Динамические системы, 2017, том 7(35), №3, 285–294

УДК 517.98+517.95+517.984.5

О полном линейном дифференциальном уравнении второго порядка в гильбертовом пространстве с главным оператором диссипации энергии и ограниченным снизу оператором потенциальной энергии

В. И. Войтицкий

Таврическая академия,
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: victor.voytitsky@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается задача Коши для полного линейного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве с самосопряжёнными операторными коэффициентами, порождающими квадратичные формы кинетической и потенциальной энергии, а также достаточно сильной диссипации энергии. В такой форме могут быть записаны задачи для многих механических и гидродинамических систем с бесконечным числом степеней свободы и наличием трения. На основе известных результатов С. Г. Крейна и Н. Д. Копачевского устанавливается теорема существования и единственности сильного решения задачи, описываются свойства соответствующей спектральной задачи. Найдены необходимые условия при которых спектральная задача сводится к исследованию обобщённого пучка С. Г. Крейна. Приводятся основные свойства этого пучка, используя результаты Ю. Ш. Абрамова, изучается вопрос о числе отрицательных собственных значений задачи в зависимости от свойств оператора потенциальной энергии.

Ключевые слова: полное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, подчиненность операторов, теорема существования и единственности, пучок С.Г. Крейна, число отрицательных собственных значений.

On full linear differential equation of second order in Hilbert space with main operator of energy dissipation and bounded below operator of potential energy

V. I. Voytitsky

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. We consider Cauchy problem for a full linear differential equation of second order in Hilbert space with selfadjoint operator coefficients which generate quadratic forms of kinetic, potential energy, and dissipation of energy. Such problems can be generated by initial boundary value problems of mechanics or hydromechanics in nonconservative systems with friction. Using known results of S. G. Krein and N. D. Kopachevsky we prove theorem on existence and unicity of strong solution on

given time segment $[0;T]$, describe general spectral properties of the problem. We find necessary condition then spectral problem can be reduced to the generalized pencil of S. G. Krein. We describe properties of its operator-function, and using results of Yu. Sh. Abramov study the question on number of negative eigenvalues dependent on properties the operator of potential energy.
Keywords: full linear differential equation of second order, subordination of operators, theorem on existence and unicity, S. G. Krein's pencil, number of negative eigenvalues.
MSC 2010: 70E55, 35M33

1. Введение

В работе изучается задача Коши для полного линейного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$Cu'' + Au' + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{1.1}$$

Согласно второму закону Ньютона к такому уравнению приводит задача описания неизвестного малого поля смещений $u(t) \in \mathcal{H}$ около состояния равновесия в линейной динамической системе с бесконечным числом степеней свободы, наличием трения и действием малого известного поля внешних сил $f(t)$. При этом оператор C соответствует кинетической энергии $(Cu', u')/2$, всюду далее считаем его положительным и ограниченно обратимым. Полагаем, что оператор диссипации A положительно определён, а оператор потенциальной энергии B самосопряжён, ограничен снизу и подчинён оператору A, т.е. $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ и оператор BA^{-1} является ограниченным. Системы, в которых главным является оператор диссипации энергии, называют сильно демпфированными.

Полные линейные дифференциальные уравнения второго порядка изучались ранее многими авторами. Задачам с неограниченными операторными коэффициентами посвящена монография С. Г. Крейна [12]. В ней, в-частности, изучен вопрос разрешимости более общего уравнения, чем (1.1), с $C = I$ и главным оператором $-A(t)$, порождающим аналитическую полугруппу. Данное уравнение сводится в [12] к абстрактному параболическому уравнению первого порядка. С. Г. Крейном, его учениками, а позже Н. Д. Копачевским с учениками были изучены различные прикладные гидродинамические задачи, сводящиеся к уравнению вида (1.1) с различными свойствами и типами подчинения операторов A и B. Это, в-частности, задачи о малых движениях вязких и стратифицированных жидкостей и систем жидкостей в открытом сосуде, колебания маятников с жидким наполнением. Свойства подобных задач с ограниченными операторами описаны, например, в пособии [9]. Случай $C = I$ и неограниченных положительно определённых операторов A и B в уравнении (1.1) (а также приводящие к нему задачи) изучен в монографии [3], гл. 2. Отметим также, что абстрактные задачи вида (1.1) с главным оператором B изучались в серии работ А. А. Шкаликова с соавторами, см., например, [14]–[16].

В данной работе приводится доказательство теоремы существования и единственности сильного решения задачи (1.1) на основе теоремы С. Г. Крейна из [12]. Описываются спектральные свойства задачи в случае, когда оператор B не является положительно определённым. Используя результаты Ю. Ш. Абрамова, изучается вопрос о числе отрицательных собственных значений задачи в зависимости от свойств оператора потенциальной энергии. Приводится точное описание спектральных свойств, когда ограниченным является оператор $BA^{-1/2}$.

2. Теорема о существовании и единственности сильного решения

Для дальнейшего исследования уравнения (1.1) перепишем его в форме

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A_0\frac{du}{dt} + B_0u + C^{-1}f(t), \tag{2.1}$$

где $A_0 := -C^{-1}A$, $B_0 := -C^{-1}B$. Будем рассматривать уравнение (2.1) в пространстве $\mathcal{H}_C$ с эквивалентным скалярным произведением

$$[u_1, u_2]_{\mathcal{H}_C} := (Cu_1, u_2)_{\mathcal{H}}. \tag{2.2}$$

Определение 1. Будем называть сильным решением на отрезке $[0;T]$ задачи Коши (2.1) с заданными начальными данными $u(0), u'(0)$ такую функцию $u(t)$, что $u(t) \in C^2([0;T];\mathcal{H}_C)$, $A_0u'(t), B_0u(t) \in C([0;T];\mathcal{H}_C)$, выполнены начальные условия и уравнение (2.1) для любого $t \in [0;T]$.

Дифференциальное уравнение (2.1) попадает в класс изученных ранее задач. Если оператор $B_0 \gg 0$, то теорему о разрешимости можно доказать с помощью перехода к дифференциальному уравнению первого порядка для операторной матрицы, действующей на парах элементов, см. [3], гл. 2. Несколько модифицированный метод приводит к теореме существования и единственности в случае, когда оператор B_0 ограничен снизу, см. [10], п. 3.1.3. Разрешимость данной задачи следует также из результатов монографии [12], гл. 3, где сформулирован ряд теорем о разрешимости уравнений второго порядка с переменными операторами $A_0(t)$ и $B_0(t)$. В частности, на стр. 336 сформулировано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если задача $dv/dt = A(t)v$ равномерно корректна, оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $\mathcal{D}(A(0))$, его резольвента удовлетворяет условию $\|R(\lambda)\| \le 1/(1+\lambda)$ при $\lambda \ge 0$, а оператор $B(t)A^{-1}(0)$ ограничен и сильно непрерывно дифференцируем по $t \in [0;T]$, то задача Коши для дифференциального уравнения* (2.1) *(с абстрактными переменными операторами) имеет единственное сильное решение при любых $u(0), u'(0) \in \mathcal{D}(A(0))$ (при этом правую часть $C^{-1}f(t)$ достаточно считать непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0;T]$).*

Следствие 1. *Операторы задачи A_0, B_0 удовлетворяют условиям теоремы 1. При этом задача* (2.1) *(а вместе с ней и* (1.1)*) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0;T]$, если $u(0) = u^0, u'(0) = u^1 \in \mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A)$, а $C^{-1}f(t) \in C^1([0;T];\mathcal{H})$.*

Доказательство. Действительно, оператор A_0 в пространстве $\mathcal{H}_C$ является самосопряжённым отрицательно определённым, следовательно он порождает сжимающую полугруппу и задача $dv/dt = A_0v$ является равномерно корректной.

Для самосопряжённых операторов справедлива оценка резольвенты $\|R_{A_0}(\lambda)\| \leq 1/\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A_0)) \leq 1/(-\lambda_1(A_0) + \lambda)$. При этом в силу ограниченности оператора BA^{-1} оператор $B_0A_0^{-1} = C^{-1}BA^{-1}$ является ограниченным. $\square$

3. Спектральные свойства задачи в случае компактности оператора BA^{-1}

Будем искать нетривиальные решения соответствующей однородной задачи (1.1) в виде $u(t) = e^{-\lambda t}u$. Тогда собственные значения задачи являются таковыми для пучка

$$L_0(\lambda)u := (\lambda^2 C - \lambda A + B)u = 0, \quad u \in \mathcal{D}(A). \tag{3.1}$$

Отметим сразу, что $\lambda = 0$ может являться собственным значением задачи, если $\mathrm{Ker}B \neq \{0\}$. В силу дискретности спектра оператора B нулевое собственное значение может иметь лишь конечную кратность.

Предположим всюду далее в этом пункте, что оператор BA^{-1} является компактным в $\mathcal{H}$. Если $\lambda \neq 0$, то от пучка $L_0(\lambda)$ с неограниченными операторными коэффициентами можно перейти к пучку с ограниченными операторами

$$L_1(\lambda)u := (I - \lambda CA^{-1} - \lambda^{-1}BA^{-1})u = 0. \tag{3.2}$$

Очевидно, что оператор-функция $L_1(\lambda) =: I - \Phi(\lambda)$, где для всех $\lambda \in G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функция $\Phi(\lambda)$ принимает компактные значения, т.е. пучок $L_1(\lambda)$ является фредгольмовым. Можно доказать, что пучок $L_1(\lambda)$ является регулярным в области G, т.е. в этой области существует по крайней мере одно число λ_0 такое, что в нем существует ограниченная резольвента $L_1^{-1}(\lambda_0)$. Отсюда по теореме И. Ц. Гохберга (см. [4], с. 39) все собственные значения $L_1(\lambda)$ в области G являются изолированными конечнократными, при этом предельные точки могут лежать лишь на границе области, т.е. собственные значения могут сходится лишь к нулю или бесконечности.

Если λ является собственным значением пучка (3.1), которому соответствует собственная функция $u \in \mathcal{D}(A)$, тогда должно быть выполнено свойство

$$\lambda^2(Cu, u) - \lambda(Au, u) + (Bu, u) = 0. \tag{3.3}$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{(Au, u) \pm \sqrt{(Au, u)^2 - 4(Cu, u)(Bu, u)}}{2(Cu, u)}. \tag{3.4}$$

Если для всех $u \in \mathcal{D}(A)$ имеем $(Au, u)^2 \geq 4(Cu, u)(Bu, u)$, то задача не имеет невещественных собственных значений. В противном случае задача может иметь невещественные собственные значения, расположенные в правой комплексной полуплоскости, которых, по-видимому, не более конечного числа (этот факт имеет место в случае неотрицательного оператора B).

Если оператор B является неотрицательным, то согласно (3.4) задача не может иметь отрицательных собственных значений. В общем случае квадратичная форма оператора B (а вместе с ней и форма (3.4)) может принимать отрицательные значения на подпространстве конечной размерности. Следовательно пучок (3.1) может иметь отрицательные собственные значения. Докажем сейчас, что их может быть с учетом кратности не более κ штук, где κ — число отрицательных собственных значений оператора B.

Лемма 1. *Собственные функции, соответствующие различным отрицательным собственным значениям λ_1, λ_2 пучка* (3.1), *являются линейно независимыми.*

Доказательство. Поскольку собственные функции, отвечающие одному собственному значению, образуют подпространство, то в случае наличия линейно зависимых собственных функций у λ_1 и λ_2 возникает ситуация наличия общей собственной функции у λ_1 и λ_2, т.е.

$$(\lambda_1^2 C - \lambda_1 A + B)u_1 = 0, \quad (\lambda_2^2 C - \lambda_2 A + B)u_1 = 0.$$

Отсюда $(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)Cu_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)Au_1$, значит $(\lambda_1 + \lambda_2)Cu_1 = Au_1$, что невозможно поскольку $(Au_1, u_1) > 0$ и $(Cu_1, u_1) > 0$. $\square$

Согласно лемме 1 пучок (3.1) имеет более κ отрицательных собственных значений, если в совокупности им соответствует не менее $\kappa + 1$ линейно независимая собственная функция. С другой стороны, согласно (3.4) для собственных функций, соответствующих отрицательным собственным значениям, должно быть выполнено свойство $(Bu, u) < 0$. Согласно вариационному принципу для оператора B все такие функции вместе с нулём образуют κ-мерное подпространство, которое не может содержать в себе более κ линейно независимых элементов. Что и требовалось доказать.

Итогом приведённых рассмотрений является следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $BA^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ и оператор B ограничен снизу, то спектр пучка* (3.1) *состоит из изолированных конечнократных собственных значений с предельными точками в нуле и на бесконечности. Если оператор B неотрицателен, то задача не имеет собственных значений в левой комплексной полуплоскости, при этом количество невещественных собственных значений не более чем конечно (при выполнении условия $(Au, u)^2 \geq 4(Cu, u)(Bu, u)$, $\forall u \in \mathcal{D}(A)$, задача не имеет невещественных собственных значений). Если оператор B имеет конечное число нулевых собственных значений, то столько же имеет пучок* (3.1). *Если оператор B имеет κ отрицательных собственных значений, то пучок* (3.1) *имеет не более κ отрицательных собственных значений.*

4. Спектральные свойства задачи в случае ограниченности оператора $BA^{-1/2}$

В случае $BA^{-1/2} \in \mathcal{L}(H)$ пучок (3.1) сводится к классическому пучку С. Г. Крейна, что позволяет применить к нему известные результаты С. Г. Крейна, Н. Д. Копачевского и соавторов.

Предположим, что $\lambda \neq 0$, осуществим замену $v := A^{1/2}u$ и подействуем на обе части (3.1) компактным оператором $A^{-1/2}$, тогда получаем

$$\mathcal{L}(\lambda)v := (I - \lambda\mathcal{A} - \lambda^{-1}\mathcal{B})v = 0, \quad \mathcal{A} := A^{-1/2}CA^{-1/2},\ \mathcal{B} := A^{-1/2}BA^{-1/2}. \tag{4.1}$$

Очевидно операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются компактными самосопряжёнными операторами в $\mathcal{H}$. Следовательно пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ является пучком С. Г. Крейна.

Используя теорему о локализации и асимптотике собственных значений пучка С. Г. Крейна (см. [11], п. 7.2, [8], а также [5]), получаем следующее утверждение (доказательство можно найти например, в [8], теоремы 2.3.6., 3.2.7).

Теорема 3. *Спектр пучка (4.1) состоит из двух ветвей положительных собственных значений с предельными точками 0 и $+\infty$, не более чем из конечного числа невещественных пар комплексно сопряженных собственных значений в правой полуплоскости, а также не более чем из конечного числа нулевых и отрицательных собственных значений, которые отсутствуют при выполнении условия $B > 0$.*

1. Если

$$4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| < 1, \tag{4.2}$$

то задача не имеет невещественных собственных значений, для ветвей положительных собственных значений выполнены асимптотические формулы

$$\lambda_k^+ = \lambda_k(\mathcal{A}^{-1})[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \tag{4.3}$$

$$\lambda_k^- = \lambda_k(\mathcal{B})\,[1 + o(1)], \quad k \to \infty. \tag{4.4}$$

При этом

$$\{\lambda_k^+\}_{k=1}^{\infty} \subset [r_+, +\infty), \quad \{\lambda_k^-\}_{k=1}^{\infty} \subset (0, r_-],$$

где

$$r_\pm = (1 \pm \sqrt{1 - 4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|})/(2\|\mathcal{A}\|). \tag{4.5}$$

2. Если $4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| \geq 1$, то все невещественные собственные значения (конечное число), а также вещественные, имеющие присоединенные элементы, расположены в сегменте

$$\{\lambda \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}\lambda \leq r_+,\ |\lambda| \geq r_-\}. \tag{4.6}$$

Теорема 4. *При выполнении условия (4.2) число отрицательных собственных значений пучка (4.1) совпадает с учетом кратности с количеством отрицательных собственных значений операторов $\mathcal{B}$ и B.*

Доказательство. Введем пучок $\mathcal{M}(\lambda) := \lambda\mathcal{L}(\lambda) = -\lambda^2\mathcal{A} + \lambda I - \mathcal{B}$, равносильный исходному пучку (4.1) для $\lambda \neq 0$. Если λ и Y — собственное значение и соответствующий ему собственный элемент этого пучка, то выполняется равенство

$$g(\lambda) := (\mathcal{M}(\lambda)Y, Y) = -\lambda^2(\mathcal{A}Y, Y) + \lambda(Y, Y) - (\mathcal{B}Y, Y) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_{\pm} = \frac{(Y, Y) \pm \sqrt{(Y, Y)^2 - 4(\mathcal{A}Y, Y)(\mathcal{B}Y, Y)}}{2(\mathcal{A}Y, Y)}. \tag{4.7}$$

Так как операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются самосопряжёнными и $\mathcal{A} > 0$, то отрицательным собственным значением может быть лишь корень $\lambda_- =: p(Y)$, принадлежащий интервалу $I = (-r_- - \epsilon; r_- + \epsilon)$. Из (4.7) следует, что отрицательным собственным значениям соответствует собственный элемент Y для которого $(\mathcal{B}Y, Y) < 0$. Так как оператор $\mathcal{B}$ а вместе с ним и B может иметь лишь конечное число κ отрицательных собственных значений, то согласно вариационному принципу для ограниченного снизу оператора, существует конечномерное подпространство N той же размерности κ, на ненулевых элементах которого выполнено свойство $(\mathcal{B}Y, Y) < 0$.

Функция $g(\lambda)$ возрастает в точке $p(Y)$. Функционал $p(Y)$ (функционал Рэлея) непрерывен при $Y \neq 0$ и $\inf p(Y), \sup p(Y) \in I$. Также известно, что пучок $\mathcal{M}(\lambda)$ имеет в интервале I последовательность собственных значений конечной кратности, сходящуюся к нулю. Если выполнено условие (4.2), то известно, что система собственных элементов пучка $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающих собственных значениям из интервала I (включая нулевое собственное значение) полна в $\mathcal{H}$. Следовательно выполнены все условия для справедливости вариационного принципа Пуанкаре-Ритца (см. [1], [2], а также [8], с. 119). Согласно нему собственные значения $\lambda^-_{k,+} > 0$ (по невозрастанию) и $\lambda^-_{k,-} < 0$ (по неубыванию), находятся как

$$\lambda^-_{k,+} = \max_{dim M = k} \min_{0 \neq Y \in M} p(Y), \tag{4.8}$$

$$\lambda^-_{k,-} = \min_{dim M = k} \max_{0 \neq Y \in M} p(Y). \tag{4.9}$$

Так как функционал $p(Y)$ принимает отрицательные значения на введенном выше подпространстве N (конечной размерности κ), то для всех $M \subset N$ собственные значения $\lambda^-_{k,-}$ будут отрицательными и их будет с учётом кратности ровно κ штук. $\square$

Определение 2. Будем говорить, следуя В. А. Пригорскому (см. [13]), что базис Рисса $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ является p-базисом $(0 < p \leq \infty)$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$, если

$$\psi_n = (I + T)\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $T \in \mathfrak{S}_p$, а $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис $\mathcal{H}$.

Справедливо утверждение, доказанное Н. Д. Копачевским (см. [6], [7], [8]).

Теорема 5 (о p-базисности собственных элементов пучка С. Г. Крейна)**.** *Пусть для пучка С. Г. Крейна $\mathcal{L}(\lambda) = I - \lambda\mathcal{A} - \lambda^{-1}\mathcal{B}$ выполнены условия*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \in \mathfrak{S}_{p_{\mathcal{A}}}(\mathcal{H}), \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}^* \in \mathfrak{S}_{p_{\mathcal{B}}}(\mathcal{H}),$$
$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}, \quad \dim\mathcal{H}_0 := \dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} \geq 0, \quad \dim\mathcal{H}_1 := \dim\{\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_0\} = \infty,$$
$$4\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}\| < 1, \quad r_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1 - 4\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}\|})/(2\|\mathcal{A}\|).$$

Тогда система собственных элементов, отвечающая собственным значениям из отрезка $[-r_-, r_-]$, после проектирования на $\mathcal{H}_1$ образует p-базис в $\mathcal{H}_1$ при

$$p \geq p_0, \quad p_0^{-1} = p_{\mathcal{A}}^{-1} + p_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

При тех же p система собственных элементов, отвечающая вещественным собственным значениям вне интервала $(-r_+, r_+)$, образует p-базис в $\mathcal{H}$.

Замечание 1. При невыполнении свойства $4\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}\| < 1$ соответствующие системы собственных элементов образуют p-базисы с конечным дефектом.

5. Заключение

В работе рассмотрены свойства задачи Коши и сопутствующей спектральной задачи, порождённой полным линейным дифференциальным уравнением второго порядка в гильбертовом пространстве с главным положительно определенным оператором A при первой производной, ограниченным снизу оператором потенциальной энергии B и положительным ограниченно обратимым оператором кинетической энергии C при второй производной. В случае ограниченности оператора BA^{-1} доказана теорема о существовании и единственности сильного решения на произвольном отрезке времени $[0;T]$. В случае компактности оператора BA^{-1} либо в частном случае, когда оператор $BA^{-1/2}$ ограничен, установлены спектральные свойства задачи. В последнем случае задача сводится к пучку С. Г. Крейна. При выполнении условия $4\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}\| = 4\|A^{-1/2}CA^{-1/2}\|\cdot\|A^{-1/2}BA^{-1/2}\| < 1$, основываясь на вариационном принципе для нелинейных операторных пучков, доказанном Ю. Ш. Абрамовым, установлено совпадение (с учетом кратности) числа отрицательных собственных значений оператора B и пучка С. Г. Крейна. В общем случае доказано, что количество отрицательных собственных значений пучка $L_0(\lambda)$ (с неограниченными операторными коэффициентами) не превосходит числа отрицательных собственных значений оператора B. При этом для пучка $L_0(\lambda)$ в общем случае пока не установлены достаточные условия, которые гарантировали бы существование отрицательных собственных значений, факт конечности числа невещественных собственных значений и теоремы о полноте частей собственных функций.

Автор выражает благодарность Н. Д. Копачевскому и Д. А. Закоре за помощь и научные консультации.

Список цитируемых источников

1. *Абрамов Ю.Ш.* Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. — Л.: Издательство ЛГУ, 1983. — 180 с.

   Abramov Yu. Sh. Variational methods in theory of operator pencils. Spectral optimizations. Leningrad: LSU, 1983.

2. *Абрамов Ю.Ш.* Вариационные принципы для нелинейных задач на собственные значения // Функц. анализ и его прил. — 1973, том 7, выпуск 4. — С. 76–77.

   Abramov, Yu. Sh. Variational principles for nonlinear eigenvalue problems // Functional analysis and its applications 7, no. 4, 76-77 (1973).

3. *Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 276 с.

   Azizov, T. Ya., Kopachevsky, N. D. Applications of indefinite metrics. Simferopol: DIAIPI, 2014.

4. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

   Gohberg, I. Ts., Krein, M. G. Introduction in theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space. Moscow: Nauka, 1965.

5. *Кожевников А.Н.* Раздельная асимптотика двух серий собственных значений одной эллиптической краевой задачи // Матем. Заметки. — 1977. — Т. 22, № 5. — С. 699-710.

   Kozhevnikov, A. N. Splitted asymptotics of two sets of eigenvalues of an elliptic boundary value problem // Mathematical Notes 22, no. 5, 699–710 (1977).

6. *Копачевский Н.Д.* О свойствах базисности системы собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка $I - \lambda A - \lambda^{-1} B$ // Функциональный анализ и его приложения. — Т. 15, вып. 2. — 1981. — С. 77-78.

   Kopachevsky, N. D. On basis property of a system of root vectors of selfadjoint operator pencil $I - \lambda A - \lambda^{-1} B$ // Functional analysis and its applications Vol. 15, issue 2 P. 5–88

7. *Копачевский Н.Д.* О p-базисности системы корневых векторов самосопряженного операторного пучка $I - \lambda A - \lambda^{-1} B$ // Сборник научных трудов "Функциональный анализ и прикл. математика". — Киев: Наукова думка, 1982. — С. 43-55.

   Kopachevsky, N. D. On p-basis property of a system of root vectors of selfadjoint operator pencil $I - \lambda A - \lambda^{-1} B$ // In "Functional analysis and applied mathematics". Kiev: Naukova dumka, 1982, pp. 43–55.

8. *Копачевский Н.Д.* Спектральная теория операторных пучков: Специальный курс лекций. — Симферополь: Форма, 2009. — 127 с.

   Kopachevsky, N. D. Spectral theory of operator pencils. Simferopol: Forma, 2009.

9. *Копачевский Н.Д.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве: специальный курс лекций. — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.А.", 2012. — 112 с.

   Kopachevsky, N. D. Differential equations in Banach space. Simferopol: FLP "Bondarenko O.A.", 2012.

10. *Копачевский Н.Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций. — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.А.", 2012. — 152 с.

Kopachevsky, N. D. 2012 Integrodifferential equations of Volterra in Hilbert space: special course of lections. Simferopol: FLP “Bondarenko O.A.”. 152 p

11. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

    Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo Zui Kan. Operator methods in linear hydrodynamics. Evolution and spectral problems. Moscow: Nauka, 1989.

12. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

    Krein, S. G. Linear differential equations in Banach space. Moscow: Nauka, 1967.

13. *Пригорский В.А.* О некоторых классах базисов гильбертова пространства. // Успехи мат. наук. — 1965. — Т.20, № 5, вып. 125. — С. 231–236.

    Prigorsky, V. A. On some classes of basis in Hilbert space
    Russian Mathematical Surveys. Vol. 20, no. 5, issue 125. P. 231–236 (1965).

14. *Hryniv R.O., Shkalikov A.A.* Exponential Stability of Semigroups Related to Operator Models in Mechanics // Mathematical Notes, Vol. 73, No. 5,. — 2003. — P. 657–664.

15. *Hryniv R.O., Shkalikov A.A.* Operator models in elasticity and hydrodynamics and associated analytic semigroups // Moscow University Mathematics Bulletin, Vol. 54, No. 5. — 1999. — P. 1–10.

16. *Shkalikov A.A.* Operator pencils arising in elasticity and hydrodynamics: the instability index formula // Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 87. — 1996. — P. 358–385.

Получена 10.05.2017