_S = 0, \tag{2.9}$$

$$T_k : \{f' E_r + E_\varphi\} \Big|_S = 0. \tag{2.10}$$

Вектор нормали к поверхности имеет вид

$$\operatorname{grad} F = \left( 1, -\frac{1}{r} f', \frac{2\pi}{L} f' \right), \quad \vec{n} = \frac{1}{|n|} \operatorname{grad} F, \quad |n| = \sqrt{1 + (f')^2 (1 + (2\pi/L)^2)}. \tag{2.11}$$

Вектора

$$\vec{s} = \frac{1}{|s|} \left( 0, \frac{2\pi}{rL}, 1 \right), \quad |s| = \sqrt{1 + (2\pi/L)^2},$$

$$\vec{k} = \frac{1}{|k|} \left( f', \frac{1}{r}, 0 \right), \quad |k| = \sqrt{1 + (f')^2},$$

лежат в касательной к поверхности плоскости, но не ортогональны между собой.

Введем новую систему координат [21]:

$$z_{\text{new}} = z, \quad \psi = \varphi - \frac{2\pi}{L}z. \quad (2.12)$$

В новой системе координат уравнения Максвелла примут вид

$$\vec{E}_e = \begin{cases} E_{er} = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} - \frac{2\pi}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \\ E_{e\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi \partial z} - \frac{2\pi}{Lr} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \\ E_{ez} = u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{4\pi}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi \partial z} + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \end{cases}, \quad \vec{E}_m = \begin{cases} E_{mr} = \frac{i}{r} \frac{\partial v}{\partial \psi} \\ E_{m\varphi} = -i \frac{\partial v}{\partial r} \\ E_{mz} = 0 \end{cases}. \quad (2.13)$$

Уравнение граничной поверхности примет вид

$$F(r, \psi, z) = r - f(\psi) = 0; \quad f(\xi + 2\pi) = f(\xi); \quad -\infty < z < +\infty; \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \quad (2.14)$$

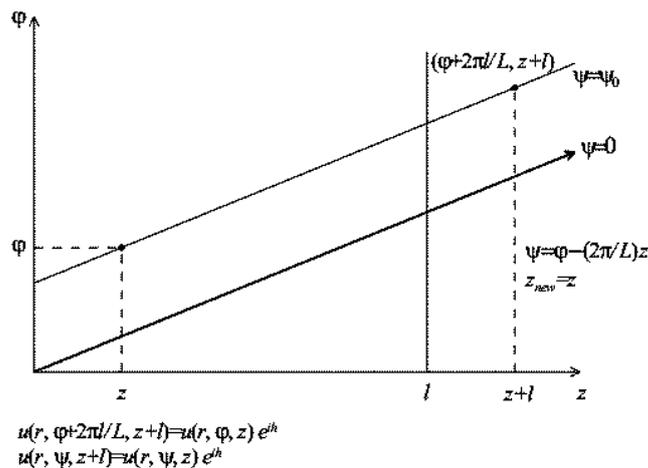


Рис. 1 Условия Флоке в новых координатах.

вектор нормали к поверхности

$$\text{grad } F = \left( 1, -\frac{1}{r} f', 0 \right),$$

$$\vec{\nu} = \frac{1}{|\nu|} \text{grad } F, \quad |\nu| = \sqrt{1 + (f')^2}.$$

Векторы

$$\vec{s} = (0, 0, 1), \quad \vec{k} = \frac{1}{|\nu|} \left( f', \frac{1}{r}, 0 \right)$$

лежат в касательной к поверхности плоскости и ортогональны между собой в новой системе координат.

Условия Флоке перейдут в стандартную форму:

$$u, v, E_j, H_j(r, \psi, z + l) = \exp(i2\pi h_f)u, v, E_j, H_j(r, \psi, z), \quad j = r, \psi, z. \quad (2.15)$$

Распространяющиеся моды в силу (2.15) являются квазипериодическими функциями координаты  $z$  и их можно искать в виде

$$u = \exp(i2\pi(m_z + h_f)z/l)u_{\text{new},m_z}, \quad v = \exp(i2\pi(m_z + h_f)z/l)v_{\text{new},m_z}, \quad (2.16)$$

где  $u_{\text{new},m}$ ,  $v_{\text{new},m}$  являются функциями только  $r, \psi$ . В дальнейшем мы опустим нижние индексы  $\text{new}, m_z$  у неизвестных функций. Так как  $2m_z$  соответствует  $2l$ , то можно ограничиться  $m_z = 1$  или  $m_z = 0$ .

Введем обозначение

$$h = \frac{2\pi}{l}(m_z + h_f), \quad 0 \leq h_f \leq 1. \quad (2.17)$$

Будем исследовать спектральную задачу нахождения дисперсионной кривой  $h()$ , т.е. для каждого значения  $h$  будем искать значение, являющееся собственным значением линейной задачи для системы функций  $u$  и  $v$  в поперечном сечении волновода. Так как мы будем рассматривать только однородные уравнения и системы уравнений, то общий у всех компонент поля и неизвестных функций множитель  $e^{i2\pi(m_z+h_f)z/l}$  можем опустить.

Выражения для компонент электрического поля примут вид

$$\vec{E}_e = \begin{cases} E_{er} = ih \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\pi}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \\ E_{e\psi} = i \frac{h}{r} \frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{2\pi}{Lr} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \\ E_{ez} = [2 - h^2]u - ih \frac{4\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \end{cases}, \quad \vec{E}_m = \begin{cases} E_{mr} = \frac{i}{r} \frac{\partial v}{\partial \psi} \\ E_{m\psi} = -i \frac{\partial v}{\partial r} \\ E_{mz} = 0 \end{cases}. \quad (2.18)$$

Запишем условия равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля на границе через вновь введенные величины

$$\left\{ \frac{2\pi}{L} E_\psi + \frac{1}{r} E_z \right\} \Big|_S = \left( [2 - h^2] \frac{1}{r} u - ih \frac{2\pi}{Lr} \frac{\partial u}{\partial \psi} - i \frac{2\pi}{L} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_S = 0. \quad (2.19)$$

Получили первое граничное условие. Из (2.9) и (2.10) получаем второе граничное условие:

$$\left\{ E_\psi + \frac{f'}{r} E_r \right\} \Big|_S = \left( i \frac{h}{r} \frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{2\pi}{Lr} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + i f' \frac{h}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - f' \frac{2\pi}{Lr} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} + i \frac{f'}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \psi} - i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_S = 0. \quad (2.20)$$

На границе выражение

$$\left( f' \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) = \left( f'(\psi) \frac{\partial u(f(\psi), \psi)}{\partial r} + \frac{\partial u(f(\psi), \psi)}{\partial \psi} \right) = \frac{du}{d\psi}$$

является производной по параметру  $\psi$  от  $u(f(\psi), \psi)$ . Воспользовавшись этим, перепишем выражение (2.20) в виде

$$\left( \frac{d}{d\psi} \left[ ihu - \frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] + ir \left[ \frac{f'}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial r} \right] \right) \Big|_S = 0. \quad (2.21)$$

Вторая скобка является фактически производной по нормали от функции  $v$ .

В пределе, когда глубина гофрировки стремится к нулю, т.е.  $f'(\psi) \rightarrow 0$ ,  $f \rightarrow \text{const} = R_0$ ,  $\frac{d}{d\psi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \psi}$ , соотношение (2.20) или (2.21) на границе приобретает вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ ihu - \frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] - ir \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_0} = 0.$$

Вместе с (2.19) это дает однородную систему уравнений относительно функций  $u$  и  $\frac{\partial v}{\partial r}$ . Общее решение этой системы

$$u|_{r=R_0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0$$

совпадает с классическим решением [19]. Вырожденное решение получается, когда функция  $u$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{2\pi}{L} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ ihu - \frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] -^2 u + ih \left[ ihu - \frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right] = 0,$$

которое имеет периодическое решение на интервале  $2\pi$ . Это возможно лишь при целочисленном значении, включая нулевое, величин

$$\alpha_{\pm} = \frac{L}{2\pi}(h \pm). \quad (2.22)$$

Этот вырожденный случай, сводящийся к появлению степенных по радиальной координате компонент решения, мы не рассматриваем.

В предположении (2.16) с учетом обозначения (2.17), уравнение Гельмгольца (2.6) преобразуется к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{1}{r^2} + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} - i \frac{4\pi h}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} + (2 - h^2) u = 0. \quad (2.23)$$

Аналогично получается уравнение относительно  $v$ .

Функции  $u$  и  $v$  будем задавать в виде граничных потенциалов с помощью функций Грина уравнения Гельмгольца (2.23). Задачу нахождения дисперсионной кривой сведем к спектральной задаче для системы граничных интегральных уравнений. Выбор типов потенциалов поясним в дальнейшем.

### 3. Построение функций Грина

Хорошо известно, что для функции Грина оператора Гельмгольца в полуполосе с условиями Флоке с ростом частоты  $\omega$  возникают проблемы правильного и быстрого вычислений. Известно несколько способов ее представления.

1. Пространственное представление — через фундаментальное решение во всем пространстве с последующим суммированием сдвинутых на период функций.
2. Спектральное представление — через ряд Фурье по угловой координате [19].
3. Преобразование Куммера [20].
4. Lattice sum — через сумму значений некоторой функции в точках решетки. Достигается использованием теоремы суммирования для спецфункций с целью ускорения суммирования рядов в пространственном представлении.
5. Преобразование Эвальда [23].
6. Интегральное представление [30], которое может быть рассмотрено как аналог применения известного метода спуска.

У каждого из перечисленных представлений есть проблемная область параметров.

Будем пользоваться разными представлениями функций Грина для случаев мелкой и глубокой гофрировки. Причины, по которым выбирается тот или иной способ представления будут ясны в процессе их дальнейшего применения.

Для случая мелкой гофрировки найдем функцию Грина  $G(r, R, \psi, \varphi)$  уравнения (2.23) в полуполосе

$$0 < r, R < +\infty; 0 \leq \psi, \varphi < 2\pi, \tag{3.1}$$

с периодическими по  $\psi, \varphi$  граничными условиями

$$G(r, R, \psi + 2\pi, \varphi) = G(r, R, \psi, \varphi + 2\pi) = G(r, R, \psi, \varphi), \tag{3.2}$$

с условием излучения Зоммерфельда по радиальной координате

$$\frac{\partial G}{\partial r} - i\sqrt{2 - h^2} G = O\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \tag{3.3}$$

и условием ограниченности решения в точке  $r = 0$  :  $|u| < \infty$ .

Правая часть уравнения для функции Грина имеет вид [3]

$$f = -\frac{2\pi}{r}\delta(r-R)\delta(\psi-\varphi).$$

Воспользуемся известным разложением дельта-функции:

$$\delta(\psi-\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(in(\psi-\varphi)) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n(\psi-\varphi)). \quad (3.4)$$

Функцию Грина будем искать в виде

$$G(r, R, \psi, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n(r, R) \exp(in(\psi-\varphi)). \quad (3.5)$$

Для функций  $G_n(r, R)$  в этом случае получим уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial G_n(r, R)}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} G_n(r, R) + \left( 2 - \left( \frac{2\pi}{L} n - h \right)^2 \right) G_n(r, R) = -\frac{1}{r} \delta(r-R).$$

Его решение имеет вид

$$G_n(r, R) = \frac{i\pi}{2} \begin{bmatrix} J_n(g_n r) H_n^{(1)}(g_n R) & , r < R \\ J_n(g_n R) H_n^{(1)}(g_n r) & , r > R \end{bmatrix},$$

где

$$g_n^2 = 2 - \left( \frac{2\pi}{L} n - h \right)^2, \quad \alpha_- < n < \alpha_+. \quad (3.6)$$

Обозначим

$$h_n = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\left( 1 - \frac{Lh}{2\pi n} \right)^2 - \frac{2L^2}{4\pi^2 n^2}}, \quad h_0 = \frac{2\pi}{L}, \quad n < \alpha_-, \quad n > \alpha_+. \quad (3.7)$$

Отметим, что при  $g_n = 0$

$$G_n(r, R) = \frac{R}{2n} \begin{bmatrix} (r/R)^n & , r < R \\ (R/r)^n & , r > R \end{bmatrix}.$$

Функцию Грина запишем в виде

$$\begin{aligned} G(r, R, \psi, \varphi) &= \frac{i\pi}{2} \sum_{\alpha_- < n < \alpha_+} \begin{bmatrix} J_n(g_n r) H_n^{(1)}(g_n R) & , r < R \\ J_n(g_n R) H_n^{(1)}(g_n r) & , r > R \end{bmatrix} \exp(in(\psi-\varphi)) + \\ &+ \sum_{\substack{\alpha_+ < n \\ n < \alpha_-}} \begin{bmatrix} K_n(R|n|h_n) I_n(r|n|h_n) & , r < R \\ I_n(R|n|h_n) K_n(r|n|h_n) & , r > R \end{bmatrix} \exp(in(\psi-\varphi)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выделим главную сингулярную часть этой функции, воспользовавшись асимптотическим представлением функций  $K_\nu(\nu z)$  и  $I_\nu(\nu z)$  с учетом главной части величины  $h_n$ , равной  $2\pi/L$ , при фиксированном  $z$  и  $\nu \rightarrow \infty$  [15]

$$I_\nu(\nu z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \frac{e^{\nu\eta(z)}}{(1+z^2)^{1/4}}, \quad K_\nu(\nu z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \frac{e^{-\nu\eta(z)}}{(1+z^2)^{1/4}},$$

$$I_0(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \left[ 1 - \frac{1}{8z} + \dots \right], \quad K_0(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ 1 + \frac{1}{8z} + \dots \right].$$

Введем обозначения

$$p(s) = e^{-\sqrt{1+(2\pi s/L)^2}}, \quad q(s) = \frac{2\pi}{L} \frac{s}{1 + \sqrt{1+(2\pi s/L)^2}}. \tag{3.9}$$

При предельном переходе на поверхность волновода получаем  $r = f(\psi)$ ,  $R = f(\varphi)$ . Для удобства мы будем продолжать обозначать  $r$  и  $R$  там, где это не вызывает недоразумений. Мы будем в дальнейшем обозначать

$$I_{an}(s|n|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|n|}} \frac{1}{(1+(2\pi s/L)^2)^{1/4}} \left( \frac{q(s)}{p(s)} \right)^{|n|},$$

$$K_{an}(s|n|) = \sqrt{\frac{\pi}{2|n|}} \frac{1}{(1+(2\pi s/L)^2)^{1/4}} \left( \frac{p(s)}{q(s)} \right)^{|n|},$$

$$I_0(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^s, \quad K_0(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{-s}, \tag{3.10}$$

главные части соответствующих асимптотических разложений функций  $I_n(ns)$  и  $K_n(ns)$ ,  $I_0(s)$  и  $K_0(s)$ . Здесь мы учли, что всюду в последующих выражениях входят только произведения  $I_{an}(ns)$  и  $K_{an}(s)$  и поэтому их произведение при положительных и отрицательных  $n$  не меняет знак.

Введем обозначение для функций, заданных на граничной поверхности (см. (2.11))

$$|n(\psi)|^2 = \left( \left( \frac{1}{r} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \right) (f'(\psi))^2 + 1. \tag{3.11}$$

Представим функцию Грина в (3.8) в виде суммы нескольких ограниченных функций и главной сингулярной части

$$G(r, R, \psi, \varphi) = G_{1m}(r, R, \psi, \varphi) + G_{2m}(r, R, \psi, \varphi) + G_{am}(r, R, \psi, \varphi)$$

$$= \sum_{\alpha_- < n < \alpha_+} \left[ \begin{array}{l} i\frac{\pi}{2} J_n(g_n r) H_n^{(1)}(g_n R) - K_{an}(R|n|) I_{an}(r|n|), \quad r < R \\ i\frac{\pi}{2} J_n(g_n R) H_n^{(1)}(g_n r) - I_{an}(R|n|) K_{an}(r|n|), \quad r > R \end{array} \right] \exp(in(\psi - \varphi)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{\alpha_+ < n \\ n < \alpha_-}} \left[ K_n(R|n|h_n) I_n(r|n|h_n) - K_{an}(R|n|) I_{an}(r|n|), r < R \right] \exp(in(\psi - \varphi)) + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[ \begin{array}{l} K_{an}(R|n|) I_{an}(r|n|) \quad , \quad r < R \\ I_{an}(R|n|) K_{an}(r|n|) \quad , \quad r > R \end{array} \right] \exp(in(\psi - \varphi)). \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Ряд для главной части такого представления сходится и записывается в следующем виде в пределе при  $\varphi \rightarrow \psi$

$$\begin{aligned}
G_{am}(r, R, \psi, \varphi) = & -\frac{1}{8\pi} \frac{1}{(1 + (2\pi r/L)^2)^{1/4} (1 + (2\pi R/L)^2)^{1/4}} \times \\
& \times [\ln(1 - \cos(\psi - \varphi)) + \ln 2 |n(\psi)|^2]
\end{aligned}$$

В окрестности  $\varphi = \psi$  получаем для производной по радиальной координате

$$\frac{\partial G_{am}(r, R, \psi, \varphi)}{\partial r} = \left( \frac{1}{r^2} + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \right) \frac{r f'(\psi)}{2 |n(\psi)|^2} \operatorname{ctg} \left( \frac{\psi - \varphi}{2} \right).$$

Как следует из [4], эта часть не является сильно сингулярной и соответствующий интеграл считается в смысле главного значения.

Рассмотрим теперь случай глубокой гофрировки. Найдем функцию Грина  $G(r, \rho, \psi, \varphi)$  уравнения (2.23) в прямоугольнике

$$0 < r, \rho < R_a; \quad 0 \leq \psi, \varphi < 2\pi, \quad (3.13)$$

с периодическими по  $\psi, \varphi$  граничными условиями

$$G(r, \rho, \psi + 2\pi, \varphi) = G(r, \rho, \psi, \varphi + 2\pi) = G(r, \rho, \psi, \varphi), \quad (3.14)$$

с условием

$$G(r, R_a, \psi, \varphi) = G(R_a, \rho, \psi, \varphi) = 0, \quad (3.15)$$

и условием ограниченности решения в точке  $r = 0$ :  $|G| < \infty$ .

Функцию Грина аналогично предыдущему случаю будем искать в виде

$$G(r, \rho, \psi, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n(r, \rho) \exp(in(\psi - \varphi)). \quad (3.16)$$

Для функций  $G_n(r, \rho)$  в этом случае получим уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial G_n(r, \rho)}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} G_n(r, \rho) + \left( 2 - \left( \frac{2\pi}{L} n - h \right)^2 \right) G_n(r, \rho) = -\frac{1}{r} \delta(r - \rho).$$

Его решение будем искать в виде разложения по полной системе функций краевой задачи

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial y(r)}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} y(r) = -\lambda y(r)$$

с граничным условием

$$y(R_a) = 0, \tag{3.17}$$

и условием ограниченности решения в точке  $r = 0 : |y| < \infty$ .

Собственные функции этой задачи имеют вид

$$y_k = \alpha_n^k J_n(\mu_n^k r / R_a).$$

Здесь  $\mu_n^k$  —  $k$ -ый положительный корень уравнения  $J_n(\mu_n^k)$ , а

$$(\alpha_n^k)^2 = \frac{2}{R_a^2 \left( |J_n'(\mu_n^k)|^2 + \left( 1 - n^2 / |\mu_n^k|^2 \right) J_n^2(\mu_n^k) \right)} = \frac{2}{R_a^2 J_{n-1}^2(\mu_n^k)}.$$

Собственные значения

$$\lambda_n^k = \left( \frac{\mu_n^k}{R_a} \right)^2.$$

Для функции Грина окончательно получаем выражение

$$G(r, \rho, \varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} g_n^k J_n(\mu_n^k r / R_a) J_n(\mu_n^k \rho / R_a) \exp(in(\varphi - \psi)), \tag{3.18}$$

где

$$g_n^k = \frac{(\alpha_n^k)^2}{\left( \left( \frac{\mu_n^k}{R_a} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{L} n - h \right)^2 - 2 \right)}.$$

Преимущество такого представления состоит в том, что от параметра  $r$  зависят только коэффициенты  $g_n^k$ .

Мы воспользовались спектральным представлением, так как с его помощью удалось получить аналитические значения коэффициентов системы линейных уравнений для коэффициентов Фурье неизвестных плотностей граничных интегральных уравнений.

#### 4. Постановка задачи о поиске собственных мод винтового волновода

Для отыскания распространяющихся мод и соответствующих собственных чисел винтового волновода сформулируем задачу для системы граничных интегральных уравнений. Для этого воспользуемся граничными условиями (2.19) и (2.21). В соотношение (2.21) входит вторая производная по угловой координате, поэтому при сведении задачи к системе граничных интегральных уравнений появляются

гиперсингулярные слагаемые [12]. Введем дополнительную компоненту, выбрав в качестве ее первую квадратную скобку из (2.21). Это можно сделать, так как она стоит под знаком полной производной, т.е. дифференцирование идет по границе области. В результате получим следующую систему соотношений на границе области

$$\left( \frac{d}{d\psi} [w] - ir \left[ \frac{f'}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial r} \right] \right) \Big|_S = 0. \quad (4.1)$$

$$w = \left( \frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} - ihu \right) \Big|_S. \quad (4.2)$$

В (4.1) вторая квадратная скобка является фактически производной по нормали от функции  $v$ .

Рассмотрим функцию

$$u(r, \psi) = \int_0^{2\pi} \tilde{\alpha}(\varphi) G(r, \psi, f(\varphi), \varphi) \sqrt{f(\varphi)^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi,$$

Здесь

$$r \sqrt{1 + (f'/r)^2} \Big|_{\partial V} d\varphi = \sqrt{f(\varphi)^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi$$

элемент поверхности,

$$G(r, \psi, f(\varphi), \varphi)$$

функция Грина эллиптического оператора (2.23) с главной частью, не являющейся лапласианом. Очевидно, что функция  $u$  является решением уравнения (2.23) внутри волновода. Пусть

$$a(r, \varphi) = \sqrt{r^2 + (f')^2 (1 + (2\pi r/L)^2)^2}. \quad (4.3)$$

Тогда

$$\vec{\nu} = \frac{1}{a} (r \cos \varphi + f'(1 + (2\pi r/L)^2) \sin \varphi, \quad r \sin \varphi - f'(1 + (2\pi r/L)^2) \cos \varphi) \quad (4.4)$$

вектор конормали к поверхности  $r = f(\varphi)$  в декартовых координатах. В цилиндрических координатах

$$\vec{\nu}_\perp = \frac{1}{a} (1, +r f'(1/r^2 + (2\pi/L)^2)).$$

Производная по направлению конормали в точке на поверхности определяется выражением [14]

$$\left( \frac{\partial u(r, \psi)}{\partial \nu} \right)^\pm = \mp \frac{\tilde{\alpha}(\psi)}{2a(f(\psi), \psi)} + \int_0^{2\pi} \tilde{\alpha}(\varphi) \frac{\partial G(r, \psi, f(\varphi), \varphi)}{\partial \nu} \sqrt{f(\varphi)^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (4.5)$$

Для произвольного направления

$$\left(\frac{\partial u(r, \psi)}{\partial l}\right)^\pm = \mp \frac{\tilde{\alpha}(\psi)}{2\tilde{a}_l(f(\psi), \psi)} + \int_0^{2\pi} \tilde{\alpha}(\varphi) \frac{\partial G(r, \psi, f(\varphi), \varphi)}{\partial l} \sqrt{f(\varphi)^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (4.6)$$

Здесь

$$\tilde{a}_l(f(\psi), \psi) = a(f(\psi), \psi) \frac{\cos(n\nu)}{\cos(nl)}, \quad \cos(n\nu) = \frac{r^2 + (f')^2(1 + (2\pi r/L)^2)}{a\sqrt{(r^2 + (f')^2)}}, \quad (4.7)$$

$$\cos(nr) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (f')^2}}, \quad \cos(n\psi) = -\frac{f'}{\sqrt{r^2 + (f')^2}}. \quad (4.8)$$

Мы можем воспользоваться тем, что при вычислении производной от граничного потенциала по радиальному направлению соответствующий косинус угла с нормалью к поверхности не обращается в нуль и соответствующее слагаемое в граничном интегральном уравнении при представлении его потенциалом простого слоя будет «второго рода». С производной  $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$  по угловой координате можно поступить следующим образом, добавив и вычитая слагаемое  $f' \frac{\partial u}{\partial r}$  мы получаем полную производную по угловой координате минус слагаемое с производной по радиальной координате  $\frac{du}{d\varphi} - f' \frac{\partial u}{\partial r}$ . Для упрощения выкладок обозначим

$$a_l = \frac{1}{2\tilde{a}_l \sqrt{r^2 + (f')^2}}.$$

Тогда производная по направлению запишется в виде

$$\left(\frac{\partial u(r, \psi)}{\partial l}\right)^\pm = \mp a_l \alpha(\psi) + \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \frac{\partial G}{\partial l} d\varphi. \quad (4.9)$$

Производные по конормали и кокасательная производная имеют вид

$$\frac{\partial G(r, \psi)}{\partial \nu} = \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \psi} (r f' (1/r^2 + (2\pi/L)^2)) \right],$$

$$\frac{\partial G(r, \psi)}{\partial \nu_\perp} = \frac{1}{a} \left[ -\frac{\partial G}{\partial r} (r f' (1/r^2 + (2\pi/L)^2)) + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \psi} \right].$$

Рассмотрим функции

$$u(r, \psi) = \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) G(r, \psi, f(\varphi), \varphi) d\varphi,$$

$$v(r, \psi) = \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) \frac{\partial G(r, \psi, f(\varphi), \varphi)}{\partial n} d\varphi, \quad (4.10)$$

$$w(r, \psi) = \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) \frac{\partial G(r, \psi, f(\varphi), \varphi)}{\partial n} d\varphi.$$

Здесь  $G(r, \psi, \rho, \varphi,)$  — функция Грина оператора (2.23) с соответствующими глубине гофрировки граничными условиями. Элемент поверхности  $dS = \sqrt{f^2 + (f')^2} d\varphi$ . Можно считать, что соответствующий множитель в дальнейшем присоединен к неизвестным весам  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Тогда каждая из них удовлетворяет уравнению (2.23). Для нахождения неизвестных плотностей  $\alpha(\varphi)$ ,  $\beta(\varphi)$ ,  $\gamma(\varphi)$  воспользуемся граничными условиями (4.1) и дополнительно введенным соотношением (4.2).

Так как выражения (4.10) являются выражениями типа потенциала простого и двойного слоя, то в результате получаем систему граничных интегральных уравнений

$$a_n \gamma(\psi) + \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) \frac{\partial G(\varphi)}{\partial n} d\varphi - \frac{2\pi}{L} \frac{d}{d\psi} \left[ \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) G(\varphi) d\varphi \right] + \frac{2\pi}{L} f' \left( a_r \alpha(\psi) + \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \frac{\partial G(\varphi)}{\partial r} d\varphi \right) + ih \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) G(\varphi) d\varphi = 0, \quad (4.11)$$

$$h \left( a_n \gamma(\psi) + \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) \frac{\partial G(\varphi)}{\partial n} d\varphi \right) - \frac{2\pi}{L} r \left( a_r \beta(\psi) + \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) \frac{\partial G(\varphi)}{\partial r} d\varphi \right) - i^2 \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) G(\varphi) d\varphi = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{d\psi} \left[ a_n \gamma(\psi) + \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) \frac{\partial G(\varphi)}{\partial n} d\varphi \right] - ir \left( a_n \beta(\psi) + \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) \frac{\partial G(\varphi)}{\partial n} d\varphi \right) = 0. \quad (4.13)$$

Допустим, что мы нашли нетривиальное решение системы (4.11)-(4.13). Это значит, что на границе области выполнено соотношение (4.2), но из него не следует выполнение этого же соотношения внутри области. Зная  $w$  внутри области, нельзя однозначно найти  $u$ , проинтегрировав это соотношение по  $\psi$  при фиксированном  $r$ . При малом  $r$  должно найтись периодическое решение, а при интегрировании между точками граничной поверхности должны быть удовлетворены два граничных условия. Тем не менее, уравнению (2.23) удовлетворяет не только функция  $u(r, \psi)$ , но и  $\frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} - ihu$ . В силу (4.2) граничные значения  $w(r, \psi)$  из (4.10) и функции

$\frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} - ihu$  совпадают. Если область, ограниченная кривой (2.14), не является резонансной областью задачи Дирихле для оператора (2.23), то в силу единственности решения задачи Дирихле из того, что совпадают граничные значения этих (практически гармонических) функций, следует, что совпадают и сами функции на всей области. А это значит, что выполняются граничные условия (2.19) и (2.21).

Соотношения можно интегрировать по угловой координате в представлении в виде ряда Фурье, учитывая периодичность получаемой первообразной, что требует отдельного рассмотрения вхождения среднего значения, т.е. нулевой гармоники. Соответствующий множитель элемента поверхности  $dS = \sqrt{f^2 + (f')^2} d\varphi$  в дальнейшем присоединим и к функции  $a(r, \varphi)$ .

### 5. Случай мелкой гофрировки

Предположим, что мы можем продолжить функцию

$$v(r, \psi) = \int_0^{2\pi} \beta(\varphi) G(r, \psi, f(\varphi), \varphi) d\varphi,$$

где в качестве функции Грина используется представление (3.8), за границу расчетной области, задаваемой кривой  $r = f(\varphi)$ , до некоторого минимального объемлющего круга. Тогда интегрирование можно вести по границе круга — окружности фиксированного радиуса. Если функцию  $\beta(\varphi)$  представить в виде соответствующего ряда Фурье

$$\beta(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n e^{in\varphi},$$

то на границе винтовой поверхности функция  $v(r, \psi)$  также может быть представлена в виде ряда Фурье, а также в виде функционального ряда с коэффициентами Фурье функции  $\beta(\varphi)$ . Для простоты ограничимся случаем  $f(\varphi) = a + b \sin m\varphi$

$$v = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k e^{ik\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n Z_n(n(a + b \sin m\varphi)) e^{in\varphi}, \tag{5.1}$$

$c_n$  отличается от  $\tilde{c}_n$  лишь множителем, зависящим от радиуса окружности  $R$ , по которой велось интегрирование. Здесь  $Z_n$  — обобщенное обозначение соответствующей функции  $J_n$  или  $I_n$ . Это представление получается в результате подстановки соответствующего разложения в ряд Фурье функции  $\beta(\varphi)$  в интегральное представление функции  $v$  (4.10), интегрирования по границе объемлющего круга и переходе на границу исходной поверхности. Разложим функции Бесселя, зависящие от  $\sin m\varphi$  и являющимися периодическими функциями с периодом  $2\pi/m$  в ряд Фурье с периодом  $2\pi$ . Тогда

$$J_n(n(a + b \sin m\varphi)) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} d_{n,mj} e^{imj\varphi}, \tag{5.2}$$

где

$$d_{n,mj} = \frac{m}{2\pi} \int_0^{2\pi/m} J_n(n(a + b \sin m\varphi)) e^{-imj\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_n(n(a + b \sin \varphi)) e^{-ij\varphi} d\varphi.$$

Обозначим

$$d_{n,k}^{\pm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_{n\pm 1}(n(a + b \sin m\varphi)) e^{-ik\varphi} d\varphi,$$

$$I_n(n(a + b \sin m\varphi)) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} d_{n,mj} e^{imj\varphi}.$$

Тогда

$$v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} cv_n Z_n(n(a + b \sin m\varphi)) Z_n^*(nR) e^{in\varphi}.$$

Здесь  $Z_n$  в зависимости от знака  $n$  либо  $J_n$  либо  $I_n$ ,

$$Z_n^*(nR) = \begin{cases} i\frac{\pi}{2} H_n^{(1)}(nR) & \frac{2}{n} > 0, \\ K_n(nR) & \frac{2}{n} < 0. \end{cases}$$

Окончательно получаем

$$v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} cv_n d_{n,mj} Z_n^*(nR) e^{imj\varphi} \right) e^{in\varphi}.$$

Естественно, в дальнейшем мы будем вместо индекса  $n$  использовать конструкцию

$$j_{mn} = j_m + mn, \quad j_m = 0, \dots, m-1, \quad n \in \mathbf{Z}_n. \quad (5.3)$$

и будем указывать, что аргумент у функции  $Z_n$  зависит от  $n$ .

$$v = \sum_{j_m=0}^{m-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} cv_{j_{mn}} d_{j_{mn},mj}(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^*(j_{mn}R) \right) e^{im(j+n)\varphi} e^{ij_m\varphi}.$$

Введем вместо  $j$  новый индекс суммирования  $k = j + n$ , а затем сменим порядок суммирования:

$$v = \sum_{j_m=0}^{m-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} cv_{j_{mn}} d_{j_{mn},m(k-n)}(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^*(j_{mn}R) \right) e^{imk\varphi} e^{ij_m\varphi} =$$

$$= \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{j_m,k} e^{imk\varphi}, \quad (5.4)$$

$$v_{j_m,k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} cv_{j_{mn}} d_{j_{mn},m(k-n)}(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R) \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= \sum_{j_m=0}^{m-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ij_{mn} cv_{j_{mn}} d_{j_{mn},m(k-n)}(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R) \right) e^{imk\varphi} e^{ij_m\varphi} = \\ &= \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{j_m,mk}^- e^{imk\varphi}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$v_{j_m,mk}^- = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ij_{mn} cv_{j_{mn}} d_{j_{mn},m(k-n)}(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R). \tag{5.7}$$

Введем обозначение

$$\alpha_z = \begin{cases} -1, & \text{при } Z = J, \\ 1, & \text{при } Z = I, \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k^+ e^{ik\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} cv_{nn} \frac{dZ_n}{dr} (n(a + b \sin m\varphi)) e^{in\varphi},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= \sum_{j_m=0}^{m-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j_{mn}}{2} \left[ d_{j_{mn},m(k-n)}^-(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \alpha_z d_{j_{mn},m(k-n)}^+(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R) \right] cv_{j_{mn}} \right) e^{imk\varphi} e^{ij_m\varphi} = \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{j_m,mk}^+ e^{imk\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{j_m,k}^+ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j_{mn}}{2} \left[ d_{j_{mn},m(k-n)}^-(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R) + \right. \\ &\left. + \alpha_z d_{j_{mn},m(k-n)}^+(j_{mn}) Z_{j_{mn}}^* (j_{mn}R) \right] cv_{j_{mn}}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Теперь вычислим коэффициенты  $d_{n,mk}$

$$\begin{aligned} J_n(a_n + b_n \sin m\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a_n + b_n \sin m\varphi) \sin \vartheta} e^{in\vartheta} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(a_n) e^{ip\vartheta} \right) \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(b_n \sin \vartheta) e^{ikm\varphi} \right) e^{in\vartheta} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(a_n) \int_{-\pi}^{\pi} J_k(b_n \sin \vartheta) e^{i(p+n)\vartheta} d\vartheta \right\} e^{imk\varphi}. \end{aligned}$$

Мы получили, что в разложении отличны от нуля только коэффициенты с номерами, кратными  $m$ , т.е. числу заходов винта.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} J_k(b_n \sin \vartheta) e^{i(p+n)\vartheta} d\vartheta &= \int_0^{\pi} J_k(b_n \sin \vartheta) e^{i(p+n)\vartheta} d\vartheta + (-1)^k \int_0^{\pi} J_k(b_n \sin \vartheta) e^{-i(p+n)\vartheta} d\vartheta = \\ &= \pi J_{(k-p-n)/2}(b_n/2) J_{(k+p+n)/2}(b_n/2) (e^{i\pi(p+n)/2} + (-1)^k e^{-i\pi(p+n)/2}). \\ J_{n,mk}(a_n + b_n \sin m\varphi) d_{n,mk} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} J_k(a_n + b_n \sin m\varphi) e^{-imk\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(a_n) J_{(k-p-n)/2}(b_n/2) J_{(k+p+n)/2}(b_n/2) (e^{i\pi(p+n)/2} + (-1)^k e^{-i\pi(p+n)/2}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{p-n}(a_n) J_{(k-p)/2}(b_n/2) J_{(k+p)/2}(b_n/2) (e^{i\pi p/2} + (-1)^k e^{-i\pi p/2}). \end{aligned}$$

Так как полученное выражение отлично от нуля только при четном  $k - p = 2s$  и  $k + p = 2(s + p)$ , то можно ввести новый индекс суммирования  $s$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_k(b_n \sin \theta) e^{i(p+n)\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} i^{k-2s} J_{k-n-2s}(a_n) J_s(b_n/2) J_{k+s}(b_n/2).$$

Новая индексация (5.3) дает

$$d_{j_{mn},mk} = \frac{i^k}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s J_{k-j_{mn}-2s}(a_{j_{mn}}) J_s(b_{j_{mn}}/2) J_{k-s}(b_{j_{mn}}/2).$$

Вычисление коэффициентов  $d_{n,mk}$ , получающееся суммированием ряда, каждый член которого является произведением трех функций от параметров  $n$  и  $k$ , может быть выполнено с помощью рядов Фурье. Для упрощения записи суммирования ряда Фурье и разложения в ряд, мы будем пользоваться символикой интегрального преобразования Фурье.

Для пояснения вычислим функцию

$$G(k, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k - n - 2s) g(s) g(k + s) ds.$$

Сделаем преобразование Фурье по переменной  $k$

$$F_{qk}^{-1} G(q, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k - n - 2s) g(s) g(k + s) e^{-iqk} dk ds.$$

Теперь выразим функцию  $f$  через ее преобразование Фурье по переменной  $t$

$$\begin{aligned}
 F_{qk}^{-1}G(q, n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(t)g(s)g(k+s)e^{it(k-n-2s)}e^{-iqk} dk ds dt = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(t)e^{-int} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{-i(3t-q)s} ds \int_{-\infty}^{+\infty} g(k+s)e^{-i(q-t)(k+s)} d(k+s) dt.
 \end{aligned}$$

Выразим внутренние интегралы через образы Фурье функции  $g$

$$\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(t)e^{-int} Fg(3t-q)Fg(q-t) dt.$$

Применим обратное преобразование по переменной  $q$ , используя тот факт, что можно воспользоваться комбинацией  $q - 2t$

$$G(k, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(t)e^{-i(n-2k)t} F^{-1}(Fg(t-q)Fg(t+q)) dt.$$

Для получения функции  $G(k, n)$  осталось сделать прямое преобразование Фурье по переменной  $t$ . Таким образом получение суммы ряда для каждой пары  $(k, n)$  свелось к применению двух прямых и двух обратных преобразований Фурье. Для конечных сумм размерности  $N$  вместо  $N^3$  действий используется  $4N \ln N$ .

Приведем систему уравнений граничных условий (4.1) с учетом введенной компоненты  $w$  (4.2) к такому виду, чтобы в коэффициентах при неизвестных функциях и их производных не было деления на величины  $r, f$ , их производные и комбинации. Тогда в эти коэффициенты будут входить только синусы и косинусы от аргументов, кратных  $m$ , т.е. кратных числу заходов винта на граничной поверхности. В результате вместо системы граничных интегральных уравнений общего вида с произвольным граничным контуром, к которой мы свели задачу, получим систему

$$i \frac{2\pi}{L} r \frac{\partial v}{\partial r} - {}^2 u - ihw = 0, \tag{5.9}$$

$$\frac{d}{d\psi} [rw] - f'w + ir^2 \frac{\partial v}{\partial r} - if' \frac{\partial v}{\partial \psi} = 0, \tag{5.10}$$

$$\frac{2\pi}{L} \frac{\partial u}{\partial \psi} - ihu - w = 0, \tag{5.11}$$

в которой будем использовать представления неизвестных функций рядами Фурье вида (5.4)-(5.8).

Из последнего уравнения можно выразить гармоники Фурье функции  $u$  на граничной поверхности, используя выражения типа (5.4) для функции  $w$  и (5.7)

для  $u$ , найти проекции на  $e^{imq}$  и приравнять коэффициенты Фурье функций  $w$  и  $u$ . Получим

$$cu_{jmn} = \frac{-icw_{jmn}}{\left(\frac{2\pi}{L}(jmn) - h\right)}. \quad (5.12)$$

Таким образом, получив возможность выразить элементы  $cu_k$  через  $cw_k$ , мы можем в случае мелкой гофрировки ограничиться только двумя уравнениями относительно неизвестных  $u$  и  $w$ . Их проекции на гармоники Фурье дают нам линейную алгебраическую систему для коэффициентов  $cw_{jmn}$  и  $cu_{jmn}$ . Факторизация по параметру  $J_m$  приводит ее к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jmn \left[ a \left[ d_{jmn, m(k-n)}^-(jmn) + \alpha_z d_{jmn, m(k-n)}^+(jmn) \right] - \right. \\ & \quad - i \frac{b}{2} \left[ d_{jmn, m(k-n+1)}^-(jmn) + \alpha_z d_{jmn, m(k-n+1)}^+(jmn) \right] - \\ & \quad \left. - i \frac{b}{2} \left[ d_{jmn, m(k-n-1)}^-(jmn) + \alpha_z d_{jmn, m(k-n-1)}^+(jmn) \right] \right] cw_{jmn} - \\ & \quad - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{L}(jmn) - h\right)} + h \right] d_{jmn, m(k-n)}(jmn) cw_{jmn} = 0, \\ & \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ ad_{jmn, m(k-n)}(jmn) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{b}{2} \left[ \left( \frac{m}{k} - i \right) d_{jmn, m(k-n+1)}(jmn) + \left( \frac{m}{k} + i \right) d_{jmn, m(k-n-1)}(jmn) \right] \right] cw_{jmn} + \\ & \quad + i \frac{b}{k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{jmn}{2} \left[ \left( a^2 + \frac{b^2}{2} \right) \left[ d_{jmn, m(k-n)}^-(jmn) + d_{jmn, m(k-n)}^+(jmn) \right] - \right. \right. \\ & \quad - iab \left[ d_{jmn, m(k-n+1)}^-(jmn) + d_{jmn, m(k-n+1)}^+(jmn) \right] + \\ & \quad + \left[ d_{jmn, m(k-n-1)}^-(jmn) + d_{jmn, m(k-n-1)}^+(jmn) \right] - \\ & \quad - \frac{b^2}{4} \left[ d_{jmn, m(k-n+2)}^-(jmn) + d_{jmn, m(k-n+2)}^+(jmn) \right] - \\ & \quad \left. \left. - \frac{b^2}{4} \left[ d_{jmn, m(k-n-2)}^-(jmn) + d_{jmn, m(k-n-2)}^+(jmn) \right] \right] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{bm(jmn)}{2} \left[ d_{jmn, m(k-n+1)}(jmn) + d_{jmn, m(k-n-1)}(jmn) \right] \right\} cw_{jmn} = 0. \end{aligned}$$

### 6. Случай глубокой гофры

Используем функцию Грина (3.18) для интегрального представления полей в винтовом волноводе в случае глубокой гофры, когда интегрирование ведется по контуру

$$\rho_\delta(\psi) = a_\delta + b \sin m\psi, \quad a_\delta > a,$$

$$u(r, \varphi) = \int_C \alpha_c(\psi) G(r, \rho(\psi), \varphi, \psi) dS.$$

Перейдем от интегрирования по длине дуги к интегрированию по переменной  $\psi$ , включив элемент длины дуги  $\sqrt{(\rho^2(\psi) + (\rho'(\psi))^2)}$  в функцию  $\alpha(\psi) = \alpha_c(\psi) \sqrt{(\rho^2(\psi) + (\rho'(\psi))^2)}$ ,

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\psi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} g_n^k J_n(\mu_n^k r / R_a) J_n(\mu_n^k \rho_\delta(\psi) / R_a) \exp(in(\varphi - \psi)) d\psi.$$

Теперь воспользуемся разложениями функций Бесселя в ряды

$$J_n(\mu_n^k r(\varphi) / R_a) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} d_{n,mj}^k e^{imj\varphi}, \quad J_n(\mu_n^k \rho_\delta(\psi) / R_a) = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} d_{n,mj_1}^{\delta,k} e^{imj_1\psi},$$

$$\alpha(\psi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha_l e^{il\psi}.$$

Тогда

$$u(r(\varphi), \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \alpha_l g_n^k d_{n,mj}^k d_{n,mj_1}^{\delta,k} e^{i(mj+n)\varphi} e^{i(mj_1+l-n)\psi} d\psi.$$

В результате интегрирования суммирование по индексу  $n$  пропадает и вместо индекса  $n$  будет  $n = l + mj_1$

$$u(r(\varphi), \varphi) = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha_l g_{l+mj_1}^k d_{l+mj_1,mj}^k d_{l+mj_1,mj_1}^{\delta,k} e^{i(l+m(j+j_1))\varphi}.$$

Коэффициенты  $d_{n,mj}^k$  и  $d_{n,mj}^{\delta,k}$  нужно считать только один раз для каждого заданного граничного контура. Введем вместо  $l$  двойной индекс суммирования  $l = j_m + mn$ . Естественно, меняя при этом порядки суммирования (замена индекса производится для внутреннего индекса). В результате всех смен порядков суммирования

получим

$$\sum_{j_m=0}^{m-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j_m+mn} g_{j_m+m(n+j_1)k}^k d_{j_m+m(n+j_1),mj}^k d_{j_m+m(n+j_1),mj_1}^{\delta,k} \right] \times \\ \times e^{ij_m\varphi} e^{im(n+j+j_1)\varphi}.$$

Вместо индекса  $j$  введем  $q = n + j + j_1$  и получим

$$\sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j_m+mn} g_{j_m+m(n+j_1)k}^k d_{j_m+m(n+j_1),m(q-n-j_1)}^k \times \right. \\ \left. \times d_{j_m+m(n+j_1),mj_1}^{\delta,k} \right] e^{imq\varphi}.$$

Вместо индекса  $j_1$  введем  $j = n + j_1$  и получим

$$= \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j_m+mn} g_{j_m+mj}^k d_{j_m+mj,m(q-j)}^k d_{j_m+mj,m(j-n)}^{\delta,k} \right] e^{imq\varphi}.$$

Изменим порядок суммирования, получаем выражение, аналогичное (5.4)

$$u(r(\varphi), \varphi) = \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j_m+mn} \Omega_{qn} \right] e^{imq\varphi},$$

где

$$\Omega_{qn} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_{j_m+mj}^k d_{j_m+mj,m(q-j)}^k d_{j_m+mj,m(j-n)}^{\delta,k}. \quad (6.1)$$

Теперь приведем производные от решения:

$$\frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\psi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} i n g_n^k J_n(\mu_n^k r / R_a) J_n(\mu_n^k \rho_\delta(\psi) / R_a) \exp(in(\varphi - \psi)) d\psi.$$

После аналогичных преобразований окончательно получаем

$$\frac{\partial u(r(\varphi), \varphi)}{\partial \varphi} = \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j_m+mn} \Omega_{\varphi qn} \right] e^{imq\varphi},$$

где

$$\Omega_{\varphi qn} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} i(j_m + mj) g_{j_m+mj}^k d_{j_m+mj,m(q-j)}^k d_{j_m+mj,m(j-n)}^{\delta,k}. \quad (6.2)$$

Для производной по  $r$

$$\frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\psi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (\mu_n^k / R_a) g_n^k J_n'(\mu_n^k r / R_a) J_n(\mu_n^k \rho_\delta(\psi) / R_a) \times \\ \times \exp(in(\varphi - \psi)) d\psi, \\ \frac{\partial u(r(\varphi), \varphi)}{\partial r} = \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{j_m+mn} \Omega r_{qn} \right] e^{imq\varphi},$$

где

$$\Omega r_{qn} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (\mu_n^k / 2R_a) g_{j_m+mj}^k [d_{j_m+mj, m(q-j)}^{-,k} + d_{j_m+mj, m(q-j)}^{+,k}] d_{j_m+mj, m(j-n)}^{\delta, k}. \quad (6.3)$$

Выражение для  $\Omega n_{qn}$  легко получается с помощью линейной комбинации  $\Omega r_{qn}$  и  $\Omega \varphi_{qn}$  и разложения  $\frac{f'}{r}$  в соответствующий ряд Фурье.

В систему уравнений (4.11)-(4.13) кроме интегральных составляющих входят выражения типа  $a_n \gamma(\psi)$ , где коэффициенты разлагаются в соответствующие ряды Фурье

$$a_n(\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{n,l} e^{iml\varphi}.$$

Тогда

$$a_n \gamma(\psi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{n,l} e^{iml\varphi} \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_{j_m+mj} e^{imj\varphi} \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{n,l} \gamma_{j_m+mj} e^{im(j+l)\varphi}.$$

Заменяя  $q = j + l$ , получаем

$$a_n \gamma(\psi) = \sum_{j_m=0}^{m-1} e^{ij_m\varphi} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_{j_m+mj} a_{n,q-j} \right) e^{imq\varphi}.$$

Теперь мы можем, подставив полученные представления для функций  $u, v, w$  и их производных и перейдя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , т.е. при стремлении контура интегрирования к границе волновода, заменить систему уравнений (4.11) - (4.13) соответствующей бесконечной системой линейных алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье неизвестных функций. Предварительно проинтегрируем первое и третье уравнения по  $\varphi$ , учитывая условие периодичности и особо выделяя случай  $j_m + q = 0$ .

Как коэффициенты уравнений системы, так и коэффициенты разложения входящих в уравнения неизвестных функций и их производных нумеруются с шагом, равным числу заходов винтовой поверхности. Поэтому в разложении уравнений в

ряды Фурье в коэффициент при каждой гармонике будут входить суммы коэффициентов Фурье неизвестных функций с шагом, равным числу заходов винта на поверхности волновода. Следовательно, система линейных уравнений распадается на точно такое же число независимых подсистем. Случаю  $j_m = 0$  соответствует линейное подпространство в линейном пространстве показателей экспонент базисных функций преобразования Фурье.  $j_m \neq 0$  определяет соответствующий класс смежности в этом пространстве [18].

Для фиксированного  $j_m$  получаем замкнутую подсистему. Распишем ее проекцию на  $e^{i(j_m+q)\varphi}$  при  $j_m + q \neq 0$ .

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{j_m + q} (a_{n,q-j} + \Omega n_{q,j}) \gamma_{j_m+m_j} - \frac{2\pi}{L} \Omega_{q,j} \alpha_{j_m+m_j} + \frac{1}{(j_m + q)} \left( \frac{2\pi}{L} ((f' a_r)_{q-j} + (f' \Omega r)_{q,j}) + ih \Omega_{q,j} \right) \alpha_{j_m+m_j} \right) = 0, \quad (6.4)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left( h (a_{n,q-j} + \Omega n_{q,j}) \gamma_{j_m+m_j} - \frac{2\pi}{L} ((r a_r)_{q-j} + (r \Omega r)_{q,j}) \beta_{j_m+m_j} - i^2 \Omega_{q,j} \alpha_{j_m+m_j} \right) = 0, \quad (6.5)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left( (a_{n,q-j} + \Omega n_{q,j}) \gamma_{j_m+m_j} - i \frac{1}{j_m + m_j} ((r a_n)_{q-j} + (r \Omega n)_{q,j}) \beta_{j_m+m_j} \right) = 0.$$

Отдельно распишем проекции первого и третьего уравнений на нулевую гармонику  $j_m + m_q = 0$ , что возможно лишь при  $j_m = q = 0$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left( (a_{n,-j} + \Omega n_{0,j}) \gamma_{m_j} + \left( \frac{2\pi}{L} ((f' a_r)_{-j} + (f' \Omega r)_{0,j}) + ih \Omega_{0,j} \right) \alpha_{m_j} \right) = 0,$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} ((r a_n)_{-j} + (r \Omega n)_{0,j}) \beta_{m_j} = 0.$$

## 7. Поиск дисперсионных кривых

Заменив систему интегральных уравнений (4.11)-(4.13) соответствующей бесконечной системой линейных алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье неизвестных функций для случая мелкой гофры и системы (6.4)-(6.5) для глубокой гофры, выделим из них подсистемы для фиксированного  $j_m$ . В обоих случаях ограничимся конечномерной матрицей для коэффициентов при гармониках  $e^{-iN\varphi}, \dots, e^{iN\varphi}$ . Найдем её сингулярное представление. Теперь в качестве минимизируемого функционала возьмем наименьшее  $s_N$  – число этой матрицы. Точкой на приближенной дисперсионной кривой и будет  $\min(s_N)_h$ . Дисперсионная кривая находится предельным переходом при  $N \rightarrow \infty$ .

Для облегчения вычислений дисперсионных кривых мы можем искать величину  $h$  при вариации  $l$ . График зависимости минимального  $s$ -числа от  $l$  носит ярко выраженный «клювообразный» характер.

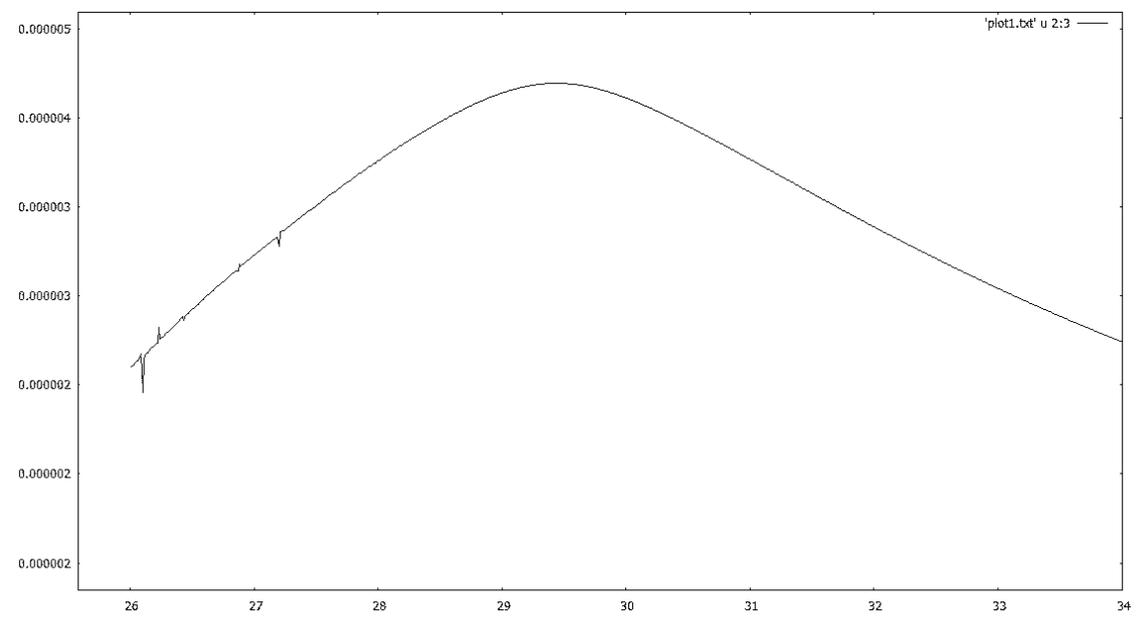


Рис. 2 График зависимости MinS-числа от волнового числа. Узкие провалы – область локализации собственных мод.

Так как для случая мелкой гофры входящие в функцию Грина (3.8) функции Бесселя зависят от параметра  $h$ , то для движения вдоль дисперсионной кривой, соответствующей «дну» узкого глубокого оврага, необходимо упростить способ вариации минимального  $s$ -числа, для чего необходимо упростить сначала варьирование коэффициентов исходной матрицы.

Введем величину  $h_0$  и будем искать приращение  $\delta$  значения  $h_0$  при фиксированной величине  $l$

$$h_0^2 = l^2 - \left( \frac{2\pi(m + h_f)}{l} \right)^2, \quad h_{0,\delta}^2 = h_0^2$$

и теперь по найденному значению  $h_f = \frac{l}{2L}(h_0 + \delta)$  находим соответствующее значение  $h_f$ .

$$h_{mn}^2 = \left( \frac{0L}{2\pi(j_{mn})} \right)^2 - 1 + \frac{2Lm}{lj_{mn}} + \frac{h_0}{j_{mn}},$$

$$j_{mn} = \frac{2\pi}{L} |j_{mn}| \kappa_{j_{mn}},$$

$$j_{mn,\delta} = \frac{2\pi}{L} |j_{mn}| \sqrt{\kappa_{j_{mn}}^2 + \delta/j_{mn}},$$

$$\Delta_{j_{mn},\delta} = \frac{j_{mn,\delta}}{j_{mn}} = \sqrt{1 + \delta/j_{mn}\kappa_{j_{mn}}^2}.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_{jmn}^2 &= 1 - \left( \frac{{}_0L}{2\pi jmn} \right)^2 - \frac{2Lm}{ljmn} - \frac{h_0}{jmn}, \\ \chi_{j_m,n} &= \frac{2\pi}{L} |jmn| \tilde{\kappa}_{jmn}, \\ \chi_{jmn,\delta} &= \frac{2\pi}{L} |jmn| \sqrt{\tilde{\kappa}_{jmn}^2 - \delta/jmn}, \\ \tilde{\Delta}_{jmn,\delta} &= \frac{\chi_{jmn,\delta}}{\chi_{jmn}} = \sqrt{1 - \delta/jmn \tilde{\kappa}_{jmn}^2}.\end{aligned}$$

Воспользуемся известными разложениями теоремы умножения для функций Бесселя:

$$J_p(a_{jmn,\delta}) = J_p(a_{jmn} \Delta_{jmn,\delta}) = (-1)^p \Delta_{jmn,\delta}^{|p|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_{|p|+k}(a_{jmn}) \left( a_{jmn} \frac{1 - \Delta_{jmn,\delta}^2}{2} \right)^k.$$

Это разложение Ломмеля, (Ватсон, стр. 154), справедливо при  $p \geq 0$ .

$$\begin{aligned}J_p(a_{jmn,\delta}) &= (-1)^p \Delta_{jmn,\delta}^{|p|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_{|p|+k}(a_{jmn}) \left( \frac{a_{jmn}}{2} \left( 1 - \frac{2}{jmn} \right) \right)^k = \\ &= (-1)^p \Delta_{jmn,\delta}^{|p|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_{|p|+k}(a_{jmn}) \left( \frac{a_{jmn}}{2} \frac{jmn - 2}{jmn} \right)^k = \\ &= (-1)^p \Delta_{jmn,\delta}^{|p|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_{|p|+k}(a_{jmn}) \left( -\frac{a}{2} \frac{\left( \frac{2\pi}{L} (jmn) \right)^2 \frac{\delta}{jmn}}{jmn} \right)^k = \\ &= (-1)^p \Delta_{jmn,\delta}^{|p|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_{|p|+k}(a_{jmn}) \left( -\frac{\pi a \delta}{L \kappa_{jmn}} \right)^k, \\ I_p(a \chi_{jmn,\delta}) &= I_p(a \chi_{jmn} \tilde{\Delta}_{jmn,\delta}) \tilde{\Delta}_{jmn,\delta}^{|p|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} I_{|p|+k}(a \chi_{jmn}) \left( \frac{\pi a \delta}{L \tilde{\kappa}_{jmn}} \right)^k.\end{aligned}$$

Аналогичные разложения получаются и для коэффициента  $b/2$ .

Мы получили многоиндексное (тензорное) представление для элементов коэффициентов матрицы нашей линейной системы. Для его реализации можно воспользоваться идеями работ [25], [27]. Для этого преобразуем произведение рядов по степеням  $\delta$  приращения  $h_0$ .

$$\begin{aligned}&J_s(b_{jmn} \Delta_{jmn,\delta}/2) J_{k-s}(b_{jmn} \Delta_{jmn,\delta}/2) = \\ &= q_b(k, s) \Delta_{jmn,\delta}^{|k-s|+|s|} \sum_{j_1=0}^{+\infty} \sum_{j_2=0}^{+\infty} \frac{1}{j_1! j_2!} J_{|s|+j_1}(b_{jmn}/2) J_{|k-s|+j_2}(b_{jmn}/2) \left( -\frac{\pi b \delta}{2L \kappa_{jmn}} \right)^{j_1+j_2}.\end{aligned}$$

Здесь

$$q_b(k, s) = \begin{cases} 1 & k > s \geq 0, \\ (-1)^k & k < s \leq 0, \\ (-1)^{s-k} & s > k > 0, \\ (-1)^s & s < k \leq 0. \end{cases}$$

Взяв за новые индексы  $j_3 = j_1 + j_2$  и  $j_4 = j_2$  и опять в полученных выражениях обозначая их через  $j_1, j_2$ , находим

$$q_b(k, s) \Delta_{jmn, \delta}^{|k-s|+|s|} \sum_{j_1=0}^{+\infty} \left[ \sum_{j_2=0}^{j_1} \frac{1}{(j_1 - j_2)! j_2!} J_{|s|+j_2}(b_{jmn}/2) J_{|k-s|+j_1-j_2}(b_{jmn}/2) \right] \left( -\frac{\pi b \delta}{2L\kappa_{jmn}} \right)^{j_1}.$$

Выражение в квадратных скобках обозначим  $db_{jmn, s, k}(j_1)$

$$db_{jmn, s, k}(j_1) = \sum_{j_2=0}^{j_1} \frac{1}{(j_1 - j_2)! j_2!} J_{|s|+j_2}(b_{jmn}/2) J_{|k-s|+j_1-j_2}(b_{jmn}/2).$$

Может быть посчитано с помощью Быстрого Преобразования Фурье (БПФ). Для этого зададим два вектора длины  $M = 2^K, 2j_1 + 2 \leq M$ :

$$\left\{ \frac{1}{0!} J_{|s|}(b_{jmn}/2), \frac{1}{1!} J_{|s|+1}(b_{jmn}/2), \dots, \frac{1}{j_1!} J_{|s|+j_1}(b_{jmn}/2), 0, \dots, 0 \right\},$$

$$\left\{ \frac{1}{0!} J_{|k-s|}(b_{jmn}/2), \frac{1}{1!} J_{|k-s|+1}(b_{jmn}/2), \dots, \frac{1}{j_1!} J_{|k-s|+j_1}(b_{jmn}/2), 0, \dots, 0 \right\}.$$

Тогда, взяв от обоих векторов дискретное преобразование Фурье с помощью БПФ, перемножив результаты и применив к произведению обратное к БПФ преобразование, получим вектор длины  $M$ , у которого на первых  $j_1 + 1$  местах будут стоять элементы  $db_{jmn, s, k}(j), j = 0, 1, \dots, j_1$ . Теперь, обозначив

$$kns = |k - jmn - 2s|, \quad ksn_s = |k - s| + |s| + kns,$$

$$q_a(k, s) = \begin{cases} 1 & k - jmn - 2s \geq 0, \\ (-1)^{kns} & k - jmn - 2s < 0, \end{cases}$$

и учитывая, что значение  $j_m$  указано в  $jmn$ , запишем выражение для  $d_{jmn, mk}(\delta)$ :

$$\frac{i^k}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} q_b(k, s) \Delta_{jmn, \delta}^{|k-s|+|s|} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^s q_a(k, s) J_{kns}(a_{jmn} \Delta_{jmn, \delta}) db_{jmn, s, k}(j) \left( -\frac{\pi b \delta}{2L\kappa_{jmn}} \right)^j =$$

$$= \frac{i^k}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s q_a(k, s) q_b(k, s) \Delta_{jmn, \delta}^{ksns} \sum_{j_3=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j_3!} J_{kns+j_3}(a_{jmn}) db_{jmn, s, k}(j) \left( \frac{b}{2a} \right)^j \left( -\frac{\pi a \delta}{L\kappa_n} \right)^{j+j_3}.$$

Теперь поступим аналогично предыдущему

$$\frac{i^k}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s q_a(k, s) q_b(k, s) \Delta_{jmn, \delta}^{ksns} \sum_{j=0}^{+\infty} dab_{jmn, s, k}(j) \left( -\frac{\pi a \delta}{L \kappa_n} \right)^j.$$

где

$$dab_{jmn, s, k}(j) = \sum_{j_3=0}^j \frac{1}{j_3!} J_{kns+j_3}(a_{jmn}) db_{jmn, s, k}(j-j_3) \left( \frac{b}{2a} \right)^{j-j_3}.$$

Оно также считается с помощью БПФ. Поменяв порядок суммирования, окончательно получаем ряд по малому параметру  $\left( -\frac{\pi a \delta}{L \kappa_n} \right)$

$$d_{jmn, mk}(\delta) = \frac{i^k}{2\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s q_a(k, s) q_b(k, s) \Delta_{jmn, \delta}^{ksns} dab_{jmn, s, k}(j) \right] \left( -\frac{\pi a \delta}{L \kappa_n} \right)^j.$$

Обозначим

$$q_a^{\pm}(k, s) = \begin{cases} 1, & k - j_{mn} - 2s \pm 1 \geq 0, \\ (-1)^{kns}, & k - j_{mn} - 2s \pm 1 < 0, \end{cases}$$

$$dab_{jmn, s, k}^{\pm}(j) = \sum_{j_3=0}^j \frac{1}{j_3!} J_{kns \mp 1 + j_3}(a_{jmn}) db_{jmn, s, k}(j-j_3) \left( \frac{b}{2a} \right)^{j-j_3}.$$

Тогда

$$d_{jmn, m(k-n)}^{\pm}(\delta) = \frac{i^k}{2\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s q_a^{\pm}(k, s) q_b(k, s) \Delta_{jmn, \delta}^{ksns \mp 1} dab_{jmn, s, k}^{\pm}(j) \right] \left( -\frac{\pi a \delta}{L \kappa_n} \right)^j.$$

Здесь  $n$  меняется в пределах  $\alpha_- < n < \alpha_+$ , где  $\alpha_{\pm} = \frac{L}{2\pi}(h_{\pm})$ . Для остальных значений  $n$

$$db_{n, s, s+k}(j_1) = \sum_{j_2=0}^{j_1} \frac{1}{(j_1 - j_2)! j_2!} I_{s+j_2}(b_n/2) I_{k-s+j_1-j_2}(b_n/2),$$

$$dab_{n, s, k-s}(j) = \sum_{j_3=0}^j \frac{1}{j_3!} I_{k-n-2s+j_3}(a_n) db_{n, s, k-s}(j-j_3) \left( \frac{b}{2a} \right)^{j-j_3},$$

$$dab_{n, s, k-s}^{\pm}(j) = \sum_{j_3=0}^j \frac{1}{j_3!} I_{k-n \mp 1 - 2s + j_3}(a_n) db_{n, s, k-s}(j-j_3) \left( \frac{b}{2a} \right)^{j-j_3}.$$

Применение алгоритмов БПФ к тензорному многоиндексному представлению матрицы системы линейных уравнений для случая мелкой гофры дополнительно сокращает время счета.

В случае глубокой гофры в выражении (3.18) для функции Грина от величины зависят только коэффициенты  $g_n^k$ , что, существенно облегчает нахождение вариации рассматриваемого функционала. Ценой за это упрощение является дополнительное суммирование по номерам корней функций Бесселя в выражениях (6.1)-(6.3). Напомним, что коэффициенты  $d_{j_m+mj,m(q-j)}^k$  в этих выражениях считаются только один раз.

## Заключение

Мы разбили исходную задачу поиска дисперсионных кривых на  $m$  подзадач, где  $m$  — число заходов винта гофрированной поверхности. Каждая из подзадач эквивалентна исходной, но «однозаходной» задаче для области с границей типа  $r = f(\varphi) = a + b \sin \varphi$  с разрезом по радиусу при  $\varphi = 0$ . Значения неизвестных функций на границе разреза связаны соотношением

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi)e^{i2\pi j/m} \text{ где } j = \overline{0, m-1}.$$

Аналогичные двумерные задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца вне разомкнутых кривых (разрезов) на плоскости с импедансным краевым условием рассмотрены в [10, 11].

К сожалению, как стало известно лишь из некролога В. С. Рябенского уже после принятия статьи в печать, им был рассмотрен альтернативный метод решения рассмотренных задач [16].

## Список цитируемых источников

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: ФМ, 1961.— 245 с.  
Bari N. K. A treatise on trigonometric series. Oxford-New York: Pergamon Press, 1964.
2. *Братман В. Л., Денисов Г. Г., Самсонов С. В., Кросс А. У., Фелмс А. Д. Р., Хе В.* Высокоэффективные широкополостные gyro-ЛБВ и gyro-ЛОВ со спирально-гофрированной поверхности волноводами. // изв. ВУЗ-ов. Радиофизика. — 2007. — Т. 507, No 2. — С. 104–117. (in Russian)  
Bratman V. L., Denisov G. G., Samsonov S. V., Kross A. W., Phelps A. D. R., He W. High-efficiency wideband gyro-TWTs and gyro-BWOs with helically corrugated waveguides. Radiophysics and Quantum Electronics, 50, 2, 104–117 (2007). (in Russian)
3. *Бутковский А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. — М.: Наука. 1979.— 224 с.  
Butkovsky A. G. Characteristics of systems with distributed parameters. Moscow, Science Publishers, 1979. (in Russian)
4. *Галишников Т. Н., Ильинский А. С.* Численные методы в задачах дифракции. — М.: изд-во МГУ, 1987. — 208 с.  
Galishnikova T. N., Ilinsky A. S. Numerical methods in diffraction problems. Moscow, MSU Publishers, 1987. (in Russian)

5. *Ильин В. А., Моисеев Е. М.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. // УМН. — 2005. — Т. 60, No 6 (366) — С. 89–114.  
 Il'in V. A., Moiseev E. M. Optimization of boundary controls by string oscillations. Uspekhi Math Nauk, 60, 6 (366), 89–114 (2005). (in Russian)
6. *Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Математические модели электродинамики. — М.: Высшая школа, 1991. — 224 с.  
 Il'insky A. S., Kravtsov V. V., Sveshnikov A. G. Mathematical models of electrodynamics. M.: High School, 1991. (in Russian)
7. *Ковалев Н. Ф., Орлова М. М., Петелин М. М.* Трансформация волн в многомодовом волноводе с гофрированными стенками. // изв. ВУЗ-ов. Радиофизика. — 1968. — Т. 11, No 5. — С. 783–786.  
 Kovalev N. F., Orlova I. M., Petelin M. I. Wave transformation in a multimode waveguide with corrugated walls. Notes of Hight Schools. Radiophysics and Quantum Electronics 11, 5, 783–786 (1968). (in Russian)
8. *Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л.* Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. — М.: ФизМАТЛит, 2006. — 416 с.  
 Kravchenko V. F., Rvachev V. L. Algebra of logic, atomic functions and wavelets in physical applications. Moscow: FIZMATLIT, 2006. (in Russian)
9. *Кулыгин М. Л.* Расчет дисперсионных характеристик круглого волновода с глубокой винтовой гофрировкой методом ФДТР. // Изв. вузов. Радиофизика. — 2004. — Т. 47, No 1.— С. 69.  
 Kulygin M. L. Calculation of the dispersion characteristics of a circular waveguide with deep screw corrugated using the FDTD method. Notes of Hight Schools. Radiophysics and Quantum Electronics, 47, 1, 69 (2004). (in Russian)
10. *Крутницкий П. А.* О потенциалах Стокса для скоростей // УМН. — 2007. — Т. 62, No 6 (378). — С. 179–180.  
 Krutitsky P. A. On Stokes potentials for velocities. Differential equations. Russian Math. Surveys, 62, 6, 1212–1214 (2007).
11. *Крутницкий П. А.* О потенциале Стокса для давления // УМН. — 2007. — Т. 62, No 2 (374). — С. 177–178.  
 Krutitsky P. A. On Stokes potential for pressure. Russian Math. Surveys, 62, 2, 385–387 (2007).
12. *Лифанов М. К.* Особые интегральные уравнения и методы их численного решения. — Москва: МАКС-Пресс, 2006. — 68 с.  
 Lifanov M. K. (2006). Special integral equations and methods for their numerical solution. Moscow: MAKS-Press. (in Russian)
13. *Мишакин С. В., Самсонов С. В.* Метод расчета собственных мод винтового волновода, основанный на решении эквивалентной двумерной задачи путем разложения полей по модам круглого волновода. // Изв. вузов. Радиофизика. — 2011. — Т. 54, No 3. — С. 195–206.  
 Mishakin S. V., Samsonov S. V. The method for calculating the eigen modes of a helical waveguide based on solving an equivalent two-dimensional problem by expanding the

- fields by modes of a circular waveguide. Notes of High Schools. Radiophysics, 54, 3, 195–206 (2011). (in Russian)
14. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. — Москва: Издательство иностранной литературы, 1957. — 256 с.  
Miranda C. Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1955.
  15. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Вычисление функций на ЭВМ. Справочник. — Киев: Наукова думка, 1984. — 600 с.  
Popov B. A., Tesler G. S. Calculation of functions on a computer. Reference book. Kiev: Naukova Dumka, 1984.
  16. *Рябенский В. С., Утюжников С. В.* Алгоритм вычисления решения модельной разностной задачи с краевыми условиями на разрезе на базе потенциала с плотностью из пространства скачков. // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша, 2013.
  17. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I — СМФН, РУДН, М., 2007. — 26.— С. 3–132.  
Skubachevsky A. L. Nonclassical boundary value problems I. Contemporary Math Fundamental Directions, 26, 3–132 (2007). (in Russian)
  18. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1964. — 424 с.  
Reference mathematical library. Functional Analysis. Moscow: Nauka, 1964. (in Russian)
  19. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: изд-во МГУ; изд-во «Наука», 2004. — 798 с.  
Tikhonov A. N., Samarsky A. A. Equations of mathematical physics. Moscow: MSU Publishers, 2004. (in Russian)
  20. *Фиктэнгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. II. 8 изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 864 с.  
Fiktengol'ts G. M. Course of differential and integral calculus. Vol.2, Moscow: FIZMATLIT, 2003. (in Russian)
  21. *Юнаковский А. Д.* Быстрые алгоритмы расчета функций Грина для моделирования распространяющихся мод винтового волновода. // Труды XIV научной конференции по радиоп физике, ННГУ. — 2010. — С. 269–271.  
Yunakovsky A. D. Fast algorithms for calculating Green's functions for modeling propagating modes of a screw waveguide. Proceedings of the XIV Scientific Conference on Radiophysics, NSU. 269–271 2010. (in Russian)
  22. *Denisov G. G., Kulygin M. L.* Numerical modeling of processes in circular waveguide with deep helical corrugation. // Proc. of 5th Int. conf. «Strong Microwaves in Plasmas», Nyzhny Novgorod. — 2002.
  23. *Ewald P. P.* Die berechnung optischer und gitterpotentiale. // Ann. Phys. — 2001. — Vol. 64. — P. 253–287; translated by A. Cornell Atomic International Library, 1964.
  24. *Keller J. B.* Singularities and Rayleigh's hypothesis for diffraction gratings. // J. Opt. Soc. Am. A. — 2000. — Vol. 17, No 3, — P. 456–457.

25. *Oseledets I. V., Savostyanov D. V., Tyrtyshnikov E. E.* Fast simultaneous orthogonal reduction to triangular matrices. // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* — 2009. — Vol. 31. — P. 316–330.
26. *Oseledets I. V., Tyrtyshnikov E. E., Zamarashkin N. L.* *Matrix inversion cases with size-independent tensor rank estimates.* // *Linear Algebra Appl.*, submitted, 2008.
27. *Oseledets I. V., Savostyanov D. V., Tyrtyshnikov E. E.* Tucker dimensionality reduction of three-dimensional arrays in linear time. // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* — 2008. — Vol. 30, No 3. — P. 939–956.
28. *Petit R., Cadilhac M.* Sur la diffraction d'une onde plane par un reseau infiniment conducteur . // *C. R Acad. Sci., Paris, Ser B.* — 1966. — Vol. 262. — P. 468–471.
29. *Sevgi L.* *Complex Electromagnetic Problems and Numerical Simulation Approaches.*— New York: IEEE Press and John Wiley, 2003.
30. *Yunakovsky A. D.* Fast Algorithms for Implementation of the Green's Function // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2012. — Vol. 180, No 6. — P. 817–833.

Получена 16.01.2018