

УДК 517.97:517.98

## Локальная асимметрия и локальный эксцесс негладких распределений с точки зрения симметрического анализа

**И. В. Орлов, И. В. Баран**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. *E-mail: igor\_v\_orlov@mail.ru, matemain@mail.ru*

**Аннотация.** В работе рассмотрены некоторые приложения теории симметрических дифференциалов и симметрических субдифференциалов в теории вероятностей и в теории экстремальных задач. Понятие оптимальности направления мы связываем с локальными аналогами известных в теории вероятностей понятий асимметрии и эксцесса. Эти характеристики оказываются тесно связанными с симметрическими дифференциалами либо, при соответствующем обобщении, с субдифференциалами, что позволяет применить для исследования подобных экстремальных задач симметрический анализ.

**Ключевые слова:** симметрическая производная, симметрический субдифференциал, локальная асимметрия, локальный эксцесс.

## Local asymmetry and local kurtosis of nonsmooth distributions from the view of symmetric analysis

**I. V. Orlov, I. V. Baran**

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

### **Abstract.**

In the last decade, the theory of so-called compact subdifferentials has been constructed and found significant applications in the works of the first author and his students, the main point of which is the use for the mappings in Banach spaces as subdifferentials of many-valued sublinear and polysublinear operators with compact convex values. In our papers we consider the question of constructing the foundations of the theory of symmetric compact subdifferentials of mappings in Banach spaces.

Symmetric local characteristics of maps, from their very appearance, take a special position in the material analysis. However, the symmetric differential calculus, in contrast to the classical calculus, has not been generalized to the infinite-dimensional case — an analog of the Gateau–Hadamard–Frechet calculus was not constructed for the symmetric case.

In the applied plan, we associate the feasibility of constructing a symmetric version of the subdifferential calculus with the following capabilities of applications that are implemented in this paper.

Earlier, in our works, the problem of finding the direction of the optimal transition (in diameter) through the minimum point was formulated and investigated. It turned out that to study such a problem it is convenient to use symmetric rather than centered characteristics (symmetric differentials, or, in the more general case, symmetric subdifferentials of the first and second order).

This possibility is associated with the application of symmetric characteristics in extremal problems «at the second stage»: for the extremum point already found, determine the optimal (in

a certain sense) linear direction of motion to the extremum point. In this connection, we should mention two known approaches in the nonsmooth case. The first of these is also known as the «steepest descent method» (along the radius) to the minimum point, and in the computational plan is close to the gradient method of finding the minimum. The second approach, known as the «Gelfand ravine method», is connected with the passage through the extremum point along the diameter.

In our work, the concept of optimality of direction we associate with local analogues of the concepts of asymmetry and kurtosis known in probability theory. These characteristics turn out to be closely related to symmetric differentials, or, with appropriate generalization, to subdifferentials, which allows us to apply symmetric analysis to study such extremal problems.

**Keywords:** symmetric derivatives, symmetric subdifferential, local asymmetry, local kurtosis.

**MSC 2010:** 46G05, 49J52

## Введение

В последнее десятилетие в работах первого автора и его учеников (см. [10], [11], [18]) была построена и нашла значимые применения теория так называемых компактных субдифференциалов, основным моментом которой является использование для отображений в банаховых пространствах в качестве субдифференциалов многозначных сублинейных и полисублинейных операторов с компактными выпуклыми значениями. В наших работах [1], [9] рассмотрен вопрос о построении основ теории симметрических компактных субдифференциалов отображений в банаховых пространствах.

Симметрические локальные характеристики отображений, с самого их возникновения, занимают особую позицию в вещественном анализе. Однако симметрическое дифференциальное исчисление, в отличие от классического не получило обобщения на бесконечномерный случай — аналог исчисления Гато–Адамара–Фреше для симметрического случая не был построен.

В работе [1] была сформулирована и исследована задача поиска направления оптимального перехода (по диаметру) через точку минимума. Оказалось, что для исследования такой задачи удобно использовать симметрические, а не обычные характеристики (симметрические дифференциалы, либо, в более общем случае, симметрические субдифференциалы первого и второго порядка).

Напомним определение симметрических производных первого и второго порядков ([2], [12]) как пределов соответствующих разностных отношений:

$$f^{[1]}(y) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta^1 f(y, h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(y+h) - f(y-h)}{2h},$$

$$f^{[2]}(y) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta^2 f(y, 2h)}{4h^2} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(y+2h) - 2f(y) + f(y-2h)}{4h^2}.$$

В прикладном плане целесообразность построения симметрической версии субдифференциального исчисления мы связываем со следующей возможностью приложения, которая реализуется в данной работе.

Эта возможность связана с применением симметрических характеристик в экстремальных задачах «на втором этапе»: для уже найденной точки экстремума

определить оптимальное (в некотором смысле) линейное направление движения к точке экстремума. В этой связи следует упомянуть о двух известных подходах в негладком случае. Первый из них (метод Демьянова–Рубинова) известен также как «метод наискорейшего спуска» (по радиусу) ([5], [6]) к точке минимума, и в вычислительном плане близок к градиентному методу поиска минимума. Второй подход, известный как «метод оврагов Гельфанда» ([3], [4]), связан с переходом через точку экстремума по диаметру.

В нашей работе понятие оптимальности направления мы связываем с локальными аналогами известных в теории вероятностей понятий асимметрии и эксцесса. Эти характеристики оказываются тесно связанными с симметрическими дифференциалами либо, при соответствующем обобщении, с субдифференциалами, что позволяет применить для исследования подобных экстремальных задач симметрический анализ.

Работа состоит из трех разделов. В первом разделе исследуется возможность применения симметрических дифференцируемых и субдифференцируемых характеристик к негладким распределениям вероятностей случайной величины. Как известно, классическая теория вероятностей широко использует понятия асимметрии и эксцесса случайной величины (*skewness*), в основном, с «одновершинной» плотностью распределения. Однако, в негладком случае с этой целью предпочтительнее ввести локальные характеристики, описывающие «скос» и «островершинность» распределения вблизи точки максимума (пример 1).

Предлагаемый нами метод опирается на введенные ниже понятия локальной асимметрии и локального эксцесса плотности распределения в точке максимума (определение 1). При наличии соответствующей симметрической дифференцируемости, эти характеристики выражаются через симметрические производные первого либо второго порядка, соответственно (теорема 1). В примере 2 эта техника применяется к «склежке» двух различных нормальных распределений.

В случае набора случайных величин (случайного вектора) во втором разделе, мы вводим понятия локальной асимметрии и локального эксцесса по заданному направлению. Это позволяет поставить также вопрос о поиске оптимального направления, минимизирующего (по модулю) локальную асимметрию, либо локальный эксцесс. В примере 3 эта техника применяется к «склежке» континуального набора радиальных нормальных распределений.

В заключительном разделе мы обобщаем понятия локальной асимметрии и локального эксцесса на общий случай функционала в банаховом пространстве, достигающего локального экстремума в заданной точке (определение 3). Здесь вопрос о выборе оптимального направления, вдоль которого минимизируются, соответственно, локальная асимметрия либо локальный эксцесс, выступает на первый план.

## 1. Локальная асимметрия и локальный эксцесс негладких распределений, их минимизация

Любое распределение вероятностей случайной величины можно изобразить в виде кривой, воспроизводящей основные особенности данного распределения. Выяснение общего характера распределения предполагает, в частности, и вычисление показателей асимметрии и эксцесса. При анализе распределения значительный интерес представляет оценка отклонения данного распределения от симметричного. В некоторых случаях распределения могут быть асимметричными, или скошенными.

Асимметрия характеризует степень смещения относительно среднего значения по величине и направлению. Эксцесс характеризует степень концентрации вокруг среднего значения и является своеобразной мерой крутости кривой.

Как известно, классические понятия асимметрии и эксцесса случайной величины в теории вероятностей (см. [7], [8], [13] – [17], [19]) связаны с центральными моментами, соответственно, третьего и четвертого порядков, и используются, как правило, для сравнения поведения «одновершинной» плотности распределения случайной величины в точке максимума с плотностью соответствующего нормального распределения случайной величины:

$$A_S(f) = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^3 f(x) dx, \quad E_X(f) = \frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^4 f(x) dx - 3, \quad (1.1)$$

где  $M(\xi)$  – математическое ожидание случайной величины  $\xi$ ,  $\sigma$  – среднее квадратичное отклонение данной случайной величины. При этом знак  $A_S(f)$  характеризует «скос вправо» ( $A_S(f) > 0$ ) либо «скос влево» ( $A_S(f) < 0$ ) данного распределения в сравнении с нормальным, а знак  $E_X(f)$  характеризует «островершинность» ( $E_X(f) > 0$ ) либо «пологость» ( $E_X(f) < 0$ ) распределения в сравнении с соответствующим нормальным:

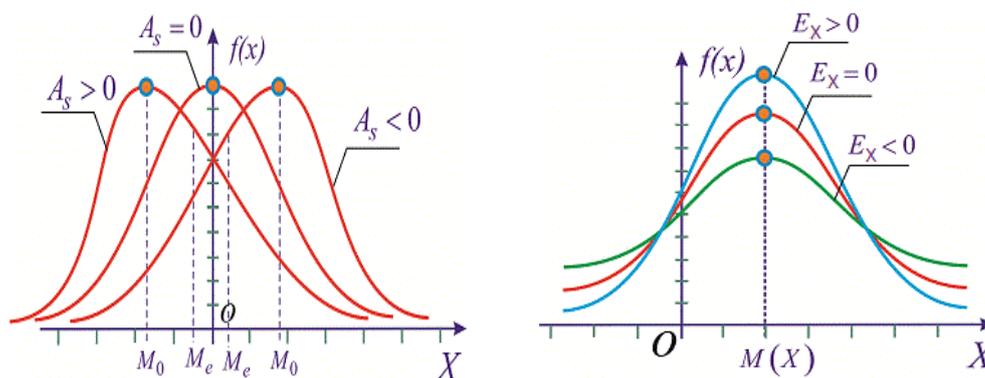


Рис. 1.

Обратим внимание на следующий факт: *глобальные характеристики (1.1) используются для описания локального поведения  $f(x)$  вблизи точки максимума.*

Такая связь, приемлемая в гладком случае, уже не оправдана в негладком случае, как показывает следующий пример «склейки» двух распределений в точке максимума.

*Пример 1.* Пусть  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — две плотности распределения с общим максимальным значением в точке  $x = x_0$ , причем

$$\int_{-\infty}^{x_0} f_1(x) dx + \int_{\infty}^{x_0} f_2(x) dx = 1 \quad (f_i \in C^1(\mathbb{R})).$$

Положим

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & -\infty < x \leq x_0; \\ f_2(x), & x_0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Тогда  $f(x)$  также является плотностью распределения, однако, ввиду негладкости, для описания поведения  $f(x)$  вблизи  $x_0$  нужны уже *локальные характеристики*. Введем их как пределы соответствующих интегральных средних значений.

**Определение 1.** Назовем *локальной асимметрией*  $f(x)$  в точке  $x_0$  величину:

$$Af(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \left( \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{f(x) dx}{x - x_0} \right) \quad (1.2)$$

и *локальным эксцессом*  $f(x)$  в точке  $x_0$  величину:

$$Ef(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \left( \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} dx \right), \quad (1.3)$$

в предположении сходимости соответствующих интегралов (1.2) и (1.3).

Введенные характеристики нетрудно выразить через симметрические производные  $f$  в точке  $x_0$ , соответственно, первого и второго порядков, если они существуют.

**Теорема 1.** 1) Если  $f$  симметрически дифференцируема в точке  $x_0$ , то

$$Af(x_0) = \partial^{[l]} f(x_0). \quad (1.4)$$

2) Если  $f$  дважды симметрически дифференцируема в точке  $x_0$ , то

$$Ef(x_0) = \frac{1}{2} \partial^{[n]} f(x_0). \quad (1.5)$$

*Доказательство.* 1) Имеем, применяя теорему о среднем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{f(x)dx}{x-x_0} &= \frac{1}{2h} \left( \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{f(x)dx}{x-x_0} + \int_{x_0-h}^{x_0} \frac{f(x)dx}{x-x_0} \right) = \\ &= \frac{1}{2h} \left( \int_0^h \frac{f(x_0+t)dt}{t} - \int_0^h \frac{f(x_0-t)dt}{t} \right) = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(x_0+t) - f(x_0-t)}{2t} dt = \\ &= \frac{f(x_0+\tau) - f(x_0-\tau)}{2\tau}, \text{ где } 0 < \tau < h. \quad (1.6) \end{aligned}$$

Отсюда, при  $h \rightarrow +0$  следует равенство (1.6).

2) Применяя теорему о среднем, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^2} dx &= \frac{1}{2h} \left( \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^2} dx + \int_{x_0-h}^{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2h} \left( \int_0^h \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t^2} dt + \int_0^h \frac{f(x_0-t) - f(x_0)}{t^2} dt \right) = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(x_0+t) - 2f(x_0) + f(x_0-t)}{2t^2} dt = \\ &= \frac{f(x_0+\tau) - 2f(x_0) + f(x_0-\tau)}{2\tau^2}, \text{ где } 0 < \tau < h. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Отсюда, при  $h \rightarrow +0$  следует равенство (1.7).  $\square$

Возвращаясь теперь к примеру 1, отметим, что в данном случае

$$Af(x_0) = \partial^{[l]} f(x_0) = \frac{1}{2} [\partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0)].$$

В случае негладкости второго порядка в точке  $x_0$  ( $\partial f_1(x_0) = \partial f_2(x_0)$ ),  $\partial^2 f_1(x_0) \neq \partial^2 f_2(x_0)$ , локальный эксцесс вычисляется по аналогичной формуле:

$$Ef(x_0) = \frac{1}{2} \partial^{[m]} f(x_0) = \frac{1}{4} [\partial^2 f_1(x_0) + \partial^2 f_2(x_0)].$$

Рассмотрим теперь конкретный пример «склейки» (с точностью до постоянных множителей) двух нормальных распределений.

*Пример 2.* Далее  $\varphi(x)$  — «малая» функция Лапласа:  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;

$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$  — «большая» функция Лапласа. Напомним, что так называемое

«нормальное» распределение вероятностей случайной величины  $N(m, \sigma)$  (см. [7], [8]), задается плотностью  $f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ ; здесь  $m$  — математическое ожидание,  $\sigma$  — среднеквадратичное отклонение данной случайной величины.

Рассмотрим «склейку» двух нормально распределенных случайных величин  $N_1(m_1, \sigma_1)$  и  $N_2(m_2, \sigma_2)$  ( $m_i, \sigma_i > 0$ ):

$$f(x) = \begin{cases} \gamma_1 \cdot \frac{1}{\sigma_1} \varphi\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right), & -\infty < x \leq 0; \\ \gamma_2 \cdot \frac{1}{\sigma_2} \varphi\left(\frac{x-m_2}{\sigma_2}\right), & 0 \leq x < +\infty. \end{cases} \quad (1.8)$$

Здесь множители  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  подбираются из условий непрерывной склейки в нуле:

$$\gamma_1 \cdot \frac{1}{\sigma_1} \varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) = \gamma_2 \cdot \frac{1}{\sigma_2} \varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right) \quad (1.9)$$

и нормировки плотности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \gamma_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\right) + \gamma_2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\right) = 1, \quad (1.10)$$

откуда находим:

$$\begin{cases} \gamma_1 = 2\sigma_1 \cdot \varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right) \cdot \\ \cdot \left[\sigma_1 \cdot \varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right) \cdot \left(1 - 2\Phi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\right) + \sigma_2 \cdot \varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left(1 - 2\Phi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\right)\right]^{-1}; \\ \gamma_2 = 2\sigma_2 \cdot \varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) \cdot \\ \cdot \left[\sigma_2 \cdot \varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left(1 - 2\Phi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)\right) + \sigma_1 \cdot \varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right) \cdot \left(1 - 2\Phi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)\right)\right]^{-1}. \end{cases}$$

1) Вычислим локальную асимметрию распределения (1.8) в нуле и поставим задачу ее минимизации (по модулю):

$$\begin{aligned} Af(0) = \partial^{[l]} f(0) &= \frac{1}{2} (\partial f_-(0) + \partial f_+(0)) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \gamma_1 \cdot \frac{m_1}{\sigma_1^3} \cdot \varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) - \gamma_2 \cdot \frac{m_2}{\sigma_2^3} \cdot \varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, приравнявая  $Af(0)$  к нулю, получаем:

$$\gamma_1 \cdot \frac{m_1}{\sigma_1^3} \cdot \varphi\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right) = \gamma_2 \cdot \frac{m_2}{\sigma_2^3} \cdot \varphi\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right). \quad (1.11)$$

Из уравнений (1.9) и (1.11) следует условие минимальности  $|Af(0)|$ :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}. \quad (1.12)$$

2) Вопрос о локальном эксцессе распределения (1.8) мы рассматриваем при дополнительном условии  $m_1 = m_2 = 0$ :

$$f(x) = \begin{cases} \gamma_1 \cdot \varphi\left(\frac{x}{\sigma_1}\right), & -\infty < x \leq 0; \\ \gamma_2 \cdot \varphi\left(\frac{x}{\sigma_2}\right), & 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

В этом случае  $f(x)$  является  $C^1$ -гладкой в нуле, однако  $f''(0)$  не существует. Имеем:

$$f''_-(0) = \frac{1}{\sigma_1^2}, \quad f''_+(0) = \frac{1}{\sigma_2^2},$$

откуда

$$Ef(0) = \frac{1}{2} \partial^{[l]} f(0) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right).$$

## 2. Локальная асимметрия и локальный эксцесс набора случайных величин

Рассмотрим теперь совместную плотность распределения  $f(x_1, \dots, x_n)$  набора случайных величин  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  (см. [8]). В этом случае мы введем понятия локальной асимметрии и локального эксцесса по заданному направлению  $h \in \mathbb{R}^n$ , соответствующим образом обобщая определение 1.

**Определение 2.** Назовем *локальной асимметрией*  $f$  по направлению  $h$  в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  величину

$$Af(x_0)h = \lim_{t \rightarrow +0} \left( \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \frac{f(x_0 + \tau h) d\tau}{\tau} \right) \quad (2.1)$$

и *локальным эксцессом*  $f$  по направлению  $h$  в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  величину

$$Ef(x_0)(h)^2 = \lim_{t \rightarrow +0} \left( \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \frac{f(x_0 + \tau h) - f(x_0)}{\tau^2} d\tau \right), \quad (2.2)$$

если соответствующие интегралы сходятся.

Из теоремы 1 легко вытекает связь характеристик (2.1) – (2.2) с соответствующими симметрическими дифференциалами, в случае их существования.

**Теорема 2.** 1) Если  $f$  симметрически дифференцируема в точке  $x_0$  по направлению  $h$ , то

$$Af(x_0)h = \partial^{[l]} f(x_0)h.$$

2) Если  $f$  дважды симметрически дифференцируема по направлению  $h$  в точке  $x_0$ , то

$$Ef(x_0)(h)^2 = \frac{1}{2} \partial^{[l]} f(x_0)(h)^2.$$

Рассмотрим двумерный пример, также связанный со «склеивкой» нормальных распределений по лучам в полярных координатах на плоскости ( $x = \rho \cos \alpha, y = \rho \sin \alpha, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ).

*Пример 3.* Пусть на каждом луче ( $\alpha = \text{const}, 0 \leq \rho < \infty$ ) задано нормальное распределение (с точностью до постоянного множителя):

$$f(\rho, \alpha) = \frac{\gamma(\alpha)}{\sigma(\alpha)} \cdot \varphi\left(\frac{\rho - m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right) \quad (\sigma(\alpha) > 0).$$

Проведем склейку распределений на каждой паре лучей, соответствующих углам  $\alpha$  и  $\pi + \alpha$ .

Из условия (1.9) непрерывной склейки (пример 2) получаем:

$$\frac{\gamma(\alpha)}{\sigma(\alpha)} \cdot \varphi\left(\frac{m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right) = \frac{\gamma(\alpha + \pi)}{\sigma(\alpha + \pi)} \cdot \varphi\left(\frac{m(\alpha + \pi)}{\sigma(\alpha + \pi)}\right). \quad (2.3)$$

Применяя условие нормировки

$$\int_0^\infty f(\rho, \alpha) d\rho + \int_0^\infty f(\rho, \alpha + \pi) d\rho = 1,$$

получаем:

$$\gamma(\alpha) \cdot \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right)\right) + \gamma(\alpha + \pi) \cdot \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m(\alpha + \pi)}{\sigma(\alpha + \pi)}\right)\right) = 1. \quad (2.4)$$

Из системы (2.3) – (2.4) выражаются подходящие  $\gamma(\alpha)$  и  $\gamma(\alpha + \pi)$ .

Находим локальную асимметрию  $f(\rho, \alpha)$  по  $\rho$  в нуле:

$$\begin{aligned} Af(\rho, \alpha)|_{\rho=0} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho}(0, \alpha) + \frac{\partial f}{\partial \rho}(0, \alpha + \pi) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma(\alpha)}{\sigma^3(\alpha)} \cdot \varphi\left(\frac{m(\alpha)}{\sigma(\alpha)}\right) + \frac{\gamma(\alpha + \pi)}{\sigma^3(\alpha + \pi)} \cdot \varphi\left(\frac{m(\alpha + \pi)}{\sigma(\alpha + \pi)}\right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\left( Af(\rho, \alpha)|_{\rho=0} = 0 \right) \Leftrightarrow \left( \frac{\gamma}{\sigma^3} \cdot \varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\Big|_\alpha + \frac{\gamma}{\sigma^3} \cdot \varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right)\Big|_{\alpha+\pi} = 0 \right). \quad (2.5)$$

Условия (2.3) – (2.5) приводят к равенству:

$$\frac{m(\alpha)}{\sigma^2(\alpha)} + \frac{m(\alpha + \pi)}{\sigma^2(\alpha + \pi)} = 0. \quad (2.6)$$

Конкретные примеры:

(i) Пусть  $m(\alpha) \equiv 0, \sigma(\alpha) = 2 + \cos 2\alpha$ . Здесь условия (2.3) – (2.4) выполнены при  $\gamma(\alpha) \equiv 1$ ; условие (2.5) также выполнено для любого  $\alpha$ .

(ii) Пусть  $m(\alpha) = \sin 2\alpha, \sigma(\alpha) \equiv \sigma$ . Здесь условия (2.3) – (2.4) выполнены при  $\gamma(\alpha) = \frac{1}{1 + 2\Phi\left(\frac{\sin 2\alpha}{\sigma}\right)}$ ; условие (2.5) выполнено при  $\sin 2\alpha = 0$ , тогда  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \alpha = \frac{3\pi}{2}$ .

### 3. Общая экстремальная задача поиска оптимальных направлений, минимизирующих локальную асимметрию и локальный эксцесс функционала

Введенные выше понятия нетрудно распространить на общий случай непрерывного функционала  $\Phi : E \supset U(y) \rightarrow \mathbb{R}$ , достигающего локального экстремума в некоторой точке  $y$  вещественного банахового пространства  $E$ ,  $h \in E$  — любое направление в  $E$ .

**Определение 3.** Назовем *локальной асимметрией* функционала  $\Phi$  в точке  $y$  по направлению  $h$  следующий предел:

$$A\Phi(y)h = \lim_{t \rightarrow +0} \left( \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \frac{\Phi(y + \tau h) d\tau}{\tau} \right), \quad (3.1)$$

а *локальным эксцессом* функционала  $\Phi$  в точке  $y$  по направлению  $h$  следующий предел:

$$E\Phi(y)(h)^2 = \lim_{t \rightarrow +0} \left( \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \frac{\Phi(y + \tau h) - \Phi(y)}{\tau^2} d\tau \right), \quad (3.2)$$

в предположении, что пределы (3.1) и (3.2) существуют.

Очевидно, результат теоремы 2 без изменений переносится на данный случай.

**Теорема 3.** 1) Если  $\Phi$  симметрически дифференцируем в точке  $y$  по направлению  $h$ , то

$$A\Phi(y)h = \partial^{[l]}\Phi(y)h.$$

2) Если  $\Phi$  дважды симметрически дифференцируем в точке  $y$  по направлению  $h$ , то

$$E\Phi(y)(h)^2 = \frac{1}{2} \partial^{[l]}\Phi(y)(h)^2.$$

Отметим также, что  $A\Phi(y)h$  и  $E\Phi(y)(h)^2$  могут существовать и при отсутствии симметрической дифференцируемости. Приведем простые скалярные примеры.

*Пример 4.* 1) Пусть  $\Phi(x) = x^{\frac{1}{3}}$ . Тогда  $\partial^{[l]}\Phi(0) = \infty$ , однако

$$A\Phi(0) = \lim_{t \rightarrow +0} \left( \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \frac{x^{\frac{1}{3}} dx}{x} \right) = 0.$$

2) Пусть  $\Phi(x) = x^{\frac{8}{3}}$ . Тогда  $\partial^{[l]}\Phi(0) = \infty$ , однако

$$E\Phi(0) = \lim_{t \rightarrow +0} \left( \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \frac{x^{\frac{8}{3}} dx}{x^2} \right) = 0.$$

Заметим теперь, что рассматривая вопрос о вычислении локальной асимметрии и локального эксцесса при произвольно заданном направлении  $h$ , естественно поставить вопрос о выборе оптимальных направлений, вдоль которых минимизируются, соответственно, модуль асимметрии и модуль эксцесса. Отметим также, что в  $C^1$ -гладком случае, в силу леммы Ферма,  $\partial^{[l]}\Phi(y)h = 0$  по любому направлению  $h \in E$ , откуда, в соответствии с теоремой 3,  $A\Phi(y)h = \partial^{[l]}\Phi(y)h = 0$  по любому направлению  $h \in E$ . Таким образом, задача минимизации локальной асимметрии является нетривиальной лишь в точке негладкого экстремума. В общем виде эта задача исследована в нашей работе [1].

## Заключение

В работе исследована возможность применения симметрических дифференцируемых и субдифференцируемых характеристик к негладким распределениям вероятностей случайной величины. Введены понятия локальной асимметрии и локального эксцесса по заданному направлению в случае набора случайных величин (случайного вектора), что позволило поставить вопрос о поиске оптимального направления, минимизирующего (по модулю) локальную асимметрию, либо локальный эксцесс. Эта техника применена к «склежке» набора нормальных распределений.

## Список цитируемых источников

1. Баран, И. В. Задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума. // Динамические системы. — 2016. — Т. 6(34), № 4. — С. 337-354.  
Baran, I. V. The problem of finding the direction of the optimal transition through the extremum point. Dynamical Systems, 6(34), 337-354 (2016). (in Russian)
2. Бари, Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматлит, 1961. — 936 с.  
Bari, N. K. Trigonometric Series. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1967.
3. Васильев, Ф. П. Основы численных методов решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1972. — 136 с.  
Vasil'ev, F. P. Fundamentals of numerical methods for solving extremal problems. Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)
4. Гельфанд, И. М., Цетлин, М. Л. О некоторых способах управления сложными системами. // УМН. — 1962. — 17:1(103). — С. 3-25.  
Gel'fand, I. M., Tsetlin, M. L. Some methods of control for complex systems. Russian Math. Surveys, 17:1, 95-117 (1962).
5. Демьянов, В. Ф., Малозёмов, В. Н. Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 368 с.  
Demyanov, V. F., Malozyomov, V. N. Introduction to minimax. Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)
6. Демьянов, В. Ф., Рубинов, А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990. — 431 с.  
Demyanov, V. F., Rubinov, A. M. Fundamentals of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus. Moscow: Nauka, 1990. (in Russian)

7. *Кобзарь, А. И.* Прикладная математическая статистика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 816 с.  
Kobzar, A. I. Applied Mathematical Statistics. Moscow: Fizmatlit, 2006. (in Russian)
8. *Крамер, Г.* Математические методы статистики. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 648 с.  
Cramer, H. Mathematical Methods of Statistics. Princeton: Princeton University Press, 1962.
9. *Орлов, И. В., Баран, И. В.* Введение в сублинейный анализ — 2: симметрический вариант. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2015. — Т. 57. — С. 108–161.  
Orlov, I. V., Baran, I. V. Introduction to Sublinear Analysis — 2: Symmetric Case. Journal of Mathematical Sciences, 225, 265–321 (2017).
10. *Орлов, И. В.* Введение в сублинейный анализ. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2014. — Т. 53. — С. 64–132.  
Orlov, I. V. Introduction to sublinear analysis. Journal of Mathematical Sciences, 218, 430–502 (2016).
11. *Орлов, И. В., Стонякин, Ф. С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — Т. 34. — С. 121–138.  
Orlov, I. V., Stonyakin, F. S. Compact subdifferentials: the formula of finite increments and related topics. Journal of Mathematical Sciences, 170, 251–269 (2010).
12. *Фиктенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2001. — 616 с.  
Fikhtengolts, G. M. Course of differential and integral calculus. Moscow: Fizmatlit, 2001. (in Russian)
13. *Arnold, B. C., Groeneveld, R. A.* Measuring Skewness with Respect to the Mode. The American Statistician, 49, 34–38 (1995).
14. *Balanda, K. P., MacGillivray, H. L.* Kurtosis: A Critical Review. The American Statistician, 42, 111–119 (1988).
15. *Doane, D. P., Seward, L. E.* Measuring skewness: a forgotten statistic. Journal of Statistics Education, 19.2, 1–18 (2011).
16. *Groeneveld, R. A.* Measuring Skewness and Kurtosis. Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician), 33, 391–399 (1984).
17. *Joanes, D. N., Gill, C. A.* Comparing measures of sample skewness and kurtosis. Journal of the Royal Statistical Society (Series D): The Statistician, 47(1), 183–189 (1998).
18. *Orlov, I. V., Baran, I. V.* Adjoint extremal problem for non-smooth functionals. 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 23–26 (2017).
19. *Rayner, J. C., Best, D. J., Matthews, K. L.* Interpreting the Skewness Coefficient. Communications in Statistics-Theory and Methods, 24, 593–600 (1995).

Получена 31.08.2017