ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

Математический журнал

Главный редактор: д-р физ.-мат. наук О. В. Анашкин, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь.
Заместитель главного редактора: д-р физ.-мат. наук О. В. Починка, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород.
Редакционная коллегия:
Е. П. Белан, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;
А. Т. Барабанов, д-р техн. наук, Севастопольский государственный ун-т, Севастополь;
В. З. Гринес, д-р физ.-мат. наук, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород;
Г. В. Демиденко, д-р физ.-мат. наук, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
А. Л. Зуев, д-р физ.-мат. наук, Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany;
Н. Д. Копачевский, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;
В. А. Лукьяненко, канд. физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;
М. А. Муратов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;
И. В. Орлов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;
Г. С. Осипенко, д-р физ.-мат. наук, Севастопольский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, Севастополь;
В. Н. Тхай, д-р физ.-мат. наук, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Москва;
А. Ф. Хрусталев, д-р физ.-мат. наук, Севастопольский государственный ун-т, Севастополь;
В. Н. Чехов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь.

Том 7(35), №3, 205-302.
Печатается по решению Научно-технического Совета КФУ протокол №11 от 21.12.2017.

ISSN 0203–3755

Адрес редакционной коллегии: Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, к. 203В, пр-т Вернадского, 4, Симферополь 295007, Россия.
Тел. +7 978 7715582. E-mail: dynsys2011@yandex.ru

© Крымский федеральный ун-т, 2017

Свидетельство о регистрации средства массовой информации — ПИ №ФС77-61810, выдано 18.05.15.

Динамические системы, 2017, том 7(35), №3, 207–228

УДК 517.958

О малых движениях гидросистемы «вязкоупругая жидкость-идеальная жидкость», заполняющей неподвижный сосуд[1]

Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: kopachevsky@crimea.edu*

Аннотация. В данной работе изучается проблема малых движений гидросистемы "вязкоупругаяжидкость-идеальная жидкость", заполняющей неподвижный сосуд. Методы, развитые в предыдущих работах первого автора, посвящённых исследованию проблем малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости, а также систем идеальных жидкостей, позволяют получить результаты о разрешимости начально-краевой задачи для исследуемой проблемы.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, идеальная жидкость, гидродинамическая система, ортопроектор, операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши.

Small movements of hydrosystem in stationary containers

N. D. Kopachevsky, E. V. Syomkina

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In the paper, we consider a problem on small motions of a system of viscoelastic and ideal fluids in a stationary container. One of models of such viscoelastic fluid is Oldroid's model. It is described, for example, in the book Eirich, F. R. Rheology. Theory and Applications. New York: Academic Press, 1956. It should be noted that the present paper based on the previous N. D. Kopachevsky works together with Azizov, T. Ya., Orlova L. D., Krein, S. G. Namely, problem on small movements of one viscoelastic fluid for generalized Oldroid's model, small motions of a viscoelastic fluid in an open container, oscillations of a system of ideal fluids were investigated in these papers.

The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to develop new approach and to prove the theorem on strong solvability for initial-boundary-value problem generated by a problem of small motions of a system of viscoelastic and ideal fluids in an immovable container.

This paper is organized as follows. In section 1 we formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance. In section 2 we choose the functional spaces generated by the problem for each fluid. For applying of method of orthogonal projection

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (16-11-10125 "Операторные уравнения в функциональных пространствах и приложения к нелинейному анализу", выполняемого в Воронежском госуниверситете.)

© *Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, Е. В. СЁМКИНА*

we need to choose orthogonal decomposition of corresponding spaces. After projection we get new statement of the problem without some trivial equations. Important part of section 2 is formulation of auxiliary problems which help us to make transition to the the Cauchy problem for the system of integro-differential equation in some Hilbert space. In section 3 we reduce this problem to a system of differential equation. This system can be rewrite as operator differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operator of this problem are studied in section 3 too. Section 4 is devoted to the existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial-boundary-value problem. This result based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in section 4 we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem. This means that external forces equal to zero and dependence by time for the unknown function has the form $e^{-\lambda t}$. Here we obtain the spectral problem for operator pencil. This pencil has properties like pencil associated with spectral problem generated by the problem on normal oscillations of viscoelastic fluid.

Keywords: viscoelastic fluid, ideal fluid, hydrodynamic system, orthogonal projector, operator differential equation, Cauchy problem

MSC 2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

1. Введение

В этой работе изучается задача о малых движениях системы тяжёлых несмешивающихся однородных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя жидкость считается вязкоупругой, а верхняя идеальной. Случай двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд, рассмотрен в работе [2]. В данной работе предполагается, что вязкоупругая жидкость удовлетворяет обобщённой модели Олдройта (см. [5, 9, 13, 14]). Вариант, когда вязкоупругая жидкость целиком заполняет неподвижный сосуд, изучен в [8], а случай частичного заполнения сосуда вязкоупругой жидкостью — в главе 11 монографии [12].

2. Постановка задачи. Закон баланса полной энергии системы

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим неподвижный сосуд Ω, полностью заполненный системой из двух несмешивающихся жидкостей. Жидкости предполагаются тяжёлыми, и в силу этого действие капиллярных сил в этой задаче не учитывается. Область Ω_1, нижняя по отношению к действию силы тяжести, заполнена несжимаемой вязкоупругой жидкостью обобщённой модели Олдройта (см., например, [5, 9, 12, 13, 14]). В этой модели связь между тензором вязких напряжений и удвоенным тензором скоростей деформаций в вязкоупругой жидкости описывается не простейшим законом Гука, а линейным дифференциальным соотношением, где фигурируют производные порядка $m \geq 1$ по времени как у тензора вязких напряжений, так и у тензора скоростей деформаций. Далее, ρ_1, μ_1 — соответственно плотность и динамический коэффициент вязкости вязкоупругой жидкости. Область Ω_2 заполнена идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_2.

Обозначим через $\vec{n}_k$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_k$ и направленный вне Ω_k $(k = 1, 2)$. Через S_k обозначим часть стенки сосуда, граничащей с областью Ω_k $(k = 1, 2)$. Горизонтальную границу раздела в состоянии равновесия обозначим через Γ. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$, жёстко связанную с сосудом, таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена против действия силы тяжести, а начало координат находилось на равновесной поверхности Γ. Тогда ускорение гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$, а в состоянии покоя поля давлений в жидкостях выражаются по законам

$$P_{0,k}(x_3) = p_0 - \rho_k g x_3, \quad k = 1, 2, \tag{2.1}$$

где p_0 — давление на границе раздела Γ, т.е. при $x_3 = 0$.

Теперь перейдём к уравнениям, описывающим движение гидросистемы. Обозначим через $\vec{u}_k$ поля скоростей жидкостей в Ω_k $(k = 1, 2)$, а через $p_k(t, x)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений (см.(2.1)). Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$, $x \in \Omega$.

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид (см., например, [11, 12]):

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \mu_1 \triangle \vec{v}_1 + \rho_1 \vec{f}_1(t, x), \quad \text{div } \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{2.2}$$

$$\vec{v}_1(t, x) = \vec{u}_1(t, x) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_j \int_0^t e^{-\beta_j (t-s)} \vec{u}_1(s, x) ds =: I_{0,1}(t)\vec{u}_1, \tag{2.3}$$

$$\rho_2 \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} = -\nabla p_2 + \rho_2 \vec{f}_2(t, x), \quad \text{div } \vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{2.4}$$

где $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкости обобщённой модели Олдройта, $\vec{f}_k(t, x) := \vec{f}(t, x)|_{x \in \Omega_k}$, $k = 1, 2$, а $\triangle$ — трёхмерный оператор Лапласа.

Для вязкоупругой жидкости, как известно, на твёрдой стенке S_1 сосуда должно выполняться условие прилипания, т.е.

$$\vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \tag{2.5}$$

а для идеальной на S_2 — условие непротекания

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } S_2). \tag{2.6}$$

Будем описывать малые перемещения границы раздела между жидкостями с помощью функции вертикального отклонения

$$x_3 = \zeta(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \tag{2.7}$$

Тогда на Γ должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \vec{u}_1\cdot\vec{n}_1 =: \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = -\vec{u}_2\cdot\vec{n}_2 =: -\gamma_{n,2}\vec{u}_2, \quad \vec{n}_1 = \vec{e}_3 = -\vec{n}_2, \tag{2.8}$$

а символом $\gamma_{n,k}$, $k = 1, 2$, обозначена операция взятия нормального следа на Γ, т.е. следа нормальной компоненты поля скорости. Заметим ещё, что из условия сохранения объёма каждой из жидкостей имеем интегральную связь

$$\int\limits_\Gamma \zeta d\Gamma = 0. \tag{2.9}$$

Сформулируем теперь динамические условия на Γ. Они состоят в том, что на движущейся границе раздела векторное поле напряжений при переходе от одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на Γ приводят к следующим соотношениям: на Γ касательные напряжения (т.е. вдоль Γ) изменяются непрерывно, а нормальное напряжение (т.е. вдоль оси Ox_3) компенсируется гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{gathered}\mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1) = 0, \quad j = 1, 2;\\ [-p_1 + \mu_1\tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-p_2] = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma).\end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь $\tau_{kl}(\vec{u}) := \dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}$ $(k, l = 1, 2, 3)$ — удвоенный тензор скоростей деформаций.

Наконец, для искомых функций $\vec{u}_k(t, x)$, $k = 1, 2$, и $\zeta(t, x_1, x_2)$ необходимо ещё задать начальные условия:

$$\begin{gathered}\vec{u}_k(0, x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad \vec{u}_1^0\cdot\vec{n}_1 \equiv -\vec{u}_2^0\cdot\vec{n}_2, \quad x \in \Gamma, \quad k = 1, 2,\\ \zeta(0, x) = \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma.\end{gathered} \tag{2.11}$$

2.2. Закон баланса полной энергии

Будем считать, что задача (2.2)-(2.11) имеет классической решение, и выведем закон баланса полной энергии гидросистемы. Предварительно выпишем формулы Грина для векторных полей скоростей в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно. Для дважды непрерывно дифференцируемых полей они имеют следующий вид:

$$\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{u}_1) := \frac{1}{2}\mu_1\int\limits_{\Omega_1}\left(\sum_{j,l=1}^{3}\tau_{jl}(\vec{\eta}_1)\overline{\tau_{jl}(\vec{u}_1)}\right)d\Omega_1 =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1}\vec{\eta}_1\cdot\overline{(-\mu_1\triangle\vec{u}_1 + \nabla p_1)}d\Omega_1 + \int\limits_\Gamma\sum_{j=1}^{3}\eta_{1,j}\overline{(\mu_1\tau_{j,3}(\vec{u}_1) - p_1\delta_{j3})}d\Gamma, \tag{2.12}$$

$$\mathrm{div}\vec{\eta}_1 = \mathrm{div}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{\eta}_1 = \vec{u}_1 \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad \vec{\eta}_1 = \sum_{j=1}^{3}\eta_{1,j}\vec{e}_j$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \vec{\eta}_2 \cdot \overline{\nabla p_2} d\Omega_2 = -\int\limits_{\Gamma} \eta_{2,3} \overline{p_2} d\Gamma,$$
$$\mathrm{div}\vec{\eta}_2 = \mathrm{div}\vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \vec{\eta}_2 = \vec{u}_2 \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_2). \tag{2.13}$$

(В этих формулах учтено, что направление внешней нормали на Γ для области Ω_1 будет $\vec{n}_1 = \vec{e}_3$, а для Ω_2 — соответственно $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1 = -\vec{e}_3$.)

Умножим обе части (2.2) и (2.4) слева на $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, проинтегрируем по Ω_1 и Ω_2 соответственно и сложим результаты; будем иметь (для вещественнозначных полей):

$$\sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} d\Omega_k = -\sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \nabla p_k d\Omega_k + \mu_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{u}_1 \cdot (\triangle \vec{v}_1) d\Omega_1 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k.$$

Используя формулы Грина (2.12), (2.13), а также граничные условия задачи (2.2)-(2.11), отсюда получаем соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 \, d\Omega_k \right\} = -\mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma} \sum_{j=1}^{3} u_{k,j} \left(\mu_1 \tau_{j3}(\vec{u}_1) - (p_1 - p_2)\delta_{j3} \right) d\Gamma.$$

Учитывая ещё соотношения (2.9) и (2.10), окончательно приходим к выводу, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 \, d\Omega_k + g(\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma} |\zeta|^2 \, d\Gamma \right\} = -\mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k. \tag{2.14}$$

Это тождество есть закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Здесь в фигурных скобках стоит удвоенная полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия гидросистемы, а справа — мощность диссипативных вязкоупругих сил и мощность дополнительных внешних сил, действующих на систему. После интегрирования (2.14) по t в пределах от 0 до t получаем закон баланса полной энергии в интегральной форме, т.е. на произвольном отрезке времени $(0, t)$.

3. Метод ортогонального проектирования. Переход к системе операторных уравнений

3.1. Проектирование уравнения Эйлера

Воспользуемся далее разложением пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_2)$ в ортогональную сумму (см. [3, с.113],[11]):

$$\vec{L}_2(\Omega_2) = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2), \tag{3.1}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_2) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_2) : \ \mathrm{div}\vec{u} = 0 \ (\Omega_2), \quad u_n = 0 \ (\partial\Omega_2)\},$$

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega_2) := \{\vec{v} = \nabla\varphi \in \vec{L}_2(\Omega_2) : \ \triangle\varphi = 0 \ (\Omega_2), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ (S_2)\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2) := \{\vec{w} = \nabla\psi \in \vec{L}_2(\Omega_2) : \ \triangle\psi = 0 \ (\Omega_2), \quad \psi = 0 \ (\Gamma)\}.$$

Введём ортопроекторы на соответствующие подпространства: $P_{0,2}$, P_{h,S_2}, $P_{02,\Gamma}$.

Основываясь на разложении (3.1), применим метод ортогонального проектирования к уравнениям движения начально-краевой задачи (2.2)-(2.11). В силу условия соленоидальности, условия непротекания на твёрдой стенке S_2 и условия сохранения объёма на свободной границе Γ (так как жидкости несжимаемы) считаем, что

$$\vec{u}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) =: \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2).$$

Поле ∇p_2 потенциально и поэтому

$$\nabla p_2 \in \vec{G}(\Omega_2) = \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2).$$

Представим поля $\vec{u}_2$ и ∇p_2 в виде:

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 + \nabla\Phi_2, \quad \text{где } \vec{w}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2), \quad \nabla\Phi_2 \in \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2), \tag{3.2}$$

$$\nabla p_2 = \nabla\tilde{p}_2 + \nabla\varphi_2, \quad \text{где } \nabla\tilde{p}_2 \in \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2), \quad \nabla\varphi_2 \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2).$$

Подставим эти представления в уравнение (2.4) для идеальной жидкости и применим к нему ортопроекторы, отвечающие разложению (3.1). Получим:

$$\frac{\partial\vec{w}_2}{\partial t} = P_{0,2}\vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{3.3}$$

$$\rho_2\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi_2 = -\nabla\tilde{p}_2 + \rho_2 P_{h,S_2}\vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{3.4}$$

$$\nabla\varphi_2 = \rho_2 P_{0,\Gamma}\vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2). \tag{3.5}$$

Из (3.3), с учётом начальных условий (2.11), сразу получаем

$$\vec{w}_2(t,x) = \int\limits_0^t P_{0,2}\vec{f}_2(\tau,x)\mathrm{d}\tau + P_{0,2}\vec{u}_2^0.$$

Члены в уравнении (3.5) — это составляющие градиентов давлений в подпространстве $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2)$. Потенциал этого поля φ_2 обращается в нуль на Γ и поэтому в граничных условиях не участвует. Далее соотношения (3.5) не рассматриваем.

Условимся называть решения уравнений (3.3), а также составляющие градиентов давлений из (3.5) — тривиальными решениями. Итак, основные уравнения, которые будем рассматривать для идеальных жидкостей, это уравнения (3.4).

3.2. Проектирование уравнения Навье-Стокса

Для области Ω_1 введём аналогичное разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_1)$ в ортогональную сумму (см. [3]):

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1), \quad \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1).$$

Введём ортопроекторы P_{0,S_1} и $P_{01,\Gamma}$ на подпространства $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)$ соответственно. В силу условия соленоидальности и условия прилипания на S_1 для $\vec{u}_1$, считаем, что поле $\vec{u}_1$ принадлежит пространству векторных полей с конечной скоростью диссипации энергии в жидкости:

$$\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) := \left\{ \vec{u}_1 \in \vec{H}^1(\Omega_1) : \mathrm{div}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1) \right\} \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Здесь скалярное произведение определяется по формуле (см. (2.12), (2.13))

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1)_{\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)} := E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_1} \left(\sum_{j,l=1}^{3} \tau_{jl}(\vec{u}_1) \overline{\tau_{jl}(\vec{v}_1)} \right) d\Omega_1.$$

Отметим, что $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ плотно вложено в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Подействуем введёнными операторами P_{0,S_1} и $P_{01,\Gamma}$ на обе части уравнения для вязкоупругой жидкости (2.2), получим:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} &= -\nabla \tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1} \triangle \vec{v}_1 + \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \\ -\mu_1 P_{01,\Gamma} \triangle \vec{v}_1 &+ P_{01,\Gamma} \nabla p_1 = \rho_1 P_{01,\Gamma} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь через $\nabla \tilde{p}_1$ обозначено поле $P_{0,S_1} \nabla p_1 =: \nabla \tilde{p}_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ в силу разложения пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$. Потенциал поля $P_{01,\Gamma} \nabla p_1$ в граничных условиях не участвует, так как обращается в нуль на Γ. Поэтому для вязкоупругой жидкости рассматриваем только уравнение (3.6).

3.3. Формулировка задачи после отделения тривиальных решений

Заметим, что в силу представления (3.2) поля $\vec{u}_2$ кинематическое условие (2.8) можно записать в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \gamma_{n,1} \vec{u}_1 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_1} \quad (\text{на } \Gamma).$$

Введём ещё ортопроектор P_Γ на $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$. Тогда итогом проведенных выше преобразований является следующая

Теорема 1. *Пусть* $\vec{u}_k$, ∇p_k, $k = 1, 2$, ζ — *классическое решение начально-краевой задачи* (2.2)-(2.11), *тогда функции* $\vec{u}_1$, $\nabla\tilde{p}_1$, $\nabla\Phi_2$, $\nabla\tilde{p}_2$, ζ *являются решением следующей начально-краевой задачи:*

$$\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla\tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1 + \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{3.7}$$

$$\operatorname{div}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \tag{3.8}$$

$$\rho_2\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi_2 + \nabla\tilde{p}_2 = \rho_2 P_{h,S_2}\vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{3.9}$$

$$\triangle\Phi_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2} = 0 \quad (\text{на } S_2) \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2} = -\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\gamma_{n,1}\vec{u}_1 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.10}$$

$$\begin{gathered}\mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (\text{на } \Gamma),\\ [-P_\Gamma\tilde{p}_1 + \mu_1\tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-P_\Gamma\tilde{p}_2] = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma),\end{gathered} \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered}\vec{u}_1(0,x) = P_{0,S_1}\vec{u}_1^0(x) = \vec{u}_1^0(x), \quad x \in \Omega_1, \quad \nabla\Phi_2(0,x) = P_{h,S_2}\vec{u}_2^0(x), \quad x \in \Omega_2,\\ \zeta(0,x) = \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma.\end{gathered} \tag{3.12}$$

3.4. Вспомогательные краевые задачи и их операторы

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Вспомогательная задача I.

$$-P_{0,S_1}\triangle\vec{u} + \mu^{-1}\nabla p = \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_1) \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S_1),$$

$$\mu_1\tau_{j3}(\vec{u}) = 0, \quad j = 1, 2, \quad -p + \mu\tau_{33}(\vec{u}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma).$$

Это так называемая первая вспомогательная задача С.Г. Крейна (см. [3, с.116]). Она имеет единственное обобщённое решение $\vec{u} = A_1^{-1}\vec{f}$ для любого вектора $\vec{f}$ из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Область определения $\mathcal{D}(A_1)$ оператора A_1 плотна в пространстве $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$, а $\mathcal{D}(A_1^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$. Оператор A_1^{-1} является положительным и компактным в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$.

Вспомогательная задача II.

$$\triangle p = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial p}{\partial n_1} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad p = \tau_1 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_\Gamma \tau_1 \mathrm{d}\Gamma = 0.$$

Это — известная задача Зарембы для уравнения Лапласа. Она имеет единственное решение (см. [3, с.45]) $p = G_1\tau_1 \in H^1_\Gamma(\Omega_1)$ при $\tau_1 \in H^{1/2}_\Gamma$.

$$H^1_\Gamma(\Omega_1) := \{\varphi \in H^1(\Omega_1) : \int\limits_\Gamma \varphi \mathrm{d}\Gamma = 0\}, \quad ||\varphi||^2_{H^1_\Gamma(\Omega_1)} := \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\varphi|^2 \mathrm{d}\Omega_1.$$

(Определение пространств $H^{1/2}_{\partial\Omega}$, $H^{-1/2}_{\partial\Omega}$ для областей Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$, а также соответствующие теоремы вложения и продолжения с границы см. в работе Galiardo E. [10]).

Вспомогательная задача III.

$$\triangle\Phi = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_2} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_2} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_\Gamma \Phi \mathrm{d}\Gamma = 0, \int\limits_\Gamma \psi \mathrm{d}\Gamma = 0.$$

Это задача Неймана для уравнения Лапласа. Если $\psi \in \tilde{H}^{-1/2}_\Gamma$, то задача имеет единственное решение $\Phi = V\psi \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$. Здесь символом $\tilde{}$ обозначен класс функций из $H^{-1/2}_\Gamma$, продолжимых нулём на всю границу $\partial\Omega_2$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_2)$ (см. [1, 7]). Введём по решению задачи III оператор:

$$P_\Gamma\Phi|_\Gamma = P_\Gamma\hat{C}\psi =: C\psi, \quad \hat{C} := \gamma_\Gamma V, \quad \gamma_\Gamma\psi := \psi|_\Gamma.$$

Отметим, что C самосопряжённый, положительный и компактный оператор в $L_{2,\Gamma}$.

3.5. Вывод системы операторных уравнений

Переходя к формулировке исходной задачи (2.2)-(2.11) в операторной форме, представим поле $\nabla\tilde{p}_1$ в виде $\nabla\tilde{p}_1 = \nabla\tilde{p}_{11} + \nabla\tilde{p}_{12}$ и подберём поле $\nabla\tilde{p}_{11}$ таким образом, чтобы поле $\vec{v}_1$ являлось решением следующей краевой задачи

$$-P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1 + \mu_1^{-1}\nabla\tilde{p}_{11} = \mu_1^{-1}\left(-\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - \nabla\tilde{p}_{12}\right) \quad (\text{в } \Omega_1) \tag{3.13}$$

$$\operatorname{div}\vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{v}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \tag{3.14}$$

$$\mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1) = 0, \quad j = 1,2, \quad -P_\Gamma\tilde{p}_{11} + \mu\tau_{33}(\vec{v}_1) = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.15}$$

Используя вспомогательную задачу I, заключаем, что краевая задача (3.13)-(3.15) имеет единственное обобщённое решение

$$\vec{v}_1 = \mu_1^{-1}A_1^{-1}\left(-\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - \nabla\tilde{p}_{12}\right)$$

для правой части из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Тогда можно записать

$$\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1\vec{v}_1 + \nabla\tilde{p}_{12} = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1). \tag{3.16}$$

Заметим, что при расщеплении условия для нормального напряжения на Γ из (3.11) осталось условие

$$P_\Gamma\tilde{p}_{12} = P_\Gamma\tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.17}$$

Учитывая принадлежность $\nabla\tilde{p}_{12} \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, найдём, что потенциал $P_\Gamma\tilde{p}_{12}$ удовлетворяет вспомогательной задаче II при $\tau_1 = P_\Gamma\tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta$. Поэтому можно считать, что

$$\nabla\tilde{p}_{12} = G_1(P_\Gamma\tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta). \tag{3.18}$$

Оператор G_1 ограниченно действует из пространства $H_\Gamma^{1/2}$ в пространство $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$.

В силу принадлежности $\nabla\Phi_2$ пространству $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$ потенциал Φ_2 с помощью решения вспомогательной задачи III можно представить в виде:

$$\Phi_2 = V(-\gamma_{n,1}\vec{u}_1). \tag{3.19}$$

Рассмотрим уравнение (3.9) для идеальной жидкости. Из него следует интеграл Коши-Лагранжа

$$\rho_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \tilde{p}_2 = F_2 + c(t) \quad (\text{в } \Omega_2),$$

где через F_2 обозначен потенциал поля $\rho_2 P_{h,S_2}\vec{f}_2$, а $c(t)$ — произвольная функция переменной t. Рассмотрим это уравнение на Γ и спроектируем на $L_{2,\Gamma}$, тогда динамическое условие (3.17) можно преобразовать к следующему виду:

$$P_\Gamma\tilde{p}_{12} = P_\Gamma F_2 - \rho_2 P_\Gamma\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.20}$$

Выразим теперь $P_\Gamma\Phi_2|_\Gamma$ с помощью представления (3.19) и оператора C:

$$P_\Gamma\Phi_2|_\Gamma = P_\Gamma\Phi|_\Gamma = -C\gamma_{n,1}\vec{u}_1 \quad \text{на } \Gamma. \tag{3.21}$$

Значит, с учётом (3.18), (3.20) и (3.21) уравнение (3.16) можно переписать в виде:

$$\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1\vec{v}_1 + g(\rho_1 - \rho_2)G_1\zeta + \rho_2\frac{\partial}{\partial t}G_1 C\gamma_{n,1}\vec{u}_1 + G_1 P_\Gamma F_2 = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1).$$

Проведенные в этом пункте рассуждения можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $\vec{u}_1$, $\nabla\tilde{p}_1$, $\nabla\Phi_2$, $\nabla\tilde{p}_2$, ζ — классическое решение начально-краевой задачи* (3.7)-(3.12)*, тогда функции $\vec{u}_1$, ζ являются решением следующей задачи Коши:*

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_1\vec{u}_1 + \rho_2 G_1 C\gamma_{n,1}\vec{u}_1\right) + \mu_1 A\vec{v}_1 + g(\rho_1 - \rho_2)G_1\zeta = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - G_1 P_\Gamma F_2 \tag{3.22}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma_{n,1}\vec{u}_1, \tag{3.23}$$

$$\vec{u}_1(0,x) = \vec{u}_1^0(x), \quad x \in \Omega_1, \quad \zeta(0,x) = \zeta^0(x) \quad x \in \Gamma. \tag{3.24}$$

Введём оператор $G := (\rho_1 - \rho_2)G_1$. Тогда справедлива следующая

Лемма 2. *Имеет место соотношение*

$$G^* = (\rho_1 - \rho_2)\gamma_{n,1}, \quad \gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}). \tag{3.25}$$

Доказательство. См. доказательство леммы 6 из [2]. □

4. Преобразование задачи к стандартному виду

4.1. Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Приведём задачу (3.22)-(3.24) к более симметричному виду, воспользовавшись формулой (3.25). Осуществим замену искомой функции по формуле

$$\eta = (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta.$$

Тогда приходим к задаче Коши

$$\begin{aligned} &B\frac{d\vec{u}_1}{dt} + \mu_1 A_1 \vec{v}_1 + (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} G\eta = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - G_1 P_\Gamma F_2,\ \vec{u}_1(0,x) = \vec{u}_1^0(x), \\ &\frac{d\eta}{dt} = ((g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} G^* \vec{u}_1), \quad \eta(0,x) = (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta^0(x), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$B := \rho_1 I + \rho_2 G_1 C \gamma_{n,1}$$

.

Введём ещё в (4.1) новые искомые функции

$$\vec{w}_j(t) := \alpha_j^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_j(t-s)}\vec{u}_1(s)ds \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1), \quad j = \overline{1,m}. \tag{4.2}$$

Тогда

$$\frac{d\vec{w}_j}{dt} = \alpha_j^{1/2}\vec{u}_1 - \beta_j\alpha_j^{1/2}\int_0^t e^{-\beta_j(t-s)}\vec{u}_1(s)ds = \alpha_j^{1/2}\vec{u}_1 - \beta_j\vec{w}_j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{4.3}$$

Теперь с учётом (4.2),(4.3) задача (4.1) переписывается в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &B\frac{d\vec{u}}{dt} = -\mu_1 A_1(\vec{u}_1 + \sum_{j=1}^m \alpha_j^{1/2}\vec{w}_j) - (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} G\vec{\eta} + \vec{g}(t), \quad \vec{u}_1(0) = \vec{u}_1^0, \\ &\frac{d\vec{w}_j}{dt} = \alpha_j^{1/2}\vec{u}_1 - \beta_j\vec{w}_j, \quad \vec{w}_j(0) = \vec{0}, \quad j = \overline{1,m}, \\ &\frac{d\eta}{dt} = (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} G^*\vec{u}_1, \quad \eta(0) = (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta^0, \quad \vec{g}(t) := \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - G_1 P_\Gamma F_2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Коротко эту задачу можно записать в виде

$$\mathcal{B}\frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}_1 z + g(t), \quad z(0) = z^0,$$

$$\mathcal{B} := \operatorname{diag}\{B, I, I\} \tag{4.5}$$

$$\mathcal{A}_1 := \begin{pmatrix} A & \hat{\alpha}A & bG \\ -\hat{\alpha}^\tau & \hat{\beta} & 0 \\ -bG^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \hat{w} \\ \eta \end{pmatrix}, \; g(t) = \begin{pmatrix} \vec{g}(t) \\ \hat{0} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\hat{\alpha} := (\alpha_1^{1/2} I, \alpha_2^{1/2} I, \ldots, \alpha_m^{1/2} I)$, $\hat{\beta} := \operatorname{diag}\{\beta_1 I, \beta_2 I, \ldots, \beta_m I\}$, $A := \mu_1 A_1$, $b := (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}$, $\hat{w} := (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m)^\tau$, $\hat{0} := (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m \text{ раз}})^\tau$.

4.2. Дополнительная симметризация.

Осуществим в (4.4) ещё одну замену

$$\vec{w}_j = A^{-1/2}\vec{\psi}_j, \quad \vec{\psi}_j \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \quad j = \overline{1,m}.$$

Тогда из второй строчки (4.4) имеем соотношение

$$\frac{d}{dt}(A^{-1/2}\vec{\psi}_j) = \alpha_j^{1/2}\vec{u} - \beta A^{-1/2}\vec{\psi}_j, \quad j = \overline{1,m}, \tag{4.6}$$

и если $\vec{u}(t) := \vec{u}_1(t)$, — непрерывная по t функция со значениями в $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$, а $\vec{\psi}_j(t)$, $j = \overline{1,m}$, — со значениями в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, то правая часть в (4.6) непрерывна по t со значениями в $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Поэтому к обеим частям в (4.6) можно применить оператор $A^{1/2}$.
В итоге взамен (4.4) возникает задача Коши

$$\begin{aligned} B\frac{d\vec{u}}{dt} &= -A(\vec{u} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{1/2} A^{-1/2}\vec{\psi}_j) - bG\vec{\eta} + \vec{g}(t), \\ \frac{d\vec{\psi}_j}{dt} &= \alpha_j^{1/2} A^{1/2}\vec{u} - \beta\vec{\psi}_j, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_1^0, \quad \vec{\psi}_j(0) = \vec{0}, \quad j = \overline{1,m}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= bG^*\vec{u}, \quad \eta(0) = (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta^0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Эта система снова коротко переписывается в виде

$$\mathcal{B}\frac{dy}{dt} = -\mathcal{A}y + g(t), \quad y(0) = y^0, \quad y = (\vec{u}; \hat{\psi}; \eta)^\tau, \tag{4.8}$$

где операторная матрица

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A & \hat{\alpha}A^{1/2} & bG \\ -\hat{\alpha}^\tau A^{1/2} & \hat{\beta} & 0 \\ -bG^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

задана на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A) \oplus \hat{\mathcal{D}}(A^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(G), \quad \hat{\mathcal{D}}(A^{1/2}) := \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{D}(A^{1/2}) \tag{4.10}$$

и действует в пространстве $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma}$, где $\hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1) := := \bigoplus_{j=1}^{m} \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$.

4.3. Свойства операторных коэффициентов

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{B}$ из* (4.5) *ограничен, самосопряжён и положительно определён.*

Доказательство. Свойство ограниченности следует из того, что ограничены все операторные коэффициенты матрицы $\mathcal{B}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить ограниченность оператора $G_1 C \gamma_{n,1}$. Он действует из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ в $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Действительно, для $\vec{\xi} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ элемент $\gamma_{n,1}\vec{\xi} \in \tilde{H}_{\Gamma}^{-1/2}$. С помощью вспомогательной задачи III найдём функцию Φ при условии, что $\psi = \gamma_{n,1}\vec{\xi}$. Тогда в силу свойств ограниченности операторов C и G_1 оператор $G_1 C \gamma_{n,1}$ ограничен, а его действие следующее:

$$G_1 C \gamma_{n,1} \vec{\xi} = G_1 P_{\Gamma} \Phi|_{\Gamma} \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Найдём квадратичную форму оператора $\mathcal{B}$ в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Для любого $y \in \mathcal{H}$ имеем

$$(\mathcal{B}y, y)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{u}|^2 \mathrm{d}\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_1} G_1 C \gamma_{n,1} \vec{u} \cdot \overline{\vec{u}} \mathrm{d}\Omega_1 + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega_1} |\vec{\psi}_j|^2 \mathrm{d}\Omega_1 + \int\limits_{\Gamma} |\eta|^2 \mathrm{d}\Gamma \tag{4.11}$$

Преобразуем второе слагаемое в (4.11), используя свойства решения вспомогательной задачи III, оператора C, взаимную сопряжённость операторов G_1 и $\gamma_{n,1}$, и свойства потенциала Φ_2:

$$\rho_2 \int\limits_{\Omega_1} G_1 C \gamma_{n,1} \vec{u} \cdot \overline{\vec{u}} \mathrm{d}\Omega_1 = \rho_2 \int\limits_{\Gamma} C \gamma_{n,1} \vec{u} \cdot \overline{\gamma_{n,1} \vec{u}} \mathrm{d}\Gamma = \rho_2 \int\limits_{\Gamma} P_{\Gamma} \Phi_2 \cdot \overline{(-\gamma_{n,1} \vec{u})} \mathrm{d}\Gamma =$$

$$= \rho_2 \int\limits_{\Gamma} \Phi_2 \cdot \overline{\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2}} \mathrm{d}\Gamma = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla \Phi_2|^2 \mathrm{d}\Omega_2.$$

Тогда

$$(\mathcal{B}y, y)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{u}|^2 \mathrm{d}\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla \Phi_2|^2 \mathrm{d}\Omega_2 + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega_1} |\vec{\psi}_j|^2 \mathrm{d}\Omega_1 + \int\limits_{\Gamma} |\eta|^2 \mathrm{d}\Gamma \tag{4.12}$$

С учётом ограниченности оператора $\mathcal{B}$ из (4.12) видно, что он самосопряжён и положительно определён. □

Изучим теперь общие свойства оператора $\mathcal{A}$ из (4.9), (4.10).

Лемма 4. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ допускает факторизацию в виде произведения трёх матриц с симметричным окаймлением средней матрицы:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \hat{\alpha} I & bA^{-1/2}G \\ -\hat{\alpha}^\tau I & \hat{\beta} & 0 \\ -bG^*A^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \quad \square \tag{4.13}$$

$$\hat{I} := \operatorname{diag}\{\underbrace{I, I, \ldots, I}_{m \text{ раз}}\}$$

Лемма 5. *Справедливо соотношение*

$$A^{-1/2}G = (G^*A^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(G)},$$

причём замыкание по непрерывности оператора $A^{-1/2}G$ совпадает с $(G^*A^{-1/2})^*$.

Доказательство. См. доказательство леммы 9 из [2]. □

Дальнейшее изучение свойств операторной матрицы $\mathcal{A}$ повторяет исследование, проведенное в пункте 7.1 из [2] с соответствующими упрощениями. Приведём следующие результаты без доказательств.

Лемма 6. *Операторная матрица* (4.9) *является аккретивной в пространстве $\mathcal{H}$, т.е.*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}. \quad \square$$

Введём операторную матрицу

$$\mathcal{J}_a := \mathcal{J}_0 + a \operatorname{diag}(0; \hat{0}^\tau; I), \quad a > 0, \quad \mathcal{J}_0 := \begin{pmatrix} I & \hat{\alpha} & bA^{-1/2}G \\ -\hat{\alpha}^\tau & \hat{\beta} & 0 \\ -bG^*A^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Тогда для $\mathcal{J}_a$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(\mathcal{J}_a y, y)_{\mathcal{H}} \geq c||y||^2_{\mathcal{H}}, \quad c > 0. \tag{4.15}$$

Из (4.14) следует, что операторная матрица $\mathcal{A}$ из (4.13) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \operatorname{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I)\mathcal{J}_a \operatorname{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I) - a \operatorname{diag}(0; \hat{0}; I) =: \\ =: \mathcal{A}_a - a \operatorname{diag}(0; \hat{0}; I). \end{aligned} \tag{4.16}$$

При этом оператор $\mathcal{A}_a$ представлен в виде произведения трёх сомножителей, каждый из которых имеет ограниченный обратный. Поэтому $\mathcal{A}_a$ допускает расширение путём замыкания среднего сомножителя, и в итоге возникает максимальный равномерно аккретивный оператор.

Лемма 7. *Замыкание $\bar{\mathcal{A}}_a$ оператора $\mathcal{A}_a$ представляется в виде*

$$\bar{\mathcal{A}}_a = \mathrm{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I)\bar{\mathcal{J}}_a \mathrm{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I),$$

$$\bar{\mathcal{J}}_a = \begin{pmatrix} I & \hat{\alpha} & b(G^*A^{-1/2})^* \\ -\hat{\alpha}^\tau & \hat{\beta} & 0 \\ -bG^*A^{-1/2} & 0 & aI \end{pmatrix},$$

где $\bar{\mathcal{J}}_a$ — равномерно аккретивный оператор, для которого выполнено свойство (4.15) *(с заменой $\mathcal{J}_a \to \bar{\mathcal{J}}_a$).*

При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \Big\{ y = (\vec{u}; \vec{\psi}; \eta)^\tau : \vec{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2}),\ A^{1/2}\vec{u} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{1/2} \vec{\psi}_k + \\ + b(G^*A^{-1/2})^*\eta \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \Big\}, \quad \mathcal{R}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \mathcal{H}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

и оператор $\bar{\mathcal{A}}_a$ действует на $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a)$ по закону

$$\bar{\mathcal{A}}_a y = \begin{pmatrix} A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u} + \hat{\alpha}\hat{\psi} + b(G^*A^{-1/2})^*\eta) \\ -\hat{\alpha}^\tau A^{1/2}\vec{u} + \hat{\beta}\hat{\psi} \\ -bG^*\vec{u} + a\eta \end{pmatrix}. \quad \square \tag{4.18}$$

5. Теоремы о разрешимости

5.1. Получение теоремы о сильной разрешимости исходной задачи

Вернёмся к задаче (4.8)-(4.9) и перепишем её с учётом (4.16) в виде

$$\mathcal{B}\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P}_3)y + g(t), \quad y(0) = y^0 := (\vec{u}^0; \hat{0}; (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta^0)^\tau,$$

$$y = (\vec{u}; \hat{\psi}; \eta)^\tau, \quad \mathcal{P}_3 := \mathrm{diag}(0; \hat{0}; I).$$

Рассмотрим также аналогичную задачу с замкнутым максимальным аккретивным оператором:

$$\mathcal{B}\frac{dy}{dt} = -(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)y + g(t), \quad y(0) = y^0. \tag{5.1}$$

Оператор $\mathcal{B}$ самосопряжённый, положительно определённый и ограниченный в $\mathcal{H}$, значит, для него существует оператор $\mathcal{B}^{-1}$, обладающий теми же свойствами. Тогда из (5.1) имеем:

$$\frac{dy}{dt} = -\mathcal{B}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)y + \mathcal{B}^{-1}g(t), \quad y(0) = y^0. \tag{5.2}$$

Введём в $\mathcal{H}$ эквивалентную норму по формуле

$$\langle y, y\rangle := (\mathcal{B}y, y)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{B}^{1/2}y, \mathcal{B}^{1/2}y)_{\mathcal{H}}.$$

Эквивалентность этой нормы стандартной норме следует из свойств оператора $\mathcal{B}$.

Легко проверить, что оператор $\mathcal{B}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)$ будет максимальным аккретивным в новом скалярном произведении, и тогда $-\mathcal{B}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы. Поэтому по теореме Филлипса (см. [4, с.166]) задача Коши (5.2) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$, если выполнены следующие условия

$$y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a), \quad g(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}). \tag{5.3}$$

Из условий (5.3) получим соответствующие условия на начальные данные исходной задачи (2.2)-(2.11).

Так, из принадлежности элемента y^0 области определения оператора $\mathcal{A}$ следует, что

$$\vec{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \zeta^0 \in \mathcal{D}(G_1) = H_\Gamma^{1/2}.$$

Аналогично получим условие для $\vec{f}_k(t)$:

$$\vec{f}_k(t) \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega_k))), \quad k = 1, 2.$$

Определение 1. Будем говорить, что исходная начально-краевая задача (2.2)-(2.11) имеет сильное решение $\{\vec{u}_1(t); \vec{u}_2(t); \zeta(t)\}$ на отрезке $[0, T]$, если выполнены следующие условия:

1. $\vec{u}_k(t) \in C^1([0, T]; \vec{J}_{0,S}(\Omega_k))$, k=1,2;
2. $\vec{v}_1(t) = I_{0,1}(t)\vec{u}_1(t)$ (см. (2.3)) обладает свойством $\vec{v}_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$;
3. $\zeta(t) \in C^1([0, T]; H_\Gamma^{1/2})$;
4. для любого $t \in [0, T]$ выполнена система уравнений (3.22)-(3.23), где все слагаемые в первом уравнении — элементы из $C([0, T]; \vec{J}_{0,S}(\Omega_1))$, а во втором — элементы из $C([0, T]; H_\Gamma^{1/2})$;
5. выполнены начальные условия (3.24). □

Сформулируем теперь теорему существования и единственности сильного решения задачи (2.2)-(2.11).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A), \quad \vec{u}_2 \in \vec{H}^1(\Omega_2) \cap \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2), \quad \zeta^0 \in H_\Gamma^{1/2}, \tag{5.4}$$

$$\vec{f}_k(t) \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega_k)), \quad k = 1, 2;$$

тогда начально-краевая задача (2.2)-(2.11)*, имеет единственное сильное решение на* $[0; T]$.

Доказательство. Доказательство, основанное на обратном переходе от задачи Коши (5.2) к начально-краевой задаче (2.2)-(2.11) с использованием результатов лемм 2, 3-7, проводится по схеме доказательства теорем 2, 3 и 5 работы [2] и здесь не приводится. □

5.2. Теорема о разрешимости. Второй подход

При исследовании задачи Коши (4.7)-(4.10) возможен ещё один подход, связанный с факторизацией операторной матрицы (4.9) по Шуру-Фробениусу.

Лемма 8. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ из* (4.9) *допускает факторизацию вида*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & \hat{\alpha}A^{1/2} & bG \\ -\hat{\alpha}^\tau A^{1/2} & \hat{\beta} & 0 \\ -bG^* & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\hat{\alpha}^\tau A^{-1/2} & \hat{I} & 0 \\ -bQA^{-1/2} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & (\hat{\beta}+\hat{\alpha}^\tau\hat{\alpha}) & \hat{\alpha}^\tau bQ^+ \\ 0 & b\hat{\alpha}Q & b^2QQ^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \hat{\alpha}A^{-1/2} & bA^{-1/2}Q^+ \\ 0 & \hat{I} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$Q := G^*A^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_\Gamma^{1/2} \subset H_\Gamma^{1/2}),$$

$$Q^+ = A^{-1/2}G \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)).$$

Замыкание $\bar{\mathcal{A}}$ операторной матрицы $\mathcal{A}$ представляется в виде

$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\hat{\alpha}^\tau A^{-1/2} & \hat{I} & 0 \\ -bQA^{-1/2} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & (\hat{\beta}+\hat{\alpha}^\tau\hat{\alpha}) & \hat{\alpha}^\tau bQ^* \\ 0 & b\hat{\alpha}Q & b^2QQ^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \alpha A^{-1/2} & bA^{-1/2}Q^* \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$$Q^* := \overline{Q^+} \quad (\textit{см.}\ (3.25)),$$

и этот оператор действует на области определения

$$\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}) = \{y = (\vec{u}; \vec{\psi}; \eta)^\tau : \vec{u} + \hat{\alpha}A^{-1/2}\hat{\psi} + bA^{-1/2}Q^*\eta \in \mathcal{D}(A)\},$$

совпадающей, очевидно, с (4.17)*, по закону (сравн. с* (4.18)*)*

$$\bar{\mathcal{A}}y = \begin{pmatrix} A(\vec{u} + \hat{\alpha}A^{-1/2}\hat{\psi} + bA^{-1/2}Q^*\eta) \\ -\hat{\alpha}^\tau A^{1/2}\vec{u} + \hat{\beta}\hat{\psi} \\ -bG^*\vec{u} \end{pmatrix}, \quad y \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}).$$

□

Учитывая, что крайние сомножители в (5.5) обратимы и равны сумме единичного и компактного оператора, а средний множитель — квазидиагональный самосопряжённый неотрицательный оператор, рассмотрим задачу Коши с замкнутым оператором из (5.5):

$$\mathcal{B}\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)y + g(t), \quad y(0) = y^0, \tag{5.6}$$

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\hat{\alpha}^\tau A^{-1/2} & 0 & 0 \\ -bQA^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \tag{5.7}$$

где $\mathcal{A}_0$ средний сомножитель из (5.5).

Осуществляя в задаче (5.6) замену искомой функции

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)y(t) =: w(t),$$

после применения к обеим частям оператора $(\mathcal{J}+\mathcal{F}_2)\mathcal{B}^{-1}$ получим для $w(t)$ задачу Коши

$$\frac{dw}{dt} = -(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0 w + \mathcal{B}^{-1}g(t), \quad w(0) = w^0, \tag{5.8}$$

где учтено, что

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)^{-1} = (\mathcal{J} - \mathcal{F}_2), \quad (\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)\mathcal{B}^{-1}g(t) = \mathcal{B}^{-1}g(t).$$

В задаче (5.8) оператор $-\mathcal{A}_0$ является самосопряжённым неположительным оператором и потому — генератором аналитической полугруппы операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Так как операторы $\mathcal{F}_k$ из (5.7) — компактные, то оператор

$$-(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0 = -(\mathcal{J} + \mathcal{F})\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}_0,$$

(где $\mathcal{F} := \mathcal{F}_2 - \mathcal{B}^{-1}\mathcal{F}_1\mathcal{B} - \mathcal{F}_2\mathcal{B}^{-1}\mathcal{F}_1\mathcal{B} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$) также является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащем положительную полуось. Значит, уравнение (5.8) является абстрактным параболическим, и для его сильной разрешимости требуется выполнение условий

$$\begin{gathered} w(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma}, \\ g(t) \in C^\delta([0,T];\mathcal{H}), \quad 0 < \delta \le 1. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Повторяя рассуждения, проведенные в п.5.1, с учётом условий (5.9), сформулируем без доказательства следующую теорему о разрешимости исходной начально-краевой задачи (2.2)-(2.11) (см.[2, теоремы 4,5]).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (5.4), *а условия для* $\vec{f}_k(t,x)$ *заменены менее ограничительными:*

$$\vec{f}_k(t,x) \in C^\delta([0,T];\vec{L}_2(\Omega_k)), \quad k = 1,2, \quad 0 < \delta \le 1.$$

Тогда задача (2.2)-(2.11) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$. □

5.3. К задаче о нормальных колебаниях гидросистемы

Рассмотрим теперь постановку задачи о малых нормальных движениях исследуемой гидросистемы, т.е. о таких решениях однородной задачи (5.1) с замкнутым основным оператором, которые зависят от t по закону

$$y(t) := (\vec{u}(t); \hat{\psi}(t); \eta(t))^\tau = (\vec{u}; \hat{\psi}; \eta)^\tau e^{-\lambda t},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексный декремент затухания, а $(\vec{u}; \hat{\psi}; \eta)^\tau$ — амплитудный элемент.

Тогда для отыскания амплитудных элементов возникает спектральная задача

$$\begin{aligned} &A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{1/2}\vec{\psi}_j + b(G^*A^{-1/2})^*\eta) = \lambda B\vec{u}, \\ &-\alpha_j^{1/2}A^{1/2}\vec{u} + \beta_j\vec{\psi}_j = \lambda\vec{\psi}_j, \quad j = \overline{1,m}, \\ &-bG^*\vec{u} = \lambda\eta. \end{aligned} \tag{5.10}$$

В случае $\lambda = 0$ приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} &A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{1/2}\vec{\psi}_j + bQ^*\eta) = \vec{0}, \\ &\beta_j\vec{\psi}_j = \alpha_j^{1/2}A^{1/2}\vec{u}, \quad j = \overline{1,m}, \\ &bG^*\vec{u} = \vec{0}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Из последней связи получаем, что $\vec{u} = \vec{0}$, тогда из второго соотношения следует, что $\vec{\psi}_j = \vec{0}$, $j = \overline{1,m}$, и, наконец, из первого — $\eta = 0$ в силу обратимости оператора Q^*. Таким образом, задача (5.11) имеет лишь тривиальное решение, т.е. $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (5.10).

Рассмотрим ещё случай, когда $\lambda = \beta_l$, $l = \overline{1,m}$. Вместо (5.10) теперь будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} &A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{1/2}\vec{\psi}_j + bQ^*\eta) = \beta_l B\vec{u}, \\ &-\alpha_j A^{1/2}\vec{u} + \beta_j\vec{\psi}_j = \beta_l\vec{\psi}_j, \quad j = \overline{1,m}, \\ &-bG^*\vec{u} = \beta_l\eta. \end{aligned}$$

Из второго соотношения при $j = l$ заключаем, что $\vec{u} = \vec{0}$ в силу обратимости оператора $A^{1/2}$. Тогда из третьего уравнения получим, что $\eta = 0$, а из второго при $j \neq l$ — свойство $\vec{\psi}_j = \vec{0}$. Подставляя эти результаты в первое уравнение, приходим к выводу, что $\vec{\psi}_l = \vec{0}$, т.е. $\lambda = \beta_l$, $l = \overline{1,m}$, тоже не является собственным значением задачи (5.10).

Опираясь на эти факты, преобразуем при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \beta_l$, $l = \overline{1,m}$, задачу (5.10) к спектральной проблеме для одного искомого элемента, исключив $\vec{\psi}_j$ и η. Имеем

$$\vec{\psi}_j = (\beta_j - \lambda)^{-1}\alpha_j^{1/2}A^{1/2}\vec{u}, \quad j = \overline{1,m}, \quad \eta = -\lambda^{-1}bG^*\vec{u},$$

и тогда $\vec{u}$ является собственным элементом задачи

$$A^{1/2}\vec{u} + \sum_{j=1}^{m}\alpha_j(\beta_j - \lambda)^{-1}A^{1/2}\vec{u} - \lambda^{-1}b^2(G^*A^{-1/2})^*G^*\vec{u} = \lambda A^{-1/2}B\vec{u}$$

Осуществляя ещё здесь замену

$$A^{1/2}\vec{u} =: \vec{\varphi} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1),$$

приходим к спектральной проблеме

$$L(\lambda)\vec{\varphi} := (e_0(\lambda)I - \lambda^{-1}b^2(G^*A^{-1/2})^*(G^*A^{-1/2}) - \lambda A^{-1/2}BA^{-1/2})\vec{\varphi} = \vec{0} \qquad (5.12)$$

$$e_0(\lambda) := 1 + \sum_{j=1}^{m}\alpha_j(\beta_j - \lambda)^{-1},$$

в пространстве $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ для операторного пучка $L(\lambda)$.

В этом пучке $\tilde{A} := A^{-1/2}BA^{-1/2}$ — компактный положительный оператор, действующий в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, а $\tilde{B} := (G^*A^{-1/2})^*(G^*A^{-1/2})$ — неотрицательный компактный оператор.

Пучок $L(\lambda)$ по своим общим свойствам операторных коэффициентов совпадает с пучком, возникшем в проблеме нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде (см. [5, 13, 14], а также [8, 6], [12, глава 11]). Подробное исследование свойств решений спектральных задач для операторных пучков подобного вида описано, например, в параграфах 11.1-11.5 из [12]. Поэтому ниже сформулируем без доказательств общие свойства решений спектральной задачи (5.12).

1. Спектр задачи (5.12) дискретный, расположен в правой комплексной полуплоскости и имеет $m + 2$ ветви конечнократных положительных собственных значений с предельными точками $\lambda = 0$, $\lambda = +\infty$, а также точками γ_j, $e_0(\gamma_j) = 0$, $j = \overline{1,m}$. Кроме того, задача (5.12) может иметь ещё конечное число невещественных собственных значений, расположенных симметрично относительно вещественной оси.

2. Предельной точке $\lambda = +\infty$ отвечает ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(\infty)}\}_{k=1}^{\infty}$ с асимптотическим поведением

$$\lambda_k^{(\infty)} = \lambda_k^{-1}(\tilde{A})[1 + o(1)] \quad (k \to \infty),$$

а соответствующая этой ветви система собственных элементов $\{\vec{\varphi}_k^{(\infty)}\}_{k=1}^{\infty}$ (диссипативные волны в вязкоупругой жидкости) образует базис Рисса с конечным дефектом в пространстве $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и даже p-базис (с дефектом) для некоторого $p > 0$.

3. Предельной точке $\lambda = 0$ отвечает ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$, расположенных на промежутке $[0, \beta_1)$ и имеющая асимптотическое поведение

$$\lambda_k^{(0)} = b^2 \lambda_k(\tilde{B})[1 + o(1)], \quad (k \to \infty).$$

Соответствующая этой ветви система собственных элементов $\{\vec{\varphi}_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ (поверхностные волны) вместе с базисом из $\ker \tilde{B}$ образует базис Рисса (с дефектом) в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и даже p-базис (с дефектом).

4. Предельным точкам γ_j, $j = \overline{1,m}$, отвечают ветви собственных значений $\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, расположенных на промежутках $[\gamma_j, \beta_{j+1})$. Соответствующие этим ветвям системы собственных элементов $\{\vec{\varphi}_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ (вязкоупругие волны) образуют базис Рисса (с дефектом) и даже p-базис (с дефектом) в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$.

5. Задача (5.12) может иметь в качестве решений не только апериодически затухающие волны в вязкоупругой жидкости (см. свойства 2-4), но и конечное число затухающих осциллирующих волн, отвечающих невещественным собственным значениям. Если вязкость жидкости μ_1 достаточно велика, эти промежуточные осциллирующие волны отсутствуют, а упомянутые выше свойства базисности с конечным дефектом заменяются на свойства полной базисности.

Список цитируемых источников

1. *Агранович, М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей. // Успехи матем. наук. — 2002. — Т. 57, Вып. 5(347). — С. 3–78.

   Agranovich, M. S. Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in smooth and non-smooth domains. Russian Mathematical Surveys, 57:5(347), 3-78 (2002).

2. *Копачевский, Н. Д.* О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд. // Динамические системы. — 2017. — Т.7 (35), №1 — С. 109-145.

   Kopachevsky, N. D. Small motions of two viscoelastic fluids in stationary containers. Dynamical Systems 7(35), No.1, 109–145 (2017). (in Russian)

3. *Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo Zuy Kan Operator methods in linear hydrodynamic. Evolutional and Spectral problems. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)

4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

   Krein S. G. Linear differential equations in Banach space. Moscow: Nauka, 1967. (in Russian)

5. *Милославский, А. И.* Спектральный анализ малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом контейнере / Институт математики НАН Украины. — Киев, 1989. — Деп. рукопись №1221.

   Miloslavskii, A. I. Spectral Analysis of Small Oscillations of Visco-elastic fluid in the open container / Institute of mathematics NAS of Ukraine, Preprint №1221, Kiev, 1989.

6. *Сёмкина, Е. В.* Вольтерровы интегродифференциальные уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве и ассоциированные спектральные задачи. // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». — 2012. — Т.25 (64), № 2 — С. 79-111.

Syomkina, E. V. Linear Volterra integro-differential first-order equations in Hilbert space and corresponding spectral problems. Scientific notes of V. I. Vernadsky Taurida national University. Series "Mathematics 25(64):2, 79–111 (2012).

7. *Agranovich, M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary. // Russian Journal of Mathematical Physics — 2008. — Vol. 15., No.2. — P. 146–155.
8. *Azizov, T. Ya., Kopachevskii, N. D., Orlova, L. D.* Evolution and Spectral Problems Related to Small Motions of Viscoelastic Fluid // Proceedings of the St.-Petersburg Math. Society, Vol. VI. AMS Translations (2) —2000. — Vol. 199. — P. 1–24.
9. *Eirich, F. R.* Rheology. Theory and Applications. — New York: Academic Press, 1956. — 761p.
10. *Galiardo, E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova — 1957. — Vol. 27. — P. 284–305.
11. *Kopachevsky, Nikolay D., Krein, Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. — Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.128) — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2001. — 384 p.
12. *Kopachevsky, Nikolay D., Krein, Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics.. — Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.146) — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2003. — 444 p.
13. *Miloslavskii, A. I.* Stability of a viscoelastic isotropic medium // Soviet Physics Doklady. — 1988. — Vol. 33 — P. 300.
14. *Miloslavskii, A. I.* Stability of certain classes of evolution equations // Siberian Mathematical Journal. —1985. — Vol. 26, No.5. — P. 723–735.

Получена 06.11.2017

Динамические системы, 2017, том 7(35), №3, 229–244

УДК 517.938

О структуре резонансов 1:3 и 1:4 при обратимых возмущениях консервативных кубических отображений Эно[1]

Е. А. Самылина[*], **А. И. Шыхмамедов**[**], **А. О. Казаков**[**,*]

[*]Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
Нижний Новгород 603022. *E-mail: samylina_ evgeniya@mail.ru*

[**]Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики,
Нижний Новгород 603155. *E-mail: aykhansh@gmail.com, kazakovdz@yandex.ru*

Аннотация. На примере кубического консервативного отображения плоскости проведено исследование локальных бифуркаций разрушения консервативной динамики, возникающих при добавлении к консервативным системам обратимых возмущений. Показано, что основными бифуркациями разрушения консервативной динамики здесь являются обратимые бифуркации вилки. В результате такой бифуркации симметричная эллиптическая точка становится седловой, а в ее окрестности рождается пара из асимптотически устойчивой и вполне неустойчивой точек. Процесс разрушения консервативной динамики продемонстрирован на примере резонансов 1:3 и 1:4, возникающих в окрестности эллиптической неподвижной точки в кубическом консервативном отображении Эно.

Ключевые слова: обратимое отображение, эллиптическая точка, резонансная орбита, бифуркация вилка.

On the structure of resonances under reversible perturbations of conservative cubic Henon maps

E. A. Samylina, A. I. Shyhmamedov, A. O. Kazakov
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod 603022,
National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod 603155.

Abstract. The paper is devoted to the study of local bifurcations of symmetry breaking which arise under reversible perturbations of conservative reversible systems. We chose a perturbed conservative cubic diffeomorphism of a plane as an example of the model on which such bifurcations were investigated. It is shown that the main symmetry breaking bifurcations here are the so-called reversible pitch-fork bifurcations due to which a symmetric elliptic point becomes a symmetric saddle point and a pair of asymptotically stable and completely unstable points (one point is symmetric to another) appears in its neighborhood. The mechanism of destruction of conservative dynamics is demonstrated on the example of 1:3 and 1:4 resonances, which appear near the elliptic point of conservative cubic Henon map. In addition, in this paper we present an algorithm for constractig reversible perurbations which break down the conservative dynamics in two-dimension maps.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РНФ, грант No. 17-11-01041. Результаты численных экспериментов, представленные в разделах 4.2-4.3 выполнена при финансовой гранта РНФ No. 14-12-00811.

© *Е. А. САМЫЛИНА, А. И. ШЫХМАМЕДОВ, А. О. КАЗАКОВ*

Keywords: reversible map, elliptic point, resonant orbit, pitch-fork bifurcation.
MSC 2010: 47N10, 49J20, 49J35, 93C20, 70E99

1. Введение

В работе рассматривается задача, связанная с изучением обратимых возмущений консервативных (сохраняющих площадь) двумерных отображений и исследованием в них бифуркаций разрушений симметрии, то есть бифуркаций, приводящих к рождению устойчивых и вполне неустойчивых периодических траекторий (орбит).

Напомним, что диффеоморфизм f называется *обратимым (реверсивным)*, если он сопряжен со своим обратным отображением посредством некоторого преобразования h, являющегося инволюцией ($h \circ h = id$). То есть для обратимого отображения f выполняется следующее соотношение: $f = h \circ f^{-1} \circ h$. Фазовый объем при обратимых отображениях, в отличии от консервативных, в общем случае не сохраняется[2]. С другой стороны, в отличие от чисто диссипативных отображений, в фазовом пространстве обратимых диффеоморфизмов, помимо областей, отвечающих сжатию объемов, существуют также области, отвечающие их растяжению, в результате чего в таких диффеоморфизмах для каждого аттрактора $\mathcal{A}$ существует симметричный ему (относительно инволюции h) репеллер $\mathcal{R} = h(\mathcal{A})$, то есть аттрактор обратного отображения f^{-1}.

Характерной чертой обратимых неконсервативных отображений является сосуществование консервативных элементов динамики (эллиптических орбит и КАМ-кривых вокруг них) с диссипативными — аттракторами и репеллерами. По-видимому, впервые явление сосуществования консервативного и диссипативного поведения в обратимых системах было исследовано в работе [1], после которой появился целый ряд работ по исследованию хаотической динамики обратимых двумерных отображений (см. обзоры [2, 3] и ссылки в них).

В последнее время интерес к изучению обратимых отображений значительно усилился благодаря открытию *смешанной динамики* [4, 6, 5, 7] — третьей формы динамического хаоса, дополнительной к консервативному (гамильтонову) хаосу и странным аттракторам, для которой характерна принципиальная неотделимость аттракторов от репеллеров. Само явление смешанной динамики было открыто еще в работе Гонченко, Тураева и Шильникова [4], а специфика ее проявления в случае обратимых отображений была исследована в работах [6, 7]. Основы математической теории смешанной динамики были построены совсем недавно в работах Гонченко и Тураева [8, 9]. В этих работах, в частности, была введена новая концепция аттракторов и репеллеров, позволяющая теоретически объяснить часто наблюдаемые в численных экспериментах явления пересечения аттракторов и репеллеров. При этом, в случае обратимых систем, эти явления неизбежно сопровождаются

[2]В некоторых случаях, например для гамильтоновых систем, обратимые отображения могут быть консервативными.

возникновением *обратимой смешанной динамики*, характеризующейся неотделимостью не только аттракторов от симметричных им репеллеров, но также и от консервативной динамики, включающей эллиптические и консервативные периодические траектории, КАМ-кривые и т.п.

Среди работ, посвященных численным исследованиям смешанной динамики в обратимых системах, отметим работы [10, 11, 12], в которых явление обратимой смешанной динамики было обнаружено в неголономных моделях кельтского камня, резинового волчка Чаплыгина и волчка Суслова, а также работы [13] и [14], посвященные исследованию сценариев возникновения такого явления в модели связанных осцилляторов, а также в вихревой модели.

Заметим, что во всех перечисленных выше случаях смешанная динамика возникала в обратимых системах, получающихся в результате таких возмущений обратимых консервативных систем, которые сохраняют обратимость, но приводят к разрушению консервативности. В результате этого, в таких системах возникают аттракторы и репеллеры. В связи с этим, большой интерес представляют две связанные друг с другом задачи: как в конкретных примерах построить такие возмущения и какова структура соответствующих бифуркаций разрушения симметрии. В настоящей работе мы рассмотрим обе эти задачи на примере сохраняющих площадь кубических отображений плоскости. Заметим, что разрушение консервативной динамики в обратимых системах связано с бифуркациями двух типов: локальные бифуркации разрушения симметрии и глобальные бифуркации разрушения симметрии.

Основные элементы теории локальных бифуркаций обратимых отображений построены, в частности, в работе [15]. Одним из основных типов таких бифуркаций является так называемая бифуркация *обратимая вилка (reversible pitchfork)*, в результате которой симметричная эллиптическая периодическая точка становится седловой, а в ее окрестности рождается пара из устойчивой (сток) и вполне неустойчивой (источник) точек, см. рис. 1. Напомним, что орбита называется *симметричной*, если она пересекает множество $Fix(h)$ неподвижных точек инволюции h (т.е. множество таких точек x, для которых $h(x) = x$). Кроме того заметим, что подобные локальные бифуркации разрушения симметрии служат своеобразным индикатором смешанной динамики в таких моделях, как неголономный волчок Суслова [16], модель Пиковского-Топажа [13], описывающая взаимодействие четырех связанных ротаторов, и др.

Глобальные бифуркации разрушения симметрии связаны с возникновением нетрансверсальных пересечений инвариантных многообразий либо одной и той же седловой периодической траектории (гомоклинические касания), либо разных (гетероклинические касания). При выполнении соответствующих условий бифуркации таких касаний приводят к появлению как симметричных пар периодических траекторий типа «сток-источник», так и симметричных эллиптических траекторий. К примеру, одни из основных типов таких глобальных бифуркаций связаны с образованием негрубых гетероклинических контуров, содержащих 2 седловые точки, одна из которых обладает якобианом $J < 1$, а другая — $J > 1$ (см. рис.

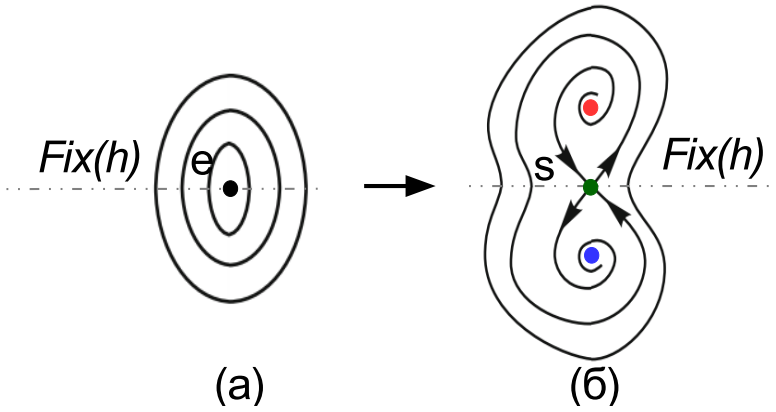

Рис. 1. Фазовые портреты в окрестности бифуркации обратимая вилка: (а) до бифуркации, (б) после бифуркации.

2а)[3]. В работе [4] доказано, что в окрестности любого двумерного диффеоморфизма, содержащего такой гетероклинический контур, существуют открытые области (области Ньюхауса), в которых всюду плотны диффеоморфизмы со счетными множествами устойчивых, вполне неустойчивых и седловых периодических орбит, замыкания которых имеют непустые пересечения, что и означает неотделимость в системе аттракторов от репеллеров. Позже, в работе [6], аналогичная теорема была доказана в случае, когда диффеоморфизм с таким гетероклиническим контуром является обратимым (соответствующий гетероклинический контур изображен на рис. 2б). Однако, в отличие от общего случая, в дополнение к периодическим источникам и стокам, в таких отображениях также возникают симметричные эллиптические и консервативные седловые периодические орбиты. Отметим, что такие симметричные орбиты пересекают множество $Fix(h)$ инволюции h (то есть множество таких точек x, что $h(x) = x$). Среди работ, посвященных исследованию сценариев возникновения смешанной динамики в результате глобальных бифуркаций разрушения симметрии, отметим работы [13, 14], в которых описанные выше негрубые гетероклинические контуры были найдены численно, и, тем самым, доказано возникновение смешанной динамики в исследуемых системах.

Исследования глобальных бифуркаций разрушения симметрии сводятся к построению и исследованию локальных бифуркаций в отображениях первого возвращения в окрестность седловой точки, принадлежащей негрубому гетероклиническому контуру [4, 6, 7]. Как правило, такие отображения, в некотором прибли-

[3]Напомним, что под негрубым гетероклиническим контуром подразумевается сепаратрисный контур, содержащий 2 седловые точки, в котором одна пара сепаратрис пересекается трансверсально (грубо), а другая пара образует негрубое касание.

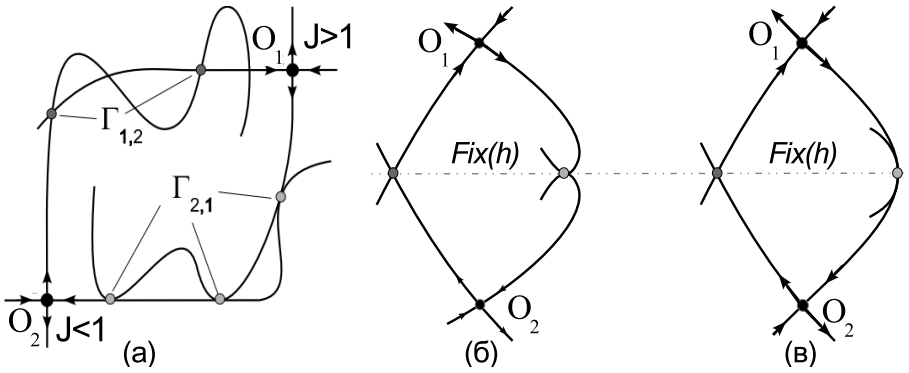

Рис. 2. Примеры негрубых гетероклинических контуров: (а) контур, исследованный в работе [4]; (б) негрубый гетероклинический контур с квадратичным касанием [6]; (в) негрубый гетероклинический контур с кубическим касанием.

жении, входят в класс обобщенных отображений Эно вида:

$$H_n : \begin{cases} \bar{x} = y, \\ \bar{y} = -bx + P(y), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $P(y)$ — полином n-й степени, имеющий вид $P(y) = \pm y^n + O(y^{n-2})$, а b — параметр, задающий якобиан отображения ($J = b$). Когда $P(y) = M - y^2$, отображение 1.1 является хорошо известным отображением Эно [18]. Такое отображение возникает, например, при исследовании бифуркаций квадратичных гомоклинических касаний [19].

При изучении бифуркаций кубических гомоклинических касаний (см. рис. 2в) возникает *кубическое отображение Эно* H_3, для которого $f(y) = M \pm y^3 + M_2 y$ [20, 21]:

$$H_3 : \begin{cases} \bar{x} = y, \\ \bar{y} = -bx + M_1 + M_2 y \pm y^3. \end{cases} \tag{1.2}$$

Обратим внимание, что при $b = 1$ семейство обобщенных отображений Эно 1.1 являются консервативными и, более того, обратимыми относительно инволюции h

$$h : \begin{cases} \bar{x} = y, \\ \bar{y} = x. \end{cases} \tag{1.3}$$

Обозначим консервативное кубическое отображение Эно с y^3 через H_3^+, а с $-y^3$ — через H_3^-. Именно такие отображения возникают при изучении кубических гомоклинических касаний в консервативных системах. Подробный бифуркационный анализ отображений $H_3^\pm$ содержится в работе [22], где изучены бифуркации неподвижных, 2- и 3- периодических точек, а также в работе [23], посвященной детальному изучению резонанса 1:4 в окрестности эллиптической неподвижной точки отображения. В частности, в указанных работах показано, что эллиптические

точки резонансов 1:3 и 1:4 могут претерпевать бифуркацию вилка, в результате которой симметричная эллиптическая точка, становится седловой, а в ее окрестности рождается пара несимметричных эллиптических точек такого же периода.

О результатах работы

В настоящей работе предложен метод построения обратимых неконсервативных отображений. С помощью предложенного метода сконструировано обратимое неконсервативное отображение, являющееся возмущением суперпозиции двух одинаковых кубических консервативных отображений Эно H_3^+ (1.2). Показано, что при добавлении такого возмущения эллиптические орбиты резонансов 1:3 и 1:4 при некоторых значениях параметров претерпевают бифуркацию обратимая вилка, в результате чего в системе возникают аттракторы — устойчивые периодические точки и репеллеры — вполне неустойчивые периодические точки.

Заметим, что резонансные орбиты 1:3 (как и любые другие орбиты нечетного периода) исходного кубического отображения Эно H_3^+, являются периодическими орбитами того же периода для суперпозиции двух таких же отображений Эно, то есть для отображения $(H_3^+)^2$. Однако, для периодических орбит четного периода ситуация иная. Периодическая орбита четного периода N для исходного отображения H_3^+ распадается на пару $N/2$ периодических орбит для квадрата отображения Эно $(H_3^+)^2$. Таким образом, неконсервативные возмущения для сконструированного нами отображения, в общем случае, по разному влияют на поведение разных орбит из этой пары, в результате чего бифуркационные диаграммы для каждой из этих орбит будут различными. В разделе 4 описанный эффект продемонстрирован для двух орбит периода 2, являющихся одной резонансной орбитой 1:4 в исходном кубическом отображении H_3.

2. Алгоритм построения неконсервативных обратимых отображений

2.1. Построение консервативных обратимых отображений

Рассмотрим двумерное отображение, заданное в неявном виде:

$$\begin{cases} \bar{x} = F(x, \bar{y}), \\ y = F(\bar{y}, x). \end{cases} \tag{2.1}$$

В работе [7] показано, что такое отображение является обратимым относительно инволюции $h : \{\bar{x} = y, \bar{y} = x\}$ (1.3). Если функция $F(x, y)$, входящая в правую часть уравнения, зависит от переменной x линейно, то есть $F(x, y) = xG_1(y) + G_0(y)$, то отображение (2.1) может быть переписано в явном виде:

$$\begin{cases} \bar{x} = xG_1(\bar{y}) + G_0(\bar{y}), \\ \bar{y} = \frac{y - G_0(x)}{G_1(x)}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Заметим, если функция $G_1(x)$ является гладкой и $G_1(x) \neq 0, x \in \mathbf{R}$, тогда отображение (2.2) является диффеоморфизмом плоскости.

Далее возьмем $F(x,y) = M_1 + M_2 y + y^3 - x$ и получим отображение следующего вида:

$$H_3^2 : \begin{cases} \bar{x} = M_1 + M_2\bar{y} + \bar{y}^3 - x, \\ \bar{y} = M_1 + M_2 x + x^3 - y. \end{cases} \tag{2.3}$$

Лемма 1. *Отображение* (2.3) *является суперпозицией двух отображений, являющихся обратными к кубическому отображению Эно* H_3^+. *Верно следующее соотношение:*

$$H_3^2 = (H_3^+)^{-1} \circ (H_3^+)^{-1}.$$

Так как, при $b = 1$, кубическое отображение Эно (1.2) является консервативным, то и обратное к нему отображение тоже будет консервативным. Поэтому отображение (2.3), являющееся суперпозицией двух обратных консервативных отображений (1.2), также будет консервативным.

Замечание 1. Бифуркации периодических орбит отображения (2.3) будут соответствовать бифуркациям консервативного отображения Эно H_3^+. Однако, орбиты четного периода N в этом отображении будут отвечать двум разным орбитам периода $N/2$ в отображении (2.3).

2.2. Построение неконсервативных обратимых отображений

Возьмем в качестве функции $F(x,y)$ в отображении (2.1) следующую:

$$F(x,y) = M_1 + M_2 y + y^3 - x + \varepsilon xy$$

и запишем полученное отображение в явном виде

$$\tilde{H}_3^2 : \begin{cases} \bar{x} = M_1 + M_2\bar{y} + \bar{y}^3 - x + \varepsilon x\bar{y}, \\ \bar{y} = \frac{M_1 + M_2 x + x^3 - y}{1 - \varepsilon x}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь ε — параметр возмущения. При $\varepsilon = 0$ отображение $\tilde{H}_3^2$ в точности совпадает с отображением H_3^2. Сконструированное отображения является обратимым относительно инволюции (1.3). Однако, при $\varepsilon \neq 0$, полученное отображение не является консервативным, так как его якобиан J не равен единице:

$$J = \frac{1 - \varepsilon\bar{y}}{1 - \varepsilon x} \neq 1.$$

Замечание 2. Отображение (2.4) не является диффеоморфизмом на всей плоскости $\mathbf{R^2}$. При этом, динамика этого отображения сосредоточена вблизи начала координат и, при малых значениях параметра ε, отображение можно считать диффеоморфизмом в достаточно большой окрестности начала координат. Более того, отображение (2.4) легко сделать диффеоморфизмом, взяв в качестве возмущения $\varepsilon x \arctan(y)$, вместо εxy.

Таким образом, отображение (2.4) можно рассматривать как неконсервативное возмущение отображения (2.3), сохраняющее свойство обратимости. Результаты исследования бифуркаций в этом отображении приведены в разделах 3.2 и 4.

3. Бифуркации неподвижных точек и резонансов в H_3^+

Подробный бифуркационный анализ кубического консервативного отображения содержится в работе [22]. На рисунке 3 приведена бифуркационная диаграмма отображения H_3^+ для некоторых неподвижных и периодических точек. Кратко

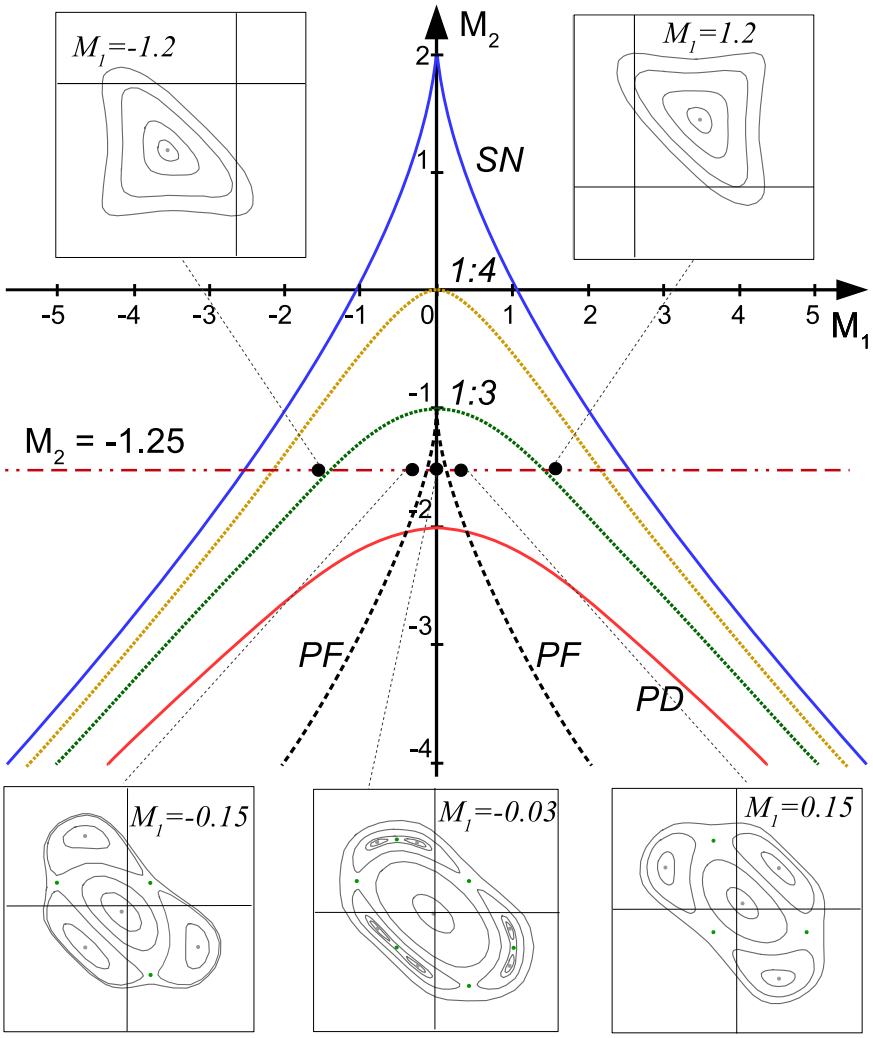

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для консервативного кубического отображения Эно H_3^+. SN, $1:3$, $1:4$ и PD — бифуркационные кривая параболической бифуркации, резонансов $1:3$, $1:4$ и удвоения периода эллиптической точки. PF — кривые консервативной бифуркации разрушения симметрии (вилка).

опишем кривые, изображенные на этом рисунке. Кривая SN отвечает параболической бифуркации, при переходе через которую в сторону уменьшения параметра M_2 возникают эллиптическая и седловая неподвижные точки. При дальнейшем уменьшении параметра M_2 встречается кривая $1:4$, отвечающая возникновению точки периода четыре в окрестности эллиптической точки. Подробное исследование бифуркаций резонанса $1:4$ содержится в работе [23]. Следующая кривая соответствует возникновению резонанса 1:3. Самая нижняя кривая PD отвечает бифуркации удвоения периода неподвижной эллиптической точки. При переходе через эту кривую неподвижная точка становится седловой, а в ее окрестности рождается эллиптическая точка периода 2.

Заметим, что в точке $(0,0)$ к кривой $1:3$ подходит пара кривых PF, соответствующих консервативной бифуркации разрушения симметрии (вилка). При переходе в область, ограниченную двумя кривыми PF, симметричная эллиптическая точка периода 3 становится седловой, а в ее окрестности рождается пара несимметричных эллиптических точек такого же периода. Отметим, что в обратимом неконсервативном случае, в результате такой бифуркации в окрестности возникает пара из устойчивой (сток) и вполне неустойчивой (источник) точек. Также обратим внимание, что изображенная на рисунке 3 бифуркационная диаграмма не является полной. На ней, например, не изображены линии, отвечающие бифуркации вилка для эллиптической точки периода 4.

На рисунке 3 также изображены фрагменты фазовых портретов в окрестности эллиптической точки при фиксированном $M_2 = -1.25$. Двигаясь вдоль линии $M_2 = -1.25$, можно проследить за эволюцией фазовых портретов при переходе через кривую $1:3$, а затем при переходе через кривую PF.

4. Бифуркации разрушения симметрии для возмущенного отображения $\tilde{H}_3^2$

Далее приведены результаты исследования бифуркаций разрушения симметрии для резонансов $1:3$ и $1:4$ обратимого неконсервативного отображения $\tilde{H}_3^2$, сконструированного на основе кубического консервативного отображения Эно H_3^+.

4.1. Бифуркациии разрушения симметрии для резонанса $1:3$

Сперва изучим влияние неконсервативного возмущения на резонанс 1:3, зафиксировав величину возмущения $\varepsilon = 0.01$. Соответствующая бифуркационная диаграмма изображена на рисунке 4. Как и в невозмущенном случае, на диаграмме изображена бифуркационная кривая $1:3$, отвечающая возникновению эллиптической точки периода 3 и две кривые PF, отвечающие бифуркации разрушения симметрии эллиптической точки периода 3. Однако, в отличии от невозмущенного случая, бифуркация разрушения симметрии здесь является неконсервативной (обратимой «вилкой»). То есть при переходе в область III, ограниченную двумя кривыми PF симметричная эллиптическая точка периода 3 становится седловой,

а рядом с ней рождается устойчивая точка периода 3 (сток) и вполне неустойчивая точка периода 3 (источник).

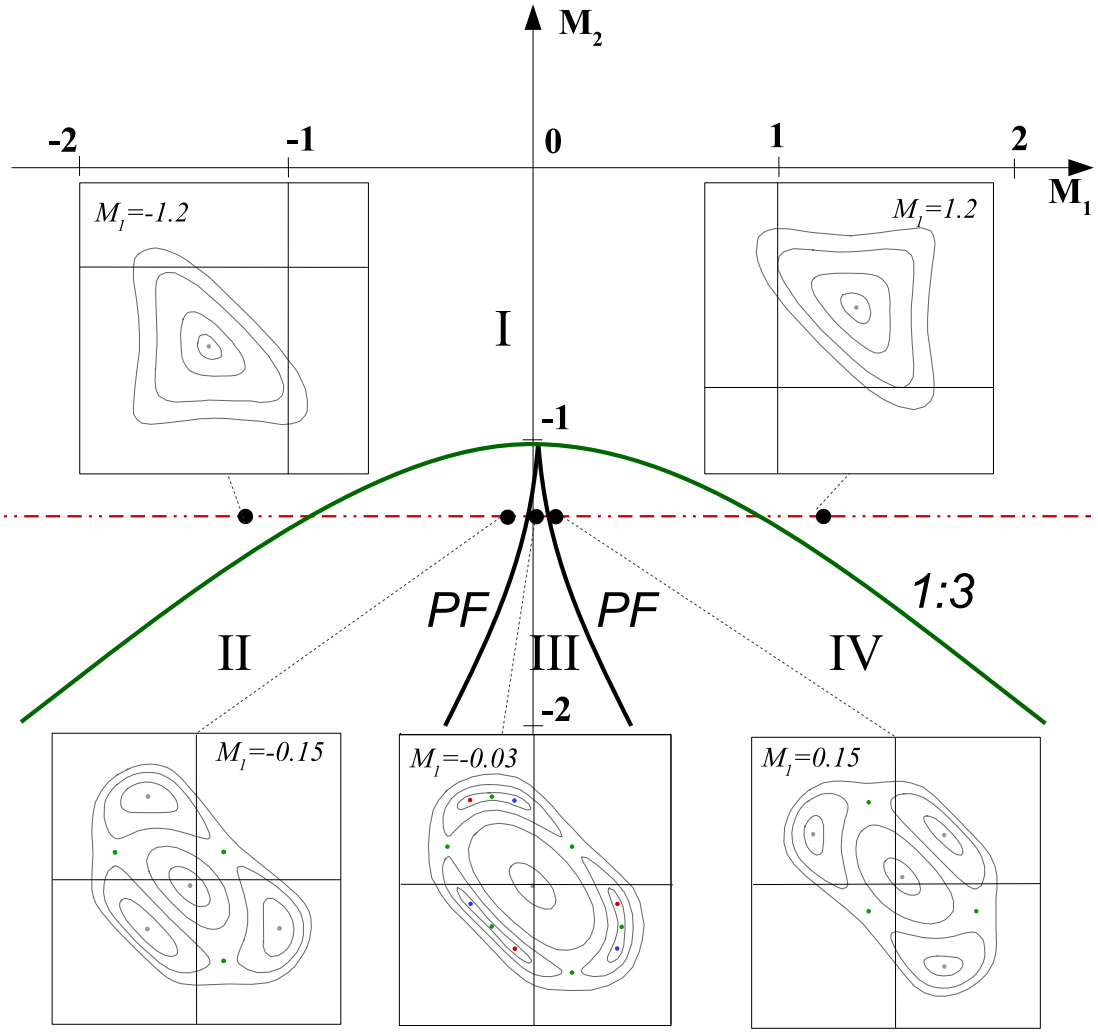

Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для неконсервативного отображения $\tilde{H}_3^2$ при $\varepsilon = 0.01$ в окрестности резонанса 1:3. Кривая $1:3$ отвечает возникновению точки периода 3, а кривые PF неконсервативной бифуркации потери симметрии (обратимой «вилки»).

Снова зафиксируем параметр $M_2 = -1.25$ и проследим за эволюцией фазовых портретов при возрастании параметра M_1. Как и на диаграмме, представленной на рис. 3, после перехода через кривую резонанса 1:3, в отображении рождается эллиптическая точка периода три (см. рис. 5б). При переходе через кривую бифуркации обратимая вилка PF точка периода три распадается на устойчивую, вполне неустойчивую и седловую точки периода 3 (см. рис. 5в). При этом заметим, что в результате такой бифуркации рождается пара не симметричных точек периода

3. При дальнейшем увеличении параметра M_1 устойчивая и неустойчивая точки отходят друг от друга. При этом одна из компонент устойчивой (вполне неустойчивой) точки периода 3 отходит от линии неподвижных точек инволюции $y = x$. Однако заметим, что другие 2 компоненты этих точек приближаются друг к другу и к линии $y = x$ с другой стороны от эллиптической точки (см. рис. 5г). При переходе через вторую кривую PF возникает обратная бифуркация разрушения симметрии, в результате которой устойчивая, вполне неустойчивая и симметричная седловая точки периода 3 сливаются и снова возникает эллиптическая точка периода 3 (см. рис. 5д). Далее мы переходим через линию $1 : 3$, точка периода три исчезает (см. рис. 5е).

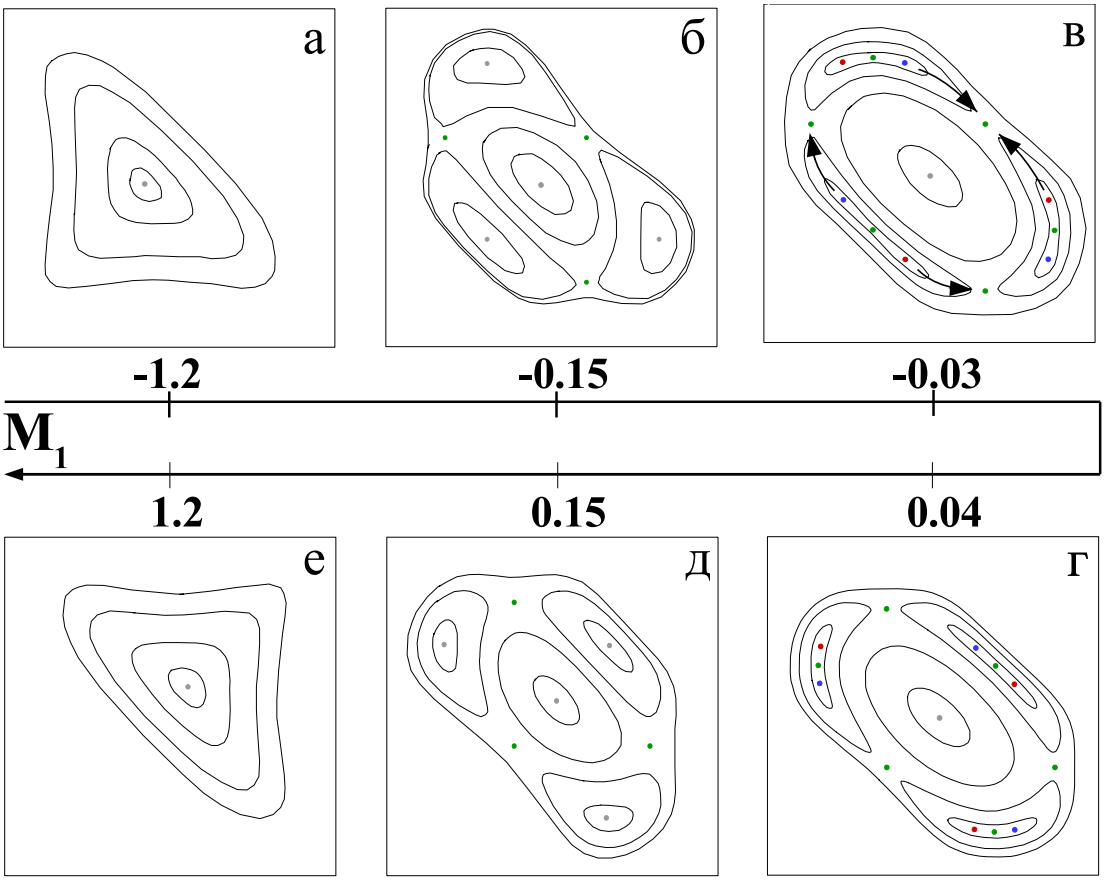

Рис. 5. Эволюция фазовых портретов при изменении параметра M_1 ($M_2 = -1.25$)

4.2. Бифуркациии разрушения симметрии для резонанса $1 : 4$

Теперь изучим, как эволюционирует резонанс 1:4 в случае возмущенного отображения $\tilde{H}_3^2$ (2.4). Сперва заметим, что точка периода 4 для исходного отображения H_3^+ распадается на 2 точки периода 2 для отображения $(H_3^+)^2$. В общем

случае, возмущение такого отображения будет по разному влиять на каждую из точек периода 2. На рисунке 6 изображена бифуркационная диаграмма для возмущенной системы H_3^2 в окрестности резонанса 1:4.

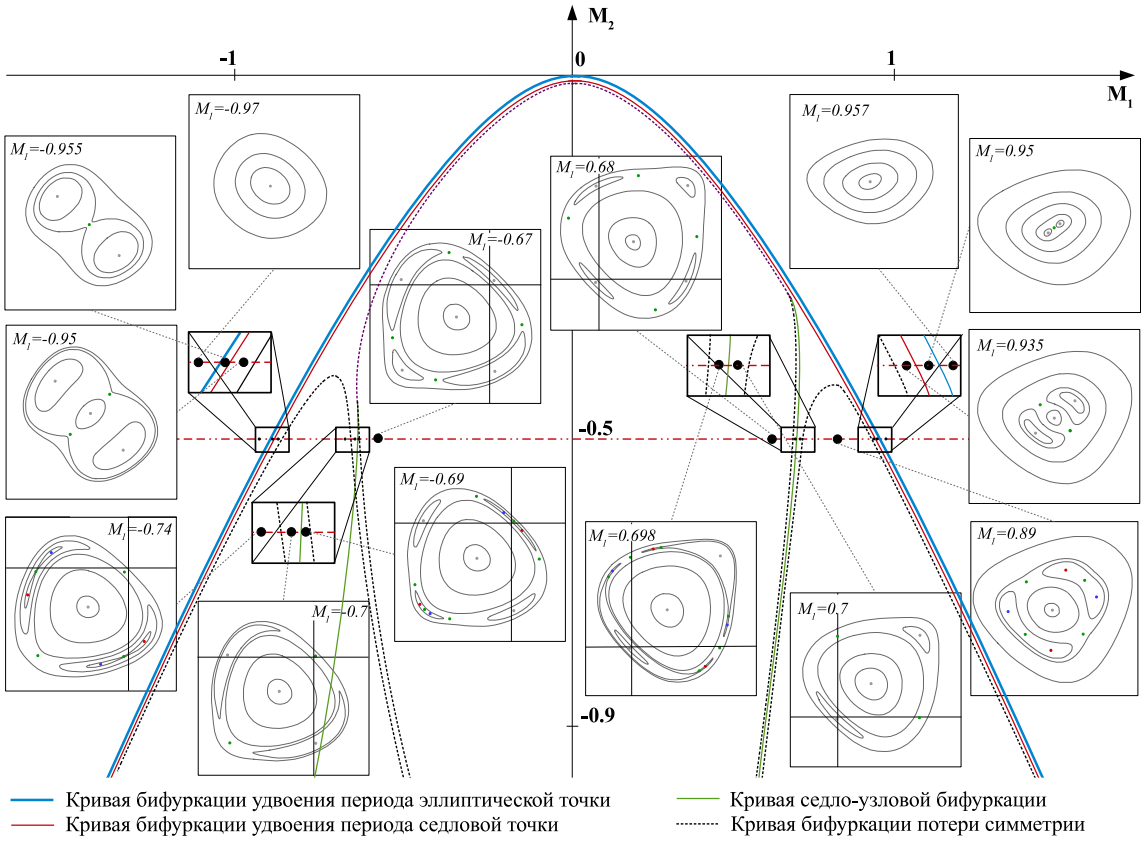

Рис. 6. Бифуркационная диаграмма для неконсервативного отображения $\tilde{H}_3^2$ при $\varepsilon = 0.01$ в окрестности резонанса 1:4. Описание бифурационных кривых см. в легенде к рисунку.

Далее, для удобства зафиксируем параметр $M_2 = -0.5$ (пунктирная прямая линяя на рис. 6 и проследим за эволюцией фазового портрета в этом случае, двигаясь в сторону увеличения параметра M_1 (см. рис. 7).

На рис. 7а изображен фазовый портрет отображения в окрестности эллиптической неподвижной точки при $M_1 = -0.97$. При пересечении первой бифуркационной кривой, отвечающей в возмущенном отображении удвоению периода эллиптической точки (напомним, что в исходном отображении такая кривая соответствовала резонансу 1:4), эта эллиптическая точка становится седловой, а рядом рождается эллиптическая точка периода 2 (см. рис. 7б). Далее, при незначительном увеличении параметра M_1, мы пересекаем вторую бифуркационную кривую, отвечающую бифуркации удвоения периода только что образовавшейся седловой неподвижной точки. В результате этого на фазовом портрете отображения снова появляется неподвижная эллиптическая точка, а также седловая точка периода 2

(см. рис. 7в). При дальнейшем увеличении параметра M_1 пересекаем кривую, отвечающую бифуркации разрушения симметрии эллиптической точки периода 2 (на рис. 6 штриховая кривая), в результате чего эллиптическая точка периода 2 становится седловой, а в ее окрестности рождается пара источник-сток (устойчивая и вполне неустойчивая точки периода 2), см. рис. 7г. Такой фазовый портрет сохраняется до обратного пересечения этой кривой, после чего устойчивая и вполне неустойчивая точки периода 2 сливаются, а на фазовом портрете вновь появляется эллиптическая точка периода 2 (см. рис. 7д). Далее, при незначительном изменении параметра M_1, встречается кривая седло-узловой бифуркации, в результате которой рождаются 2 седлоузла периода 2, один из которых распадается на седловую и устойчивую точку периода 2, а второй — на седловую и вполне неустойчивую точку периода 2 (см. рис 7е). При незначительном изменении параметра M_1 пересекаем кривую бифуркации восстановления симметрии (штриховая кривая на рис. 6), в результате чего образовавшиеся устойчивая и вполне неустойчивая точки периода 2 сливаются (вместе с симметричной седловой точкой периода 2), образуется симметричная эллиптическая точка периода 2 (см. рис. 7ж). Далее, на достаточно большом интервале по параметру M_1, фазовый портрет в окрестности двух эллиптических точек периода 2 качественно не меняется, см. фазовый портрет при $M_1 = 0.68$ при подходе к следующей бифуркационной кривой (рис. 7з).

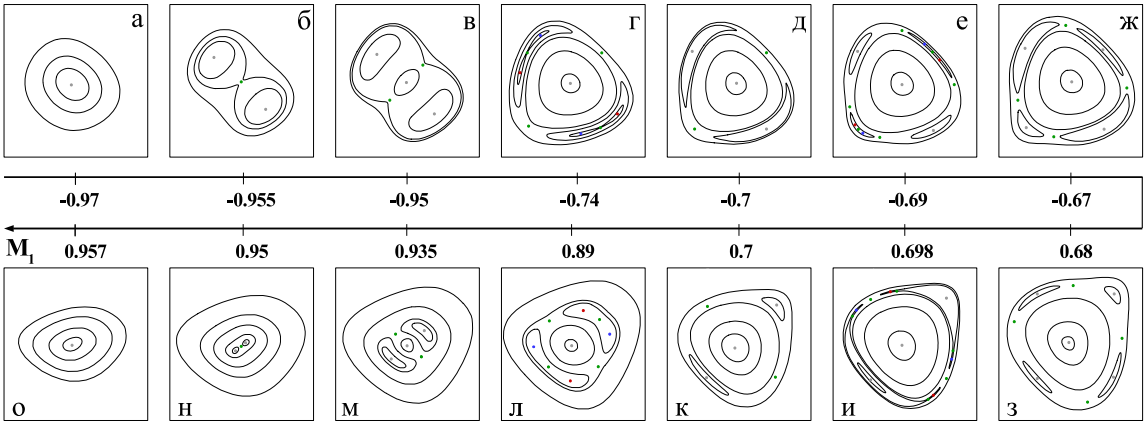

Рис. 7. Эволюция фазовых портретов при изменении параметра M_1 ($M_2 = -0.5$).

Далее эллиптическую точку периода 2, лежащую на линии $y = x$, назовем симметричной, а вторую эллиптическую точку периода 2 — несимметричной. При переходи первой бифуркационной кривой, лежащей в правой полуплоскости несимметричная эллиптическая точка периода 2 претерпевает бифуркацию потери симметрии, рождается пара несимметричных устойчивых и вполне неустойчивых точек периода 2 (см. рис. 7и). При незначительном увеличении параметра M_1 пересекаем зеленую линию, отвечающую обратной седло-узловой бифуркации. В результате этого родившаяся устойчивая точка периода 2 (как и вполне неустойчива

точка периода 2) сливается с седловой точка периода 2, а на фазовом портрете снова остаются лишь консервативне траектории (см. рис. 7к). Далее, при пересечении второй штриховой линии в правой полуплоскости (см. рис. 6), бифуркация потери симметрии возникает с симметричной парой эллиптических точек периода 2, опять возникает пара источник сток (см. рис. 7л), а при обратном пересечении этой же кривой наблюдается обратная бифуркация потери симметрии (восстановление симметрии), см. рис. 7м. В конце концов, пересекаем кривую, отвечающую бифуркации удвоения седловой точки, в результате чего седловая точка периода 2 влипает в эллиптическую неподвижную точку и возникает седловая неподвижная точка (см. рис. 7н). А затем пересекаем последнюю кривую, в результате которой симметричная эллиптическая точка периода 2 влипает в седловую неподвижную точку, возникает эллиптическая неподвижная точка (см. рис. 7о).

4.3. Бифуркациии разрушения симметрии для резонансов более высокого порядка

Мы полагаем, что бифуркации разрушения симметрии для нечетных резонансов проходят в соответствии со сценарием, изложенным в разделе 4.1. В подтверждении этому на рисунке 8 приведены бифуркации потери симметрии для резонанса 1:5. С другой стороны, так как точки четного периода N для исходного отображения H_3^+ распадаются на пары точек периода $N/2$ для отображения $\tilde{H}_3^2$, в соответствии результатами, полученными для резонанса 1:4 в разделе 4.2, бифуркационные диаграммы для четных резонансов 4.2 будут устроены гораздо сложнее.

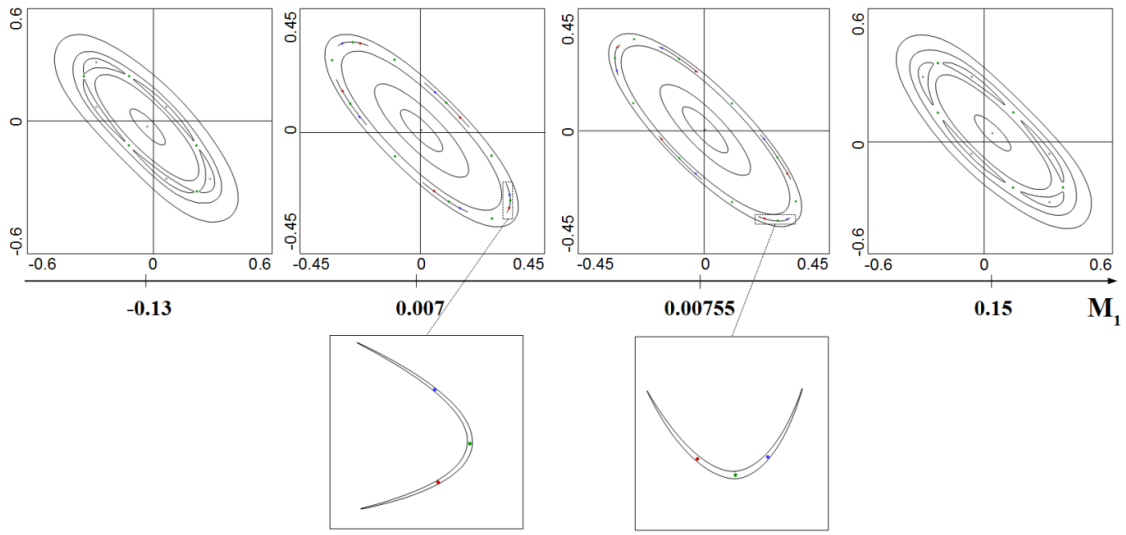

Рис. 8. Эволюция фазовых портретов при изменении параметра M_1 ($M_2 = -1.7$).

Список цитируемых источников

1. *Politi, A., Oppo, G. L., Badii, R.* Coexistence of conservative and dissipative behavior in reversible dynamical systems // Physical Review A. — 1986. — Vol. 33, No.6. — C. 4055.
2. *Roberts, J. A. G., Quispel, G. R. W.* Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems // Physics Reports. — 1992. — Vol. 216, No.2-3. — C. 63–177.
3. *Lamb, J. S. W., Roberts, J. A. G.* Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1998. — Vol. 112, No.1. — P. 1–39.
4. *Gonchenko, S. V., Shilnikov, L. P., Turaev, D. V.* On Newhouse domains of two-dimensional diffeomorphisms which are close to a diffeomorphism with a structurally unstable heteroclinic cycle // Proc. Steklov Inst. Math. — 1997. — Vol.216. — P. 70–118.
5. *Гонченко, С. В., Стенькин, О. В., Шильников, Л. П.* О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями // Нелинейная динамика. — 2006. — Т. 2, №1. — С. 3–25.

   Gonchenko, S. V., Sten'kin, Ò. P., Shilnikov, L. P. On the existence of infinitely many stable and unstable invariant tori for systems from Newhouse regions with heteroclinic tangencies. Russian Journal of Nonlinear Dynamics 2, No.1, 3-25 (2006). (in Russian).
6. *Lamb, J. S. W., Stenkin, O. V.* Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // Nonlinearity. — 2004. — Vol. 17, No.4. — P. 1217-1244.
7. *Delshams, A., Gonchenko, S. V., Gonchenko, V. S., Lazaro, J. T., Stenkin, O.* Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps // Nonlinearity. — 2013. — Vol. 26, No.1. — P. 1-33.
8. *Gonchenko, S.* Reversible Mixed Dynamics: A Concept and Examples // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. — 2016. — Vol. 5, No.4. — P. 345–354.
9. *Gonchenko, S., Turaev, D.* On three types of dynamics and the notion of attractor // Proc. Steklov Inst. Math. — Vol.297. — P. 133–157.
10. *Gonchenko, A. S., Gonchenko, S. V., Kazakov, A. O.* Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // Regular and Chaotic Dynamics. — 2013. — Vol. 18, No.5. — P. 521–538.
11. *Kazakov, A. O.* Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane // Regular and Chaotic Dynamics. — 2013. — Vol. 18, No.5. — P. 508–520.
12. *Kazakov, A. O.* On chaotic dynamics in the Suslov problem // Int. Conf.–Sch. «Dynamics, bifurcations and chaos 2015 (DBC II)» — Nizhni Novgorod: Lobachevsky State Univ., 2015. — pp. 21-–30.
13. *Gonchenko, A. S., Gonchenko, S. V., Kazakov, A. O., Turaev, D. V.* On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky–Topaj system of coupled rotators // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2017. — Vol. 350. — P. 45–57.
14. *Kazakov, A. O.* On a scenario of onset of strongly dissipative mixed dynamics. — 2017. — (Препринт / arxiv.org).
15. *Lerman, L. M., Turaev, D.* Breakdown of symmetry in reversible systems // Regular and Chaotic Dynamics. — 2012. — Vol.17, No.3-4. — P. 318–336.

16. *Бизяев, И. А., Борисов, А. В., Казаков, А. О.* Динамика задачи Суслова в поле тяжести: реверс и странные аттракторы // Нелинейная динамика. — 2016. — Т. 12, №2. — С. 263–287.

Bizyaev, I. A. Borisov, A. V., Kazakov, A. O. Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: reversal and strange attractors. Rus. J. Nonlin. Dyn. 12, No.2, 263–287 2016). (in Russian).

17. *Topaj, D., Pikovsky, A.* Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2012. — Vol.170, No.2. — P. 118–130.

18. *Henon, M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // The Theory of Chaotic Attractors. / New York: Springer, 1976. — P. 94–102.

19. *Гаврилов, Н. К., Шильников, Л. П.* О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I // Математический сборник. — 1972. — Т. 88, №4(8). — С. 475–492.

Gavrilov, N. K., Shilnikov, L. P. On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. I. Mathematics of the USSR-Sbornik 17, No.4, 467-485. (1972).

20. *Гонченко, С. В.* О двухпараметрическом семействе систем, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. — Горький: 1985. — С. 55-72.

Gonchenko, S. V. On a two-parameter family of systems close to a system with a structurally unstable homoclinic curve. In Metody kachestvennoi teorii differentsial'nykh uravnenii, Gorkii, 1985, pp. 55-72. (in Russian)

21. *Gonchenko, S. V., Shilnikov, L. P., Turaev, D. V.* Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 1996. — Vol.6, No.1. — P. 15–31.

22. *Dullin, H. R., Meiss, J. D.* Generalized Henon maps: the cubic diffeomorphisms of the plane // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2000. — Vol.143, No.1. — P. 262–289.

23. *Gonchenko, M., Gonchenko, S., Ovsyannikov, I.* Bifurcations of cubic homoclinic tangencies in two-dimensional symplectic maps // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. — 2017. — Vol. 12, No.1. — P. 41–61.

Получена 03.09.2017

Динамические системы, 2017, том 7(35), №3, 245–256

УДК 517.97:517.98

Локальная асимметрия и локальный эксцесс негладких распределений с точки зрения симметрического анализа

И. В. Орлов, И. В. Баран

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: igor_v_orlov@mail.ru, matemain@mail.ru*

Аннотация. В работе рассмотрены некоторые приложения теории симметрических дифференциалов и симметрических субдифференциалов в теории вероятностей и в теории экстремальных задач. Понятие оптимальности направления мы связываем с локальными аналогами известных в теории вероятностей понятий асимметрии и эксцесса. Эти характеристики оказываются тесно связанными с симметрическими дифференциалами либо, при соответствующем обобщении, с субдифференциалами, что позволяет применить для исследования подобных экстремальных задач симметрический анализ.

Ключевые слова: симметрическая производная, симметрический субдифференциал, локальная асимметрия, локальный эксцесс.

Local asymmetry and local kurtosis of nonsmooth distributions from the view of symmetric analysis

I. V. Orlov, I. V. Baran

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract.

In the last decade, the theory of so-called compact subdifferentials has been constructed and found significant applications in the works of the first author and his students, the main point of which is the use for the mappings in Banach spaces as subdifferentials of many-valued sublinear and polysublinear operators with compact convex values. In our papers we consider the question of constructing the foundations of the theory of symmetric compact subdifferentials of mappings in Banach spaces.

Symmetric local characteristics of maps, from their very appearance, take a special position in the material analysis. However, the symmetric differential calculus, in contrast to the classical calculus, has not been generalized to the infinite-dimensional case — an analog of the Gateau–Hadamard–Frechet calculus was not constructed for the symmetric case.

In the applied plan, we associate the feasibility of constructing a symmetric version of the subdifferential calculus with the following capabilities of applications that are implemented in this paper.

Earlier, in our works, the problem of finding the direction of the optimal transition (in diameter) through the minimum point was formulated and investigated. It turned out that to study such a problem it is convenient to use symmetric rather than centered characteristics (symmetric differentials, or, in the more general case, symmetric subdifferentials of the first and second order).

This possibility is associated with the application of symmetric characteristics in extremal problems «at the second stage»: for the extremum point already found, determine the optimal (in

© *И. В. ОРЛОВ, И. В. БАРАН*

a certain sense) linear direction of motion to the extremum point. In this connection, we should mention two known approaches in the nonsmooth case. The first of these is also known as the «steepest descent method» (along the radius) to the minimum point, and in the computational plan is close to the gradient method of finding the minimum. The second approach, known as the «Gelfand ravine method», is connected with the passage through the extremum point along the diameter.

In our work, the concept of optimality of direction we associate with local analogues of the concepts of asymmetry and kurtosis known in probability theory. These characteristics turn out to be closely related to symmetric differentials, or, with appropriate generalization, to subdifferentials, which allows us to apply symmetric analysis to study such extremal problems.

Keywords: symmetric derivatives, symmetric subdifferential, local asymmetry, local kurtosis.

MSC 2010: 46G05, 49J52

Введение

В последнее десятилетие в работах первого автора и его учеников (см. [10], [11], [18]) была построена и нашла значимые применения теория так называемых компактных субдифференциалов, основным моментом которой является использование для отображений в банаховых пространствах в качестве субдифференциалов многозначных сублинейных и полисублинейных операторов с компактными выпуклыми значениями. В наших работах [1], [9] рассмотрен вопрос о простроении основ теории симметрических компактных субдифференциалов отображений в банаховых пространствах.

Симметрические локальные характеристики отображений, с самого их возникновения, занимают особую позицию в вещественном анализе. Однако симметрическое дифференциальное исчисление, в отличие от классического не получило обобщения на бесконечномерный случай — аналог исчисления Гато–Адамара–Фреше для симметрического случая не был построен.

В работе [1] была сформулирована и исследована задача поиска направления оптимального перехода (по диаметру) через точку минимума. Оказалось, что для исследования такой задачи удобно использовать симметрические, а не обычные характеристики (симметрические дифференциалы, либо, в более общем случае, симметрические субдифференциалы первого и второго порядка).

Напомним определение симметрических производных первого и второго порядков ([2], [12]) как пределов соответствующих разностных отношений:

$$f^{[1]}(y) = \lim_{h\to+0} \frac{\Delta^1 f(y,h)}{2h} = \lim_{h\to+0} \frac{f(y+h)-f(y-h)}{2h},$$

$$f^{[2]}(y) = \lim_{h\to+0} \frac{\Delta^2 f(y,2h)}{4h^2} = \lim_{h\to+0} \frac{f(y+2h)-2f(y)+f(y-2h)}{4h^2}.$$

В прикладном плане целесообразность построения симметрической версии субдифференциального исчисления мы связываем со следующей возможностью приложения, которая реализуется в данной работе.

Эта возможность связана с применением симметрических характеристик в экстремальных задачах «на втором этапе»: для уже найденной точки экстремума

определить оптимальное (в некотором смысле) линейное направление движения к точке экстремума. В этой связи следует упомянуть о двух известных подходах в негладком случае. Первый из них (метод Демьянова–Рубинова) известен также как «метод наискорейшего спуска» (по радиусу) ([5], [6]) к точке минимума, и в вычислительном плане близок к градиентному методу поиска минимума. Второй подход, известный как «метод оврагов Гельфанда» ([3], [4]), связан с переходом через точку экстремума по диаметру.

В нашей работе понятие оптимальности направления мы связываем с локальными аналогами известных в теории вероятностей понятий асимметрии и эксцесса. Эти характеристики оказываются тесно связанными с симметрическими дифференциалами либо, при соответствующем обобщении, с субдифференциалами, что позволяет применить для исследования подобных экстремальных задач симметрический анализ.

Работа состоит из трех разделов. В первом разделе исследуется возможность применения симметрических дифференцируемых и субдифференцируемых характеристик к негладким распределениям вероятностей случайной величины. Как известно, классическая теория вероятностей широко использует понятия асимметрии и эксцесса случайной величины (skewness), в основном, с «одновершинной» плотностью распределения. Однако, в негладком случае с этой целью предпочтительнее ввести локальные характеристики, описывающие «скос» и «островершинность» распределения вблизи точки максимума (пример 1).

Предлагаемый нами метод опирается на введенные ниже понятия локальной асимметрии и локального эксцесса плотности распределения в точке максимума (определение 1). При наличии соответствующей симметрической дифференцируемости, эти характеристики выражаются через симметрические производные первого либо второго порядка, соответственно (теорема 1). В примере 2 эта техника применяется к «склейке» двух различных нормальных распределений.

В случае набора случайных величин (случайного вектора) во втором разделе, мы вводим понятия локальной асимметрии и локального эксцесса по заданному направлению. Это позволяет поставить также вопрос о поиске оптимального направления, минимизирующего (по модулю) локальную асимметрию, либо локальный эксцесс. В примере 3 эта техника применяется к «склейке» континуального набора радиальных нормальных распределений.

В заключительном разделе мы обобщаем понятия локальной асимметрии и локального эксцесса на общий случай функционала в банаховом пространстве, достигающего локального экстремума в заданной точке (определение 3). Здесь вопрос о выборе оптимального направления, вдоль которого минимизируются, соответственно, локальная асимметрия либо локальный эксцесс, выступает на первый план.

1. Локальная асимметрия и локальный эксцесс негладких распределений, их минимизация

Любое распределение вероятностей случайной величины можно изобразить в виде кривой, воспроизводящей основные особенности данного распределения.Выяснение общего характера распределения предполагает, в частности, и вычисление показателей асимметрии и эксцесса. При анализе распределения значительный интерес представляет оценка отклонения данного распределения от симметричного. В некоторых случаях распределения могут быть асимметричными, или скошенными.

Асимметрия характеризует степень смещения относительно среднего значения по величине и направлению. Эксцесс характеризует степень концентрации вокруг среднего значения и является своеобразной мерой крутости кривой.

Как известно, классические понятия асимметрии и эксцесса случайной величины в теории вероятностей (см. [7], [8], [13] – [17], [19]) связаны с центральными моментами, соответственно, третьего и четвертого порядков, и используются, как правило, для сравнения поведения «одновершинной» плотности распределения случайной величины в точке максимума с плотностью соответствующего нормального распределения случайной величины:

$$A_S(f)=\frac{1}{\sigma^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^3f(x)dx,\quad E_X(f)=\frac{1}{\sigma^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^4f(x)dx-3,\quad (1.1)$$

где $M(\xi)$ – математическое ожидание случайной величины ξ, σ — среднеквадратичное отклонение данной случайной величины. При этом знак $A_S(f)$ характеризует «скос вправо» $(A_S(f)>0)$ либо «скос влево» $(A_S(f)<0)$ данного распределения в сравнении с нормальным, а знак $E_X(f)$ характеризует «островершинность» $(E_X(f)>0)$ либо «пологость» $(E_X(f)<0)$ распределения в сравнении с соответствующим нормальным:

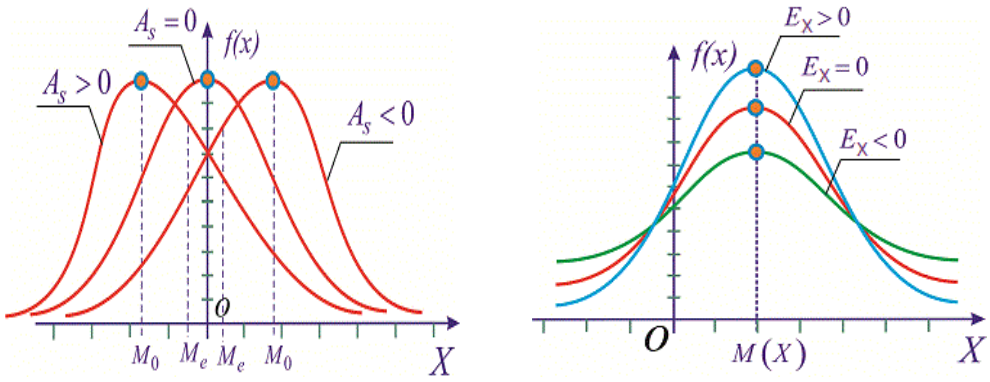

Рис. 1.

Обратим внимание на следующий факт: *глобальные характеристики* (1.1) используются для описания *локального поведения* $f(x)$ вблизи точки максимума.

Такая связь, приемлемая в гладком случае, уже не оправдана в негладком случае, как показывает следующий пример «склейки» двух распределений в точке максимума.

Пример 1. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две плотности распределения с общим максимальным значением в точке $x = x_0$, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{x_0} f_1(x)dx + \int\limits_{\infty}^{x_0} f_2(x)dx = 1 \qquad (f_i \in C^1(\mathbb{R})).$$

Положим

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \ -\infty < x \le x_0; \\ f_2(x), \ x_0 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Тогда $f(x)$ также является плотностью распределения, однако, ввиду негладкости, для описания поведения $f(x)$ вблизи x_0 нужны уже *локальные характеристики*. Введем их как пределы соответствующих интегральных средних значений.

Определение 1. Назовем *локальной асимметрией* $f(x)$ в точке x_0 величину:

$$Af(x_0) = \lim_{h\to+0}\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h}\frac{f(x)dx}{x-x_0}\right) \tag{1.2}$$

и *локальным эксцессом* $f(x)$ в точке x_0 величину:

$$Ef(x_0) = \lim_{h\to+0}\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}dx\right), \tag{1.3}$$

в предположении сходимости соответствующих интегралов (1.2) и (1.3).

Введенные характеристики нетрудно выразить через симметрические производные f в точке x_0, соответственно, первого и второго порядков, если они существуют.

Теорема 1. *1) Если f симметрически дифференцируема в точке x_0, то*

$$Af(x_0) = \partial^{[I]} f(x_0). \tag{1.4}$$

2) Если f дважды симметрически дифференцируема в точке x_0, то

$$Ef(x_0) = \frac{1}{2}\partial^{[II]} f(x_0). \tag{1.5}$$

Доказательство. 1) Имеем, применяя теорему о среднем:

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h}\frac{f(x)dx}{x-x_0}=\frac{1}{2h}\left(\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\frac{f(x)dx}{x-x_0}+\int\limits_{x_0-h}^{x_0}\frac{f(x)dx}{x-x_0}\right)=$$

$$=\frac{1}{2h}\left(\int\limits_0^h\frac{f(x_0+t)dt}{t}-\int\limits_0^h\frac{f(x_0-t)dt}{t}\right)=\frac{1}{h}\int\limits_0^h\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2t}dt=$$

$$=\frac{f(x_0+\tau)-f(x_0-\tau)}{2\tau},\ \text{где } 0<\tau<h. \quad (1.6)$$

Отсюда, при $h\to+0$ следует равенство (1.6).
2) Применяя теорему о среднем, имеем:

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}dx=\frac{1}{2h}\left(\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}dx+\int\limits_{x_0-h}^{x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2h}\left(\int\limits_0^h\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t^2}dt+\int\limits_0^h\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{h}\int\limits_0^h\frac{f(x_0+t)-2f(x_0)+f(x_0-t)}{2t^2}dt=$$

$$=\frac{f(x_0+\tau)-2f(x_0)+f(x_0-\tau)}{2\tau^2},\ \text{где } 0<\tau<h. \quad (1.7)$$

Отсюда, при $h\to+0$ следует равенство (1.7). □

Возвращаясь теперь к примеру 1, отметим, что в данном случае

$$Af(x_0)=\partial^{[I]}f(x_0)=\frac{1}{2}\left[\partial f_1(x_0)+\partial f_2(x_0)\right].$$

В случае негладкости второго порядка в точке x_0 $(\partial f_1(x_0)=\partial f_2(x_0))$, $\partial^2 f_1(x_0)\neq$ $\neq\partial^2 f_2(x_0)$, локальный эксцесс вычисляется по аналогичной формуле:

$$Ef(x_0)=\frac{1}{2}\partial^{[II]}f(x_0)=\frac{1}{4}\left[\partial^2 f_1(x_0)+\partial^2 f_2(x_0)\right].$$

Рассмотрим теперь конкретный пример «склейки» (с точностью до постоянных множителей) двух нормальных распределений.

Пример 2. Далее $\varphi(x)$ — «малая» функция Лапласа: $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$; $\Phi(x)=\int\limits_0^x\varphi(t)dt$ — «большая» функция Лапласа. Напомним, что так называемое

«нормальное» распределение вероятностей случайной величины $N(m,\sigma)$ (см. [7], [8]), задается плотностью $f(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$; здесь m — математическое ожидание, σ — среднеквадратичное отклонение данной случайной величиной.
Рассмотрим «склейку» двух нормально распределенных случайных величин $N_1(m_1,\sigma_1)$ и $N_2(m_2,\sigma_2)$ $(m_i,\sigma_i>0)$:

$$f(x)=\begin{cases}\gamma_1\cdot\dfrac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\dfrac{x-m_1}{\sigma_1}\right), -\infty<x\le 0;\\ \gamma_2\cdot\dfrac{1}{\sigma_2}\varphi\left(\dfrac{x-m_2}{\sigma_2}\right), 0\le x<+\infty.\end{cases} \tag{1.8}$$

Здесь множители γ_1 и γ_2 подбираются из условий непрерывной склейки в нуле:

$$\gamma_1\cdot\frac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)=\gamma_2\cdot\frac{1}{\sigma_2}\varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right) \tag{1.9}$$

и нормировки плотности:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\gamma_1\cdot\left(\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\right)+\gamma_2\cdot\left(\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\right)=1, \tag{1.10}$$

откуда находим:

$$\begin{cases}\gamma_1=2\sigma_1\cdot\varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\cdot\\ \cdot\left[\sigma_1\cdot\varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\cdot\left(1-2\Phi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\right)+\sigma_2\cdot\varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(1-2\Phi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\right)\right]^{-1};\\ \gamma_2=2\sigma_2\cdot\varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\cdot\\ \cdot\left[\sigma_2\cdot\varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\cdot\left(1-2\Phi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\right)+\sigma_1\cdot\varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\cdot\left(1-2\Phi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\right)\right]^{-1}.\end{cases}$$

1) Вычислим локальную асимметрию распределения (1.8) в нуле и поставим задачу ее минимизации (по модулю):

$$Af(0)=\partial^{[f]}f(0)=\frac{1}{2}\left(\partial f_-(0)+\partial f_+(0)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\gamma_1\cdot\frac{m_1}{\sigma_1^3}\cdot\varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)-\gamma_2\cdot\frac{m_2}{\sigma_2^3}\cdot\varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\right).$$

Отсюда, приравнивая $Af(0)$ к нулю, получаем:

$$\gamma_1\cdot\frac{m_1}{\sigma_1^3}\cdot\varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)=\gamma_2\cdot\frac{m_2}{\sigma_2^3}\cdot\varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right). \tag{1.11}$$

Из уравнений (1.9) и (1.11) следует условие минимальности $|Af(0)|$:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}. \tag{1.12}$$

2) Вопрос о локальном эксцессе распределения (1.8) мы рассматриваем при дополнительном условии $m_1 = m_2 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \gamma_1 \cdot \varphi\left(\frac{x}{\sigma_1}\right), -\infty < x \le 0; \\ \gamma_2 \cdot \varphi\left(\frac{x}{\sigma_2}\right), 0 \le x < +\infty. \end{cases}$$

В этом случае $f(x)$ является C^1-гладкой в нуле, однако $f''(0)$ не существует. Имеем:

$$f''_-(0) = \frac{1}{\sigma_1^2}, \quad f''_+(0) = \frac{1}{\sigma_2^2},$$

откуда

$$Ef(0) = \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]} f(0) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right).$$

2. Локальная асимметрия и локальный эксцесс набора случайных величин

Рассмотрим теперь совместную плотность распределения $f(x_1, \ldots, x_n)$ набора случайных величин $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (см. [8]). В этом случае мы введем понятия локальной асимметрии и локального эксцесса по заданному направлению $h \in \mathbb{R}^n$, соответствующим образом обобщая определение 1.

Определение 2. Назовем *локальной асимметрией f по направлению h* в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ величину

$$Af(x_0)h = \lim_{t \to +0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t} \frac{f(x_0 + \tau h)d\tau}{\tau}\right) \tag{2.1}$$

и *локальным эксцессом f по направлению h* в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ величину

$$Ef(x_0)(h)^2 = \lim_{t \to +0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t} \frac{f(x_0 + \tau h) - f(x_0)}{\tau^2}d\tau\right), \tag{2.2}$$

если соответствующие интегралы сходятся.

Из теоремы 1 легко вытекает связь характеристик (2.1) – (2.2) с соответствующими симметрическими дифференциалами, в случае их существования.

Теорема 2. *1) Если f симметрически дифференцируема в точке x_0 по направлению h, то*

$$Af(x_0)h = \partial^{[\prime]} f(x_0)h.$$

2) Если f дважды симметрически дифференцируема по направлению h в точке x_0, то

$$Ef(x_0)(h)^2 = \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]} f(x_0)(h)^2.$$

Рассмотрим двумерный пример, также связанный со «склейкой» нормальных распределений по лучам в полярных координатах на плоскости ($x = \rho\cos\alpha, y = \rho\sin\alpha, 0 \le \alpha \le 2\pi$).

Пример 3. Пусть на каждом луче ($\alpha = \text{const}, 0 \le \rho < \infty$) задано нормальное распределение (с точностью до постоянного множителя):

$$f(\rho,\alpha) = \frac{\gamma(\alpha)}{\sigma(\alpha)} \cdot \varphi\left(\frac{\rho - m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right) \quad (\sigma(\alpha) > 0).$$

Проведем склейку распределений на каждой паре лучей, соответствующих углам α и $\pi + \alpha$.

Из условия (1.9) непрерывной склейки (пример 2) получаем:

$$\frac{\gamma(\alpha)}{\sigma(\alpha)} \cdot \varphi\left(\frac{m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right) = \frac{\gamma(\alpha+\pi)}{\sigma(\alpha+\pi)} \cdot \varphi\left(\frac{m(\alpha+\pi)}{\sigma(\alpha+\pi)}\right). \tag{2.3}$$

Применяя условие нормировки

$$\int_0^\infty f(\rho,\alpha)d\rho + \int_0^\infty f(\rho,\alpha+\pi)d\rho = 1,$$

получаем:

$$\gamma(\alpha)\cdot\left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right)\right) + \gamma(\alpha+\pi)\cdot\left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m(\alpha+\pi)}{\sigma(\alpha+\pi)}\right)\right) = 1. \tag{2.4}$$

Из системы (2.3) – (2.4) выражаются подходящие $\gamma(\alpha)$ и $\gamma(\alpha+\pi)$.

Находим локальную асимметрию $f(\rho,\alpha)$ по ρ в нуле:

$$Af(\rho,\alpha)|_{\rho=0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}(0,\alpha) + \frac{\partial f}{\partial\rho}(0,\alpha+\pi)\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma(\alpha)}{\sigma^3(\alpha)}\cdot\varphi\left(\frac{m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right) + \frac{\gamma(\alpha+\pi)}{\sigma^3(\alpha+\pi)}\cdot\varphi\left(\frac{m(\alpha+\pi)}{\sigma(\alpha+\pi)}\right)\right).$$

Отсюда:

$$\left(Af(\rho,\alpha)|_{\rho=0} = 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{\sigma^3}\cdot\varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\Big|_\alpha + \frac{\gamma}{\sigma^3}\cdot\varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\Big|_{\alpha+\pi} = 0\right). \tag{2.5}$$

Условия (2.3) – (2.5) приводят к равенству:

$$\frac{m(\alpha)}{\sigma^2(\alpha)} + \frac{m(\alpha+\pi)}{\sigma^2(\alpha+\pi)} = 0. \tag{2.6}$$

Конкретные примеры:

(i) Пусть $m(\alpha) \equiv 0, \sigma(\alpha) = 2 + \cos 2\alpha$. Здесь условия (2.3) – (2.4) выполнены при $\gamma(\alpha) \equiv 1$; условие (2.5) также выполнено для любого α.

(ii) Пусть $m(\alpha) = \sin 2\alpha, \sigma(\alpha) \equiv \sigma$. Здесь условия (2.3) – (2.4) выполнены при $\gamma(\alpha) = \dfrac{1}{1 + 2\Phi(\frac{\sin 2\alpha}{\sigma})}$; условие (2.5) выполнено при $\sin 2\alpha = 0$, тогда $\alpha = \dfrac{\pi}{2}, \alpha = \dfrac{3\pi}{2}$.

3. Общая экстремальная задача поиска оптимальных направлений, минимизирующих локальную асимметрию и локальный эксцесс функционала

Введенные выше понятия нетрудно распространить на общий случай непрерывного функционала $\Phi : E \supset U(y) \to \mathbb{R}$, достигающего локального экстремума в некоторой точке y вещественного банахового пространства E, $h \in E$ — любое направление в E.

Определение 3. Назовем *локальной асимметрией* функционала Φ в точке y по направлению h следующий предел:

$$A\Phi(y)h = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau}\right), \tag{3.1}$$

а *локальным эксцессом* функционала Φ в точке y по направлению h следующий предел:

$$E\Phi(y)(h)^2 = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2}d\tau\right), \tag{3.2}$$

в предположении, что пределы (3.1) и (3.2) существуют.

Очевидно, результат теоремы 2 без изменений переносится на данный случай.

Теорема 3. *1) Если Φ симметрически дифференцируем в точке y по направлению h, то*

$$A\Phi(y)h = \partial^{[\prime]}\Phi(y)h.$$

2) Если Φ дважды симметрически дифференцируем в точке y по направлению h, то

$$E\Phi(y)(h)^2 = \frac{1}{2}\partial^{[\prime\prime]}\Phi(y)(h)^2.$$

Отметим также, что $A\Phi(y)h$ и $E\Phi(y)(h)^2$ могут существовать и при отсутствии симметрической дифференцируемости. Приведем простые скалярные примеры.

Пример 4. 1) Пусть $\Phi(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Тогда $\partial^{[\prime]}\Phi(0) = \infty$, однако

$$A\Phi(0) = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{x^{\frac{1}{3}}dx}{x}\right) = 0.$$

2) Пусть $\Phi(x) = x^{\frac{8}{3}}$. Тогда $\partial^{[\prime\prime]}\Phi(0) = \infty$, однако

$$E\Phi(0) = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{x^{\frac{8}{3}}dx}{x^2}\right) = 0.$$

Заметим теперь, что рассматривая вопрос о вычислении локальной асимметрии и локального эксцесса при произвольно заданном направлении h, естественно поставить вопрос о выборе оптимальных направлений, вдоль которых минимизируются, соответственно, модуль асимметрии и модуль эксцесса. Отметим также, что в C^1–гладком случае, в силу леммы Ферма, $\partial^{[\prime]}\Phi(y)h = 0$ по любому направлению $h \in E$, откуда, в соответствии с теоремой 3, $A\Phi(y)h = \partial^{[\prime]}\Phi(y)h = 0$ по любому направлению $h \in E$. Таким образом, задача минимизации локальной асимметрии является нетривиальной лишь в точке негладкого экстремума. В общем виде эта задача исследована в нашей работе [1].

Заключение

В работе исследована возможность применения симметрических дифференцируемых и субдифференцируемых характеристик к негладким распределениям вероятностей случайной величины. Введены понятия локальной асимметрии и локального эксцесса по заданному направлению в случае набора случайных величин (случайного вектора), что позволило поставить вопрос о поиске оптимального направления, минимизирующего (по модулю) локальную асимметрию, либо локальный эксцесс. Эта техника применена к «склейке» набора нормальных распределений.

Список цитируемых источников

1. *Баран, И. В.* Задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума. // Динамические системы. — 2016. — Т. 6(34), № 4. — С. 337-354.

   Baran, I. V. The problem of finding the direction of the optimal transition through the extremum point. Dynamical Systems, 6(34), 337-354 (2016). (in Russian)

2. *Бари, Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматлит, 1961. — 936 с.

   Bari, N. K. Trigonometric Series. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1967.

3. *Васильев, Ф. П.* Основы численных методов решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1972. — 136 с.

   Vasil'ev, F. P. Fundamentals of numerical methods for solving extremal problems. Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)

4. *Гельфанд, И. М., Цетлин, М. Л.* О некоторых способах управления сложными системами. // УМН. — 1962. — 17:1(103). — С. 3-25.

   Gel'fand, I. M., Tsetlin, M. L. Some methods of control for complex systems. Russian Math. Surveys, 17:1, 95–117 (1962).

5. *Демьянов, В. Ф., Малозёмов, В. Н.* Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 368 с.

   Demyanov, V. F., Malozyomov, V. N. Introduction to minimax. Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)

6. *Демьянов, В. Ф., Рубинов, А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990. — 431 с.

   Demyanov, V. F., Rubinov, A. M. Fundamentals of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus. Moscow: Nauka, 1990. (in Russian)

7. *Кобзарь, А. И.* Прикладная математическая статистика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 816 с.

Kobzar, A. I. Applied Mathematical Statistics. Moscow: Fizmatlit, 2006. (in Russian)

8. *Крамер, Г.* Математические методы статистики. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 648 с.

Cramer, H. Mathematical Methods of Statistics. Princeton: Princeton University Press, 1962.

9. *Орлов, И.В., Баран, И. В.* Введение в сублинейный анализ – 2: симметрический вариант. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2015. — Т. 57. — С. 108–161.

Orlov, I. V., Baran, I. V. Introduction to Sublinear Analysis — 2: Symmetric Case. Journal of Mathematical Sciences, 225, 265-321 (2017).

10. *Орлов, И. В.* Введение в сублинейный анализ. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2014. — Т. 53. — С. 64–132.

Orlov, I. V. Introduction to sublinear analysis. Journal of Mathematical Sciences, 218, 430-502 (2016).

11. *Орлов, И. В., Стонякин, Ф. С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — Т. 34. — С. 121–138.

Orlov, I. V., Stonyakin, F. S. Compact subdifferentials: the formula of finite increments and related topics. Journal of Mathematical Sciences, 170, 251–269 (2010).

12. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2001. — 616 с.

Fikhtengolts, G. M. Course of differential and integral calculus. Moscow: Fizmatlit, 2001. (in Russian)

13. *Arnold, B. C., Groeneveld, R. A.* Measuring Skewness with Respect to the Mode. The American Statistician, 49, 34-38 (1995).

14. *Balanda, K. P., MacGillivray, H. L.* Kurtosis: A Critical Review. The American Statistician, 42, 111-119 (1988).

15. *Doane, D. P., Seward, L. E.* Measuring skewness: a forgotten statistic. Journal of Statistics Education, 19.2, 1-18 (2011).

16. *Groeneveld, R. A.* Measuring Skewness and Kurtosis. Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician), 33, 391-399 (1984).

17. *Joanes, D. N., Gill, C. A.* Comparing measures of sample skewness and kurtosis. Journal of the Royal Statistical Society (Series D): The Statistician, 47(1), 183-189 (1998).

18. *Orlov, I. V., Baran, I. V.* Adjoint extremal problem for non-smooth functionals. 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 23-26 (2017).

19. *Rayner, J. C., Best, D. J., Matthews, K. L.* Interpreting the Skewness Coefficient. Communications in Statistics-Theory and Methods, 24, 593-600 (1995).

Получена 31.08.2017

Динамические системы, 2017, том 7(35), №3, 257–274

УДК 517.929.4

Асимптотическая устойчивость положений равновесия и оценки решений в одной модели заболевания[1]

М. А. Скворцова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090. *E-mail: sm-18-nsu@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая процесс распространения заболевания. Изучается асимптотическая устойчивость положений равновесия данной системы. Установлены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности, и оценки областей притяжения асимптотически устойчивых положений равновесия. Результаты получены с использованием модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского.

Ключевые слова: модель заболевания, уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценки решений, области притяжения, модифицированный функционал Ляпунова – Красовского.

Asymptotic stability of equilibrium points and estimates of solutions in a model of disease

M. A. Skvortsova
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University,
Novosibirsk 630090.

Abstract. We consider a system of delay differential equations describing the spread of a disease. We study the asymptotic stability of equilibrium points of this system. We establish estimates of solutions characterizing the stabilization rate at infinity and estimates of attraction domains of asymptotically stable equilibrium points. The results are obtained using modified Lyapunov–Krasovskii functionals.
Keywords: a model of disease, delay differential equations, asymptotic stability, estimates of solutions, attraction domains, modified Lyapunov–Krasovskii functional.
MSC 2010: 34K20, 34K60

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Новосибирской области в рамках научного проекта № 17-41-543365.

© *М. А. СКВОРЦОВА*

1. Введение

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая процесс распространения заболевания [7]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = \sigma - \mu_1 x(t) - \beta x(t)z(t), \\ \dfrac{d}{dt}y(t) = \beta x(t-\tau)z(t-\tau)e^{-\alpha\tau} - \mu_2 y(t), \\ \dfrac{d}{dt}z(t) = \rho y(t) - \mu_3 z(t). \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $x(t)$ — численность здоровых клеток, $y(t)$ — численность зараженных клеток, которые производят вирус, $z(t)$ — численность вирусов в плазме. Параметр запаздывания τ отвечает за время, которое требуется для заражения здоровых клеток после встречи с вирусом. Величина $\beta x(t)z(t)$ отвечает за численность здоровых клеток, которые заражаются от вирусов в момент времени t, а величина $\beta x(t-\tau)z(t-\tau)e^{-\alpha\tau}$ — за численность здоровых клеток, которые заразились от вирусов в момент времени $t-\tau$ и дожили до момента времени t. Величина σ — приток здоровых клеток, ρ — коэффициент прироста вирусов за счет зараженных клеток, μ_1, μ_2, μ_3 — смертности здоровых клеток, зараженных клеток и вирусов, соответственно. Все параметры системы предполагаются положительными.

Для системы (1.1) зададим начальные условия

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad x(+0) = \varphi(0), \quad \varphi \in C([-\tau, 0]), \\ y(0) = y^0, \\ z(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad z(+0) = \psi(0), \quad \psi \in C([-\tau, 0]). \end{cases} \tag{1.2}$$

Хорошо известно, что решение начальной задачи (1.1), (1.2) существует и единственно. Также легко показать, что если

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \psi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad y^0 \geq 0, \tag{1.3}$$

то $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ будут определены при всех $t \geq 0$, причем $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$, $z(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. Более того, при неотрицательных начальных условиях все компоненты решения будут ограничены. Действительно, рассмотрим функцию $w(t) = x(t-\tau)e^{-\alpha\tau} + y(t) + \varepsilon z(t)$, где $0 < \varepsilon < \dfrac{\mu_2}{\rho}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}w(t) = \sigma e^{-\alpha\tau} - \mu_1 x(t-\tau)e^{-\alpha\tau} - \mu_2 y(t) + \varepsilon\rho y(t) - \mu_3 \varepsilon z(t) \leq \sigma e^{-\alpha\tau} - \mu w(t),$$

где $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2 - \varepsilon\rho, \mu_3\} > 0$. Отсюда следует ограниченность сверху функции $w(t)$, а значит, и ограниченность всех компонент решения.

В дальнейшем будем предполагать, что начальные данные $\varphi(t)$, $\psi(t)$, y^0 удовлетворяют условиям (1.3).

Теперь найдем положения равновесия системы (1.1):
1) если $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} \le \mu_1\mu_2\mu_3$, то в системе одно положение равновесия

$$(x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right),$$

которое соответствует состоянию здорового организма;
2) если $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$, то в системе два положения равновесия

$$(x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right) \quad \text{и} \quad (x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0),$$

где

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\mu_2\mu_3}{\rho\beta}e^{\alpha\tau}, \frac{(\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} - \mu_1\mu_2\mu_3)}{\mu_2\rho\beta}, \frac{(\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} - \mu_1\mu_2\mu_3)}{\mu_2\mu_3\beta}\right), \tag{1.4}$$

которые соответствуют состоянию здорового организма и состоянию зараженного организма.

Целью работы является изучение устойчивости положений равновесия системы (1.1) и получение оценок решений, характеризующих скорость сходимости к положениям равновесия.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание к работе.

2. Устойчивость положений равновесия

В этом параграфе будут указаны условия на коэффициенты системы, при которых положения равновесия являются асимптотически устойчивыми.

Данные условия легко получить, используя, например, хорошо известную теорему об устойчивости по первому приближению (см., например, [4, гл. 7, § 33]). Для нелинейной системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = A\vec{y}(t) + B\vec{y}(t-\tau) + F(\vec{y}(t), \vec{y}(t-\tau)), \tag{2.1}$$

где A и B — вещественные постоянные матрицы размера $n \times n$, $F(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$ — вещественнозначная вектор-функция такая, что

$$\frac{\|F(\vec{y}_1, \vec{y}_2)\|}{\|(\vec{y}_1, \vec{y}_2)\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \|(\vec{y}_1, \vec{y}_2)\| \to 0,$$

справедлива следующая теорема.

Теорема (об устойчивости по первому приближению)**.**
1) Если все корни характеристического квазимногочлена

$$\det\left(\lambda I - A - e^{-\lambda\tau}B\right) = 0$$

лежат в левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$*, то нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво.*
2) Если существует корень квазимногочлена, лежащий в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$*, то нулевое решение системы (2.1) неустойчиво.*

Применим этот результат к системе (1.1). Вначале рассмотрим положение равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$. Замена $x(t) = \dfrac{\sigma}{\mu_1} + \overline{x}(t)$ приводит к системе

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\overline{x}(t) = -\mu_1\overline{x}(t) - \beta\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1} + \overline{x}(t)\right)z(t), \\ \dfrac{d}{dt}y(t) = \beta\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1} + \overline{x}(t-\tau)\right)z(t-\tau)e^{-\alpha\tau} - \mu_2 y(t), \\ \dfrac{d}{dt}z(t) = \rho y(t) - \mu_3 z(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

при этом

$$A = \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 & -\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} \\ 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & \rho & -\mu_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sigma\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Характеристический квазимногочлен имеет вид

$$\det(\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}) = \det\begin{pmatrix} \lambda+\mu_1 & 0 & \dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} \\ 0 & \lambda+\mu_2 & -\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}e^{-\lambda\tau} \\ 0 & -\rho & \lambda+\mu_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+\mu_1)\left((\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3) - \frac{\sigma\rho\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}e^{-\lambda\tau}\right).$$

Легко видеть, что при условии $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} < \mu_1\mu_2\mu_3$ все корни квазимногочлена

$$(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3) - \frac{\sigma\rho\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}e^{-\lambda\tau} = 0 \tag{2.4}$$

содержатся в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$. Действительно, если существует корень λ такой, что $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, тогда

$$\mu_2\mu_3 \leq |(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)| = \left|\frac{\sigma\rho\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}e^{-\lambda\tau}\right| \leq \frac{\sigma\rho\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau},$$

что противоречит условию. Тем самым, в силу теоремы об устойчивости по первому приближению положение равновесия $\left(\frac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$ системы (1.1) является асимптотически устойчивым.

Если же $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$, то существует положительный корень квазимногочлена (2.4) $\lambda_* > 0$. В самом деле, рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = (\lambda + \mu_2)(\lambda + \mu_3) - \frac{\sigma\rho\beta}{\mu_1} e^{-\alpha\tau} e^{-\lambda\tau}$$

при неотрицательных $\lambda \geq 0$. Имеем

$$f(0) = \mu_2\mu_3 - \frac{\sigma\rho\beta}{\mu_1} e^{-\alpha\tau} < 0,$$

$$f(\lambda) \to +\infty \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Поскольку $f(\lambda)$ непрерывна, то существует $\lambda_* > 0$ такое, что $f(\lambda_*) = 0$. Тем самым, в силу теоремы об устойчивости по первому приближению положение равновесия $\left(\frac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$ системы (1.1) является неустойчивым.

Теперь рассмотрим положение равновесия (x_0, y_0, z_0) системы (1.1), определенное в (1.4). Данное положение равновесия существует только при условии $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$, причем оно является асимптотически устойчивым. Действительно, замена

$$x(t) = x_0 + \widetilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \widetilde{y}(t), \quad z(t) = z_0 + \widetilde{z}(t)$$

приводит к системе

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\widetilde{x}(t) = -(\mu_1 + \beta z_0)\widetilde{x}(t) - \beta x_0 \widetilde{z}(t) - \beta\widetilde{x}(t)\widetilde{z}(t), \\ \dfrac{d}{dt}\widetilde{y}(t) = -\mu_2\widetilde{y}(t) + \beta z_0 e^{-\alpha\tau}\widetilde{x}(t-\tau) \\ \qquad\qquad +\beta x_0 e^{-\alpha\tau}\widetilde{z}(t-\tau) + \beta e^{-\alpha\tau}\widetilde{x}(t-\tau)\widetilde{z}(t-\tau), \\ \dfrac{d}{dt}\widetilde{z}(t) = \rho\widetilde{y}(t) - \mu_3\widetilde{z}(t), \end{cases} \tag{2.5}$$

матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -(\mu_1 + \beta z_0) & 0 & -\beta x_0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & \rho & -\mu_3 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta z_0 e^{-\alpha\tau} & 0 & \beta x_0 e^{-\alpha\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\dfrac{z_0}{x_0} & 0 & \dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Запишем характеристический квазимногочлен

$$\det(\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}) = \det \begin{pmatrix} \lambda+\mu_1+\beta z_0 & 0 & \beta x_0 \\ -\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\dfrac{z_0}{x_0}e^{-\mu\tau} & \lambda+\mu_2 & -\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}e^{-\mu\tau} \\ 0 & -\rho & \lambda+\mu_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+\mu_1+\beta z_0)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3) + \mu_2\mu_3\beta z_0 e^{-\lambda\tau} - \mu_2\mu_3(\lambda+\mu_1+\beta z_0)e^{-\lambda\tau}$$

$$= (\lambda+\mu_1+\beta z_0)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3) - \mu_2\mu_3(\lambda+\mu_1)e^{-\lambda\tau}. \tag{2.8}$$

Если предположить, что что существует корень λ квазимногочлена (2.8) такой, что $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, тогда

$$\mu_2\mu_3 \leq |(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)| = \left|\frac{\mu_2\mu_3(\lambda+\mu_1)e^{-\lambda\tau}}{(\lambda+\mu_1+\beta z_0)}\right| < \mu_2\mu_3.$$

Противоречие. Следовательно, положение равновесия (x_0, y_0, z_0) системы (1.1) является асимптотически устойчивым.

Итак, мы приходим к следующему утверждению.

1) Если $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} < \mu_1\mu_2\mu_3$, то положение равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$ системы (1.1) асимптотически устойчиво.

2) Если $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$, то положение равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$ системы (1.1) неустойчиво, а положение равновесия (x_0, y_0, z_0) асимптотически устойчиво.

Замечание. Отметим, что аналогичный результат был получен в работе [9] для системы, несколько отличающейся от системы (1.1).

3. Метод функционалов Ляпунова – Красовского

3.1. При изучении устойчивости важной задачей является получение оценок решений, характеризующих скорость стабилизации на бесконечности, а также нахождение оценок области притяжения, т. е. гарантированной области начальных данных, при которых имеет место сходимость. Наша следующая цель — установить такие оценки для системы (1.1).

При получении оценок скорости стабилизации решений, в частности, могут быть использованы различные способы нахождения корней квазимногочленов, однако нахождение корней с заданной точностью в большинстве случаев представляет серьезную проблему, поскольку эта задача является, вообще говоря, плохо обусловленной с точки зрения теории возмущений.

Мы будем использовать метод функционалов типа Ляпунова – Красовского, которые являются аналогами функций Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему (2.1). При исследовании асимптотической устойчивости нулевого решения данной системы Н. Н. Красовский предложил использовать функционал

$$V(t,\vec{y}) = \langle H\vec{y}(t),\vec{y}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K\vec{y}(s),\vec{y}(s)\rangle ds \tag{3.1}$$

с матрицами $H = H^* > 0$ и $K = K^* > 0$ [4, гл. 7, § 34]. Функционалы такого вида называют *функционалами Ляпунова – Красовского*. Использование функционалов Ляпунова – Красовского позволяет проводить исследования устойчивости решений без нахождения корней квазимногочленов, сводя изучение к решению хорошо обусловленных задач. Приведем результат об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.1), полученный с помощью функционала (3.1).

Теорема (Н. Н. Красовский)**.** *Предположим, что существуют матрицы $H = H^* > 0$ и $K = K^* > 0$ такие, что выполнено матричное неравенство*

$$C = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K & HB \\ B^*H & -K \end{pmatrix} > 0. \tag{3.2}$$

Тогда нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Отметим, что использование функционалов Ляпунова – Красовского также позволяет оценивать области притяжения асимптотически устойчивых решений уравнений с запаздывающим аргументом. Однако с их помощью далеко не всегда удается получить оценки скорости стабилизации решений на бесконечности. Для получения таких оценок применяют различные модификации функционалов Ляпунова – Красовского (см., например, [2], [3], [6], [8], [10]). В частности, в работе [2] был предложен модифицированный функционал Ляпунова – Красовского следующего вида

$$V(t,\vec{y}) = \langle H\vec{y}(t),\vec{y}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)\vec{y}(s),\vec{y}(s)\rangle ds, \tag{3.3}$$

где $H = H^* > 0$ и $K(s) = K^*(s) > 0$. Отметим, что в отличие от функционала (3.1) здесь матрица K является переменной. Используя функционал (3.3), в работе [2] были получены оценки решений системы (2.1), являющиеся аналогами оценки М. Г. Крейна для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [1, гл. 1, § 4]), а также оценки области притяжения нулевого решения.

Применим метод функционалов Ляпунова – Красовского для исследования асимптотической устойчивости положений равновесия системы (1.1). Вначале мы

покажем, как можно построить такие функционалы, а затем на их основе получим оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и оценки областей притяжения.

3.2. Вначале предположим, что выполнено условие $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} < \mu_1\mu_2\mu_3$. В этом случае у системы (1.1) существует только одно положение равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$, причем оно является асимптотически устойчивым. В силу сказанного выше для построения функционала Ляпунова – Красовского достаточно построить матрицы $H = H^* > 0$ и $K = K^* > 0$, удовлетворяющие матричному неравенству (3.2), в котором матрицы A и B имеют вид (2.3):

$$A = \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 & -\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} \\ 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & \rho & -\mu_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sigma\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что при выполнении условий $H = H^* > 0$ и $K = K^* > 0$ матричное неравенство (3.2) эквивалентно неравенству

$$Q = -(HA + A^*H + K + HBK^{-1}B^*H) > 0$$

(см., например, [3, стр. 1029]). Положим

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, \quad h_j > 0, \quad k_j > 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

и проверим выполнение неравенства $Q > 0$. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 2h_1\mu_1 - k_1 & 0 & h_1\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} \\ 0 & 2h_2\mu_2 - k_2 - \dfrac{h_2^2}{k_3}\left(\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}\right)^2 & -h_3\rho \\ h_1\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} & -h_3\rho & 2h_3\mu_3 - k_3 \end{pmatrix}.$$

Полагая

$$h_3 = 1, \quad k_3 = \mu_3, \quad h_2 = \mu_2\mu_3\left(\frac{\sigma\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}\right)^{-2},$$

будем иметь

$$Q = \begin{pmatrix} 2h_1\mu_1 - k_1 & 0 & h_1\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} \\ 0 & \mu_2^2\mu_3\left(\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}\right)^{-2} - k_2 & -\rho \\ h_1\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} & -\rho & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу Q_0, которая получается из матрицы Q, если положить $k_1 = k_2 = 0$. Найдем $h_1 > 0$, при которых матрица Q_0 будет положительно определенной. В нашем случае условие $Q_0 > 0$ эквивалентно условию $\det Q_0 > 0$. Тогда, если выбрать

$$0 < h_1 < \frac{2}{\mu_1\mu_2^2\mu_3}\left(\frac{\sigma\beta}{\mu_1}\right)^{-2}\Big((\mu_1\mu_2\mu_3)^2 - (\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau})^2\Big),$$

матрица Q_0 будет положительно определенной. Следовательно, при достаточно малых k_1 и k_2 также будет выполнено $Q > 0$.

3.3. Теперь рассмотрим случай $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$. В этом случае положение равновесия (x_0, y_0, z_0) является асимптотически устойчивым. Построим матрицы $H = H^* > 0$ и $K = K^* > 0$ удовлетворяющие условию (3.2), в котором матрицы A и B имеют вид (2.6) и (2.7):

$$A = \begin{pmatrix} -(\mu_1 + \beta z_0) & 0 & -\beta x_0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & \rho & -\mu_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\dfrac{z_0}{x_0} & 0 & \dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & h_{13} \\ 0 & h_{22} & 0 \\ h_{13} & 0 & h_{33} \end{pmatrix}, \quad h_{jj} > 0, \quad h_{11}h_{33} - h_{13}^2 > 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{3.4}$$

$$K = B^*B + M, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad m_j > 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

будем иметь

$$C = \begin{pmatrix} -(HA + A^*H + B^*B) - M & -HB \\ -B^*H & B^*B + M \end{pmatrix}.$$

Заметим, что из явного вида матриц B и H имеет место равенство $HB = H_{22}B$, где

$$H_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Следовательно,

$$C = \begin{pmatrix} -(HA + A^*H + B^*B + H_{22}^2) - M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} H_{22}^2 & -H_{22}B \\ -B^*H_{22} & B^*B \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} L - M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

где

$$L = -(HA + A^*H + B^*B + H_{22}^2) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Тем самым, если мы покажем, что матрица L является положительно определенной, то при достаточно малых m_1, m_2, m_3 матрица C также будет положительно определена. Имеем

$$\begin{cases} l_{11} = 2h_{11}(\mu_1 + \beta z_0) - \left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\dfrac{z_0}{x_0}\right)^2, \\ l_{12} = -h_{13}\rho, \\ l_{22} = 2h_{22}\mu_2 - h_{22}^2, \\ l_{13} = h_{11}\beta x_0 + h_{13}(\mu_1 + \mu_3 + \beta z_0) - \left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2 \dfrac{z_0}{x_0}, \\ l_{23} = -h_{33}\rho, \\ l_{33} = 2h_{33}\mu_3 + 2h_{13}\beta x_0 - \left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2. \end{cases}$$

Положим

$$\begin{cases} h_{11} = \dfrac{1}{\beta x_0}\left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2 \dfrac{z_0}{x_0}, \\ h_{22} = \mu_2, \\ h_{33} = \dfrac{1}{\mu_3}\left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2, \end{cases} \tag{3.7}$$

тогда

$$\begin{cases} l_{11} = \dfrac{1}{\beta x_0}\left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2 \dfrac{z_0}{x_0}(2\mu_1 + \beta z_0), \\ l_{12} = -h_{13}\rho, \\ l_{22} = \mu_2^2, \\ l_{13} = h_{13}(\mu_1 + \mu_3 + \beta z_0), \\ l_{23} = -\mu_2\left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right), \\ l_{33} = 2h_{13}\beta x_0 + \left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2. \end{cases}$$

Согласно критерию Сильвестра, условие $L > 0$ эквивалентно следующим трем условиям:

$$\begin{cases} l_{33} > 0, \\ l_{22}l_{33} - l_{23}^2 > 0, \\ l_{11}(l_{22}l_{33} - l_{23}^2) + 2l_{12}l_{13}l_{23} - l_{22}l_{13}^2 - l_{33}l_{12}^2 > 0. \end{cases}$$

В нашем случае эти условия эквивалентны неравенствам

$$\begin{cases} h_{13} > 0, \\ 2h_{13}^2\rho^2\beta x_0 + h_{13}\mu_2^2(\mu_1 + \beta z_0)^2 < 2\mu_2^2\left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2 \dfrac{z_0}{x_0}(2\mu_1 + \beta z_0). \end{cases} \tag{3.8}$$

Второе неравенство выполняется, если h_{13} достаточно мало.

Итак, мы получили, что $L > 0$. Заметим, что отсюда, в частности, следует, что $H > 0$. Действительно, поскольку все собственные значения матрицы A содержатся в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$ и

$$HA + A^*H \le -L < 0,$$

то H является решением матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -D, \quad D = D^* > 0.$$

Хорошо известно, что в этом случае матрица H является положительно определенной.

4. Оценки скорости сходимости к положению равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$

В этом параграфе мы будем рассматривать случай $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} < \mu_1\mu_2\mu_3$, когда у системы (1.1) существует только одно положение равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$, и оно является асимптотически устойчивым. Мы получим оценки решений системы (1.1), характеризующие скорость сходимости к данному положению равновесия. В частности, из этих оценок будет вытекать глобальная асимптотическая устойчивость.

Вначале заметим, что если $(x(t), y(t), z(t))$ — решение системы (1.1) с начальными условиями (1.2)–(1.3), то первая компонента решения $x(t)$ ограничена сверху решением уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sigma - \mu_1 x(t)$$

с теми же самыми начальными условиями. Для этого уравнения хорошо известно, что все решения стремятся к решению $x(t) = \dfrac{\sigma}{\mu_1}$. При этом для любого $\theta > 0$ существует $t_0 \ge 0$ такое, что $0 \le x(t) \le \dfrac{\sigma}{\mu_1} + \theta$ при всех $t \ge t_0$. Следовательно, это верно и для первой компоненты решения $x(t)$ системы (1.1). Не ограничивая общности, можно считать, что $t_0 = 0$.

Введем обозначения. Пусть $\theta > 0$ и $k > 0$ такие, что выполнено неравенство

$$\rho\beta e^{-\alpha\tau}\left(\frac{\sigma}{\mu_1} + \theta\right) < e^{-k\tau/2}\mu_2\mu_3. \tag{4.1}$$

Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t, y, z) = \overline{h}_2 y^2(t) + z^2(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} \mu_3 e^{-k(t-s)} z^2(s)ds, \tag{4.2}$$

где

$$\overline{h}_2 = e^{-k\tau}\mu_2\mu_3\left(\beta e^{-\alpha\tau}\left(\frac{\sigma}{\mu_1}+\theta\right)\right)^{-2}.$$

Положим

$$r = \frac{1}{2}(\mu_2+\mu_3) - \sqrt{\frac{1}{4}(\mu_2-\mu_3)^2 + \frac{e^{k\tau}}{\mu_2\mu_3}\left(\rho\beta e^{-\alpha\tau}\left(\frac{\sigma}{\mu_1}+\theta\right)\right)^2}, \tag{4.3}$$

$$\delta = \min\{r, k\}. \tag{4.4}$$

Заметим, что в силу неравенства (4.1) величина r строго положительна.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} < \mu_1\mu_2\mu_3$. Тогда для решения системы (1.1) с начальными данными (1.2)–(1.3), удовлетворяющими условию*

$$0 \le \varphi(t) \le \frac{\sigma}{\mu_1}+\theta, \quad t\in[-\tau,0], \tag{4.5}$$

справедливы оценки

$$\left|x(t)-\frac{\sigma}{\mu_1}\right| \le \left|\varphi(0)-\frac{\sigma}{\mu_1}\right| e^{-\mu_1 t} + \frac{\sigma\beta}{\mu_1}\sqrt{V(0,y^0,\psi)}\int\limits_0^t e^{-\mu_1(t-s)}e^{-\delta s/2}ds, \tag{4.6}$$

$$\overline{h}_2 y^2(t) + z^2(t) \le V(t,y,z) \le V(0,y^0,\psi)e^{-\delta t}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Вначале докажем оценку (4.7). Рассмотрим функционал (4.2) и продифференцируем его вдоль решений системы (1.1):

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z) = 2\overline{h}_2 y(t)\left(\beta x(t-\tau)z(t-\tau)e^{-\alpha\tau} - \mu_2 y(t)\right)$$

$$+2z(t)(\rho y(t) - \mu_3 z(t)) + \mu_3 z^2(t) - \mu_3 e^{-k\tau}z^2(t-\tau) - k\int\limits_{t-\tau}^t \mu_3 e^{-k(t-s)}z^2(s)ds.$$

В силу условия (4.5), учитывая рассуждения, проведенные в начале параграфа, получим $0 \le x(t-\tau) \le \dfrac{\sigma}{\mu_1}+\theta$ при всех $t \ge 0$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z) \le 2\overline{h}_2\beta e^{-\alpha\tau}\left(\frac{\sigma}{\mu_1}+\theta\right)y(t)z(t-\tau) - 2\overline{h}_2\mu_2 y^2(t)$$

$$+2\rho y(t)z(t) - \mu_3 z^2(t) - \mu_3 e^{-k\tau}z^2(t-\tau) - k\int\limits_{t-\tau}^t \mu_3 e^{-k(t-s)}z^2(s)ds.$$

Отсюда, используя неравенство

$$2\overline{h}_2\beta e^{-\alpha\tau}\left(\frac{\sigma}{\mu_1}+\theta\right)y(t)z(t-\tau)-\mu_3 e^{-k\tau}z^2(t-\tau)$$

$$\le\frac{\overline{h}_2^2e^{k\tau}}{\mu_3}\left(\beta e^{-\alpha\tau}\left(\frac{\sigma}{\mu_1}+\theta\right)\right)^2y^2(t)=\overline{h}_2\mu_2y^2(t),$$

будем иметь

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z)\le-\overline{h}_2\mu_2y^2(t)+2\rho y(t)z(t)-\mu_3z^2(t)-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\mu_3e^{-k(t-s)}z^2(s)ds.$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z)\le-r(\overline{h}_2y^2(t)+z^2(t))-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\mu_3e^{-k(t-s)}z^2(s)ds,$$

где r определено в (4.3). Далее, учитывая обозначение (4.4) величины δ и определение (4.2) функционала $V(t,y,z)$, получим оценку

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z)\le-\delta V(t,y,z),$$

откуда нетрудно установить неравенство (4.7).

Теперь докажем оценку (4.6). Из первого уравнения системы (2.2) нетрудно получить

$$\overline{x}(t)=e^{-\mu_1t}\exp\left(-\int\limits_0^t\beta z(\xi)d\xi\right)\overline{x}(0)-\frac{\sigma}{\mu_1}\int\limits_0^te^{-\mu_1(t-s)}\exp\left(-\int\limits_s^t\beta z(\xi)d\xi\right)\beta z(s)ds,$$

где $\overline{x}(t)=x(t)-\dfrac{\sigma}{\mu_1}$. Следовательно,

$$\left|x(t)-\frac{\sigma}{\mu_1}\right|\le e^{-\mu_1t}\left|x(0)-\frac{\sigma}{\mu_1}\right|+\frac{\sigma}{\mu_1}\int\limits_0^te^{-\mu_1(t-s)}\beta z(s)ds.$$

В силу оценки (4.7) имеем

$$z(t)\le\sqrt{V(0,y^0,\psi)}e^{-\delta t/2}.$$

Отсюда непосредственно вытекает (4.6).

Теорема доказана. □

Следствие. *Пусть* $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} < \mu_1\mu_2\mu_3$. *Тогда положение равновесия* $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$ *системы (1.1) является глобально асимптотически устойчивым.*

Замечание. Отметим, что глобальная асимптотическая устойчивость положения равновесия, соответствующего состоянию здорового организма, также была доказана в работе [9] для несколько видоизмененной системы (1.1).

5. Оценки скорости сходимости к положению равновесия (x_0, y_0, z_0)

В этом параграфе мы рассмотрим случай $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$, когда положение равновесия (x_0, y_0, z_0) является асимптотически устойчивым. Мы получим оценки решений системы (1.1), характеризующие скорость сходимости к данному положению равновесия, и оценки области притяжения.

Как отмечалось выше, замена

$$x(t) = x_0 + \widetilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \widetilde{y}(t), \quad z(t) = z_0 + \widetilde{z}(t)$$

приводит к системе (2.5), которую кратко можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = A\vec{y}(t) + B\vec{y}(t-\tau) + F(\vec{y}(t)) + G(\vec{y}(t-\tau)), \tag{5.1}$$

где матрицы A и B определены в (2.6) и (2.7):

$$A = \begin{pmatrix} -(\mu_1 + \beta z_0) & 0 & -\beta x_0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & \rho & -\mu_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\dfrac{z_0}{x_0} & 0 & \dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \\ \widetilde{z}(t) \end{pmatrix},$$

$$F(\vec{y}(t)) = -\begin{pmatrix} \beta\widetilde{x}(t)\widetilde{z}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G(\vec{y}(t-\tau)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta e^{-\alpha\tau}\widetilde{x}(t-\tau)\widetilde{z}(t-\tau) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем начальные условия для системы (5.1) в виде

$$\vec{y}(t) = \vec{\varphi}(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad \vec{y}(+0) = \vec{\varphi}(0).$$

Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t, \vec{y}) = \langle H\vec{y}(t), \vec{y}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)\vec{y}(s), \vec{y}(s)\rangle\, ds, \tag{5.2}$$

где матрица H имеет вид (3.4), и ее элементы определены в (3.7)–(3.8), а матрица $K(s)$ имеет вид

$$K(s) = e^{-ks}(B^*B + M_3), \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\theta e^{k\tau/2} \end{pmatrix},$$

при этом величины $k > 0$ и $\theta > 0$ такие, что выполнено неравенство

$$\widetilde{l} = l_{\min} - h_{22}^2(e^{k\tau} - 1) - h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\theta e^{k\tau/2} > 0, \tag{5.3}$$

$l_{\min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы L (см. формулу (3.6)). Обозначим

$$q = \beta\frac{\sqrt{h_{11}}}{h_{\min}}, \quad \varepsilon = \min\left\{\frac{\widetilde{l}}{\|H\|}, k\right\}, \tag{5.4}$$

где $h_{\min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H, $\|H\|$ — спектральная норма матрицы H.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$. Тогда для решения системы (5.1) с начальными данными, удовлетворяющими условиям*

$$\max_{t\in[-\tau,0]}|\widetilde{x}(t)| \le \theta, \quad \sqrt{V(0,\vec{\varphi})} < \frac{\varepsilon}{q}, \quad \frac{1}{\sqrt{h_{\min}}}\,\frac{\sqrt{V(0,\vec{\varphi})}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\vec{\varphi})}\right)} \le \theta, \tag{5.5}$$

справедлива оценка

$$\|\vec{y}(t)\|^2 \le \frac{1}{h_{\min}}V(t,\vec{y}) \le \frac{1}{h_{\min}}\,\frac{V(0,\vec{\varphi})}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\vec{\varphi})}\right)^2}\,e^{-\varepsilon t}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Рассмотрим функционал (5.2) и продифференцируем его вдоль решений системы (5.1):

$$\frac{d}{dt}V(t,\vec{y}) = \langle H(A\vec{y}(t) + B\vec{y}(t-\tau) + F(\vec{y}(t)) + G(\vec{y}(t-\tau))), \vec{y}(t)\rangle$$

$$+ \langle H\vec{y}(t), (A\vec{y}(t) + B\vec{y}(t-\tau) + F(\vec{y}(t)) + G(\vec{y}(t-\tau)))\rangle + \langle (B^*B + M_3)\vec{y}(t), \vec{y}(t)\rangle$$

$$-e^{-k\tau}\langle (B^*B + M_3)\vec{y}(t-\tau), \vec{y}(t-\tau)\rangle - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)\vec{y}(s), \vec{y}(s)\rangle\,ds$$

$$= -\left\langle \begin{pmatrix} HA + A^*H + B^*B & HB \\ B^*H & -e^{-k\tau}B^*B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{y}(t) \\ \vec{y}(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{y}(t) \\ \vec{y}(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+2\langle H\vec{y}(t), F(\vec{y}(t))\rangle + \langle M_3\vec{y}(t), \vec{y}(t)\rangle - e^{-k\tau}\langle M_3\vec{y}(t-\tau), \vec{y}(t-\tau)\rangle$$

$$+2\left\langle H\vec{y}(t), G(\vec{y}(t-\tau))\right\rangle - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle K(t-s)\vec{y}(s),\vec{y}(s)\right\rangle ds.$$

Обозначим

$$S_1 = -\left\langle \begin{pmatrix} HA+A^*H+B^*B & HB \\ B^*H & -e^{-k\tau}B^*B \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{y}(t)\\ \vec{y}(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{y}(t)\\ \vec{y}(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle,$$

$$S_2 = 2\left\langle H\vec{y}(t), F(\vec{y}(t))\right\rangle,$$

$$S_3 = \left\langle M_3\vec{y}(t),\vec{y}(t)\right\rangle - e^{-k\tau}\left\langle M_3\vec{y}(t-\tau),\vec{y}(t-\tau)\right\rangle + 2\left\langle H\vec{y}(t), G(\vec{y}(t-\tau))\right\rangle,$$

$$S_4 = -k\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle K(t-s)\vec{y}(s),\vec{y}(s)\right\rangle ds.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t,\vec{y}) = S_1+S_2+S_3+S_4. \tag{5.7}$$

Оценим S_1. Как было указано выше, $HB = H_{22}B$, где H_{22} определено в (3.5). Следовательно,

$$S_1 \le -\left\langle \begin{pmatrix} HA+A^*H+B^*B+e^{k\tau}H_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{y}(t)\\ \vec{y}(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\vec{y}(t)\\ \vec{y}(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$= -\left\langle L\vec{y}(t),\vec{y}(t)\right\rangle + (e^{k\tau}-1)\left\langle H_{22}^2\vec{y}(t),\vec{y}(t)\right\rangle,$$

где $L>0$ определено в (3.6). Отсюда вытекает неравенство

$$S_1 \le -\left(l_{\min} - h_{22}^2(e^{k\tau}-1)\right)\|\vec{y}(t)\|^2. \tag{5.8}$$

Оценим S_2. Имеем

$$S_2 = 2\left\langle H\vec{y}(t), F(\vec{y}(t))\right\rangle = 2\left\langle H^{1/2}\vec{y}(t), H^{1/2}F(\vec{y}(t))\right\rangle$$

$$\le 2\sqrt{\left\langle H\vec{y}(t),\vec{y}(t)\right\rangle}\sqrt{\left\langle HF(\vec{y}(t)),F(\vec{y}(t))\right\rangle} \le 2\,V^{1/2}(t,\vec{y})\sqrt{\left\langle HF(\vec{y}(t)),F(\vec{y}(t))\right\rangle}.$$

Учитывая явный вид вектор-функции $F(\vec{y}(t))$, получим

$$S_2 \le 2\,V^{1/2}(t,\vec{y})\sqrt{h_{11}}\,|\beta\widetilde{x}(t)\widetilde{z}(t)|$$

$$\le \beta\sqrt{h_{11}}\,V^{1/2}(t,\vec{y})\left(\widetilde{x}^2(t)+\widetilde{z}^2(t)\right) \le \beta\frac{\sqrt{h_{11}}}{h_{\min}}\,V^{3/2}(t,\vec{y}) = qV^{3/2}(t,\vec{y}), \tag{5.9}$$

где q определено в (5.4).

Оценим S_3. Имеем

$$S_3 = \left\langle M_3\vec{y}(t),\vec{y}(t)\right\rangle - e^{-k\tau}\left\langle M_3\vec{y}(t-\tau),\vec{y}(t-\tau)\right\rangle + 2\left\langle H\vec{y}(t), G(\vec{y}(t-\tau))\right\rangle$$

$$= h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\Big(\theta e^{k\tau/2}\widetilde{z}^2(t) - \theta e^{-k\tau/2}\widetilde{z}^2(t-\tau) + 2\widetilde{x}(t-\tau)\widetilde{z}(t-\tau)\widetilde{y}(t)\Big).$$

Отсюда нетрудно получить

$$S_3 \le h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\theta e^{k\tau/2}\left(\widetilde{z}^2(t) + \left(\frac{\widetilde{x}(t-\tau)}{\theta}\right)^2\widetilde{y}^2(t)\right). \tag{5.10}$$

Вначале предположим, что $t \in [0,\tau]$. В этом случае из условий (5.5) следует, что $|\widetilde{x}(t-\tau)| \le \theta$. Тогда

$$S_3 \le h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\theta e^{k\tau/2}(\widetilde{y}^2(t) + \widetilde{z}^2(t)) \le h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\theta e^{k\tau/2}\|\vec{y}(t)\|^2. \tag{5.11}$$

Итак, используя оценки (5.8), (5.9), (5.11), из (5.7) при $t \in [0,\tau]$ получим

$$\frac{d}{dt}V(t,\vec{y}) \le -\Big(l_{\min} - h_{22}^2(e^{k\tau}-1) - h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\theta e^{k\tau/2}\Big)\|\vec{y}(t)\|^2$$

$$+qV^{3/2}(t,\vec{y}) - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)\vec{y}(s),\vec{y}(s)\rangle\,ds$$

$$= -\widetilde{l}\|\vec{y}(t)\|^2 + qV^{3/2}(t,\vec{y}) - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)\vec{y}(s),\vec{y}(s)\rangle\,ds,$$

где $\widetilde{l}$ определено в (5.3). Учитывая обозначение (5.4) величины ε и определение (5.2) функционала $V(t,\vec{y})$, будем иметь

$$\frac{d}{dt}V(t,\vec{y}) \le -\varepsilon V(t,\vec{y}) + qV^{3/2}(t,\vec{y}).$$

Используя неравенство Гронуолла (см., например, [5]), отсюда нетрудно получить

$$\|\vec{y}(t)\|^2 \le \frac{1}{h_{\min}}V(t,\vec{y}) \le \frac{1}{h_{\min}}\,\frac{V(0,\vec{\varphi})}{\Big(1-\dfrac{q}{\varepsilon}\,\sqrt{V(0,\vec{\varphi})}\Big)^2}\,e^{-\varepsilon t},$$

и при $t \in [0,\tau]$ оценка (5.6) доказана.

Теперь рассмотрим случай $t \in [\tau, 2\tau]$. В силу условия (5.5) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{h_{\min}}}\,\frac{\sqrt{V(0,\vec{\varphi})}}{\Big(1-\dfrac{q}{\varepsilon}\,\sqrt{V(0,\vec{\varphi})}\Big)} \le \theta,$$

а значит, учитывая оценку (5.6), получим неравенство $|\widetilde{x}(t-\tau)| \le \theta$. Отсюда и из неравенства (5.10) следует (5.11). Далее, проводя те же самые рассуждения, что и в случае $t \in [0,\tau]$, установим неравенство (5.6) при $t \in [\tau, 2\tau]$.

Наконец, применяя метод математической индукции, нетрудно получить оценку (5.6) при $t \in [m\tau,(m+1)\tau]$, $m \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана. □

Список цитируемых источников

1. *Демиденко Г. В.* Матричные уравнения. Учебное пособие. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2009.

   Demidenko G. V. Matrix equations. Textbook. Novosibirsk: Publishing Office of the Novosibirsk State University, 2009. (in Russian)

2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. — 2005. — Т. 5, № 3. — С. 20–28.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. Asymptotic properties of solutions to delay differential equations. Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika, Mekhanika, Informatika, 5, No. 3, 20–28 (2005). (in Russian)

3. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 5. — С. 1025–1040.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. Siberian Math. J. 48, No. 5, 824–836 (2007).

4. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1959.

   Krasovskii N. N. Stability of Motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay. Stanford: Stanford University Press, 1963.

5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1970.

   Hartman Ph. Ordinary differential equations. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, 1964.

6. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 8. — С. 1137–1140.

   Khusainov D. Ya., Ivanov A. F., Kozhametov A. T. Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay. Differential Equations 41, No. 8, 1196–1200 (2005).

7. *Herz A. V. M., Bonhoeffer S., Anderson R. M., May R. M., Nowak M. A.* Viral dynamics in vivo: limitations on estimates of intercellular delay and virus decay. Proc. Natl. Acad. Sci. USA (Medical Sciences), 93, 7247–7251 (1996).

8. *Kharitonov V. L., Hinrichsen D.* Exponential estimates for time delay systems. Systems Control Lett., 53, No. 5, 395–405 (2004).

9. *Li D., Ma W.* Asymptotic properties of a HIV-1 infection model with time delay. J. Math. Anal. Appl., 335, No. 1, 683–691 (2007).

10. *Mondié S., Kharitonov V. L.* Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach. IEEE Trans. Automat. Control, 50, No. 2, 268–273 (2005).

Получена 01.07.2017

Динамические системы, 2017, том 7(35), №3, 275–284

УДК 517.972+517.98+517.982

Порядково доминантные классы субгладкости интегранта и субаналитические свойства вариационных функционалов в пространствах Соболева

И. А. Романенко

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: rom.igor.alex@gmail.com*

Аннотация. Как известно, достаточным условием сильной субдифференцируемости вариационного функционала в пространстве гладких функций является субдифференцируемость его интегранта, что позволило обобщить на этот случай понятие первой вариации функционала с гладким интегрантом, а также уравнение Эйлера-Лагранжа. С целью получения аналогичных обобщений в случае пространств Соболева, для вариационных функционалов вводятся так называемые порядково доминантные классы субгладкости интегранта в терминах колебания разностного отношения функции, попадание интегранта в которые гарантирует соответствующий уровень субгладкости вариационного функционала

Ключевые слова: вариационный функционал, пространства Соболева, субгладкий интегрант, доминантные классы субгладкости.

Order-dominant classes of the subsmoothness of the integrand and the sub-analytic properties of the variational functionals in Sobolev spaces

I. A. Romanenko

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In the works of I. V. Orlov a subdifferential calculus of a new type with applications to the variational problems in one-dimensional case was built. Thus, some results associated to the smoothness of the variational functional with a smooth integrand were generalized. In particular, a sufficient condition for strong subdifferentiability of the variational functional in the space of smooth functions is subdifferentiability of the integrand, that allowed to generalize the concept of the first variation of the functional with a smooth integrand on this case, and also the equation of Euler-Lagrange. With the aim of obtaining similar generalizations in the case of Sobolev spaces, for the variational functionals the so-called order-dominant classes of the subsmoothness of the integrand in terms of oscillation of the difference relation of function are introduced, such that belonging of the integrand to the appropriate class provides the corresponding subsmoothness level of the variational functional. Thus, we developed a technique with the help of which the sub-analytic properties of the variational functionals in Sobolev spaces were investigated

© *И. А. РОМАНЕНКО*

Keywords: variational functional, Sobolev spaces, subsmooth integrant, order-dominant classes of the subsmoothness.
MSC 2010: 46E35, 49J52

1. Введение

При исследовании вариационных задач в пространствах Соболева, для вариационных функционалов с гладким интегрантом

$$\Phi(y(\cdot)) = \int_a^b f(x, y, y')dx \quad \big(y \in W^{1,p}[a; b]\big) \tag{1.1}$$

была введена последовательность так называемых доминантных оценок роста градиента соответствующего порядка от интегранта, каждая из которых гарантирует соответствующий уровень гладкости вариационного функционала в C^1-гладких точках пространства Соболева [3]. Таким образом, обобщались результаты работ [1, 2], связанные с K-псевдополиномиальными представлениями гладкого интегранта.

Обобщение некоторых результатов в случае негладкого, а именно субгладкого, интегранта представлено в [4], где построено субдифференциальное исчисление нового типа вместе с приложениями к вариационным задачам в одномерном случае. В частности, достаточным условием сильной субдифференцируемости вариационного функционала в пространстве гладких функций является C^1-субгладкость его интегранта, что позволило в [5] обобщить на этот случай понятие первой вариаци функционала с гладким интегрантом, а также уравнение Эйлера-Лагранжа.

Таким образом, актуальной является задача получить подобные обобщения в случае пространств Соболева. С этой целью в настоящей работе для вариационных функционалов в пространствах $W^{1,p}[a, b]$, $(1 \leqslant p < \infty)$ вводятся так называемые порядково доминантные классы субгладкости в терминах колебания n-го порядка ($n \in \mathbb{N}$) разностного отношения функции. Попадание интегранта в такой класс гарантирует соответствующий уровень субгладкости вариационного функционала (1.1).

2. Порядково доминантная ограниченность интегранта и корректная определенность вариационных функционалов в $\mathbf{W^{1,p}[a; b]}$

Напомним определение доминантно по x, y ограниченной функции (см. [6]).

Определение 1. Борелевская функция $P\colon \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно (по переменным x, y) ограниченной* (обозначение: $P \in B(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ функция P ограничена на множестве $C \times \mathbb{R}_z$.

Введем класс порядково доминантно ограниченных функций.

Определение 2. Борелевская функция $f\colon \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно ограниченной порядка p по z* (обозначение: $f \in B_p(z)$, $1 \leqslant p < \infty$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ существуют неотрицательные функции $P \in B(z)$ и $Q \in B(z)$ такие, что для любых $(x, y, z) \in C \times \mathbb{R}_z$ f допускает оценку:

$$\big|f(x, y, z)\big| \leqslant P(x, y, z) + Q(x, y, z)|z|^p. \tag{2.1}$$

Условие (2.1) для интегранта гарантирует корректную определенность основного вариационного функционала в $W^{1,p}[a; b]$, а также позволяет дать удобную локальную оценку функционала на компактах из $W^{1,p}[a; b]$.

Теорема 1. *Если интегрант $f \in B_p(z)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то вариационный функционал Эйлера-Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx, \quad \big(y(\cdot) \in W^{1,p}[a; b]\big)$$

всюду определен в пространстве $W^{1,p}[a; b]$. Кроме того, для любого компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a; b]$ при $y(\cdot) \in C_\Delta$ справедлива локальная оценка:

$$\big|\Phi(y)\big| \leqslant \alpha(C_\Delta) + \beta(C_\Delta)\|y\|^p_{W^{1,p}},$$

где коэффициенты α и β зависят только от выбора компакта C_Δ; $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Этот результат аналогичен результату, полученному в [3].

3. Порядково доминантная субнепрерывность интегранта и субнепрерывность вариационных функционалов в $\mathbf{W^{1,p}[a; b]}$

Дадим следующее определение колебания функции в точке.

Определение 3. *Колебанием* функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ в точке $x \in X$ называется величина

$$\omega_\varphi(x) = \overline{\lim_{h_1 \to 0}}\, \varphi(x + h_1) - \underline{\lim_{h_2 \to 0}}\, \varphi(x + h_2).$$

Справедлива следующая

Лемма.

$$\textit{Если } \varphi(x) = \int_a^b g(x)dx, \ \textit{то } \omega_\varphi(x) \leqslant \int_a^b \omega_g(x)dx.$$

Доказательство. Используя теорему Фату, получим:

$$\omega_\varphi(x) = \overline{\lim_{h_1\to 0}} \int_a^b g(x+h_1)dx - \underline{\lim_{h_2\to 0}} \int_a^b g(x+h_2)dx =$$

$$= \overline{\lim_{h_1,h_2\to 0}} \int_a^b \left[g(x+h_1) + g(x+h_2)\right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \overline{\lim_{h_1,h_2\to 0}} \left[g(x+h_1) + g(x+h_2)\right] dx = \int_a^b \omega_g(x)dx.$$

□

Сформулируем критерий субнепрерывности функции в точке в терминах колебания:

$$\varphi \in C^{sub}(x) \Leftrightarrow \omega_\varphi(x) < +\infty.$$

Введем определение доминантно субнепрерывной функции.

Определение 4. Субнепрерывная функция $\varphi\colon \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно (по переменным x, y) субнепрерывной по z* (обозначение: $\varphi \in C^{sub}(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ функция φ равномерно субнепрерывна и ограничена на множестве $C \times \mathbb{R}_z$.

Из определения следует равносильность доминантной субнепрерывности функции ее ограниченности на любом множестве $C \times \mathbb{R}_z$, т.е.

$$\varphi \in C^{sub}(z) \Leftrightarrow |\varphi| < M(C),$$

где константа M зависит от выбора компакта C.

Введем класс порядково доминантно субнепрерывных функций.

Определение 5. Субнепрерывная функция $f\colon \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно субнепрерывной порядка p по z* (обозначение: $f \in C_p^{sub}(z)$ $(1 < p < \infty)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ и для любых приращений h, k, соответственно, переменных y, z, при $(x, y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$ приращение f допускает оценку:

$$|\Delta_{yz} f(C; h, k)| = |f(x, y+h, z+k) - f(x, y, z)| \leqslant$$
$$\leqslant |\Delta_{yz} P(C; h, k)| + |\Delta_{yz} Q(C; h, k)|\,|z|^{p-1}|k|, \tag{3.1}$$

где функции $P, Q \in C^{sub}(z)$.

Покажем, что условие (3.1) для интегранта гарантирует субнепрерывность основного вариационного функционала в $W^{1,p}[a; b]$.

Теорема 2. *Если интегрант $f \in C_p^{sub}(z)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то вариационный функционал Φ субнепрерывен всюду в $W^{1,p}[a;b]$ равномерно на любом компакте $C_\Delta \subset W^{1,p}$.*

Доказательство. Фиксируем компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$ и положим $C = [a;b] \times (C_\Delta \cdot [a;b])$. Пусть $y(\cdot) \in C_\Delta$, тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta < \varepsilon$ так, чтобы $\|h\|_{W^{1,p}} < \delta$ и, в частности, $|h(x)| < \delta$. Так как $f \in C_p^{sub}(z)$, то, используя представление (3.1) (при $k = h'$) и неравенство Гельдера-Минковского, проведем оценку $\Delta\Phi(y,h)$:

$$
\begin{aligned}
|\Delta\Phi(y,h)| = \big|\Phi(y+h) - \Phi(y)\big| &\leqslant \int\limits_a^b \big|f(x,y+h,y'+h') - f(x,y,y')\big|dx \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_a^b |\Delta_{yz}P(C;h,h')|dx + \int\limits_a^b |\Delta_{yz}Q(C;h,h')|\,|y'|^{p-1}|h'|dx \leqslant \\
&\leqslant M_1(C_\Delta)(b-a) + M_2(C_\Delta)\int\limits_a^b |y'|^{p-1}|h'|dx \leqslant M_1(C_\Delta)(b-a) + \\
&+ M_2(C_\Delta)\|y\|_{W^{1,p}}^{p-1}\|h\|_{W^{1,p}} \leqslant M_3(C_\Delta)
\end{aligned}
$$

при достаточно малых $\|h\|_{W^{1,p}}$, с учетом ограниченности $\|y\|_{W^{1,p}}$ при $y \in C_\Delta$.

Таким образом, $\omega_\Phi(y) \leqslant M_3(C_\Delta)$. Следовательно, вариационный функционал $\Phi(y)$ субнепрерывен всюду в $W^{1,p}[a;b]$ равномерно на любом компакте $C_\Delta \subset W^{1,p}$. □

4. Порядково доминантная субдифференцируемость интегранта и субдифференцируемость вариационных функционалов в $\mathbf{W^{1,p}[a;b]}$

Дадим следующее определение колебания первого порядка разностного отношения функции в точке.

Определение 6. *Колебанием первого порядка* разностного отношения функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ в точке $x \in X$ по направлению h называется величина

$$
\omega_\varphi^1(x,h) = \overline{\lim_{t_1 \to +0}} \frac{\varphi(x+t_1h) - \varphi(x)}{t_1} - \underline{\lim_{t_2 \to +0}} \frac{\varphi(x+t_2h) - \varphi(x)}{t_2}.
$$

Очевидно, что Лемма справедлива и в случае колебания первого порядка разностного отношения функции, т.е.

$$
\text{Если } \varphi(x) = \int\limits_a^b g(x)dx, \text{ то } \omega_\varphi^1(x,h) \leqslant \int\limits_a^b \omega_g^1(x,h)dx.
$$

Также имеет место критерий субдифференцируемости функции в точке в терминах колебания первого порядка:

$$\varphi \in C^{1,sub}(x) \Leftrightarrow \omega^1_\varphi(x,h) < +\infty.$$

Введем класс порядково доминантно субдифференцируемых функций.

Определение 7. C^1-субгладкая функция $f\colon \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно (по переменным x, y) субдифференцируемой порядка p по z* (обозначение: $f \in C^{1,\,sub}_p(z)$ $(1 \leqslant p < \infty)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ и для любых приращений $h \in V_r(0) \subset C$, k, соответственно, переменных y, z, при $(x,y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$ колебание разностного отношения первого порядка для f удовлетворяет условию:

$$\omega^1_f(x,y,z;h,k) = O\left(|z|^{p-1}|k|\right) \text{ при } |k| \to \infty \tag{4.1}$$

равномерно на множестве $C \times \mathbb{R}_z \times V_r$.

Покажем, что условие (4.1) для интегранта гарантирует субдифференцируемость основного вариационного функционала в $W^{1,p}[a;b]$.

Теорема 3. *Если интегрант $f \in C^{1,\,sub}_p(z)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то вариационный функционал субдифференцируем в $W^{1,p}[a;b]$ равномерно на любом компакте $C_\Delta \subset W^{1,p}$. При этом справедливо включение:*

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \left[\int_a^b \underline{\nabla}_{yy'} f(x,y,y')\cdot(h,h')dx; \int_a^b \overline{\nabla}_{yy'} f(x,y,y')\cdot(h,h')dx\right]. \tag{4.2}$$

Доказательство. Фиксируем компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$ и положим $C = [a;b] \times (C_\Delta \cdot [a;b])$. Пусть $y(\cdot) \in C_\Delta$, тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta < \varepsilon$ так, чтобы $\|h\|_{W^{1,p}} < \delta$ и, в частности, $|h(x)| < \delta$. Так как $f \in C^{1,\,sub}_p(z)$, используя условие (4.1) (при $k = h'$), теорему Фату и неравенство Гельдера-Минковского,

проведем оценку $\omega^1_\Phi(y,h)$:

$$\omega^1_\Phi(y,h) = \overline{\lim_{t_1\to+0}} \frac{\Phi(y+t_1h)-\Phi(y)}{t_1} - \underline{\lim_{t_2\to+0}} \frac{\Phi(y+t_2h)-\Phi(y)}{t_2} =$$

$$= \overline{\lim_{t_1\to+0}} \int_a^b \frac{f(x,y+t_1h,y'+t_1h')-f(x,y,y')}{t_1}dx -$$

$$- \underline{\lim_{t_2\to+0}} \int_a^b \frac{f(x,y+t_2h,y'+t_2h')-f(x,y,y')}{t_2}dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \overline{\lim_{t_1,t_2\to+0}} \left[\frac{f(x,y+t_1h,y'+t_1h')-f(x,y,y')}{t_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{f(x,y+t_2h,y'+t_2h')-f(x,y,y')}{t_2}\right]dx =$$

$$= \int_a^b \omega^1_f(x,y,z;h,h')dx \leqslant \int\limits_{(|h'|<\delta)} M_1(C_\Delta)dx + \int\limits_{(|h'|\geqslant\delta)} M_2(C_\Delta)|y'|^{p-1}|h'|dx \leqslant$$

$$\leqslant M_1(C_\Delta)(b-a) + M_2(C_\Delta)\int_a^b |y'|^{p-1}|h'|dx \leqslant M_1(C_\Delta)(b-a) +$$

$$+ M_2(C_\Delta)\|y\|^{p-1}_{W^{1,p}}\|h\|_{W^{1,p}} \leqslant M_3(C_\Delta)$$

при достаточно малых $\|h\|_{W^{1,p}}$, с учетом ограниченности $\|y\|_{W^{1,p}}$ при $y \in C_\Delta$.

Таким образом, $\omega^1_\Phi(y) \leqslant M_3(C_\Delta)$ при $y \in C_\Delta$. Следовательно, вариационный функционал $\Phi(y)$ субдифференцируем всюду в $W^{1,p}[a;b]$ равномерно на любом компакте $C_\Delta \subset W^{1,p}$. При этом справедливо включение (4.2). □

5. Порядково доминантная n-кратная субдифференцируемость интегранта и n-кратная субдифференцируемость вариационного функционала в $\mathbf{W^{1,p}[a;b]}$

Дадим теперь по индукции определение колебания n-го порядка разностного отношения функции в точке.

Определение 8. *Колебанием n-го порядка ($n \in \mathbb{N}$) разностного отношения функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ в точке $x \in X$ по направлению h* называется величина

$$\omega^n_\varphi(x,h) = \overline{\lim_{t_1\to+0}} \frac{\varphi^{(n-1)}(x+t_1h)-\varphi^{(n-1)}(x)}{t_1}(h)^{n-1} -$$

$$- \underline{\lim_{t_2\to+0}} \frac{\varphi^{(n-1)}(x+t_2h)-\varphi^{(n-1)}(x)}{t_2}(h)^{n-1}.$$

Аналогично, очевидно, что Лемма справедлива и в случае колебания n-го порядка разностного отношения функции, т.е.

$$\text{Если } \varphi(x) = \int\limits_a^b g(x)dx, \text{ то } \omega_\varphi^n(x,h) \leqslant \int\limits_a^b \omega_g^n(x,h)dx.$$

А также, имеет место критерий n-кратной субдифференцируемости функции в терминах колебания n-го порядка:

$$\varphi \in C^{n,sub}(x) \Leftrightarrow \omega_\varphi^n(x,h) < +\infty.$$

Введем класс порядково доминантно n-раз субдифференцируемых функций.

Определение 9. C^n-субгладкая функция $f\colon \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно (по переменным x, y) n раз субдифференцируемой порядка p по z* (обозначение: $f \in C_p^{n,\,sub}(z)$ $(n \leqslant p < \infty,\ n \in \mathbb{N})$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ и для любых приращений $h \in V_r(0) \subset C$, k, соответственно, переменных y, z, при $(x,y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$ колебание n-го порядка разностного отношения для f удовлетворяет условию:

$$\omega_f^n(x,y,z;h,k) = O\left(|z|^{p-n}|k|^n\right) \text{ при } |k| \to \infty \tag{5.1}$$

равномерно на множестве $C \times \mathbb{R}_z \times V_r$.

Покажем, что условие (5.1) для интегранта гарантирует n-кратную субдифференцируемость вариационного функционала в $W^{1,p}[a;b]$.

Теорема 4. *Если интегрант $f \in C_p^{n,\,sub}(z)$ $(n \leqslant p < \infty,\ n \in \mathbb{N})$, то вариационный функционал Φ n раз субдифференцируем в $W^{1,p}[a;b]$ равномерно на любом компакте $C_\Delta \subset W^{1,p}$. При этом справедливо включение:*

$$\partial_{sub}^n \Phi(y)(h)^n \subset \left[\int\limits_a^b \underline{\nabla}_{yy'}\left(f^{(n-1)}(x,y,y')(h,h')^{n-1}\right)\cdot(h,h')dx;\right.$$
$$\left.\int\limits_a^b \overline{\nabla}_{yy'}\left(f^{(n-1)}(x,y,y')(h,h')^{n-1}\right)\cdot(h,h')dx\right]. \tag{5.2}$$

Доказательство. Фиксируем компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$ и положим $C = [a;b] \times (C_\Delta \cdot [a;b])$. Пусть $y(\cdot) \in C_\Delta$, тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta < \varepsilon$ так, чтобы $\|h\|_{W^{1,p}} < \delta$ и, в частности, $|h(x)| < \delta$. Так как $f \in C_p^{n,\,sub}(z)$, используя условие (5.1) (при $k = h'$), теорему Фату и неравенство Гельдера-Минковского,

проведем оценку $\omega^n_\Phi(y,h)$:

$$\omega^n_\Phi(y,h) = \varlimsup_{t_1\to+0} \frac{\Phi^{(n-1)}(y+t_1h)-\Phi^{(n-1)}(y)}{t_1}(h)^{n-1} - \\ - \varlimsup_{t_2\to+0} \frac{\Phi^{(n-1)}(y+t_2h)-\Phi^{(n-1)}(y)}{t_2}(h)^{n-1} =$$

$$= \varlimsup_{t_1\to+0} \int_a^b \frac{\left(\nabla_{yy'} f^{(n-1)}(x,y+t_1h,y'+t_1h')\cdot(h,h')\right)^{n-1} - }{t_1} \\ \frac{-\left(\nabla_{yy'} f^{(n-1)}(x,y,y')\cdot(h,h')\right)^{n-1}}{} dx -$$

$$- \varlimsup_{t_2\to+0} \int_a^b \frac{\left(\nabla_{yy'} f^{(n-1)}(x,y+t_2h,y'+t_2h')\cdot(h,h')\right)^{n-1} - }{t_2} \\ \frac{-\left(\nabla_{yy'} f^{(n-1)}(x,y,y')\cdot(h,h')\right)^{n-1}}{} dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \varlimsup_{t_1,t_2\to+0} \left[\frac{\left(\nabla_{yy'} f^{(n-1)}(x,y+t_1h,y'+t_1h')\cdot(h,h')\right)^{n-1} - }{t_1} \right. \\ \frac{-\left(\nabla_{yy'} f^{(n-1)}(x,y,y')\cdot(h,h')\right)^{n-1}}{} + \\ + \frac{\left(\nabla_{yy'} f^{(n-1)}(x,y+t_2h,y'+t_2h')\cdot(h,h')\right)^{n-1} - }{t_2} \\ \left. \frac{-\left(\nabla_{yy'} f^{(n-1)}(x,y,y')\cdot(h,h')\right)^{n-1}}{} \right] dx =$$

$$= \int_a^b \omega^n_f(x,y,z;h,h')dx \leqslant \int\limits_{(|h'|<\delta)} M_1(C_\Delta)dx + \int\limits_{(|h'|\geqslant\delta)} M_2(C_\Delta)|y'|^{p-n}|h'|^n dx \leqslant$$

$$\leqslant M_1(C_\Delta)(b-a) + M_2(C_\Delta)\int_a^b |y'|^{p-n}|h'|^n dx \leqslant M_1(C_\Delta)(b-a) + \\ + M_2(C_\Delta)\|y\|^{p-n}_{W^{1,p}}\|h\|^n_{W^{1,p}} \leqslant M_3(C_\Delta)$$

при достаточно малых $\|h\|_{W^{1,p}}$, с учетом ограниченности $\|y\|_{W^{1,p}}$ при $y\in C_\Delta$.

Значит, $\omega^n_\Phi(y)\leqslant M_3(C_\Delta)$ при $y\in C_\Delta$. Следовательно, вариационный функционал $\Phi(y)$ n раз субдифференцируем всюду в $W^{1,p}[a;b]$ равномерно на любом компакте $C_\Delta\subset W^{1,p}$. При этом справедливо включение (5.2). □

6. Заключение

Таким образом, для вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}[a,b]$ $(1 \le p < \infty)$ введена последовательность порядково доминантных классов субгладких функций. Тем самым, построен аппарат, с помощью которого изучены суб-аналитические свойства вариационного функционала в $W^{1,p}[a,b]$. Данный результат позволит получить суб-аналоги "основной вариационной леммы" и уравнения Эйлера-Лагранжа в пространствах Соболева.

Список цитируемых источников

1. *Кузьменко Е. М.* Компактные экстремумы и компактно аналитические свойства вариационных функционалов в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$ над многомерной областью: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. — Симферополь, 2014.

   Kuz'menko E. M. Compact extrema and compact-analytical properties of variational functionals in the scale of Sobolev spaces $W^{1,p}$ over multidimensional domain: Diss... kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.01. — Simferopol', 2014. (in Russian).

2. *Орлов И. В., Божонок Е. В.* Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в простанстве Соболева H^1 // Учебное пособие. Симферополь: ДИАЙПИ, 2010. — 156 с.

   Orlov I. V., Bozhonok E. V. Additional chapters of modern natural science. Calculus of variations in Sobolev space H^1 // Uchebnoe posobie. Simferopol': DIAJPI, 2010. — 156 p. (in Russian).

3. *Орлов И. В., Романенко И. А.* Доминантные оценки роста интегранта и гладкость вариационных функционалов в пространствах Соболева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т.15, вып.4. — С. 422 –432.

   Orlov I. V., Romanenko I. A. Dominant integrands growth estimates and smoothness of variational functionals in Sobolev spaces. Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika 15, No.4, 422-432 (2015). (in Russian).

4. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Новые методы негладкого анализа и их приложения в векторном интегрировании и теории оптимизации // Монография. Симферополь: ДАЙПИ, 2016. — 320 с.

   Orlov I. V., Stonjakin F. S. New methods of nonsmooth analysis and their applications in vector integration and optimization theory. Simferopol': DIAJPI, 2016. (in Russian).

5. *O*rlov I.V., Khalilova Z. I. Compact subdifferentials in Banach spaces and their applications to variational functionals. Journal of Mathematical Sciences 211, No.4, 542-578 (2013).

6. *S*chmeisser H.-J. Recent developments in the theory of function spaces with dominating mixed smoothness // Proc. of the Spring School held in Prague «Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications». — Praha: Czech Academy of Sciences, Mathematical Institute, 2007. — Vol. 8. — P. 145–204.

Получена 29.10.2017

Динамические системы, 2017, том 7(35), №3, 285–294

УДК 517.98+517.95+517.984.5

О полном линейном дифференциальном уравнении второго порядка в гильбертовом пространстве с главным оператором диссипации энергии и ограниченным снизу оператором потенциальной энергии

В. И. Войтицкий

Таврическая академия,
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: victor.voytitsky@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается задача Коши для полного линейного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве с самосопряжёнными операторными коэффициентами, порождающими квадратичные формы кинетической и потенциальной энергии, а также достаточно сильной диссипации энергии. В такой форме могут быть записаны задачи для многих механических и гидродинамических систем с бесконечным числом степеней свободы и наличием трения. На основе известных результатов С. Г. Крейна и Н. Д. Копачевского устанавливается теорема существования и единственности сильного решения задачи, описываются свойства соответствующей спектральной задачи. Найдены необходимые условия при которых спектральная задача сводится к исследованию обобщённого пучка С. Г. Крейна. Приводятся основные свойства этого пучка, используя результаты Ю. Ш. Абрамова, изучается вопрос о числе отрицательных собственных значений задачи в зависимости от свойств оператора потенциальной энергии.

Ключевые слова: полное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, подчиненность операторов, теорема существования и единственности, пучок С.Г. Крейна, число отрицательных собственных значений.

On full linear differential equation of second order in Hilbert space with main operator of energy dissipation and bounded below operator of potential energy

V. I. Voytitsky

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. We consider Cauchy problem for a full linear differential equation of second order in Hilbert space with selfadjoint operator coefficients which generate quadratic forms of kinetic, potential energy, and dissipation of energy. Such problems can be generated by initial boundary value problems of mechanics or hydromechanics in nonconservative systems with friction. Using known results of S. G. Krein and N. D. Kopachevsky we prove theorem on existence and unicity of strong solution on

© *В. И. ВОЙТИЦКИЙ*

given time segment $[0;T]$, describe general spectral properties of the problem. We find necessary condition then spectral problem can be reduced to the generalized pencil of S. G. Krein. We describe properties of its operator-function, and using results of Yu. Sh. Abramov study the question on number of negative eigenvalues dependent on properties the operator of potential energy.
Keywords: full linear differential equation of second order, subordination of operators, theorem on existence and unicity, S. G. Krein's pencil, number of negative eigenvalues.
MSC 2010: 70E55, 35M33

1. Введение

В работе изучается задача Коши для полного линейного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$Cu'' + Au' + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{1.1}$$

Согласно второму закону Ньютона к такому уравнению приводит задача описания неизвестного малого поля смещений $u(t) \in \mathcal{H}$ около состояния равновесия в линейной динамической системе с бесконечным числом степеней свободы, наличием трения и действием малого известного поля внешних сил $f(t)$. При этом оператор C соответствует кинетической энергии $(Cu', u')/2$, всюду далее считаем его положительным и ограниченно обратимым. Полагаем, что оператор диссипации A положительно определён, а оператор потенциальной энергии B самосопряжён, ограничен снизу и подчинён оператору A, т.е. $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ и оператор BA^{-1} является ограниченным. Системы, в которых главным является оператор диссипации энергии, называют сильно демпфированными.

Полные линейные дифференциальные уравнения второго порядка изучались ранее многими авторами. Задачам с неограниченными операторными коэффициентами посвящена монография С. Г. Крейна [12]. В ней, в-частности, изучен вопрос разрешимости более общего уравнения, чем (1.1), с $C = I$ и главным оператором $-A(t)$, порождающим аналитическую полугруппу. Данное уравнение сводится в [12] к абстрактному параболическому уравнению первого порядка. С. Г. Крейном, его учениками, а позже Н. Д. Копачевским с учениками были изучены различные прикладные гидродинамические задачи, сводящиеся к уравнению вида (1.1) с различными свойствами и типами подчинения операторов A и B. Это, в-частности, задачи о малых движениях вязких и стратифицированных жидкостей и систем жидкостей в открытом сосуде, колебания маятников с жидким наполнением. Свойства подобных задач с ограниченными операторами описаны, например, в пособии [9]. Случай $C = I$ и неограниченных положительно определённых операторов A и B в уравнении (1.1) (а также приводящие к нему задачи) изучен в монографии [3], гл. 2. Отметим также, что абстрактные задачи вида (1.1) с главным оператором B изучались в серии работ А. А. Шкаликова с соавторами, см., например, [14]–[16].

В данной работе приводится доказательство теоремы существования и единственности сильного решения задачи (1.1) на основе теоремы С. Г. Крейна из [12]. Описываются спектральные свойства задачи в случае, когда оператор B не является положительно определённым. Используя результаты Ю. Ш. Абрамова, изучается вопрос о числе отрицательных собственных значений задачи в зависимости

от свойств оператора потенциальной энергии. Приводится точное описание спектральных свойств, когда ограниченным является оператор $BA^{-1/2}$.

2. Теорема о существовании и единственности сильного решения

Для дальнейшего исследования уравнения (1.1) перепишем его в форме

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A_0\frac{du}{dt} + B_0u + C^{-1}f(t), \tag{2.1}$$

где $A_0 := -C^{-1}A$, $B_0 := -C^{-1}B$. Будем рассматривать уравнение (2.1) в пространстве $\mathcal{H}_C$ с эквивалентным скалярным произведением

$$[u_1, u_2]_{\mathcal{H}_C} := (Cu_1, u_2)_{\mathcal{H}}. \tag{2.2}$$

Определение 1. Будем называть сильным решением на отрезке $[0;T]$ задачи Коши (2.1) с заданными начальными данными $u(0), u'(0)$ такую функцию $u(t)$, что $u(t) \in C^2([0;T];\mathcal{H}_C)$, $A_0u'(t), B_0u(t) \in C([0;T];\mathcal{H}_C)$, выполнены начальные условия и уравнение (2.1) для любого $t \in [0;T]$.

Дифференциальное уравнение (2.1) попадает в класс изученных ранее задач. Если оператор $B_0 \gg 0$, то теорему о разрешимости можно доказать с помощью перехода к дифференциальному уравнению первого порядка для операторной матрицы, действующей на парах элементов, см. [3], гл. 2. Несколько модифицированный метод приводит к теореме существования и единственности в случае, когда оператор B_0 ограничен снизу, см. [10], п. 3.1.3. Разрешимость данной задачи следует также из результатов монографии [12], гл. 3, где сформулирован ряд теорем о разрешимости уравнений второго порядка с переменными операторами $A_0(t)$ и $B_0(t)$. В частности, на стр. 336 сформулировано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если задача $dv/dt = A(t)v$ равномерно корректна, оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $\mathcal{D}(A(0))$, его резольвента удовлетворяет условию $\|R(\lambda)\| \le 1/(1+\lambda)$ при $\lambda \ge 0$, а оператор $B(t)A^{-1}(0)$ ограничен и сильно непрерывно дифференцируем по $t \in [0;T]$, то задача Коши для дифференциального уравнения (2.1) (с абстрактными переменными операторами) имеет единственное сильное решение при любых $u(0), u'(0) \in \mathcal{D}(A(0))$ (при этом правую часть $C^{-1}f(t)$ достаточно считать непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0;T]$).*

Следствие 1. *Операторы задачи A_0, B_0 удовлетворяют условиям теоремы 1. При этом задача (2.1) (а вместе с ней и (1.1)) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0;T]$, если $u(0) = u^0, u'(0) = u^1 \in \mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A)$, а $C^{-1}f(t) \in C^1([0;T];\mathcal{H})$.*

Доказательство. Действительно, оператор A_0 в пространстве $\mathcal{H}_C$ является самосопряжённым отрицательно определённым, следовательно он порождает сжимающую полугруппу и задача $dv/dt = A_0v$ является равномерно корректной.

Для самосопряжённых операторов справедлива оценка резольвенты $\|R_{A_0}(\lambda)\| \le 1/\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A_0)) \le 1/(-\lambda_1(A_0) + \lambda)$. При этом в силу ограниченности оператора BA^{-1} оператор $B_0A_0^{-1} = C^{-1}BA^{-1}$ является ограниченным. □

3. Спектральные свойства задачи в случае компактности оператора BA^{-1}

Будем искать нетривиальные решения соответствующей однородной задачи (1.1) в виде $u(t) = e^{-\lambda t}u$. Тогда собственные значения задачи являются таковыми для пучка

$$L_0(\lambda)u := (\lambda^2 C - \lambda A + B)u = 0, \quad u \in \mathcal{D}(A). \tag{3.1}$$

Отметим сразу, что $\lambda = 0$ может являться собственным значением задачи, если $\mathrm{Ker}B \ne \{0\}$. В силу дискретности спектра оператора B нулевое собственное значение может иметь лишь конечную кратность.

Предположим всюду далее в этом пункте, что оператор BA^{-1} является компактным в $\mathcal{H}$. Если $\lambda \ne 0$, то от пучка $L_0(\lambda)$ с неограниченными операторными коэффициентами можно перейти к пучку с ограниченными операторами

$$L_1(\lambda)u := (I - \lambda CA^{-1} - \lambda^{-1}BA^{-1})u = 0. \tag{3.2}$$

Очевидно, что оператор-функция $L_1(\lambda) =: I - \Phi(\lambda)$, где для всех $\lambda \in G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функция $\Phi(\lambda)$ принимает компактные значения, т.е. пучок $L_1(\lambda)$ является фредгольмовым. Можно доказать, что пучок $L_1(\lambda)$ является регулярным в области G, т.е. в этой области существует по крайней мере одно число λ_0 такое, что в нем существует ограниченная резольвента $L_1^{-1}(\lambda_0)$. Отсюда по теореме И. Ц. Гохберга (см. [4], с. 39) все собственные значения $L_1(\lambda)$ в области G являются изолированными конечнократными, при этом предельные точки могут лежать лишь на границе области, т.е. собственные значения могут сходится лишь к нулю или бесконечности.

Если λ является собственным значением пучка (3.1), которому соответствует собственная функция $u \in \mathcal{D}(A)$, тогда должно быть выполнено свойство

$$\lambda^2(Cu, u) - \lambda(Au, u) + (Bu, u) = 0. \tag{3.3}$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{(Au, u) \pm \sqrt{(Au, u)^2 - 4(Cu, u)(Bu, u)}}{2(Cu, u)}. \tag{3.4}$$

Если для всех $u \in \mathcal{D}(A)$ имеем $(Au, u)^2 \ge 4(Cu, u)(Bu, u)$, то задача не имеет невещественных собственных значений. В противном случае задача может иметь невещественные собственные значения, расположенные в правой комплексной полуплоскости, которых, по-видимому, не более конечного числа (этот факт имеет место в случае неотрицательного оператора B).

Если оператор B является неотрицательным, то согласно (3.4) задача не может иметь отрицательных собственных значений. В общем случае квадратичная форма оператора B (а вместе с ней и форма (3.4)) может принимать отрицательные значения на подпространстве конечной размерности. Следовательно пучок (3.1) может иметь отрицательные собственные значения. Докажем сейчас, что их может быть с учетом кратности не более κ штук, где κ — число отрицательных собственных значений оператора B.

Лемма 1. *Собственные функции, соответствующие различным отрицательным собственным значениям λ_1, λ_2 пучка* (3.1)*, являются линейно независимыми.*

Доказательство. Поскольку собственные функции, отвечающие одному собственному значению, образуют подпространство, то в случае наличия линейно зависимых собственных функций у λ_1 и λ_2 возникает ситуация наличия общей собственной функции у λ_1 и λ_2, т.е.

$$(\lambda_1^2 C - \lambda_1 A + B)u_1 = 0, \quad (\lambda_2^2 C - \lambda_2 A + B)u_1 = 0.$$

Отсюда $(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)Cu_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)Au_1$, значит $(\lambda_1 + \lambda_2)Cu_1 = Au_1$, что невозможно поскольку $(Au_1, u_1) > 0$ и $(Cu_1, u_1) > 0$. □

Согласно лемме 1 пучок (3.1) имеет более κ отрицательных собственных значений, если в совокупности им соответствует не менее $\kappa + 1$ линейно независимая собственная функция. С другой стороны, согласно (3.4) для собственных функций, соответствующих отрицательным собственным значениям, должно быть выполнено свойство $(Bu, u) < 0$. Согласно вариационному принципу для оператора B все такие функции вместе с нулём образуют κ-мерное подпространство, которое не может содержать в себе более κ линейно независимых элементов. Что и требовалось доказать.

Итогом приведённых рассмотрений является следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $BA^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ и оператор B ограничен снизу, то спектр пучка* (3.1) *состоит из изолированных конечнократных собственных значений с предельными точками в нуле и на бесконечности. Если оператор B неотрицателен, то задача не имеет собственных значений в левой комплексной полуплоскости, при этом количество невещественных собственных значений не более чем конечно (при выполнении условия $(Au, u)^2 \geq 4(Cu, u)(Bu, u)$, $\forall u \in \mathcal{D}(A)$, задача не имеет невещественных собственных значений). Если оператор B имеет конечное число нулевых собственных значений, то столько же имеет пучок* (3.1)*. Если оператор B имеет κ отрицательных собственных значений, то пучок* (3.1) *имеет не более κ отрицательных собственных значений.*

4. Спектральные свойства задачи в случае ограниченности оператора $BA^{-1/2}$

В случае $BA^{-1/2} \in \mathcal{L}(H)$ пучок (3.1) сводится к классическому пучку С. Г. Крейна, что позволяет применить к нему известные результаты С. Г. Крейна, Н. Д. Копачевского и соавторов.

Предположим, что $\lambda \neq 0$, осуществим замену $v := A^{1/2}u$ и подействуем на обе части (3.1) компактным оператором $A^{-1/2}$, тогда получаем

$$\mathcal{L}(\lambda)v := (I - \lambda\mathcal{A} - \lambda^{-1}\mathcal{B})v = 0, \quad \mathcal{A} := A^{-1/2}CA^{-1/2},\ \mathcal{B} := A^{-1/2}BA^{-1/2}. \tag{4.1}$$

Очевидно операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются компактными самосопряжёнными операторами в $\mathcal{H}$. Следовательно пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ является пучком С. Г. Крейна.

Используя теорему о локализации и асимптотике собственных значений пучка С. Г. Крейна (см. [11], п. 7.2, [8], а также [5]), получаем следующее утверждение (доказательство можно найти например, в [8], теоремы 2.3.6., 3.2.7).

Теорема 3. *Спектр пучка* (4.1) *состоит из двух ветвей положительных собственных значений с предельными точками* 0 *и* $+\infty$*, не более чем из конечного числа невещественных пар комплексно сопряженных собственных значений в правой полуплоскости, а также не более чем из конечного числа нулевых и отрицательных собственных значений, которые отсутствуют при выполнении условия* $B > 0$.

1. Если

$$4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| < 1, \tag{4.2}$$

то задача не имеет невещественных собственных значений, для ветвей положительных собственных значений выполнены асимптотические формулы

$$\lambda_k^+ = \lambda_k(\mathcal{A}^{-1})[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \tag{4.3}$$

$$\lambda_k^- = \lambda_k(\mathcal{B})\,[1 + o(1)], \quad k \to \infty. \tag{4.4}$$

При этом

$$\{\lambda_k^+\}_{k=1}^{\infty} \subset [r_+, +\infty), \quad \{\lambda_k^-\}_{k=1}^{\infty} \subset (0, r_-],$$

где

$$r_\pm = (1 \pm \sqrt{1 - 4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|})/(2\|\mathcal{A}\|). \tag{4.5}$$

2. Если $4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| \geq 1$*, то все невещественные собственные значения (конечное число), а также вещественные, имеющие присоединенные элементы, расположены в сегменте*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}\lambda \leq r_+,\ |\lambda| \geq r_-\}. \tag{4.6}$$

Теорема 4. *При выполнении условия* (4.2) *число отрицательных собственных значений пучка* (4.1) *совпадает с учетом кратности с количеством отрицательных собственных значений операторов* $\mathcal{B}$ *и* B.

Доказательство. Введем пучок $\mathcal{M}(\lambda) := \lambda\mathcal{L}(\lambda) = -\lambda^2\mathcal{A} + \lambda I - \mathcal{B}$, равносильный исходному пучку (4.1) для $\lambda \neq 0$. Если λ и Y — собственное значение и соответствующий ему собственный элемент этого пучка, то выполняется равенство

$$g(\lambda) := (\mathcal{M}(\lambda)Y, Y) = -\lambda^2(\mathcal{A}Y, Y) + \lambda(Y, Y) - (\mathcal{B}Y, Y) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_\pm = \frac{(Y, Y) \pm \sqrt{(Y, Y)^2 - 4(\mathcal{A}Y, Y)(\mathcal{B}Y, Y)}}{2(\mathcal{A}Y, Y)}. \tag{4.7}$$

Так как операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются самосопряжёнными и $\mathcal{A} > 0$, то отрицательным собственным значением может быть лишь корень $\lambda_- =: p(Y)$, принадлежащий интервалу $I = (-r_- - \epsilon; r_- + \epsilon)$. Из (4.7) следует, что отрицательным собственным значениям соответствует собственный элемент Y для которого $(\mathcal{B}Y, Y) < 0$. Так как оператор $\mathcal{B}$ а вместе с ним и B может иметь лишь конечное число κ отрицательных собственных значений, то согласно вариационному принципу для ограниченного снизу оператора, существует конечномерное подпространство N той же размерности κ, на ненулевых элементах которого выполнено свойство $(\mathcal{B}Y, Y) < 0$.

Функция $g(\lambda)$ возрастает в точке $p(Y)$. Функционал $p(Y)$ (функционал Рэлея) непрерывен при $Y \neq 0$ и $\inf p(Y), \sup p(Y) \in I$. Также известно, что пучок $\mathcal{M}(\lambda)$ имеет в интервале I последовательность собственных значений конечной кратности, сходящуюся к нулю. Если выполнено условие (4.2), то известно, что система собственных элементов пучка $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающих собственных значениям из интервала I (включая нулевое собственное значение) полна в $\mathcal{H}$. Следовательно выполнены все условия для справедливости вариационного принципа Пуанкаре-Ритца (см. [1], [2], а также [8], с. 119). Согласно нему собственные значения $\lambda^-_{k,+} > 0$ (по невозрастанию) и $\lambda^-_{k,-} < 0$ (по неубыванию), находятся как

$$\lambda^-_{k,+} = \max_{dim M = k} \min_{0 \neq Y \in M} p(Y), \tag{4.8}$$

$$\lambda^-_{k,-} = \min_{dim M = k} \max_{0 \neq Y \in M} p(Y). \tag{4.9}$$

Так как функционал $p(Y)$ принимает отрицательные значения на введенном выше подпространстве N (конечной размерности κ), то для всех $M \subset N$ собственные значения $\lambda^-_{k,-}$ будут отрицательными и их будет с учётом кратности ровно κ штук. □

Определение 2. Будем говорить, следуя В. А. Пригорскому (см. [13]), что базис Рисса $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ является p-базисом $(0 < p \leq \infty)$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$, если

$$\psi_n = (I + T)\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $T \in \mathfrak{S}_p$, а $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированный базис $\mathcal{H}$.

Справедливо утверждение, доказанное Н. Д. Копачевским (см. [6], [7], [8]).

Теорема 5 (о p-базисности собственных элементов пучка С. Г. Крейна)**.** *Пусть для пучка С. Г. Крейна* $\mathcal{L}(\lambda) = I - \lambda\mathcal{A} - \lambda^{-1}\mathcal{B}$ *выполнены условия*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \in \mathfrak{S}_{p_{\mathcal{A}}}(\mathcal{H}), \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}^* \in \mathfrak{S}_{p_{\mathcal{B}}}(\mathcal{H}),$$
$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}, \quad \dim\mathcal{H}_0 := \dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} \geq 0, \quad \dim\mathcal{H}_1 := \dim\{\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_0\} = \infty,$$
$$4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| < 1, \quad r_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1 - 4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|})/(2\|\mathcal{A}\|).$$

Тогда система собственных элементов, отвечающая собственным значениям из отрезка $[-r_-, r_-]$, *после проектирования на* $\mathcal{H}_1$ *образует* p*-базис в* $\mathcal{H}_1$ *при*

$$p \geq p_0, \quad p_0^{-1} = p_{\mathcal{A}}^{-1} + p_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

При тех же p *система собственных элементов, отвечающая вещественным собственным значениям вне интервала* $(-r_+, r_+)$, *образует* p*-базис в* $\mathcal{H}$.

Замечание 1. При невыполнении свойства $4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| < 1$ соответствующие системы собственных элементов образуют p-базисы с конечным дефектом.

5. Заключение

В работе рассмотрены свойства задачи Коши и сопутствующей спектральной задачи, порождённой полным линейным дифференциальным уравнением второго порядка в гильбертовом пространстве с главным положительно определенным оператором A при первой производной, ограниченным снизу оператором потенциальной энергии B и положительным ограниченно обратимым оператором кинетической энергии C при второй производной. В случае ограниченности оператора BA^{-1} доказана теорема о существовании и единственности сильного решения на произвольном отрезке времени $[0; T]$. В случае компактности оператора BA^{-1} либо в частном случае, когда оператор $BA^{-1/2}$ ограничен, установлены спектральные свойства задачи. В последнем случае задача сводится к пучку С. Г. Крейна. При выполнении условия $4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| = 4\|A^{-1/2}CA^{-1/2}\| \cdot \|A^{-1/2}BA^{-1/2}\| < 1$, основываясь на вариационном принципе для нелинейных операторных пучков, доказанном Ю. Ш. Абрамовым, установлено совпадение (с учетом кратности) числа отрицательных собственных значений оператора B и пучка С. Г. Крейна. В общем случае доказано, что количество отрицательных собственных значений пучка $L_0(\lambda)$ (с неограниченными операторными коэффициентами) не превосходит числа отрицательных собственных значений оператора B. При этом для пучка $L_0(\lambda)$ в общем случае пока не установлены достаточные условия, которые гарантировали бы существование отрицательных собственных значений, факт конечности числа невещественных собственных значений и теоремы о полноте частей собственных функций.

Автор выражает благодарность Н. Д. Копачевскому и Д. А. Закоре за помощь и научные консультации.

Список цитируемых источников

1. *Абрамов Ю.Ш.* Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. — Л.: Издательство ЛГУ, 1983. — 180 с.

   Abramov Yu. Sh. Variational methods in theory of operator pencils. Spectral optimizations. Leningrad: LSU, 1983.

2. *Абрамов Ю.Ш.* Вариационные принципы для нелинейных задач на собственные значения // Функц. анализ и его прил. — 1973, том 7, выпуск 4. — С. 76–77.

   Abramov, Yu. Sh. Variational principles for nonlinear eigenvalue problems // Functional analysis and its applications 7, no. 4, 76-77 (1973).

3. *Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 276 с.

   Azizov, T. Ya., Kopachevsky, N. D. Applications of indefinite metrics. Simferopol: DIAIPI, 2014.

4. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

   Gohberg, I. Ts., Krein, M. G. Introduction in theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space. Moscow: Nauka, 1965.

5. *Кожевников А.Н.* Раздельная асимптотика двух серий собственных значений одной эллиптической краевой задачи // Матем. Заметки. — 1977. — Т. 22, № 5. — С. 699-710.

   Kozhevnikov, A. N. Splitted asymptotics of two sets of eigenvalues of an elliptic boundary value problem // Mathematical Notes 22, no. 5, 699–710 (1977).

6. *Копачевский Н.Д.* О свойствах базисности системы собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка $I - \lambda A - \lambda^{-1}B$ // Функциональный анализ и его приложения. — Т. 15, вып. 2. — 1981. — С. 77-78.

   Kopachevsky, N. D. On basis property of a system of root vectors of selfadjoint operator pencil $I - \lambda A - \lambda^{-1}B$ // Functional analysis and its applications Vol. 15, issue 2 P. 5–88

7. *Копачевский Н.Д.* О p-базисности системы корневых векторов самосопряженного операторного пучка $I - \lambda A - \lambda^{-1}B$ // Сборник научных трудов "Функциональный анализ и прикл. математика". — Киев: Наукова думка, 1982. — С. 43-55.

   Kopachevsky, N. D. On p-basis property of a system of root vectors of selfadjoint operator pencil $I - \lambda A - \lambda^{-1}B$ // In "Functional analysis and applied mathematics". Kiev: Naukova dumka, 1982, pp. 43–55.

8. *Копачевский Н.Д.* Спектральная теория операторных пучков: Специальный курс лекций. — Симферополь: Форма, 2009. — 127 с.

   Kopachevsky, N. D. Spectral theory of operator pencils. Simferopol: Forma, 2009.

9. *Копачевский Н.Д.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве: специальный курс лекций. — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.А.", 2012. — 112 с.

   Kopachevsky, N. D. Differential equations in Banach space. Simferopol: FLP "Bondarenko O.A.", 2012.

10. *Копачевский Н.Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций. — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.А.", 2012. — 152 с.

Kopachevsky, N. D. 2012 Integrodifferential equations of Volterra in Hilbert space: special course of lections. Simferopol: FLP “Bondarenko O.A.”. 152 p

11. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo Zui Kan. Operator methods in linear hydrodynamics. Evolution and spectral problems. Moscow: Nauka, 1989.

12. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

Krein, S. G. Linear differential equations in Banach space. Moscow: Nauka, 1967.

13. *Пригорский В.А.* О некоторых классах базисов гильбертова пространства. // Успехи мат. наук. — 1965. — Т.20, № 5, вып. 125. — С. 231–236.

Prigorsky, V. A. On some classes of basis in Hilbert space
Russian Mathematical Surveys. Vol. 20, no. 5, issue 125. P. 231–236 (1965).

14. *Hryniv R.O., Shkalikov A.A.* Exponential Stability of Semigroups Related to Operator Models in Mechanics // Mathematical Notes, Vol. 73, No. 5,. — 2003. — P. 657–664.

15. *Hryniv R.O., Shkalikov A.A.* Operator models in elasticity and hydrodynamics and associated analytic semigroups // Moscow University Mathematics Bulletin, Vol. 54, No. 5. — 1999. — P. 1–10.

16. *Shkalikov A.A.* Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula // Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 87. — 1996. — P. 358–385.

Получена 10.05.2017

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.958

Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, Е. В. СЁМКИНА. **О малых движениях гидросистемы «вязкоупругая жидкость-идеальная жидкость», заполняющей неподвижный сосуд** (русский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №3. — С. 207–228.

В данной работе изучается проблема малых движений гидросистемы "вязкоупругаяжидкость-идеальная жидкость", заполняющей неподвижный сосуд. Методы, развитые в предыдущих работах первого автора, посвящённых исследованию проблем малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости, а также систем идеальных жидкостей, позволяют получить результаты о разрешимости начально-краевой задачи для исследуемой проблемы.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, идеальная жидкость, гидродинамическая система, ортопроектор, операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши.

Библиогр. 14 назв.

УДК 517.938

Е. А. САМЫЛИНА, А. И. ШЫХМАМЕДОВ, А. О. КАЗАКОВ. **О структуре резонансов 1:3 и 1:4 при обратимых возмущениях консервативных кубических отображений Эно** (русский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №3. — С. 229–244.

На примере кубического консервативного отображения плоскости проведено исследование локальных бифуркаций разрушения консервативной динамики, возникающих при добавлении к консервативным системам обратимых возмущений. Показано, что основными бифуркациями разрушения консервативной динамики здесь являются обратимые бифуркации вилки. В результате такой бифуркации симметричная эллиптическая точка становится седловой, а в ее окрестности рождается пара из асимптотически устойчивой и вполне неустойчивой точек. Процесс разрушения консервативной динамики продемонстрирован на примере резонансов 1:3 и 1:4, возникающих в окрестности эллиптической неподвижной точки в кубическом консервативном отображении Эно.

Ключевые слова: обратимое отображение, эллиптическая точка, резонансная орбита, бифуркация вилка.

Ил. 8. Библиогр. 23 назв.

УДК 517.97:517.98

И. В. ОРЛОВ, И. В. БАРАН. **Локальная асимметрия и локальный эксцесс негладких распределений с точки зрения симметрического анализа** (русский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №3. — С. 245–256.

В работе рассмотрены некоторые приложения теории симметрических дифференциалов и симметрических субдифференциалов в теории вероятностей и в теории экстремальных задач. Понятие оптимальности направления мы связываем с локальными аналогами известных в теории вероятностей понятий асимметрии и эксцесса. Эти характеристики оказываются тесно связанными с симметрическими дифференциалами либо, при соответствующем обобщении, с субдифференциалами, что позволяет применить для исследования подобных экстремальных задач симметрический анализ.

Ключевые слова: симметрическая производная, симметрический субдифференциал, локальная асимметрия, локальный эксцесс.

Ил. 1. Библиогр. 19 назв.

УДК 517.929.4

М. А. СКВОРЦОВА. **Асимптотическая устойчивость положений равновесия и оценки решений в одной модели заболевания** (русский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №3. — С. 257–274.

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая процесс распространения заболевания. Изучается асимптотическая устойчивость положений равновесия данной системы. Установлены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности, и оценки областей притяжения асимптотически устойчивых положений равновесия. Результаты получены с использованием модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского.

Ключевые слова: модель заболевания, уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценки решений, области притяжения, модифицированный функционал Ляпунова – Красовского.

Библиогр. 10 назв.

УДК 517.972+517.98+517.982

И. А. РОМАНЕНКО. **Порядково доминантные классы субгладкости интегранта и субаналитические свойства вариационных функционалов в пространствах Соболева** (русский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №3. — С. 275–284.

Как известно, достаточным условием сильной субдифференцируемости вариационного функционала в пространстве гладких функций является субдифференцируемость его интегранта, что позволило обобщить на этот случай понитие первой вариации функционала с гладким интегрантом, а также уравнение Эйлера-Лагранжа. С целью получения аналогичных обобщений в случае пространств Соболева, для вариационных функционалов вводятся так называемые порядково доминантные классы субгладкости интегранта в терминах колебания разностного отношения функции, попадание интегранта в которые гарантирует соответствующий уровень субгладкости вариационного функционала

Ключевые слова: вариационный функционал, пространства Соболева, субгладкий интегрант, доминантные классы субгладкости.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.98+517.95+517.984.5

В. И. ВОЙТИЦКИЙ. **О полном линейном дифференциальном уравнении второго порядка в гильбертовом пространстве с главным оператором диссипации энергии и ограниченным снизу оператором потенциальной энергии** (русский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №3. — С. 285–294.

Рассматривается задача Коши для полного линейного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве с самосопряжёнными операторными коэффициентами, порождающими квадратичные формы кинетической и потенциальной энергии, а также достаточно сильной диссипации энергии. В такой форме могут быть записаны задачи для многих механических и гидродинамических систем с бесконечным числом степеней свободы и наличием трения. На основе известных результатов С. Г. Крейна и Н. Д. Копачевского устанавливается теорема существования и единственности сильного решения задачи, описываются свойства соответствующей спектральной задачи. Найдены необходимые условия при которых спектральная задача сводится к исследованию обобщённого пучка С. Г. Крейна. Приводятся основные свойства

этого пучка, используя результаты Ю. Ш. Абрамова, изучается вопрос о числе отрицательных собственных значений задачи в зависимости от свойств оператора потенциальной энергии.

Ключевые слова: полное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, подчиненность операторов, теорема существования и единственности, пучок С.Г. Крейна, число отрицательных собственных значений.

Библиогр. 16 назв.

ABSTRACTS

MSC 2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

N. D. KOPACHEVSKY, E. V. SYOMKINA. **Small movements of hydrosystem in stationary containers** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **7(35)**, no.3, 207–228 (2017).

The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to develop new approach and to prove the theorem on strong solvability for initial-boundary-value problem generated by a problem of small motions of a system of viscoelastic and ideal fluids in an immovable container.

This paper is organized as follows. In section 1 we formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance. In section 2 we choose the functional spaces generated by the problem for each fluid. For applying of method of orthogonal projection we need to choose orthogonal decomposition of corresponding spaces. After projection we get new statement of the problem without some trivial equations. Important part of section 2 is formulation of auxiliary problems which help us to make transition to the the Cauchy problem for the system of integro-differential equation in some Hilbert space. In section 3 we reduce this problem to a system of differential equation. This system can be rewrite as operator differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operator of this problem are studied in section 3 too. Section 4 is devoted to the existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial-boundary-value problem. This result based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in section 4 we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem. This means that external forces equal to zero and dependence by time for the unknown function has the form $e^{-\lambda t}$. Here we obtain the spectral problem for operator pencil. This pencil has properties like pencil associated with spectral problem generated by the problem on normal oscillations of viscoelastic fluid.

Keywords: viscoelastic fluid, ideal fluid, hydrodynamic system, orthogonal projector, operator differential equation, Cauchy problem

Ref. 14.

MSC 2010: 47N10, 49J20, 49J35, 93C20, 70E99

E. A. SAMYLINA, A. I. SHYHMAMEDOV, A. O. KAZAKOV. **On the structure of resonances under reversible perturbations of conservative cubic Henon maps** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **7(35)**, no.3, 229–244 (2017).

The paper is devoted to the study of local bifurcations of symmetry breaking which arise under reversible perturbations of conservative reversible systems. We chose a perturbed conservative cubic diffeomorphism of a plane as an example of the model on which such bifurcations were investigated. It is shown that the main symmetry breaking bifurcations here are the so-called reversible pitch-fork bifurcations due to which a symmetric elliptic point becomes a symmetric saddle point and a pair of asymptotically stable and completely unstable points (one point is symmetric to another) appears in its neighborhood. The mechanism of destruction of conservative dynamics is demonstrated on the example of 1:3 and 1:4 resonances, which appear near the elliptic point of conservative cubic Henon map. In addition, in this paper we present an algorithm for constractig reversible perurbations which break down the conservative dynamics in two-dimension maps.

Keywords: reversible map, elliptic point, resonant orbit, pitch-fork bifurcation.

Fig. 8. Ref. 23.

MSC 2010: 46G05, 49J52

I. V. ORLOV, I. V. BARAN. **Local asymmetry and local kurtosis of nonsmooth distributions from the view of symmetric analysis** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **7(35)**, no.3, 245–256 (2017).

In the last decade, the theory of so-called compact subdifferentials has been constructed and found significant applications in the works of the first author and his students, the main point of which is the use for the mappings in Banach spaces as subdifferentials of many-valued sublinear and polysublinear operators with compact convex values. In our papers we consider the question of constructing the foundations of the theory of symmetric compact subdifferentials of mappings in Banach spaces.

Symmetric local characteristics of maps, from their very appearance, take a special position in the material analysis. However, the symmetric differential calculus, in contrast to the classical calculus, has not been generalized to the infinite-dimensional case — an analog of the Gateau–Hadamard–Frechet calculus was not constructed for the symmetric case.

In the applied plan, we associate the feasibility of constructing a symmetric version of the subdifferential calculus with the following capabilities of applications that are implemented in this paper.

Earlier, in our works, the problem of finding the direction of the optimal transition (in diameter) through the minimum point was formulated and investigated. It turned out that to study such a problem it is convenient to use symmetric rather than centered characteristics (symmetric differentials, or, in the more general case, symmetric subdifferentials of the first and second order).

This possibility is associated with the application of symmetric characteristics in extremal problems «at the second stage»: for the extremum point already found, determine the optimal (in a certain sense) linear direction of motion to the extremum point. In this connection, we should mention two known approaches in the nonsmooth case. The first of these is also known as the «steepest descent method» (along the radius) to the minimum point, and in the computational plan is close to the gradient method of finding the minimum. The second approach, known as the «Gelfand ravine method», is connected with the passage through the extremum point along the diameter.

In our work, the concept of optimality of direction we associate with local analogues of the concepts of asymmetry and kurtosis known in probability theory. These characteristics turn out to be closely related to symmetric differentials, or, with appropriate generalization, to subdifferentials, which allows us to apply symmetric analysis to study such extremal problems.

Keywords: symmetric derivatives, symmetric subdifferential, local asymmetry, local kurtosis.

Fig. 1. Ref. 19.

MSC 2010: 34K20, 34K60

M. A. SKVORTSOVA. **Asymptotic stability of equilibrium points and estimates of solutions in a model of disease** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **7(35)**, no.3, 257–274 (2017).

We consider a system of delay differential equations describing the spread of a disease. We study the asymptotic stability of equilibrium points of this system. We establish estimates of solutions characterizing the stabilization rate at infinity and estimates of attraction domains of asymptotically stable equilibrium points. The results are obtained using modified Lyapunov–Krasovskii functionals.

Keywords: a model of disease, delay differential equations, asymptotic stability, estimates of solutions, attraction domains, modified Lyapunov–Krasovskii functional.

Ref. 10.

MSC 2010: 46E35, 49J52

I. A. ROMANENKO. **Order-dominant classes of the subsmoothness of the integrand and the sub-analytic properties of the variational functionals in Sobolev spaces** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **7(35)**, no.3, 275–284 (2017).

In the works of I. V. Orlov a subdifferential calculus of a new type with applications to the variational problems in one-dimensional case was built. Thus, some results associated to the smoothness

of the variational functional with a smooth integrand were generalized. In particular, a sufficient condition for strong subdifferentiability of the variational functional in the space of smooth functions is subdifferentiability of the integrand, that allowed to generalize the concept of the first variation of the functional with a smooth integrand on this case, and also the equation of Euler-Lagrange. With the aim of obtaining similar generalizations in the case of Sobolev spaces, for the variational functionals the so-called order-dominant classes of the subsmoothness of the integrand in terms of oscillation of the difference relation of function are introduced, such that belonging of the integrand to the appropriate class provides the corresponding subsmoothness level of the variational functional. Thus, we developed a technique with the help of which the sub-analytic properties of the variational functionals in Sobolev spaces were investigated

Keywords: variational functional, Sobolev spaces, subsmooth integrant, order-dominant classes of the subsmoothness.

Ref. 6.

MSC 2010: 70E55, 35M33

V. I. VOYTITSKY. **On full linear differential equation of second order in Hilbert space with main operator of energy dissipation and bounded below operator of potential energy** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **7(35)**, no.3, 285–294 (2017).

We consider Cauchy problem for a full linear differential equation of second order in Hilbert space with selfadjoint operator coefficients which generate quadratic forms of kinetic, potential energy, and dissipation of energy. Such problems can be generated by initial boundary value problems of mechanics or hydromechanics in nonconservative systems with friction. Using known results of S. G. Krein and N. D. Kopachevsky we prove theorem on existence and unicity of strong solution on given time segment $[0; T]$, describe general spectral properties of the problem. We find necessary condition then spectral problem can be reduced to the generalized pencil of S. G. Krein. We describe properties of its operator-function, and using results of Yu. Sh. Abramov study the question on number of negative eigenvalues dependent on properties the operator of potential energy.

Keywords: full linear differential equation of second order, subordination of operators, theorem on existence and unicity, S. G. Krein's pencil, number of negative eigenvalues.

Ref. 16.

Dinamicheskie sistemy
(Dynamical Systems)

Volume 7(35) no.3 2017

Table of Contents

N. D. KOPACHEVSKY, E. V. SYOMKINA. Small movements of hydrosystem in stationary containers 207

E. A. SAMYLINA, A. I. SHYHMAMEDOV, A. O. KAZAKOV. On the structure of resonances under reversible perturbations of conservative cubic Henon maps 229

I. V. ORLOV, I. V. BARAN. Local asymmetry and local kurtosis of nonsmooth distributions from the view of symmetric analysis 245

M. A. SKVORTSOVA. Asymptotic stability of equilibrium points and estimates of solutions in a model of disease 257

I. A. ROMANENKO. Order-dominant classes of the subsmoothness of the integrand and the sub-analytic properties of the variational functionals in Sobolev spaces 275

V. I. VOYTITSKY. On full linear differential equation of second order in Hilbert space with main operator of energy dissipation and bounded below operator of potential energy 285

Подписано в печать 21.12.2017. Формат 60х84/8.
Усл. печ. л. 12. Тираж 50 экз. Заказ № НП/190.
Бесплатно. Дата выхода в свет 26.06.2018.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской
деятельности КФУ имени В. И. Вернадского
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7.