Динамические системы, 2017, том 7(35), №3, 257–274

УДК 517.929.4

Асимптотическая устойчивость положений равновесия и оценки решений в одной модели заболевания[1]

М. А. Скворцова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090. *E-mail: sm-18-nsu@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая процесс распространения заболевания. Изучается асимптотическая устойчивость положений равновесия данной системы. Установлены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности, и оценки областей притяжения асимптотически устойчивых положений равновесия. Результаты получены с использованием модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского.

Ключевые слова: модель заболевания, уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценки решений, области притяжения, модифицированный функционал Ляпунова – Красовского.

Asymptotic stability of equilibrium points and estimates of solutions in a model of disease

M. A. Skvortsova

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University,
Novosibirsk 630090.

Abstract. We consider a system of delay differential equations describing the spread of a disease. We study the asymptotic stability of equilibrium points of this system. We establish estimates of solutions characterizing the stabilization rate at infinity and estimates of attraction domains of asymptotically stable equilibrium points. The results are obtained using modified Lyapunov–Krasovskii functionals.

Keywords: a model of disease, delay differential equations, asymptotic stability, estimates of solutions, attraction domains, modified Lyapunov–Krasovskii functional.

MSC 2010: 34K20, 34K60

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Новосибирской области в рамках научного проекта № 17-41-543365.

1. Введение

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая процесс распространения заболевания [7]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = \sigma - \mu_1 x(t) - \beta x(t)z(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}y(t) = \beta x(t-\tau)z(t-\tau)e^{-\alpha\tau} - \mu_2 y(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}z(t) = \rho y(t) - \mu_3 z(t). \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $x(t)$ — численность здоровых клеток, $y(t)$ — численность зараженных клеток, которые производят вирус, $z(t)$ — численность вирусов в плазме. Параметр запаздывания τ отвечает за время, которое требуется для заражения здоровых клеток после встречи с вирусом. Величина $\beta x(t)z(t)$ отвечает за численность здоровых клеток, которые заражаются от вирусов в момент времени t, а величина $\beta x(t-\tau)z(t-\tau)e^{-\alpha\tau}$ — за численность здоровых клеток, которые заразились от вирусов в момент времени $t-\tau$ и дожили до момента времени t. Величина σ — приток здоровых клеток, ρ — коэффициент прироста вирусов за счет зараженных клеток, μ_1, μ_2, μ_3 — смертности здоровых клеток, зараженных клеток и вирусов, соответственно. Все параметры системы предполагаются положительными.

Для системы (1.1) зададим начальные условия

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad x(+0) = \varphi(0), \quad \varphi \in C([-\tau, 0]), \\ y(0) = y^0, \\ z(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad z(+0) = \psi(0), \quad \psi \in C([-\tau, 0]). \end{cases} \tag{1.2}$$

Хорошо известно, что решение начальной задачи (1.1), (1.2) существует и единственно. Также легко показать, что если

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \psi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad y^0 \geq 0, \tag{1.3}$$

то $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ будут определены при всех $t \geq 0$, причем $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$, $z(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. Более того, при неотрицательных начальных условиях все компоненты решения будут ограничены. Действительно, рассмотрим функцию $w(t) = x(t-\tau)e^{-\alpha\tau} + y(t) + \varepsilon z(t)$, где $0 < \varepsilon < \dfrac{\mu_2}{\rho}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}w(t) = \sigma e^{-\alpha\tau} - \mu_1 x(t-\tau)e^{-\alpha\tau} - \mu_2 y(t) + \varepsilon\rho y(t) - \mu_3 \varepsilon z(t) \leq \sigma e^{-\alpha\tau} - \mu w(t),$$

где $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2 - \varepsilon\rho, \mu_3\} > 0$. Отсюда следует ограниченность сверху функции $w(t)$, а значит, и ограниченность всех компонент решения.

В дальнейшем будем предполагать, что начальные данные $\varphi(t)$, $\psi(t)$, y^0 удовлетворяют условиям (1.3).

Теперь найдем положения равновесия системы (1.1):
1) если $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} \le \mu_1\mu_2\mu_3$, то в системе одно положение равновесия

$$(x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right),$$

которое соответствует состоянию здорового организма;
2) если $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$, то в системе два положения равновесия

$$(x(t), y(t), z(t)) = \left(\frac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right) \quad \text{и} \quad (x(t), y(t), z(t)) = (x_0, y_0, z_0),$$

где

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\mu_2\mu_3}{\rho\beta}e^{\alpha\tau}, \frac{(\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} - \mu_1\mu_2\mu_3)}{\mu_2\rho\beta}, \frac{(\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} - \mu_1\mu_2\mu_3)}{\mu_2\mu_3\beta}\right), \tag{1.4}$$

которые соответствуют состоянию здорового организма и состоянию зараженного организма.

Целью работы является изучение устойчивости положений равновесия системы (1.1) и получение оценок решений, характеризующих скорость сходимости к положениям равновесия.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание к работе.

2. Устойчивость положений равновесия

В этом параграфе будут указаны условия на коэффициенты системы, при которых положения равновесия являются асимптотически устойчивыми.

Данные условия легко получить, используя, например, хорошо известную теорему об устойчивости по первому приближению (см., например, [4, гл. 7, § 33]). Для нелинейной системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = A\vec{y}(t) + B\vec{y}(t-\tau) + F(\vec{y}(t), \vec{y}(t-\tau)), \tag{2.1}$$

где A и B — вещественные постоянные матрицы размера $n \times n$, $F(\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$ — вещественнозначная вектор-функция такая, что

$$\frac{\|F(\vec{y}_1, \vec{y}_2)\|}{\|(\vec{y}_1, \vec{y}_2)\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \|(\vec{y}_1, \vec{y}_2)\| \to 0,$$

справедлива следующая теорема.

Теорема (об устойчивости по первому приближению).
1) Если все корни характеристического квазимногочлена

$$\det\left(\lambda I - A - e^{-\lambda\tau}B\right) = 0$$

лежат в левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$*, то нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво.*
2) Если существует корень квазимногочлена, лежащий в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$*, то нулевое решение системы (2.1) неустойчиво.*

Применим этот результат к системе (1.1). Вначале рассмотрим положение равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$. Замена $x(t) = \dfrac{\sigma}{\mu_1} + \overline{x}(t)$ приводит к системе

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\overline{x}(t) = -\mu_1\overline{x}(t) - \beta\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1} + \overline{x}(t)\right)z(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}y(t) = \beta\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1} + \overline{x}(t-\tau)\right)z(t-\tau)e^{-\alpha\tau} - \mu_2 y(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}z(t) = \rho y(t) - \mu_3 z(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

при этом

$$A = \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 & -\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} \\ 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & \rho & -\mu_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sigma\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Характеристический квазимногочлен имеет вид

$$\det(\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}) = \det\begin{pmatrix} \lambda+\mu_1 & 0 & \dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} \\ 0 & \lambda+\mu_2 & -\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}e^{-\lambda\tau} \\ 0 & -\rho & \lambda+\mu_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+\mu_1)\left((\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3) - \frac{\sigma\rho\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}e^{-\lambda\tau}\right).$$

Легко видеть, что при условии $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} < \mu_1\mu_2\mu_3$ все корни квазимногочлена

$$(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3) - \frac{\sigma\rho\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}e^{-\lambda\tau} = 0 \tag{2.4}$$

содержатся в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$. Действительно, если существует корень λ такой, что $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, тогда

$$\mu_2\mu_3 \leq |(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)| = \left|\frac{\sigma\rho\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}e^{-\lambda\tau}\right| \leq \frac{\sigma\rho\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau},$$

что противоречит условию. Тем самым, в силу теоремы об устойчивости по первому приближению положение равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$ системы (1.1) является асимптотически устойчивым.

Если же $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$, то существует положительный корень квазимногочлена (2.4) $\lambda_* > 0$. В самом деле, рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = (\lambda + \mu_2)(\lambda + \mu_3) - \frac{\sigma\rho\beta}{\mu_1} e^{-\alpha\tau} e^{-\lambda\tau}$$

при неотрицательных $\lambda \geq 0$. Имеем

$$f(0) = \mu_2\mu_3 - \frac{\sigma\rho\beta}{\mu_1} e^{-\alpha\tau} < 0,$$

$$f(\lambda) \to +\infty \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

Поскольку $f(\lambda)$ непрерывна, то существует $\lambda_* > 0$ такое, что $f(\lambda_*) = 0$. Тем самым, в силу теоремы об устойчивости по первому приближению положение равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$ системы (1.1) является неустойчивым.

Теперь рассмотрим положение равновесия (x_0, y_0, z_0) системы (1.1), определенное в (1.4). Данное положение равновесия существует только при условии $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$, причем оно является асимптотически устойчивым. Действительно, замена

$$x(t) = x_0 + \widetilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \widetilde{y}(t), \quad z(t) = z_0 + \widetilde{z}(t)$$

приводит к системе

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\widetilde{x}(t) = -(\mu_1 + \beta z_0)\widetilde{x}(t) - \beta x_0 \widetilde{z}(t) - \beta \widetilde{x}(t)\widetilde{z}(t), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\widetilde{y}(t) = -\mu_2 \widetilde{y}(t) + \beta z_0 e^{-\alpha\tau}\widetilde{x}(t-\tau) \\ \qquad\qquad + \beta x_0 e^{-\alpha\tau}\widetilde{z}(t-\tau) + \beta e^{-\alpha\tau}\widetilde{x}(t-\tau)\widetilde{z}(t-\tau), \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\widetilde{z}(t) = \rho\widetilde{y}(t) - \mu_3\widetilde{z}(t), \end{cases} \tag{2.5}$$

матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -(\mu_1 + \beta z_0) & 0 & -\beta x_0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & \rho & -\mu_3 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta z_0 e^{-\alpha\tau} & 0 & \beta x_0 e^{-\alpha\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\dfrac{z_0}{x_0} & 0 & \dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Запишем характеристический квазимногочлен

$$\det(\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau}) = \det\begin{pmatrix} \lambda+\mu_1+\beta z_0 & 0 & \beta x_0 \\ -\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\dfrac{z_0}{x_0}e^{-\mu\tau} & \lambda+\mu_2 & -\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}e^{-\mu\tau} \\ 0 & -\rho & \lambda+\mu_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+\mu_1+\beta z_0)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)+\mu_2\mu_3\beta z_0 e^{-\lambda\tau}-\mu_2\mu_3(\lambda+\mu_1+\beta z_0)e^{-\lambda\tau}$$

$$= (\lambda+\mu_1+\beta z_0)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)-\mu_2\mu_3(\lambda+\mu_1)e^{-\lambda\tau}. \qquad (2.8)$$

Если предположить, что что существует корень λ квазимногочлена (2.8) такой, что $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, тогда

$$\mu_2\mu_3 \leq |(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)| = \left|\frac{\mu_2\mu_3(\lambda+\mu_1)e^{-\lambda\tau}}{(\lambda+\mu_1+\beta z_0)}\right| < \mu_2\mu_3.$$

Противоречие. Следовательно, положение равновесия (x_0, y_0, z_0) системы (1.1) является асимптотически устойчивым.

Итак, мы приходим к следующему утверждению.

1) Если $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} < \mu_1\mu_2\mu_3$, то положение равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$ системы (1.1) асимптотически устойчиво.

2) Если $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$, то положение равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$ системы (1.1) неустойчиво, а положение равновесия (x_0, y_0, z_0) асимптотически устойчиво.

Замечание. Отметим, что аналогичный результат был получен в работе [9] для системы, несколько отличающейся от системы (1.1).

3. Метод функционалов Ляпунова – Красовского

3.1. При изучении устойчивости важной задачей является получение оценок решений, характеризующих скорость стабилизации на бесконечности, а также нахождение оценок области притяжения, т. е. гарантированной области начальных данных, при которых имеет место сходимость. Наша следующая цель — установить такие оценки для системы (1.1).

При получении оценок скорости стабилизации решений, в частности, могут быть использованы различные способы нахождения корней квазимногочленов, однако нахождение корней с заданной точностью в большинстве случаев представляет серьезную проблему, поскольку эта задача является, вообще говоря, плохо обусловленной с точки зрения теории возмущений.

Мы будем использовать метод функционалов типа Ляпунова – Красовского, которые являются аналогами функций Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему (2.1). При исследовании асимптотической устойчивости нулевого решения данной системы Н. Н. Красовский предложил использовать функционал

$$V(t,\vec{y}) = \langle H\vec{y}(t),\vec{y}(t)\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K\vec{y}(s),\vec{y}(s)\rangle ds \tag{3.1}$$

с матрицами $H = H^* > 0$ и $K = K^* > 0$ [4, гл. 7, § 34]. Функционалы такого вида называют *функционалами Ляпунова – Красовского*. Использование функционалов Ляпунова – Красовского позволяет проводить исследования устойчивости решений без нахождения корней квазимногочленов, сводя изучение к решению хорошо обусловленных задач. Приведем результат об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.1), полученный с помощью функционала (3.1).

Теорема (Н. Н. Красовский). *Предположим, что существуют матрицы $H = H^* > 0$ и $K = K^* > 0$ такие, что выполнено матричное неравенство*

$$C = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K & HB \\ B^*H & -K \end{pmatrix} > 0. \tag{3.2}$$

Тогда нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Отметим, что использование функционалов Ляпунова – Красовского также позволяет оценивать области притяжения асимптотически устойчивых решений уравнений с запаздывающим аргументом. Однако с их помощью далеко не всегда удается получить оценки скорости стабилизации решений на бесконечности. Для получения таких оценок применяют различные модификации функционалов Ляпунова – Красовского (см., например, [2], [3], [6], [8], [10]). В частности, в работе [2] был предложен модифицированный функционал Ляпунова – Красовского следующего вида

$$V(t,\vec{y}) = \langle H\vec{y}(t),\vec{y}(t)\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)\vec{y}(s),\vec{y}(s)\rangle ds, \tag{3.3}$$

где $H = H^* > 0$ и $K(s) = K^*(s) > 0$. Отметим, что в отличие от функционала (3.1) здесь матрица K является переменной. Используя функционал (3.3), в работе [2] были получены оценки решений системы (2.1), являющиеся аналогами оценки М. Г. Крейна для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [1, гл. 1, § 4]), а также оценки области притяжения нулевого решения.

Применим метод функционалов Ляпунова – Красовского для исследования асимптотической устойчивости положений равновесия системы (1.1). Вначале мы покажем, как можно построить такие функционалы, а затем на их основе получим оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, и оценки областей притяжения.

3.2. Вначале предположим, что выполнено условие $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} < \mu_1\mu_2\mu_3$. В этом случае у системы (1.1) существует только одно положение равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$, причем оно является асимптотически устойчивым. В силу сказанного выше для построения функционала Ляпунова – Красовского достаточно построить матрицы $H = H^* > 0$ и $K = K^* > 0$, удовлетворяющие матричному неравенству (3.2), в котором матрицы A и B имеют вид (2.3):

$$A = \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 & -\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} \\ 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & \rho & -\mu_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sigma\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что при выполнении условий $H = H^* > 0$ и $K = K^* > 0$ матричное неравенство (3.2) эквивалентно неравенству

$$Q = -(HA + A^*H + K + HBK^{-1}B^*H) > 0$$

(см., например, [3, стр. 1029]). Положим

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, \quad h_j > 0, \quad k_j > 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

и проверим выполнение неравенства $Q > 0$. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 2h_1\mu_1 - k_1 & 0 & h_1\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} \\ 0 & 2h_2\mu_2 - k_2 - \dfrac{h_2^2}{k_3}\left(\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}\right)^2 & -h_3\rho \\ h_1\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} & -h_3\rho & 2h_3\mu_3 - k_3 \end{pmatrix}.$$

Полагая

$$h_3 = 1, \quad k_3 = \mu_3, \quad h_2 = \mu_2\mu_3\left(\frac{\sigma\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}\right)^{-2},$$

будем иметь

$$Q = \begin{pmatrix} 2h_1\mu_1 - k_1 & 0 & h_1\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} \\ 0 & \mu_2^2\mu_3\left(\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1}e^{-\alpha\tau}\right)^{-2} - k_2 & -\rho \\ h_1\dfrac{\sigma\beta}{\mu_1} & -\rho & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу Q_0, которая получается из матрицы Q, если положить $k_1 = k_2 = 0$. Найдем $h_1 > 0$, при которых матрица Q_0 будет положительно определенной. В нашем случае условие $Q_0 > 0$ эквивалентно условию $\det Q_0 > 0$. Тогда, если выбрать

$$0 < h_1 < \frac{2}{\mu_1\mu_2^2\mu_3}\left(\frac{\sigma\beta}{\mu_1}\right)^{-2}\Big((\mu_1\mu_2\mu_3)^2 - (\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau})^2\Big),$$

матрица Q_0 будет положительно определенной. Следовательно, при достаточно малых k_1 и k_2 также будет выполнено $Q > 0$.

3.3. Теперь рассмотрим случай $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$. В этом случае положение равновесия (x_0, y_0, z_0) является асимптотически устойчивым. Построим матрицы $H = H^* > 0$ и $K = K^* > 0$ удовлетворяющие условию (3.2), в котором матрицы A и B имеют вид (2.6) и (2.7):

$$A = \begin{pmatrix} -(\mu_1 + \beta z_0) & 0 & -\beta x_0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & \rho & -\mu_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\dfrac{z_0}{x_0} & 0 & \dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & h_{13} \\ 0 & h_{22} & 0 \\ h_{13} & 0 & h_{33} \end{pmatrix}, \quad h_{jj} > 0, \quad h_{11}h_{33} - h_{13}^2 > 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{3.4}$$

$$K = B^*B + M, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad m_j > 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

будем иметь

$$C = \begin{pmatrix} -(HA + A^*H + B^*B) - M & -HB \\ -B^*H & B^*B + M \end{pmatrix}.$$

Заметим, что из явного вида матриц B и H имеет место равенство $HB = H_{22}B$, где

$$H_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Следовательно,

$$C = \begin{pmatrix} -(HA + A^*H + B^*B + H_{22}^2) - M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} H_{22}^2 & -H_{22}B \\ -B^*H_{22} & B^*B \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} L - M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

где

$$L = -(HA + A^*H + B^*B + H_{22}^2) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Тем самым, если мы покажем, что матрица L является положительно определенной, то при достаточно малых m_1, m_2, m_3 матрица C также будет положительно определена. Имеем

$$\begin{cases} l_{11} = 2h_{11}(\mu_1 + \beta z_0) - \left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\dfrac{z_0}{x_0}\right)^2, \\ l_{12} = -h_{13}\rho, \\ l_{22} = 2h_{22}\mu_2 - h_{22}^2, \\ l_{13} = h_{11}\beta x_0 + h_{13}(\mu_1 + \mu_3 + \beta z_0) - \left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2 \dfrac{z_0}{x_0}, \\ l_{23} = -h_{33}\rho, \\ l_{33} = 2h_{33}\mu_3 + 2h_{13}\beta x_0 - \left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2. \end{cases}$$

Положим

$$\begin{cases} h_{11} = \dfrac{1}{\beta x_0}\left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2 \dfrac{z_0}{x_0}, \\ h_{22} = \mu_2, \\ h_{33} = \dfrac{1}{\mu_3}\left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2, \end{cases} \tag{3.7}$$

тогда

$$\begin{cases} l_{11} = \dfrac{1}{\beta x_0}\left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2 \dfrac{z_0}{x_0}(2\mu_1 + \beta z_0), \\ l_{12} = -h_{13}\rho, \\ l_{22} = \mu_2^2, \\ l_{13} = h_{13}(\mu_1 + \mu_3 + \beta z_0), \\ l_{23} = -\mu_2\left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right), \\ l_{33} = 2h_{13}\beta x_0 + \left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2. \end{cases}$$

Согласно критерию Сильвестра, условие $L > 0$ эквивалентно следующим трем условиям:

$$\begin{cases} l_{33} > 0, \\ l_{22}l_{33} - l_{23}^2 > 0, \\ l_{11}(l_{22}l_{33} - l_{23}^2) + 2l_{12}l_{13}l_{23} - l_{22}l_{13}^2 - l_{33}l_{12}^2 > 0. \end{cases}$$

В нашем случае эти условия эквивалентны неравенствам

$$\begin{cases} h_{13} > 0, \\ 2h_{13}^2\rho^2\beta x_0 + h_{13}\mu_2^2(\mu_1 + \beta z_0)^2 < 2\mu_2^2\left(\dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\right)^2 \dfrac{z_0}{x_0}(2\mu_1 + \beta z_0). \end{cases} \tag{3.8}$$

Второе неравенство выполняется, если h_{13} достаточно мало.

Итак, мы получили, что $L > 0$. Заметим, что отсюда, в частности, следует, что $H > 0$. Действительно, поскольку все собственные значения матрицы A содержатся в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$ и

$$HA + A^*H \le -L < 0,$$

то H является решением матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -D, \quad D = D^* > 0.$$

Хорошо известно, что в этом случае матрица H является положительно определенной.

4. Оценки скорости сходимости к положению равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$

В этом параграфе мы будем рассматривать случай $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} < \mu_1\mu_2\mu_3$, когда у системы (1.1) существует только одно положение равновесия $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$, и оно является асимптотически устойчивым. Мы получим оценки решений системы (1.1), характеризующие скорость сходимости к данному положению равновесия. В частности, из этих оценок будет вытекать глобальная асимптотическая устойчивость.

Вначале заметим, что если $(x(t), y(t), z(t))$ — решение системы (1.1) с начальными условиями (1.2)–(1.3), то первая компонента решения $x(t)$ ограничена сверху решением уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sigma - \mu_1 x(t)$$

с теми же самыми начальными условиями. Для этого уравнения хорошо известно, что все решения стремятся к решению $x(t) = \dfrac{\sigma}{\mu_1}$. При этом для любого $\theta > 0$ существует $t_0 \ge 0$ такое, что $0 \le x(t) \le \dfrac{\sigma}{\mu_1} + \theta$ при всех $t \ge t_0$. Следовательно, это верно и для первой компоненты решения $x(t)$ системы (1.1). Не ограничивая общности, можно считать, что $t_0 = 0$.

Введем обозначения. Пусть $\theta > 0$ и $k > 0$ такие, что выполнено неравенство

$$\rho\beta e^{-\alpha\tau}\left(\frac{\sigma}{\mu_1} + \theta\right) < e^{-k\tau/2}\mu_2\mu_3. \tag{4.1}$$

Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t, y, z) = \overline{h}_2 y^2(t) + z^2(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} \mu_3 e^{-k(t-s)} z^2(s)ds, \tag{4.2}$$

где

$$\overline{h}_2 = e^{-k\tau}\mu_2\mu_3 \left(\beta e^{-\alpha\tau}\left(\frac{\sigma}{\mu_1}+\theta\right)\right)^{-2}.$$

Положим

$$r = \frac{1}{2}(\mu_2+\mu_3) - \sqrt{\frac{1}{4}(\mu_2-\mu_3)^2 + \frac{e^{k\tau}}{\mu_2\mu_3}\left(\rho\beta e^{-\alpha\tau}\left(\frac{\sigma}{\mu_1}+\theta\right)\right)^2}, \tag{4.3}$$

$$\delta = \min\{r, k\}. \tag{4.4}$$

Заметим, что в силу неравенства (4.1) величина r строго положительна.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} < \mu_1\mu_2\mu_3$. Тогда для решения системы (1.1) с начальными данными (1.2)–(1.3), удовлетворяющими условию*

$$0 \le \varphi(t) \le \frac{\sigma}{\mu_1} + \theta, \quad t \in [-\tau, 0], \tag{4.5}$$

справедливы оценки

$$\left|x(t) - \frac{\sigma}{\mu_1}\right| \le \left|\varphi(0) - \frac{\sigma}{\mu_1}\right| e^{-\mu_1 t} + \frac{\sigma\beta}{\mu_1}\sqrt{V(0, y^0, \psi)} \int\limits_0^t e^{-\mu_1(t-s)} e^{-\delta s/2} ds, \tag{4.6}$$

$$\overline{h}_2 y^2(t) + z^2(t) \le V(t, y, z) \le V(0, y^0, \psi) e^{-\delta t}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Вначале докажем оценку (4.7). Рассмотрим функционал (4.2) и продифференцируем его вдоль решений системы (1.1):

$$\frac{d}{dt}V(t, y, z) = 2\overline{h}_2 y(t)\left(\beta x(t-\tau)z(t-\tau)e^{-\alpha\tau} - \mu_2 y(t)\right)$$

$$+2z(t)(\rho y(t) - \mu_3 z(t)) + \mu_3 z^2(t) - \mu_3 e^{-k\tau} z^2(t-\tau) - k \int\limits_{t-\tau}^t \mu_3 e^{-k(t-s)} z^2(s) ds.$$

В силу условия (4.5), учитывая рассуждения, проведенные в начале параграфа, получим $0 \le x(t-\tau) \le \dfrac{\sigma}{\mu_1} + \theta$ при всех $t \ge 0$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}V(t, y, z) \le 2\overline{h}_2 \beta e^{-\alpha\tau}\left(\frac{\sigma}{\mu_1}+\theta\right) y(t) z(t-\tau) - 2\overline{h}_2\mu_2 y^2(t)$$

$$+2\rho y(t) z(t) - \mu_3 z^2(t) - \mu_3 e^{-k\tau} z^2(t-\tau) - k \int\limits_{t-\tau}^t \mu_3 e^{-k(t-s)} z^2(s) ds.$$

Отсюда, используя неравенство

$$2\overline{h}_2\beta e^{-\alpha\tau}\left(\frac{\sigma}{\mu_1}+\theta\right)y(t)z(t-\tau)-\mu_3e^{-k\tau}z^2(t-\tau)$$

$$\leq\frac{\overline{h}_2^2e^{k\tau}}{\mu_3}\left(\beta e^{-\alpha\tau}\left(\frac{\sigma}{\mu_1}+\theta\right)\right)^2y^2(t)=\overline{h}_2\mu_2y^2(t),$$

будем иметь

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z)\leq-\overline{h}_2\mu_2y^2(t)+2\rho y(t)z(t)-\mu_3z^2(t)-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\mu_3e^{-k(t-s)}z^2(s)ds.$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z)\leq-r(\overline{h}_2y^2(t)+z^2(t))-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\mu_3e^{-k(t-s)}z^2(s)ds,$$

где r определено в (4.3). Далее, учитывая обозначение (4.4) величины δ и определение (4.2) функционала $V(t,y,z)$, получим оценку

$$\frac{d}{dt}V(t,y,z)\leq-\delta V(t,y,z),$$

откуда нетрудно установить неравенство (4.7).

Теперь докажем оценку (4.6). Из первого уравнения системы (2.2) нетрудно получить

$$\overline{x}(t)=e^{-\mu_1t}\exp\left(-\int\limits_0^t\beta z(\xi)d\xi\right)\overline{x}(0)-\frac{\sigma}{\mu_1}\int\limits_0^t e^{-\mu_1(t-s)}\exp\left(-\int\limits_s^t\beta z(\xi)d\xi\right)\beta z(s)ds,$$

где $\overline{x}(t)=x(t)-\dfrac{\sigma}{\mu_1}$. Следовательно,

$$\left|x(t)-\frac{\sigma}{\mu_1}\right|\leq e^{-\mu_1t}\left|x(0)-\frac{\sigma}{\mu_1}\right|+\frac{\sigma}{\mu_1}\int\limits_0^t e^{-\mu_1(t-s)}\beta z(s)ds.$$

В силу оценки (4.7) имеем

$$z(t)\leq\sqrt{V(0,y^0,\psi)}e^{-\delta t/2}.$$

Отсюда непосредственно вытекает (4.6).

Теорема доказана. □

Следствие. *Пусть* $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} < \mu_1\mu_2\mu_3$. *Тогда положение равновесия* $\left(\dfrac{\sigma}{\mu_1}, 0, 0\right)$ *системы (1.1) является глобально асимптотически устойчивым.*

Замечание. Отметим, что глобальная асимптотическая устойчивость положения равновесия, соответствующего состоянию здорового организма, также была доказана в работе [9] для несколько видоизмененной системы (1.1).

5. Оценки скорости сходимости к положению равновесия (x_0, y_0, z_0)

В этом параграфе мы рассмотрим случай $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$, когда положение равновесия (x_0, y_0, z_0) является асимптотически устойчивым. Мы получим оценки решений системы (1.1), характеризующие скорость сходимости к данному положению равновесия, и оценки области притяжения.

Как отмечалось выше, замена

$$x(t) = x_0 + \widetilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \widetilde{y}(t), \quad z(t) = z_0 + \widetilde{z}(t)$$

приводит к системе (2.5), которую кратко можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = A\vec{y}(t) + B\vec{y}(t-\tau) + F(\vec{y}(t)) + G(\vec{y}(t-\tau)), \tag{5.1}$$

где матрицы A и B определены в (2.6) и (2.7):

$$A = \begin{pmatrix} -(\mu_1 + \beta z_0) & 0 & -\beta x_0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & \rho & -\mu_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho}\dfrac{z_0}{x_0} & 0 & \dfrac{\mu_2\mu_3}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \\ \widetilde{z}(t) \end{pmatrix},$$

$$F(\vec{y}(t)) = -\begin{pmatrix} \beta\widetilde{x}(t)\widetilde{z}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G(\vec{y}(t-\tau)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta e^{-\alpha\tau}\widetilde{x}(t-\tau)\widetilde{z}(t-\tau) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем начальные условия для системы (5.1) в виде

$$\vec{y}(t) = \vec{\varphi}(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad \vec{y}(+0) = \vec{\varphi}(0).$$

Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t, \vec{y}) = \langle H\vec{y}(t), \vec{y}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)\vec{y}(s), \vec{y}(s)\rangle\, ds, \tag{5.2}$$

где матрица H имеет вид (3.4), и ее элементы определены в (3.7)–(3.8), а матрица $K(s)$ имеет вид

$$K(s) = e^{-ks}(B^*B + M_3), \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\theta e^{k\tau/2} \end{pmatrix},$$

при этом величины $k > 0$ и $\theta > 0$ такие, что выполнено неравенство

$$\widetilde{l} = l_{\min} - h_{22}^2(e^{k\tau} - 1) - h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\theta e^{k\tau/2} > 0, \tag{5.3}$$

$l_{\min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы L (см. формулу (3.6)). Обозначим

$$q = \beta\frac{\sqrt{h_{11}}}{h_{\min}}, \quad \varepsilon = \min\left\{\frac{\widetilde{l}}{\|H\|}, k\right\}, \tag{5.4}$$

где $h_{\min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H, $\|H\|$ — спектральная норма матрицы H.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\sigma\rho\beta e^{-\alpha\tau} > \mu_1\mu_2\mu_3$. Тогда для решения системы (5.1) с начальными данными, удовлетворяющими условиям*

$$\max_{t\in[-\tau,0]}|\widetilde{x}(t)| \le \theta, \quad \sqrt{V(0,\vec{\varphi})} < \frac{\varepsilon}{q}, \quad \frac{1}{\sqrt{h_{\min}}}\,\frac{\sqrt{V(0,\vec{\varphi})}}{\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\,\sqrt{V(0,\vec{\varphi})}\right)} \le \theta, \tag{5.5}$$

справедлива оценка

$$\|\vec{y}(t)\|^2 \le \frac{1}{h_{\min}}V(t,\vec{y}) \le \frac{1}{h_{\min}}\,\frac{V(0,\vec{\varphi})}{\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\,\sqrt{V(0,\vec{\varphi})}\right)^2}\,e^{-\varepsilon t}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Рассмотрим функционал (5.2) и продифференцируем его вдоль решений системы (5.1):

$$\frac{d}{dt}V(t,\vec{y}) = \langle H(A\vec{y}(t) + B\vec{y}(t-\tau) + F(\vec{y}(t)) + G(\vec{y}(t-\tau))), \vec{y}(t)\rangle$$

$$+ \langle H\vec{y}(t), (A\vec{y}(t) + B\vec{y}(t-\tau) + F(\vec{y}(t)) + G(\vec{y}(t-\tau)))\rangle + \langle (B^*B + M_3)\vec{y}(t), \vec{y}(t)\rangle$$

$$-e^{-k\tau}\langle (B^*B + M_3)\vec{y}(t-\tau), \vec{y}(t-\tau)\rangle - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)\vec{y}(s), \vec{y}(s)\rangle\,ds$$

$$= -\left\langle \begin{pmatrix} HA + A^*H + B^*B & HB \\ B^*H & -e^{-k\tau}B^*B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{y}(t) \\ \vec{y}(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{y}(t) \\ \vec{y}(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+2\langle H\vec{y}(t), F(\vec{y}(t))\rangle + \langle M_3\vec{y}(t), \vec{y}(t)\rangle - e^{-k\tau}\langle M_3\vec{y}(t-\tau), \vec{y}(t-\tau)\rangle$$

$$+2\left\langle H\vec{y}(t), G(\vec{y}(t-\tau))\right\rangle - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle K(t-s)\vec{y}(s), \vec{y}(s)\right\rangle ds.$$

Обозначим

$$S_1 = -\left\langle \begin{pmatrix} HA + A^*H + B^*B & HB \\ B^*H & -e^{-k\tau}B^*B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{y}(t) \\ \vec{y}(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{y}(t) \\ \vec{y}(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$S_2 = 2\left\langle H\vec{y}(t), F(\vec{y}(t))\right\rangle,$$

$$S_3 = \left\langle M_3\vec{y}(t), \vec{y}(t)\right\rangle - e^{-k\tau}\left\langle M_3\vec{y}(t-\tau), \vec{y}(t-\tau)\right\rangle + 2\left\langle H\vec{y}(t), G(\vec{y}(t-\tau))\right\rangle,$$

$$S_4 = -k\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle K(t-s)\vec{y}(s), \vec{y}(s)\right\rangle ds.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t,\vec{y}) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \tag{5.7}$$

Оценим S_1. Как было указано выше, $HB = H_{22}B$, где H_{22} определено в (3.5). Следовательно,

$$S_1 \le -\left\langle \begin{pmatrix} HA + A^*H + B^*B + e^{k\tau}H_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{y}(t) \\ \vec{y}(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{y}(t) \\ \vec{y}(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= -\left\langle L\vec{y}(t), \vec{y}(t)\right\rangle + (e^{k\tau}-1)\left\langle H_{22}^2\vec{y}(t), \vec{y}(t)\right\rangle,$$

где $L > 0$ определено в (3.6). Отсюда вытекает неравенство

$$S_1 \le -\left(l_{\min} - h_{22}^2(e^{k\tau}-1)\right)\|\vec{y}(t)\|^2. \tag{5.8}$$

Оценим S_2. Имеем

$$S_2 = 2\left\langle H\vec{y}(t), F(\vec{y}(t))\right\rangle = 2\left\langle H^{1/2}\vec{y}(t), H^{1/2}F(\vec{y}(t))\right\rangle$$

$$\le 2\sqrt{\left\langle H\vec{y}(t), \vec{y}(t)\right\rangle}\sqrt{\left\langle HF(\vec{y}(t)), F(\vec{y}(t))\right\rangle} \le 2\,V^{1/2}(t,\vec{y})\sqrt{\left\langle HF(\vec{y}(t)), F(\vec{y}(t))\right\rangle}.$$

Учитывая явный вид вектор-функции $F(\vec{y}(t))$, получим

$$S_2 \le 2\,V^{1/2}(t,\vec{y})\sqrt{h_{11}}\,|\beta\widetilde{x}(t)\widetilde{z}(t)|$$

$$\le \beta\sqrt{h_{11}}\,V^{1/2}(t,\vec{y})\left(\widetilde{x}^2(t) + \widetilde{z}^2(t)\right) \le \beta\frac{\sqrt{h_{11}}}{h_{\min}}\,V^{3/2}(t,\vec{y}) = qV^{3/2}(t,\vec{y}), \tag{5.9}$$

где q определено в (5.4).

Оценим S_3. Имеем

$$S_3 = \left\langle M_3\vec{y}(t), \vec{y}(t)\right\rangle - e^{-k\tau}\left\langle M_3\vec{y}(t-\tau), \vec{y}(t-\tau)\right\rangle + 2\left\langle H\vec{y}(t), G(\vec{y}(t-\tau))\right\rangle$$

$$= h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\Big(\theta e^{k\tau/2}\widetilde{z}^2(t) - \theta e^{-k\tau/2}\widetilde{z}^2(t-\tau) + 2\widetilde{x}(t-\tau)\widetilde{z}(t-\tau)\widetilde{y}(t)\Big).$$

Отсюда нетрудно получить

$$S_3 \le h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\theta e^{k\tau/2}\left(\widetilde{z}^2(t) + \left(\frac{\widetilde{x}(t-\tau)}{\theta}\right)^2 \widetilde{y}^2(t)\right). \tag{5.10}$$

Вначале предположим, что $t \in [0,\tau]$. В этом случае из условий (5.5) следует, что $|\widetilde{x}(t-\tau)| \le \theta$. Тогда

$$S_3 \le h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\theta e^{k\tau/2}(\widetilde{y}^2(t) + \widetilde{z}^2(t)) \le h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\theta e^{k\tau/2}\|\vec{y}(t)\|^2. \tag{5.11}$$

Итак, используя оценки (5.8), (5.9), (5.11), из (5.7) при $t \in [0,\tau]$ получим

$$\frac{d}{dt}V(t,\vec{y}) \le -\Big(l_{\min} - h_{22}^2(e^{k\tau}-1) - h_{22}\beta e^{-\alpha\tau}\theta e^{k\tau/2}\Big)\|\vec{y}(t)\|^2$$

$$+qV^{3/2}(t,\vec{y}) - k\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)\vec{y}(s), \vec{y}(s)\rangle\, ds$$

$$= -\widetilde{l}\|\vec{y}(t)\|^2 + qV^{3/2}(t,\vec{y}) - k\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)\vec{y}(s), \vec{y}(s)\rangle\, ds,$$

где $\widetilde{l}$ определено в (5.3). Учитывая обозначение (5.4) величины ε и определение (5.2) функционала $V(t,\vec{y})$, будем иметь

$$\frac{d}{dt}V(t,\vec{y}) \le -\varepsilon V(t,\vec{y}) + qV^{3/2}(t,\vec{y}).$$

Используя неравенство Гронуолла (см., например, [5]), отсюда нетрудно получить

$$\|\vec{y}(t)\|^2 \le \frac{1}{h_{\min}}V(t,\vec{y}) \le \frac{1}{h_{\min}}\,\frac{V(0,\vec{\varphi})}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\,\sqrt{V(0,\vec{\varphi})}\right)^2}\, e^{-\varepsilon t},$$

и при $t \in [0,\tau]$ оценка (5.6) доказана.

Теперь рассмотрим случай $t \in [\tau, 2\tau]$. В силу условия (5.5) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{h_{\min}}}\,\frac{\sqrt{V(0,\vec{\varphi})}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\,\sqrt{V(0,\vec{\varphi})}\right)} \le \theta,$$

а значит, учитывая оценку (5.6), получим неравенство $|\widetilde{x}(t-\tau)| \le \theta$. Отсюда и из неравенства (5.10) следует (5.11). Далее, проводя те же самые рассуждения, что и в случае $t \in [0,\tau]$, установим неравенство (5.6) при $t \in [\tau, 2\tau]$.

Наконец, применяя метод математической индукции, нетрудно получить оценку (5.6) при $t \in [m\tau, (m+1)\tau]$, $m \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана. □

Список цитируемых источников

1. *Демиденко Г. В.* Матричные уравнения. Учебное пособие. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2009.

   Demidenko G. V. Matrix equations. Textbook. Novosibirsk: Publishing Office of the Novosibirsk State University, 2009. (in Russian)

2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. — 2005. — Т. 5, № 3. — С. 20–28.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. Asymptotic properties of solutions to delay differential equations. Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika, Mekhanika, Informatika, 5, No. 3, 20–28 (2005). (in Russian)

3. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 5. — С. 1025–1040.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. Siberian Math. J. 48, No. 5, 824–836 (2007).

4. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1959.

   Krasovskii N. N. Stability of Motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay. Stanford: Stanford University Press, 1963.

5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1970.

   Hartman Ph. Ordinary differential equations. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, 1964.

6. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 8. — С. 1137–1140.

   Khusainov D. Ya., Ivanov A. F., Kozhametov A. T. Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay. Differential Equations 41, No. 8, 1196–1200 (2005).

7. *Herz A. V. M., Bonhoeffer S., Anderson R. M., May R. M., Nowak M. A.* Viral dynamics in vivo: limitations on estimates of intercellular delay and virus decay. Proc. Natl. Acad. Sci. USA (Medical Sciences), 93, 7247–7251 (1996).

8. *Kharitonov V. L., Hinrichsen D.* Exponential estimates for time delay systems. Systems Control Lett., 53, No. 5, 395–405 (2004).

9. *Li D., Ma W.* Asymptotic properties of a HIV-1 infection model with time delay. J. Math. Anal. Appl., 335, No. 1, 683–691 (2007).

10. *Mondié S., Kharitonov V. L.* Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach. IEEE Trans. Automat. Control, 50, No. 2, 268–273 (2005).

Получена 01.07.2017