Динамические системы, 2017, том 7(35), №3, 275–284

УДК 517.972+517.98+517.982

Порядково доминантные классы субгладкости интегранта и субаналитические свойства вариационных функционалов в пространствах Соболева

И. А. Романенко

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: rom.igor.alex@gmail.com*

Аннотация. Как известно, достаточным условием сильной субдифференцируемости вариационного функционала в пространстве гладких функций является субдифференцируемость его интегранта, что позволило обобщить на этот случай понятие первой вариации функционала с гладким интегрантом, а также уравнение Эйлера-Лагранжа. С целью получения аналогичных обобщений в случае пространств Соболева, для вариационных функционалов вводятся так называемые порядково доминантные классы субгладкости интегранта в терминах колебания разностного отношения функции, попадание интегранта в которые гарантирует соответствующий уровень субгладкости вариационного функционала

Ключевые слова: вариационный функционал, пространства Соболева, субгладкий интегрант, доминантные классы субгладкости.

Order-dominant classes of the subsmoothness of the integrand and the sub-analytic properties of the variational functionals in Sobolev spaces

I. A. Romanenko

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In the works of I. V. Orlov a subdifferential calculus of a new type with applications to the variational problems in one-dimensional case was built. Thus, some results associated to the smoothness of the variational functional with a smooth integrand were generalized. In particular, a sufficient condition for strong subdifferentiability of the variational functional in the space of smooth functions is subdifferentiability of the integrand, that allowed to generalize the concept of the first variation of the functional with a smooth integrand on this case, and also the equation of Euler-Lagrange. With the aim of obtaining similar generalizations in the case of Sobolev spaces, for the variational functionals the so-called order-dominant classes of the subsmoothness of the integrand in terms of oscillation of the difference relation of function are introduced, such that belonging of the integrand to the appropriate class provides the corresponding subsmoothness level of the variational functional. Thus, we developed a technique with the help of which the sub-analytic properties of the variational functionals in Sobolev spaces were investigated

Keywords: variational functional, Sobolev spaces, subsmooth integrant, order-dominant classes of the subsmoothness.

MSC 2010: 46E35, 49J52

1. Введение

При исследовании вариационных задач в пространствах Соболева, для вариационных функционалов с гладким интегрантом

$$\Phi(y(\cdot)) = \int_a^b f(x, y, y')dx \quad \big(y \in W^{1,p}[a; b]\big) \tag{1.1}$$

была введена последовательность так называемых доминантных оценок роста градиента соответствующего порядка от интегранта, каждая из которых гарантирует соответствующий уровень гладкости вариационного функционала в C^1-гладких точках пространства Соболева [3]. Таким образом, обобщались результаты работ [1, 2], связанные с K-псевдополиномиальными представлениями гладкого интегранта.

Обобщение некоторых результатов в случае негладкого, а именно субгладкого, интегранта представлено в [4], где построено субдифференциальное исчисление нового типа вместе с приложениями к вариационным задачам в одномерном случае. В частности, достаточным условием сильной субдифференцируемости вариационного функционала в пространстве гладких функций является C^1-субгладкость его интегранта, что позволило в [5] обобщить на этот случай понятие первой вариаци функционала с гладким интегрантом, а также уравнение Эйлера-Лагранжа.

Таким образом, актуальной является задача получить подобные обобщения в случае пространств Соболева. С этой целью в настоящей работе для вариационных функционалов в пространствах $W^{1,p}[a, b]$, $(1 \leqslant p < \infty)$ вводятся так называемые порядково доминантные классы субгладкости в терминах колебания n-го порядка $(n \in \mathbb{N})$ разностного отношения функции. Попадание интегранта в такой класс гарантирует соответствующий уровень субгладкости вариационного функционала (1.1).

2. Порядково доминантная ограниченность интегранта и корректная определенность вариационных функционалов в $\mathbf{W^{1,p}[a; b]}$

Напомним определение доминантно по x, y ограниченной функции (см. [6]).

Определение 1. Борелевская функция $P\colon \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно (по переменным x, y) ограниченной* (обозначение: $P \in B(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ функция P ограничена на множестве $C \times \mathbb{R}_z$.

Введем класс порядково доминантно ограниченных функций.

Определение 2. Борелевская функция $f\colon \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно ограниченной порядка p по z* (обозначение: $f \in B_p(z)$, $1 \leqslant p < \infty$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ существуют неотрицательные функции $P \in B(z)$ и $Q \in B(z)$ такие, что для любых $(x, y, z) \in C \times \mathbb{R}_z$ f допускает оценку:

$$\bigl|f(x,y,z)\bigr| \leqslant P(x,y,z) + Q(x,y,z)|z|^p. \tag{2.1}$$

Условие (2.1) для интегранта гарантирует корректную определенность основного вариационного функционала в $W^{1,p}[a;b]$, а также позволяет дать удобную локальную оценку функционала на компактах из $W^{1,p}[a;b]$.

Теорема 1. *Если интегрант $f \in B_p(z)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то вариационный функционал Эйлера-Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx, \quad \bigl(y(\cdot) \in W^{1,p}[a;b]\bigr)$$

всюду определен в пространстве $W^{1,p}[a;b]$. Кроме того, для любого компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$ при $y(\cdot) \in C_\Delta$ справедлива локальная оценка:

$$\bigl|\Phi(y)\bigr| \leqslant \alpha(C_\Delta) + \beta(C_\Delta)\|y\|^p_{W^{1,p}},$$

где коэффициенты α и β зависят только от выбора компакта C_Δ; $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Этот результат аналогичен результату, полученному в [3].

3. Порядково доминантная субнепрерывность интегранта и субнепрерывность вариационных функционалов в $\mathbf{W^{1,p}[a;b]}$

Дадим следующее определение колебания функции в точке.

Определение 3. *Колебанием* функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ в точке $x \in X$ называется величина

$$\omega_\varphi(x) = \varlimsup_{h_1 \to 0} \varphi(x+h_1) - \varliminf_{h_2 \to 0} \varphi(x+h_2).$$

Справедлива следующая

Лемма.

$$\text{\textit{Если} } \varphi(x) = \int\limits_a^b g(x)dx, \text{ \textit{то} } \omega_\varphi(x) \leqslant \int\limits_a^b \omega_g(x)dx.$$

Доказательство. Используя теорему Фату, получим:

$$\omega_\varphi(x) = \overline{\lim_{h_1\to 0}} \int_a^b g(x+h_1)dx - \underline{\lim_{h_2\to 0}} \int_a^b g(x+h_2)dx =$$

$$= \overline{\lim_{h_1,h_2\to 0}} \int_a^b [g(x+h_1)+g(x+h_2)]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \overline{\lim_{h_1,h_2\to 0}} [g(x+h_1)+g(x+h_2)]\,dx = \int_a^b \omega_g(x)dx.$$

□

Сформулируем критерий субнепрерывности функции в точке в терминах колебания:

$$\varphi \in C^{sub}(x) \Leftrightarrow \omega_\varphi(x) < +\infty.$$

Введем определение доминантно субнепрерывной функции.

Определение 4. Субнепрерывная функция $\varphi\colon \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно (по переменным x, y) субнепрерывной по z* (обозначение: $\varphi \in C^{sub}(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ функция φ равномерно субнепрерывна и ограничена на множестве $C \times \mathbb{R}_z$.

Из определения следует равносильность доминантной субнепрерывности функции ее ограниченности на любом множестве $C \times \mathbb{R}_z$, т.е.

$$\varphi \in C^{sub}(z) \Leftrightarrow |\varphi| < M(C),$$

где константа M зависит от выбора компакта C.

Введем класс порядково доминантно субнепрерывных функций.

Определение 5. Субнепрерывная функция $f\colon \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно субнепрерывной порядка p по z* (обозначение: $f \in C_p^{sub}(z)$ $(1 < p < \infty)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ и для любых приращений h, k, соответственно, переменных y, z, при $(x, y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$ приращение f допускает оценку:

$$\begin{aligned} |\Delta_{yz} f(C; h, k)| &= |f(x, y+h, z+k) - f(x, y, z)| \leqslant \\ &\leqslant |\Delta_{yz} P(C; h, k)| + |\Delta_{yz} Q(C; h, k)|\,|z|^{p-1}|k|, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где функции $P, Q \in C^{sub}(z)$.

Покажем, что условие (3.1) для интегранта гарантирует субнепрерывность основного вариационного функционала в $W^{1,p}[a; b]$.

Теорема 2. *Если интегрант $f \in C_p^{sub}(z)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то вариационный функционал Φ субнепрерывен всюду в $W^{1,p}[a;b]$ равномерно на любом компакте $C_\Delta \subset W^{1,p}$.*

Доказательство. Фиксируем компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$ и положим $C = [a;b] \times (C_\Delta \cdot [a;b])$. Пусть $y(\cdot) \in C_\Delta$, тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta < \varepsilon$ так, чтобы $\|h\|_{W^{1,p}} < \delta$ и, в частности, $|h(x)| < \delta$. Так как $f \in C_p^{sub}(z)$, то, используя представление (3.1) (при $k = h'$) и неравенство Гельдера-Минковского, проведем оценку $\Delta\Phi(y,h)$:

$$|\Delta\Phi(y,h)| = \big|\Phi(y+h) - \Phi(y)\big| \leqslant \int\limits_a^b \big|f(x, y+h, y'+h') - f(x,y,y')\big| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b |\Delta_{yz} P(C; h, h')| dx + \int\limits_a^b |\Delta_{yz} Q(C; h, h')| \, |y'|^{p-1} |h'| dx \leqslant$$

$$\leqslant M_1(C_\Delta)(b-a) + M_2(C_\Delta) \int\limits_a^b |y'|^{p-1} |h'| dx \leqslant M_1(C_\Delta)(b-a) +$$

$$+ M_2(C_\Delta) \|y\|_{W^{1,p}}^{p-1} \|h\|_{W^{1,p}} \leqslant M_3(C_\Delta)$$

при достаточно малых $\|h\|_{W^{1,p}}$, с учетом ограниченности $\|y\|_{W^{1,p}}$ при $y \in C_\Delta$.

Таким образом, $\omega_\Phi(y) \leqslant M_3(C_\Delta)$. Следовательно, вариационный функционал $\Phi(y)$ субнепрерывен всюду в $W^{1,p}[a;b]$ равномерно на любом компакте $C_\Delta \subset W^{1,p}$.

$\square$

4. Порядково доминантная субдифференцируемость интегранта и субдифференцируемость вариационных функционалов в $\mathbf{W^{1,p}[a;b]}$

Дадим следующее определение колебания первого порядка разностного отношения функции в точке.

Определение 6. *Колебанием первого порядка* разностного отношения функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ в точке $x \in X$ по направлению h называется величина

$$\omega_\varphi^1(x,h) = \overline{\lim_{t_1 \to +0}} \frac{\varphi(x+t_1 h) - \varphi(x)}{t_1} - \underline{\lim_{t_2 \to +0}} \frac{\varphi(x+t_2 h) - \varphi(x)}{t_2}.$$

Очевидно, что Лемма справедлива и в случае колебания первого порядка разностного отношения функции, т.е.

$$\text{Если } \varphi(x) = \int\limits_a^b g(x) dx, \text{ то } \omega_\varphi^1(x,h) \leqslant \int\limits_a^b \omega_g^1(x,h) dx.$$

Также имеет место критерий субдифференцируемости функции в точке в терминах колебания первого порядка:

$$\varphi \in C^{1,sub}(x) \Leftrightarrow \omega^1_\varphi(x,h) < +\infty.$$

Введем класс порядково доминантно субдифференцируемых функций.

Определение 7. C^1-субгладкая функция $f\colon \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно (по переменным x, y) субдифференцируемой порядка p по z* (обозначение: $f \in C^{1,\,sub}_p(z)$ $(1 \leqslant p < \infty)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ и для любых приращений $h \in V_r(0) \subset C$, k, соответственно, переменных y, z, при $(x,y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$ колебание разностного отношения первого порядка для f удовлетворяет условию:

$$\omega^1_f(x,y,z;h,k) = O\left(|z|^{p-1}|k|\right) \text{ при } |k| \to \infty \tag{4.1}$$

равномерно на множестве $C \times \mathbb{R}_z \times V_r$.

Покажем, что условие (4.1) для интегранта гарантирует субдифференцируемость основного вариационного функционала в $W^{1,p}[a;b]$.

Теорема 3. *Если интегрант $f \in C^{1,\,sub}_p(z)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то вариационный функционал субдифференцируем в $W^{1,p}[a;b]$ равномерно на любом компакте $C_\Delta \subset W^{1,p}$. При этом справедливо включение:*

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \left[\int\limits_a^b \underline{\nabla}_{yy'} f(x,y,y')\cdot(h,h')dx; \int\limits_a^b \overline{\nabla}_{yy'} f(x,y,y')\cdot(h,h')dx\right]. \tag{4.2}$$

Доказательство. Фиксируем компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$ и положим $C = [a;b] \times (C_\Delta \cdot [a;b])$. Пусть $y(\cdot) \in C_\Delta$, тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta < \varepsilon$ так, чтобы $\|h\|_{W^{1,p}} < \delta$ и, в частности, $|h(x)| < \delta$. Так как $f \in C^{1,\,sub}_p(z)$, используя условие (4.1) (при $k = h'$), теорему Фату и неравенство Гельдера-Минковского, проведем оценку $\omega^1_\Phi(y,h)$:

$$\omega^1_\Phi(y,h)=\overline{\lim_{t_1\to+0}}\frac{\Phi(y+t_1h)-\Phi(y)}{t_1}-\underline{\lim_{t_2\to+0}}\frac{\Phi(y+t_2h)-\Phi(y)}{t_2}=$$

$$=\overline{\lim_{t_1\to+0}}\int\limits_a^b\frac{f(x,y+t_1h,y'+t_1h')-f(x,y,y')}{t_1}dx-$$

$$-\underline{\lim_{t_2\to+0}}\int\limits_a^b\frac{f(x,y+t_2h,y'+t_2h')-f(x,y,y')}{t_2}dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_a^b\overline{\lim_{t_1,t_2\to+0}}\left[\frac{f(x,y+t_1h,y'+t_1h')-f(x,y,y')}{t_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{f(x,y+t_2h,y'+t_2h')-f(x,y,y')}{t_2}\right]dx=$$

$$=\int\limits_a^b\omega^1_f(x,y,z;h,h')dx\leqslant\int\limits_{(|h'|<\delta)}M_1(C_\Delta)dx+\int\limits_{(|h'|\geqslant\delta)}M_2(C_\Delta)|y'|^{p-1}|h'|dx\leqslant$$

$$\leqslant M_1(C_\Delta)(b-a)+M_2(C_\Delta)\int\limits_a^b|y'|^{p-1}|h'|dx\leqslant M_1(C_\Delta)(b-a)+$$

$$+M_2(C_\Delta)\|y\|^{p-1}_{W^{1,p}}\|h\|_{W^{1,p}}\leqslant M_3(C_\Delta)$$

при достаточно малых $\|h\|_{W^{1,p}}$, с учетом ограниченности $\|y\|_{W^{1,p}}$ при $y\in C_\Delta$.

Таким образом, $\omega^1_\Phi(y)\leqslant M_3(C_\Delta)$ при $y\in C_\Delta$. Следовательно, вариационный функционал $\Phi(y)$ субдифференцируем всюду в $W^{1,p}[a;b]$ равномерно на любом компакте $C_\Delta\subset W^{1,p}$. При этом справедливо включение (4.2). $\square$

5. Порядково доминантная n-кратная субдифференцируемость интегранта и n-кратная субдифференцируемость вариационного функционала в $\mathbf{W^{1,p}[a;b]}$

Дадим теперь по индукции определение колебания n-го порядка разностного отношения функции в точке.

Определение 8. *Колебанием n-го порядка ($n\in\mathbb{N}$) разностного отношения функции $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$* в точке $x\in X$ по направлению h называется величина

$$\omega^n_\varphi(x,h)=\overline{\lim_{t_1\to+0}}\frac{\varphi^{(n-1)}(x+t_1h)-\varphi^{(n-1)}(x)}{t_1}(h)^{n-1}-$$

$$-\underline{\lim_{t_2\to+0}}\frac{\varphi^{(n-1)}(x+t_2h)-\varphi^{(n-1)}(x)}{t_2}(h)^{n-1}.$$

Аналогично, очевидно, что Лемма справедлива и в случае колебания n-го порядка разностного отношения функции, т.е.

$$\text{Если } \varphi(x) = \int\limits_a^b g(x)dx, \text{ то } \omega_\varphi^n(x,h) \leqslant \int\limits_a^b \omega_g^n(x,h)dx.$$

А также, имеет место критерий n-кратной субдифференцируемости функции в терминах колебания n-го порядка:

$$\varphi \in C^{n,sub}(x) \Leftrightarrow \omega_\varphi^n(x,h) < +\infty.$$

Введем класс порядково доминантно n-раз субдифференцируемых функций.

Определение 9. C^n-субгладкая функция $f\colon \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно (по переменным x, y) n раз субдифференцируемой порядка p по z* (обозначение: $f \in C_p^{n,\,sub}(z)$ $(n \leqslant p < \infty,\ n \in \mathbb{N})$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ и для любых приращений $h \in V_r(0) \subset C$, k, соответственно, переменных y, z, при $(x,y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$ колебание n-го порядка разностного отношения для f удовлетворяет условию:

$$\omega_f^n(x,y,z;h,k) = O\left(|z|^{p-n}|k|^n\right) \text{ при } |k| \to \infty \tag{5.1}$$

равномерно на множестве $C \times \mathbb{R}_z \times V_r$.

Покажем, что условие (5.1) для интегранта гарантирует n-кратную субдифференцируемость вариационного функционала в $W^{1,p}[a;b]$.

Теорема 4. *Если интегрант $f \in C_p^{n,\,sub}(z)$ $(n \leqslant p < \infty,\ n \in \mathbb{N})$, то вариационный функционал Φ n раз субдифференцируем в $W^{1,p}[a;b]$ равномерно на любом компакте $C_\Delta \subset W^{1,p}$. При этом справедливо включение:*

$$\partial_{sub}^n \Phi(y)(h)^n \subset \left[\int\limits_a^b \underline{\nabla}_{yy'}\left(f^{(n-1)}(x,y,y')(h,h')^{n-1}\right)\cdot(h,h')dx;\right.$$
$$\left.\int\limits_a^b \overline{\nabla}_{yy'}\left(f^{(n-1)}(x,y,y')(h,h')^{n-1}\right)\cdot(h,h')dx\right]. \tag{5.2}$$

Доказательство. Фиксируем компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$ и положим $C = [a;b] \times (C_\Delta \cdot [a;b])$. Пусть $y(\cdot) \in C_\Delta$, тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta < \varepsilon$ так, чтобы $\|h\|_{W^{1,p}} < \delta$ и, в частности, $|h(x)| < \delta$. Так как $f \in C_p^{n,\,sub}(z)$, используя условие (5.1) (при $k = h'$), теорему Фату и неравенство Гельдера-Минковского, проведем оценку $\omega_\Phi^n(y,h)$:

$$\omega_\Phi^n(y,h)=\overline{\lim_{t_1\to+0}}\frac{\Phi^{(n-1)}(y+t_1h)-\Phi^{(n-1)}(y)}{t_1}(h)^{n-1}- \\ -\underline{\lim_{t_2\to+0}}\frac{\Phi^{(n-1)}(y+t_2h)-\Phi^{(n-1)}(y)}{t_2}(h)^{n-1}= \\ =\overline{\lim_{t_1\to+0}}\int\limits_a^b \frac{\left(\nabla_{yy'}f^{(n-1)}(x,y+t_1h,y'+t_1h')\cdot(h,h')\right)^{n-1}-\left(\nabla_{yy'}f^{(n-1)}(x,y,y')\cdot(h,h')\right)^{n-1}}{t_1}dx- \\ -\underline{\lim_{t_2\to+0}}\int\limits_a^b \frac{\left(\nabla_{yy'}f^{(n-1)}(x,y+t_2h,y'+t_2h')\cdot(h,h')\right)^{n-1}-\left(\nabla_{yy'}f^{(n-1)}(x,y,y')\cdot(h,h')\right)^{n-1}}{t_2}dx\leqslant \\ \leqslant\int\limits_a^b \overline{\lim_{t_1,t_2\to+0}}\left[\frac{\left(\nabla_{yy'}f^{(n-1)}(x,y+t_1h,y'+t_1h')\cdot(h,h')\right)^{n-1}-\left(\nabla_{yy'}f^{(n-1)}(x,y,y')\cdot(h,h')\right)^{n-1}}{t_1}+\right. \\ \left.+\frac{\left(\nabla_{yy'}f^{(n-1)}(x,y+t_2h,y'+t_2h')\cdot(h,h')\right)^{n-1}-\left(\nabla_{yy'}f^{(n-1)}(x,y,y')\cdot(h,h')\right)^{n-1}}{t_2}\right]dx= \\ =\int\limits_a^b\omega_f^n(x,y,z;h,h')dx\leqslant\int\limits_{(|h'|<\delta)}M_1(C_\Delta)dx+\int\limits_{(|h'|\geqslant\delta)}M_2(C_\Delta)|y'|^{p-n}|h'|^n dx\leqslant \\ \leqslant M_1(C_\Delta)(b-a)+M_2(C_\Delta)\int\limits_a^b|y'|^{p-n}|h'|^n dx\leqslant M_1(C_\Delta)(b-a)+ \\ +M_2(C_\Delta)\|y\|^{p-n}_{W^{1,p}}\|h\|^n_{W^{1,p}}\leqslant M_3(C_\Delta)$$

при достаточно малых $\|h\|_{W^{1,p}}$, с учетом ограниченности $\|y\|_{W^{1,p}}$ при $y\in C_\Delta$.

Значит, $\omega_\Phi^n(y)\leqslant M_3(C_\Delta)$ при $y\in C_\Delta$. Следовательно, вариационный функционал $\Phi(y)$ n раз субдифференцируем всюду в $W^{1,p}[a;b]$ равномерно на любом компакте $C_\Delta\subset W^{1,p}$. При этом справедливо включение (5.2). □

6. Заключение

Таким образом, для вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}[a,b]$ $(1 \leq p < \infty)$ введена последовательность порядково доминантных классов субгладких функций. Тем самым, построен аппарат, с помощью которого изучены суб-аналитические свойства вариационного функционала в $W^{1,p}[a,b]$. Данный результат позволит получить суб-аналоги "основной вариационной леммы" и уравнения Эйлера-Лагранжа в пространствах Соболева.

Список цитируемых источников

1. *Кузьменко Е. М.* Компактные экстремумы и компактно аналитические свойства вариационных функционалов в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$ над многомерной областью: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. — Симферополь, 2014.

   Kuz'menko E. M. Compact extrema and compact-analytical properties of variational functionals in the scale of Sobolev spaces $W^{1,p}$ over multidimensional domain: Diss... kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.01. — Simferopol', 2014. (in Russian).

2. *Орлов И. В., Божонок Е. В.* Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в простанстве Соболева H^1 // Учебное пособие. Симферополь: ДИАЙПИ, 2010. — 156 с.

   Orlov I. V., Bozhonok E. V. Additional chapters of modern natural science. Calculus of variations in Sobolev space H^1 // Uchebnoe posobie. Simferopol': DIAJPI, 2010. — 156 p. (in Russian).

3. *Орлов И. В., Романенко И. А.* Доминантные оценки роста интегранта и гладкость вариационных функционалов в пространствах Соболева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т.15, вып.4. — С. 422 –432.

   Orlov I. V., Romanenko I. A. Dominant integrands growth estimates and smoothness of variational functionals in Sobolev spaces. Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika 15, No.4, 422-432 (2015). (in Russian).

4. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Новые методы негладкого анализа и их приложения в векторном интегрировании и теории оптимизации // Монография. Симферополь: ДАЙПИ, 2016. — 320 с.

   Orlov I. V., Stonjakin F. S. New methods of nonsmooth analysis and their applications in vector integration and optimization theory. Simferopol': DIAJPI, 2016. (in Russian).

5. *O*rlov I.V., Khalilova Z. I. Compact subdifferentials in Banach spaces and their applications to variational functionals. Journal of Mathematical Sciences 211, No.4, 542-578 (2013).

6. *S*chmeisser H.-J. Recent developments in the theory of function spaces with dominating mixed smoothness // Proc. of the Spring School held in Prague «Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications». — Praha: Czech Academy of Sciences, Mathematical Institute, 2007. — Vol. 8. — P. 145–204.

Получена 29.10.2017