Динамические системы, 2017, том 7(35), №3, 207–228

УДК 517.958

О малых движениях гидросистемы «вязкоупругая жидкость-идеальная жидкость», заполняющей неподвижный сосуд[1]

Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: kopachevsky@crimea.edu*

Аннотация. В данной работе изучается проблема малых движений гидросистемы "вязкоупругаяжидкость-идеальная жидкость", заполняющей неподвижный сосуд. Методы, развитые в предыдущих работах первого автора, посвящённых исследованию проблем малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости, а также систем идеальных жидкостей, позволяют получить результаты о разрешимости начально-краевой задачи для исследуемой проблемы.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, идеальная жидкость, гидродинамическая система, ортопроектор, операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши.

Small movements of hydrosystem in stationary containers

N. D. Kopachevsky, E. V. Syomkina
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In the paper, we consider a problem on small motions of a system of viscoelastic and ideal fluids in a stationary container. One of models of such viscoelastic fluid is Oldroid's model. It is described, for example, in the book Eirich, F. R. Rheology. Theory and Applications. New York: Academic Press, 1956. It should be noted that the present paper based on the previous N. D. Kopachevsky works together with Azizov, T. Ya., Orlova L. D., Krein, S. G. Namely, problem on small movements of one viscoelastic fluid for generalized Oldroid's model, small motions of a viscoelastic fluid in an open container, oscillations of a system of ideal fluids were investigated in these papers.

The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to develop new approach and to prove the theorem on strong solvability for initial-boundary-value problem generated by a problem of small motions of a system of viscoelastic and ideal fluids in an immovable container.

This paper is organized as follows. In section 1 we formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance. In section 2 we choose the functional spaces generated by the problem for each fluid. For applying of method of orthogonal projection

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (16-11-10125 "Операторные уравнения в функциональных пространствах и приложения к нелинейному анализу", выполняемого в Воронежском госуниверситете.)

we need to choose orthogonal decomposition of corresponding spaces. After projection we get new statement of the problem without some trivial equations. Important part of section 2 is formulation of auxiliary problems which help us to make transition to the the Cauchy problem for the system of integro-differential equation in some Hilbert space. In section 3 we reduce this problem to a system of differential equation. This system can be rewrite as operator differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operator of this problem are studied in section 3 too. Section 4 is devoted to the existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial-boundary-value problem. This result based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in section 4 we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem. This means that external forces equal to zero and dependence by time for the unknown function has the form $e^{-\lambda t}$. Here we obtain the spectral problem for operator pencil. This pencil has properties like pencil associated with spectral problem generated by the problem on normal oscillations of viscoelastic fluid.

Keywords: viscoelastic fluid, ideal fluid, hydrodynamic system, orthogonal projector, operator differential equation, Cauchy problem

MSC 2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

1. Введение

В этой работе изучается задача о малых движениях системы тяжёлых несмешивающихся однородных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя жидкость считается вязкоупругой, а верхняя идеальной. Случай двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд, рассмотрен в работе [2]. В данной работе предполагается, что вязкоупругая жидкость удовлетворяет обобщённой модели Олдройта (см. [5, 9, 13, 14]). Вариант, когда вязкоупругая жидкость целиком заполняет неподвижный сосуд, изучен в [8], а случай частичного заполнения сосуда вязкоупругой жидкостью — в главе 11 монографии [12].

2. Постановка задачи. Закон баланса полной энергии системы

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим неподвижный сосуд Ω, полностью заполненный системой из двух несмешивающихся жидкостей. Жидкости предполагаются тяжёлыми, и в силу этого действие капиллярных сил в этой задаче не учитывается. Область Ω_1, нижняя по отношению к действию силы тяжести, заполнена несжимаемой вязкоупругой жидкостью обобщённой модели Олдройта (см., например, [5, 9, 12, 13, 14]). В этой модели связь между тензором вязких напряжений и удвоенным тензором скоростей деформаций в вязкоупругой жидкости описывается не простейшим законом Гука, а линейным дифференциальным соотношением, где фигурируют производные порядка $m \geq 1$ по времени как у тензора вязких напряжений, так и у тензора скоростей деформаций. Далее, ρ_1, μ_1 — соответственно плотность и динамический коэффициент вязкости вязкоупругой жидкости. Область Ω_2 заполнена идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_2.

Обозначим через $\vec{n}_k$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_k$ и направленный вне Ω_k $(k = 1, 2)$. Через S_k обозначим часть стенки сосуда, граничащей с областью Ω_k $(k = 1, 2)$. Горизонтальную границу раздела в состоянии равновесия обозначим через Γ. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$, жёстко связанную с сосудом, таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена против действия силы тяжести, а начало координат находилось на равновесной поверхности Γ. Тогда ускорение гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, $g > 0$, а в состоянии покоя поля давлений в жидкостях выражаются по законам

$$P_{0,k}(x_3) = p_0 - \rho_k g x_3, \quad k = 1, 2, \tag{2.1}$$

где p_0 — давление на границе раздела Γ, т.е. при $x_3 = 0$.

Теперь перейдём к уравнениям, описывающим движение гидросистемы. Обозначим через $\vec{u}_k$ поля скоростей жидкостей в Ω_k $(k = 1, 2)$, а через $p_k(t, x)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений (см.(2.1)). Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$, $x \in \Omega$.

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид (см., например, [11, 12]):

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \mu_1 \triangle \vec{v}_1 + \rho_1 \vec{f}_1(t, x), \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{2.2}$$

$$\vec{v}_1(t, x) = \vec{u}_1(t, x) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_j \int_0^t e^{-\beta_j(t-s)} \vec{u}_1(s, x)\, ds =: I_{0,1}(t)\vec{u}_1, \tag{2.3}$$

$$\rho_2 \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} = -\nabla p_2 + \rho_2 \vec{f}_2(t, x), \quad \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{2.4}$$

где $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкости обобщённой модели Олдройта, $\vec{f}_k(t, x) := \vec{f}(t, x)|_{x \in \Omega_k}$, $k = 1, 2$, а $\triangle$ — трёхмерный оператор Лапласа.

Для вязкоупругой жидкости, как известно, на твёрдой стенке S_1 сосуда должно выполняться условие прилипания, т.е.

$$\vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \tag{2.5}$$

а для идеальной на S_2 — условие непротекания

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } S_2). \tag{2.6}$$

Будем описывать малые перемещения границы раздела между жидкостями с помощью функции вертикального отклонения

$$x_3 = \zeta(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \tag{2.7}$$

Тогда на Г должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 =: \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = -\vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 =: -\gamma_{n,2}\vec{u}_2, \quad \vec{n}_1 = \vec{e}_3 = -\vec{n}_2, \tag{2.8}$$

а символом $\gamma_{n,k}$, $k = 1, 2$, обозначена операция взятия нормального следа на Г, т.е. следа нормальной компоненты поля скорости. Заметим ещё, что из условия сохранения объёма каждой из жидкостей имеем интегральную связь

$$\int\limits_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \tag{2.9}$$

Сформулируем теперь динамические условия на Г. Они состоят в том, что на движущейся границе раздела векторное поле напряжений при переходе от одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на Г приводят к следующим соотношениям: на Г касательные напряжения (т.е. вдоль Г) изменяются непрерывно, а нормальное напряжение (т.е. вдоль оси Ox_3) компенсируется гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{gathered} \mu_1 \tau_{j3}(\vec{v}_1) = 0, \quad j = 1, 2; \\ [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-p_2] = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь $\tau_{kl}(\vec{u}) := \dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} + \dfrac{\partial u_l}{\partial x_k}$ $(k, l = 1, 2, 3)$ — удвоенный тензор скоростей деформаций.

Наконец, для искомых функций $\vec{u}_k(t, x)$, $k = 1, 2$, и $\zeta(t, x_1, x_2)$ необходимо ещё задать начальные условия:

$$\begin{gathered} \vec{u}_k(0, x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad \vec{u}_1^0 \cdot \vec{n}_1 \equiv -\vec{u}_2^0 \cdot \vec{n}_2, \quad x \in \Gamma, \quad k = 1, 2, \\ \zeta(0, x) = \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma. \end{gathered} \tag{2.11}$$

2.2. Закон баланса полной энергии

Будем считать, что задача (2.2)-(2.11) имеет классической решение, и выведем закон баланса полной энергии гидросистемы. Предварительно выпишем формулы Грина для векторных полей скоростей в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно. Для дважды непрерывно дифференцируемых полей они имеют следующий вид:

$$\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{u}_1) := \frac{1}{2}\mu_1 \int\limits_{\Omega_1} \left(\sum_{j,l=1}^{3} \tau_{jl}(\vec{\eta}_1)\overline{\tau_{jl}(\vec{u}_1)} \right) d\Omega_1 =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} \vec{\eta}_1 \cdot \overline{(-\mu_1 \triangle \vec{u}_1 + \nabla p_1)} d\Omega_1 + \int\limits_{\Gamma} \sum_{j=1}^{3} \eta_{1,j} \overline{(\mu_1 \tau_{j,3}(\vec{u}_1) - p_1 \delta_{j3})} d\Gamma, \tag{2.12}$$

$$\operatorname{div}\vec{\eta}_1 = \operatorname{div}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{\eta}_1 = \vec{u}_1 \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \quad \vec{\eta}_1 = \sum_{j=1}^{3} \eta_{1,j}\vec{e}_j$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \vec{\eta}_2 \cdot \overline{\nabla p_2} d\Omega_2 = -\int\limits_{\Gamma} \eta_{2,3} \overline{p_2} d\Gamma,$$
$$\mathrm{div} \vec{\eta}_2 = \mathrm{div} \vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \vec{\eta}_2 = \vec{u}_2 \equiv \vec{0} \quad (\text{на } S_2). \tag{2.13}$$

(В этих формулах учтено, что направление внешней нормали на Γ для области Ω_1 будет $\vec{n}_1 = \vec{e}_3$, а для Ω_2 — соответственно $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1 = -\vec{e}_3$.)

Умножим обе части (2.2) и (2.4) слева на $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, проинтегрируем по Ω_1 и Ω_2 соответственно и сложим результаты; будем иметь (для вещественнозначных полей):

$$\sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} d\Omega_k = -\sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \nabla p_k d\Omega_k + \mu_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{u}_1 \cdot (\triangle \vec{v}_1) d\Omega_1 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k.$$

Используя формулы Грина (2.12), (2.13), а также граничные условия задачи (2.2)-(2.11), отсюда получаем соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 \, d\Omega_k \right\} = -\mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma} \sum_{j=1}^{3} u_{k,j} \left(\mu_1 \tau_{j3}(\vec{u}_1) - (p_1 - p_2) \delta_{j3} \right) d\Gamma.$$

Учитывая ещё соотношения (2.9) и (2.10), окончательно приходим к выводу, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 \, d\Omega_k + g(\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma} |\zeta|^2 \, d\Gamma \right\} = -\mu_1 E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot \vec{f}_k d\Omega_k. \tag{2.14}$$

Это тождество есть закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Здесь в фигурных скобках стоит удвоенная полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия гидросистемы, а справа — мощность диссипативных вязкоупругих сил и мощность дополнительных внешних сил, действующих на систему. После интегрирования (2.14) по t в пределах от 0 до t получаем закон баланса полной энергии в интегральной форме, т.е. на произвольном отрезке времени $(0, t)$.

3. Метод ортогонального проектирования. Переход к системе операторных уравнений

3.1. Проектирование уравнения Эйлера

Воспользуемся далее разложением пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_2)$ в ортогональную сумму (см. [3, с.113],[11]):

$$\vec{L}_2(\Omega_2) = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2), \tag{3.1}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_2) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_2) : \ \mathrm{div}\vec{u} = 0 \ (\Omega_2), \quad u_n = 0 \ (\partial\Omega_2)\},$$

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega_2) := \{\vec{v} = \nabla\varphi \in \vec{L}_2(\Omega_2) : \ \triangle\varphi = 0 \ (\Omega_2), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ (S_2)\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2) := \{\vec{w} = \nabla\psi \in \vec{L}_2(\Omega_2) : \ \triangle\psi = 0 \ (\Omega_2), \quad \psi = 0 \ (\Gamma)\}.$$

Введём ортопроекторы на соответствующие подпространства: $P_{0,2}$, P_{h,S_2}, $P_{02,\Gamma}$.

Основываясь на разложении (3.1), применим метод ортогонального проектирования к уравнениям движения начально-краевой задачи (2.2)-(2.11). В силу условия соленоидальности, условия непротекания на твёрдой стенке S_2 и условия сохранения объёма на свободной границе Γ (так как жидкости несжимаемы) считаем, что

$$\vec{u}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) =: \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2).$$

Поле ∇p_2 потенциально и поэтому

$$\nabla p_2 \in \vec{G}(\Omega_2) = \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2).$$

Представим поля $\vec{u}_2$ и ∇p_2 в виде:

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 + \nabla\Phi_2, \quad \text{где } \vec{w}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2), \quad \nabla\Phi_2 \in \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2), \tag{3.2}$$

$$\nabla p_2 = \nabla\tilde{p}_2 + \nabla\varphi_2, \quad \text{где } \nabla\tilde{p}_2 \in \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2), \quad \nabla\varphi_2 \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2).$$

Подставим эти представления в уравнение (2.4) для идеальной жидкости и применим к нему ортопроекторы, отвечающие разложению (3.1). Получим:

$$\frac{\partial\vec{w}_2}{\partial t} = P_{0,2}\vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{3.3}$$

$$\rho_2\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi_2 = -\nabla\tilde{p}_2 + \rho_2 P_{h,S_2}\vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{3.4}$$

$$\nabla\varphi_2 = \rho_2 P_{0,\Gamma}\vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2). \tag{3.5}$$

Из (3.3), с учётом начальных условий (2.11), сразу получаем

$$\vec{w}_2(t,x) = \int\limits_0^t P_{0,2}\vec{f}_2(\tau,x)\mathrm{d}\tau + P_{0,2}\vec{u}_2^0.$$

Члены в уравнении (3.5) — это составляющие градиентов давлений в подпространстве $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2)$. Потенциал этого поля φ_2 обращается в нуль на Γ и поэтому в граничных условиях не участвует. Далее соотношения (3.5) не рассматриваем.

Условимся называть решения уравнений (3.3), а также составляющие градиентов давлений из (3.5) — тривиальными решениями. Итак, основные уравнения, которые будем рассматривать для идеальных жидкостей, это уравнения (3.4).

3.2. Проектирование уравнения Навье-Стокса

Для области Ω_1 введём аналогичное разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_1)$ в ортогональную сумму (см. [3]):

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1), \quad \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1).$$

Введём ортопроекторы P_{0,S_1} и $P_{01,\Gamma}$ на подпространства $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)$ соответственно. В силу условия соленоидальности и условия прилипания на S_1 для $\vec{u}_1$, считаем, что поле $\vec{u}_1$ принадлежит пространству векторных полей с конечной скоростью диссипации энергии в жидкости:

$$\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) := \Big\{ \vec{u}_1 \in \vec{H}^1(\Omega_1) : \mathrm{div}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1) \Big\} \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Здесь скалярное произведение определяется по формуле (см. (2.12), (2.13))

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1)_{\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)} := E_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_1} \left(\sum_{j,l=1}^{3} \tau_{jl}(\vec{u}_1) \overline{\tau_{jl}(\vec{v}_1)} \right) d\Omega_1.$$

Отметим, что $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ плотно вложено в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Подействуем введёнными операторами P_{0,S_1} и $P_{01,\Gamma}$ на обе части уравнения для вязкоупругой жидкости (2.2), получим:

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla \tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1} \triangle \vec{v}_1 + \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{3.6}$$

$$-\mu_1 P_{01,\Gamma} \triangle \vec{v}_1 + P_{01,\Gamma} \nabla p_1 = \rho_1 P_{01,\Gamma} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1).$$

Здесь через $\nabla \tilde{p}_1$ обозначено поле $P_{0,S_1} \nabla p_1 =: \nabla \tilde{p}_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ в силу разложения пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$. Потенциал поля $P_{01,\Gamma} \nabla p_1$ в граничных условиях не участвует, так как обращается в нуль на Γ. Поэтому для вязкоупругой жидкости рассматриваем только уравнение (3.6).

3.3. Формулировка задачи после отделения тривиальных решений

Заметим, что в силу представления (3.2) поля $\vec{u}_2$ кинематическое условие (2.8) можно записать в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \gamma_{n,1} \vec{u}_1 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_1} \quad (\text{на } \Gamma).$$

Введём ещё ортопроектор P_Γ на $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$. Тогда итогом проведенных выше преобразований является следующая

Теорема 1. *Пусть $\vec{u}_k$, ∇p_k, $k = 1, 2$, ζ — классическое решение начально-краевой задачи (2.2)-(2.11), тогда функции $\vec{u}_1$, $\nabla\tilde{p}_1$, $\nabla\Phi_2$, $\nabla\tilde{p}_2$, ζ являются решением следующей начально-краевой задачи:*

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla\tilde{p}_1 + \mu_1 P_{0,S_1} \triangle \vec{v}_1 + \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{3.7}$$

$$\operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \tag{3.8}$$

$$\rho_2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi_2 + \nabla\tilde{p}_2 = \rho_2 P_{h,S_2} \vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{3.9}$$

$$\triangle\Phi_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} = 0 \quad (\text{на } S_2) \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} = -\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\gamma_{n,1} \vec{u}_1 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.10}$$

$$\begin{gathered} \mu_1 \tau_{j3}(\vec{v}_1) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (\text{на } \Gamma), \\ [-P_\Gamma \tilde{p}_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{v}_1)] - [-P_\Gamma \tilde{p}_2] = -g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma), \end{gathered} \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered} \vec{u}_1(0, x) = P_{0,S_1} \vec{u}_1^0(x) = \vec{u}_1^0(x), \quad x \in \Omega_1, \quad \nabla\Phi_2(0, x) = P_{h,S_2} \vec{u}_2^0(x), \quad x \in \Omega_2, \\ \zeta(0, x) = \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma. \end{gathered} \tag{3.12}$$

3.4. Вспомогательные краевые задачи и их операторы

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Вспомогательная задача I.

$$-P_{0,S_1} \triangle \vec{u} + \mu^{-1} \nabla p = \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_1) \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S_1),$$

$$\mu_1 \tau_{j3}(\vec{u}) = 0, \quad j = 1, 2, \quad -p + \mu \tau_{33}(\vec{u}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma).$$

Это так называемая первая вспомогательная задача С.Г. Крейна (см. [3, с.116]). Она имеет единственное обобщённое решение $\vec{u} = A_1^{-1} \vec{f}$ для любого вектора $\vec{f}$ из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Область определения $\mathcal{D}(A_1)$ оператора A_1 плотна в пространстве $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$, а $\mathcal{D}(A_1^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$. Оператор A_1^{-1} является положительным и компактным в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$.

Вспомогательная задача II.

$$\triangle p = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial p}{\partial n_1} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad p = \tau_1 \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \tau_1 \mathrm{d}\Gamma = 0.$$

Это — известная задача Зарембы для уравнения Лапласа. Она имеет единственное решение (см. [3, с.45]) $p = G_1 \tau_1 \in H^1_\Gamma(\Omega_1)$ при $\tau_1 \in H^{1/2}_\Gamma$.

$$H^1_\Gamma(\Omega_1) := \{\varphi \in H^1(\Omega_1) : \int_\Gamma \varphi \mathrm{d}\Gamma = 0\}, \quad ||\varphi||^2_{H^1_\Gamma(\Omega_1)} := \int_{\Omega_1} |\nabla\varphi|^2 \mathrm{d}\Omega_1.$$

(Определение пространств $H^{1/2}_{\partial\Omega}$, $H^{-1/2}_{\partial\Omega}$ для областей Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$, а также соответствующие теоремы вложения и продолжения с границы см. в работе Galiardo E. [10]).

Вспомогательная задача III.

$$\triangle\Phi = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_2} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_2} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_\Gamma \Phi d\Gamma = 0, \int\limits_\Gamma \psi d\Gamma = 0.$$

Это задача Неймана для уравнения Лапласа. Если $\psi \in \tilde{H}^{-1/2}_\Gamma$, то задача имеет единственное решение $\Phi = V\psi \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$. Здесь символом $\tilde{}$ обозначен класс функций из $H^{-1/2}_\Gamma$, продолжимых нулём на всю границу $\partial\Omega_2$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_2)$ (см. [1, 7]). Введём по решению задачи III оператор:

$$P_\Gamma \Phi|_\Gamma = P_\Gamma \hat{C}\psi =: C\psi, \quad \hat{C} := \gamma_\Gamma V, \quad \gamma_\Gamma\psi := \psi|_\Gamma.$$

Отметим, что C самосопряжённый, положительный и компактный оператор в $L_{2,\Gamma}$.

3.5. Вывод системы операторных уравнений

Переходя к формулировке исходной задачи (2.2)-(2.11) в операторной форме, представим поле $\nabla\tilde{p}_1$ в виде $\nabla\tilde{p}_1 = \nabla\tilde{p}_{11} + \nabla\tilde{p}_{12}$ и подберём поле $\nabla\tilde{p}_{11}$ таким образом, чтобы поле $\vec{v}_1$ являлось решением следующей краевой задачи

$$-P_{0,S_1}\triangle\vec{v}_1 + \mu_1^{-1}\nabla\tilde{p}_{11} = \mu_1^{-1}\left(-\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - \nabla\tilde{p}_{12}\right) \quad (\text{в } \Omega_1) \tag{3.13}$$

$$\operatorname{div}\vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{v}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_1), \tag{3.14}$$

$$\mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1) = 0, \quad j = 1,2, \quad -P_\Gamma\tilde{p}_{11} + \mu\tau_{33}(\vec{v}_1) = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.15}$$

Используя вспомогательную задачу I, заключаем, что краевая задача (3.13)-(3.15) имеет единственное обобщённое решение

$$\vec{v}_1 = \mu_1^{-1}A_1^{-1}\left(-\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - \nabla\tilde{p}_{12}\right)$$

для правой части из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$. Тогда можно записать

$$\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1\vec{v}_1 + \nabla\tilde{p}_{12} = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1). \tag{3.16}$$

Заметим, что при расщеплении условия для нормального напряжения на Γ из (3.11) осталось условие

$$P_\Gamma\tilde{p}_{12} = P_\Gamma\tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.17}$$

Учитывая принадлежность $\nabla\tilde{p}_{12} \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, найдём, что потенциал $P_\Gamma\tilde{p}_{12}$ удовлетворяет вспомогательной задаче II при $\tau_1 = P_\Gamma\tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta$. Поэтому можно считать, что

$$\nabla\tilde{p}_{12} = G_1(P_\Gamma\tilde{p}_2 + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta). \tag{3.18}$$

Оператор G_1 ограниченно действует из пространства $H_\Gamma^{1/2}$ в пространство $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$.

В силу принадлежности $\nabla\Phi_2$ пространству $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$ потенциал Φ_2 с помощью решения вспомогательной задачи III можно представить в виде:

$$\Phi_2 = V(-\gamma_{n,1}\vec{u}_1). \tag{3.19}$$

Рассмотрим уравнение (3.9) для идеальной жидкости. Из него следует интеграл Коши-Лагранжа

$$\rho_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \tilde{p}_2 = F_2 + c(t) \quad (\text{в } \Omega_2),$$

где через F_2 обозначен потенциал поля $\rho_2 P_{h,S_2}\vec{f}_2$, а $c(t)$ — произвольная функция переменной t. Рассмотрим это уравнение на Γ и спроектируем на $L_{2,\Gamma}$, тогда динамическое условие (3.17) можно преобразовать к следующему виду:

$$P_\Gamma\tilde{p}_{12} = P_\Gamma F_2 - \rho_2 P_\Gamma\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.20}$$

Выразим теперь $P_\Gamma\Phi_2|_\Gamma$ с помощью представления (3.19) и оператора C:

$$P_\Gamma\Phi_2|_\Gamma = P_\Gamma\Phi|_\Gamma = -C\gamma_{n,1}\vec{u}_1 \quad \text{на } \Gamma. \tag{3.21}$$

Значит, с учётом (3.18), (3.20) и (3.21) уравнение (3.16) можно переписать в виде:

$$\rho_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1\vec{v}_1 + g(\rho_1 - \rho_2)G_1\zeta + \rho_2\frac{\partial}{\partial t}G_1 C\gamma_{n,1}\vec{u}_1 + G_1 P_\Gamma F_2 = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1).$$

Проведенные в этом пункте рассуждения можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $\vec{u}_1$, $\nabla\tilde{p}_1$, $\nabla\Phi_2$, $\nabla\tilde{p}_2$, ζ — классическое решение начально-краевой задачи* (3.7)-(3.12), *тогда функции $\vec{u}_1$, ζ являются решением следующей задачи Коши:*

$$\frac{d}{dt}\left(\rho_1\vec{u}_1 + \rho_2 G_1 C\gamma_{n,1}\vec{u}_1\right) + \mu_1 A\vec{v}_1 + g(\rho_1 - \rho_2)G_1\zeta = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - G_1 P_\Gamma F_2 \tag{3.22}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma_{n,1}\vec{u}_1, \tag{3.23}$$

$$\vec{u}_1(0,x) = \vec{u}_1^0(x), \quad x \in \Omega_1, \quad \zeta(0,x) = \zeta^0(x) \quad x \in \Gamma. \tag{3.24}$$

Введём оператор $G := (\rho_1 - \rho_2)G_1$. Тогда справедлива следующая

Лемма 2. *Имеет место соотношение*

$$G^* = (\rho_1 - \rho_2)\gamma_{n,1}, \quad \gamma_{n,1} \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1); \tilde{H}_{\Gamma}^{-1/2}). \tag{3.25}$$

Доказательство. См. доказательство леммы 6 из [2]. □

4. Преобразование задачи к стандартному виду

4.1. Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Приведём задачу (3.22)-(3.24) к более симметричному виду, воспользовавшись формулой (3.25). Осуществим замену искомой функции по формуле

$$\eta = (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta.$$

Тогда приходим к задаче Коши

$$\begin{aligned} &B\frac{d\vec{u}_1}{dt} + \mu_1 A_1 \vec{v}_1 + (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} G\eta = \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - G_1 P_\Gamma F_2,\ \vec{u}_1(0,x) = \vec{u}_1^0(x), \\ &\frac{d\eta}{dt} = ((g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} G^* \vec{u}_1), \quad \eta(0,x) = (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta^0(x), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$B := \rho_1 I + \rho_2 G_1 C \gamma_{n,1}$$

.

Введём ещё в (4.1) новые искомые функции

$$\vec{w}_j(t) := \alpha_j^{1/2} \int\limits_0^t e^{-\beta_j(t-s)} \vec{u}_1(s)ds \in \vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1), \quad j = \overline{1,m}. \tag{4.2}$$

Тогда

$$\frac{d\vec{w}_j}{dt} = \alpha_j^{1/2}\vec{u}_1 - \beta_j \alpha_j^{1/2} \int\limits_0^t e^{-\beta_j(t-s)} \vec{u}_1(s)ds = \alpha_j^{1/2}\vec{u}_1 - \beta_j \vec{w}_j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{4.3}$$

Теперь с учётом (4.2),(4.3) задача (4.1) переписывается в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &B\frac{d\vec{u}}{dt} = -\mu_1 A_1(\vec{u}_1 + \sum_{j=1}^m \alpha_j^{1/2}\vec{w}_j) - (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} G\vec{\eta} + \vec{g}(t), \quad \vec{u}_1(0) = \vec{u}_1^0, \\ &\frac{d\vec{w}_j}{dt} = \alpha_j^{1/2}\vec{u}_1 - \beta_j \vec{w}_j, \quad \vec{w}_j(0) = \vec{0}, \quad j = \overline{1,m}, \\ &\frac{d\eta}{dt} = (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} G^* \vec{u}_1, \quad \eta(0) = (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta^0, \quad \vec{g}(t) := \rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1 - G_1 P_\Gamma F_2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Коротко эту задачу можно записать в виде

$$\mathcal{B}\frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}_1 z + g(t), \quad z(0) = z^0,$$
$$\mathcal{B} := \operatorname{diag}\{B, I, I\} \tag{4.5}$$
$$\mathcal{A}_1 := \begin{pmatrix} A & \hat{\alpha}A & bG \\ -\hat{\alpha}^\tau & \hat{\beta} & 0 \\ -bG^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \hat{w} \\ \eta \end{pmatrix}, \; g(t) = \begin{pmatrix} \vec{g}(t) \\ \hat{0} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\hat{\alpha} := (\alpha_1^{1/2}I, \alpha_2^{1/2}I, \ldots, \alpha_m^{1/2}I)$, $\hat{\beta} := \operatorname{diag}\{\beta_1 I, \beta_2 I, \ldots, \beta_m I\}$, $A := \mu_1 A_1$, $b := (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}$, $\hat{w} := (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m)^\tau$, $\hat{0} := (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m \text{ раз}})^\tau$.

4.2. Дополнительная симметризация.

Осуществим в (4.4) ещё одну замену

$$\vec{w}_j = A^{-1/2}\vec{\psi}_j, \quad \vec{\psi}_j \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1), \quad j = \overline{1,m}.$$

Тогда из второй строчки (4.4) имеем соотношение

$$\frac{d}{dt}(A^{-1/2}\vec{\psi}_j) = \alpha_j^{1/2}\vec{u} - \beta A^{-1/2}\vec{\psi}_j, \quad j = \overline{1,m}, \tag{4.6}$$

и если $\vec{u}(t) := \vec{u}_1(t)$, — непрерывная по t функция со значениями в $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$, а $\vec{\psi}_j(t)$, $j = \overline{1,m}$, — со значениями в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, то правая часть в (4.6) непрерывна по t со значениями в $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Поэтому к обеим частям в (4.6) можно применить оператор $A^{1/2}$.

В итоге взамен (4.4) возникает задача Коши

$$\begin{aligned} &B\frac{d\vec{u}}{dt} = -A(\vec{u} + \sum_{j=1}^m \alpha_j^{1/2}A^{-1/2}\vec{\psi}_j) - bG\vec{\eta} + \vec{g}(t), \\ &\frac{d\vec{\psi}_j}{dt} = \alpha_j^{1/2}A^{1/2}\vec{u} - \beta\vec{\psi}_j, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_1^0, \quad \vec{\psi}_j(0) = \vec{0}, \quad j = \overline{1,m}, \\ &\frac{d\eta}{dt} = bG^*\vec{u}, \quad \eta(0) = (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta^0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Эта система снова коротко переписывается в виде

$$\mathcal{B}\frac{dy}{dt} = -\mathcal{A}y + g(t), \quad y(0) = y^0, \quad y = (\vec{u}; \hat{\psi}; \eta)^\tau, \tag{4.8}$$

где операторная матрица

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A & \hat{\alpha}A^{1/2} & bG \\ -\hat{\alpha}^\tau A^{1/2} & \hat{\beta} & 0 \\ -bG^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

задана на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A) \oplus \hat{\mathcal{D}}(A^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(G), \quad \hat{\mathcal{D}}(A^{1/2}) := \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{D}(A^{1/2}) \tag{4.10}$$

и действует в пространстве $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma}$, где $\hat{\vec{J}}_{0,S_1}(\Omega_1) := := \bigoplus\limits_{j=1}^{m} \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$.

4.3. Свойства операторных коэффициентов

Лемма 3. *Оператор* $\mathcal{B}$ *из* (4.5) *ограничен, самосопряжён и положительно определён.*

Доказательство. Свойство ограниченности следует из того, что ограничены все операторные коэффициенты матрицы $\mathcal{B}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить ограниченность оператора $G_1 C \gamma_{n,1}$. Он действует из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ в $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$. Действительно, для $\vec{\xi} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ элемент $\gamma_{n,1}\vec{\xi} \in \tilde{H}_{\Gamma}^{-1/2}$. С помощью вспомогательной задачи III найдём функцию Φ при условии, что $\psi = \gamma_{n,1}\vec{\xi}$. Тогда в силу свойств ограниченности операторов C и G_1 оператор $G_1 C \gamma_{n,1}$ ограничен, а его действие следующее:

$$G_1 C \gamma_{n,1} \vec{\xi} = G_1 P_\Gamma \Phi|_\Gamma \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1).$$

Найдём квадратичную форму оператора $\mathcal{B}$ в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Для любого $y \in \mathcal{H}$ имеем

$$(\mathcal{B}y, y)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{u}|^2 \mathrm{d}\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_1} G_1 C \gamma_{n,1} \vec{u} \cdot \overline{\vec{u}} \mathrm{d}\Omega_1 + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega_1} |\vec{\psi}_j|^2 \mathrm{d}\Omega_1 + \int\limits_{\Gamma} |\eta|^2 \mathrm{d}\Gamma \tag{4.11}$$

Преобразуем второе слагаемое в (4.11), используя свойства решения вспомогательной задачи III, оператора C, взаимную сопряжённость операторов G_1 и $\gamma_{n,1}$, и свойства потенциала Φ_2:

$$\rho_2 \int\limits_{\Omega_1} G_1 C \gamma_{n,1} \vec{u} \cdot \overline{\vec{u}} \mathrm{d}\Omega_1 = \rho_2 \int\limits_{\Gamma} C \gamma_{n,1} \vec{u} \cdot \overline{\gamma_{n,1}\vec{u}} \mathrm{d}\Gamma = \rho_2 \int\limits_{\Gamma} P_\Gamma \Phi_2 \cdot \overline{(-\gamma_{n,1}\vec{u})} \mathrm{d}\Gamma =$$

$$= \rho_2 \int\limits_{\Gamma} \Phi_2 \cdot \overline{\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2}} \mathrm{d}\Gamma = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla \Phi_2|^2 \mathrm{d}\Omega_2.$$

Тогда

$$(\mathcal{B}y, y)_{\mathcal{H}} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{u}|^2 \mathrm{d}\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla \Phi_2|^2 \mathrm{d}\Omega_2 + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega_1} |\vec{\psi}_j|^2 \mathrm{d}\Omega_1 + \int\limits_{\Gamma} |\eta|^2 \mathrm{d}\Gamma \tag{4.12}$$

С учётом ограниченности оператора $\mathcal{B}$ из (4.12) видно, что он самосопряжён и положительно определён. $\square$

Изучим теперь общие свойства оператора $\mathcal{A}$ из (4.9), (4.10).

Лемма 4. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ допускает факторизацию в виде произведения трёх матриц с симметричным окаймлением средней матрицы:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \hat{\alpha} I & bA^{-1/2}G \\ -\hat{\alpha}^{\tau} I & \hat{\beta} & 0 \\ -bG^{*}A^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \quad \square \tag{4.13}$$

$$\hat{I} := \operatorname{diag}\{\underbrace{I, I, \ldots, I}_{m \text{ раз}}\}$$

Лемма 5. *Справедливо соотношение*

$$A^{-1/2}G = (G^{*}A^{-1/2})^{*}|_{\mathcal{D}(G)},$$

причём замыкание по непрерывности оператора $A^{-1/2}G$ совпадает с $(G^{*}A^{-1/2})^{*}$.

Доказательство. См. доказательство леммы 9 из [2]. $\square$

Дальнейшее изучение свойств операторной матрицы $\mathcal{A}$ повторяет исследование, проведенное в пункте 7.1 из [2] с соответствующими упрощениями. Приведём следующие результаты без доказательств.

Лемма 6. *Операторная матрица* (4.9) *является аккретивной в пространстве $\mathcal{H}$, т.е.*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}. \quad \square$$

Введём операторную матрицу

$$\mathcal{J}_a := \mathcal{J}_0 + a\operatorname{diag}(0; \hat{0}^{\tau}; I), \quad a > 0, \quad \mathcal{J}_0 := \begin{pmatrix} I & \hat{\alpha} & bA^{-1/2}G \\ -\hat{\alpha}^{\tau} & \hat{\beta} & 0 \\ -bG^{*}A^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Тогда для $\mathcal{J}_a$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(\mathcal{J}_a y, y)_{\mathcal{H}} \geq c||y||^2_{\mathcal{H}}, \quad c > 0. \tag{4.15}$$

Из (4.14) следует, что операторная матрица $\mathcal{A}$ из (4.13) принимает вид

$$\begin{gathered} \mathcal{A} = \operatorname{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I)\mathcal{J}_a \operatorname{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I) - a\operatorname{diag}(0; \hat{0}; I) =: \\ =: \mathcal{A}_a - a\operatorname{diag}(0; \hat{0}; I). \end{gathered} \tag{4.16}$$

При этом оператор $\mathcal{A}_a$ представлен в виде произведения трёх сомножителей, каждый из которых имеет ограниченный обратный. Поэтому $\mathcal{A}_a$ допускает расширение путём замыкания среднего сомножителя, и в итоге возникает максимальный равномерно аккретивный оператор.

Лемма 7. *Замыкание $\bar{\mathcal{A}}_a$ оператора $\mathcal{A}_a$ представляется в виде*

$$\bar{\mathcal{A}}_a = \mathrm{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I)\bar{\mathcal{J}}_a \mathrm{diag}(A^{1/2}; \hat{I}; I),$$

$$\bar{\mathcal{J}}_a = \begin{pmatrix} I & \hat{\alpha} & b(G^* A^{-1/2})^* \\ -\hat{\alpha}^\tau & \hat{\beta} & 0 \\ -bG^* A^{-1/2} & 0 & aI \end{pmatrix},$$

где $\bar{\mathcal{J}}_a$ — равномерно аккретивный оператор, для которого выполнено свойство (4.15) *(с заменой $\mathcal{J}_a \to \bar{\mathcal{J}}_a$).*

При этом

$$\begin{gathered}\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \Big\{ y = (\vec{u}; \vec{\psi}; \eta)^\tau : \vec{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2}),\ A^{1/2}\vec{u} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{1/2} \vec{\psi}_k + \\ + b(G^* A^{-1/2})^* \eta \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \Big\}, \quad \mathcal{R}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \mathcal{H},\end{gathered} \tag{4.17}$$

и оператор $\bar{\mathcal{A}}_a$ действует на $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a)$ по закону

$$\bar{\mathcal{A}}_a y = \begin{pmatrix} A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u} + \hat{\alpha}\hat{\psi} + b(G^* A^{-1/2})^* \eta) \\ -\hat{\alpha}^\tau A^{1/2}\vec{u} + \hat{\beta}\hat{\psi} \\ -bG^*\vec{u} + a\eta \end{pmatrix}. \quad \square \tag{4.18}$$

5. Теоремы о разрешимости

5.1. Получение теоремы о сильной разрешимости исходной задачи

Вернёмся к задаче (4.8)-(4.9) и перепишем её с учётом (4.16) в виде

$$\mathcal{B}\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P}_3)y + g(t), \quad y(0) = y^0 := (\vec{u}^0; \hat{0}; (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta^0)^\tau,$$

$$y = (\vec{u}; \hat{\psi}; \eta)^\tau, \quad \mathcal{P}_3 := \mathrm{diag}(0; \hat{0}; I).$$

Рассмотрим также аналогичную задачу с замкнутым максимальным аккретивным оператором:

$$\mathcal{B}\frac{dy}{dt} = -(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)y + g(t), \quad y(0) = y^0. \tag{5.1}$$

Оператор $\mathcal{B}$ самосопряжённый, положительно определённый и ограниченный в $\mathcal{H}$, значит, для него существует оператор $\mathcal{B}^{-1}$, обладающий теми же свойствами. Тогда из (5.1) имеем:

$$\frac{dy}{dt} = -\mathcal{B}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)y + \mathcal{B}^{-1}g(t), \quad y(0) = y^0. \tag{5.2}$$

Введём в $\mathcal{H}$ эквивалентную норму по формуле

$$\langle y, y\rangle := (\mathcal{B}y, y)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{B}^{1/2}y, \mathcal{B}^{1/2}y)_{\mathcal{H}}.$$

Эквивалентность этой нормы стандартной норме следует из свойств оператора $\mathcal{B}$.

Легко проверить, что оператор $\mathcal{B}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)$ будет максимальным аккретивным в новом скалярном произведении, и тогда $-\mathcal{B}^{-1}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы. Поэтому по теореме Филлипса (см. [4, с.166]) задача Коши (5.2) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$, если выполнены следующие условия

$$y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a), \quad g(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}). \tag{5.3}$$

Из условий (5.3) получим соответствующие условия на начальные данные исходной задачи (2.2)-(2.11).

Так, из принадлежности элемента y^0 области определения оператора $\mathcal{A}$ следует, что

$$\vec{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \zeta^0 \in \mathcal{D}(G_1) = H_\Gamma^{1/2}.$$

Аналогично получим условие для $\vec{f}_k(t)$:

$$\vec{f}_k(t) \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega_k))), \quad k = 1, 2.$$

Определение 1. Будем говорить, что исходная начально-краевая задача (2.2)-(2.11) имеет сильное решение $\{\vec{u}_1(t); \vec{u}_2(t); \zeta(t)\}$ на отрезке $[0, T]$, если выполнены следующие условия:

1. $\vec{u}_k(t) \in C^1([0, T]; \vec{J}_{0,S}(\Omega_k))$, k=1,2;
2. $\vec{v}_1(t) = I_{0,1}(t)\vec{u}_1(t)$ (см. (2.3)) обладает свойством $\vec{v}_1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$;
3. $\zeta(t) \in C^1([0, T]; H_\Gamma^{1/2})$;
4. для любого $t \in [0, T]$ выполнена система уравнений (3.22)-(3.23), где все слагаемые в первом уравнении — элементы из $C([0, T]; \vec{J}_{0,S}(\Omega_1))$, а во втором — элементы из $C([0, T]; H_\Gamma^{1/2})$;
5. выполнены начальные условия (3.24). □

Сформулируем теперь теорему существования и единственности сильного решения задачи (2.2)-(2.11).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A), \quad \vec{u}_2 \in \vec{H}^1(\Omega_2) \cap \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2), \quad \zeta^0 \in H_\Gamma^{1/2}, \tag{5.4}$$

$$\vec{f}_k(t) \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega_k)), \quad k = 1, 2;$$

тогда начально-краевая задача (2.2)-(2.11), *имеет единственное сильное решение на* $[0; T]$.

Доказательство. Доказательство, основанное на обратном переходе от задачи Коши (5.2) к начально-краевой задаче (2.2)-(2.11) с использованием результатов лемм 2, 3-7, проводится по схеме доказательства теорем 2, 3 и 5 работы [2] и здесь не приводится. □

5.2. Теорема о разрешимости. Второй подход

При исследовании задачи Коши (4.7)-(4.10) возможен ещё один подход, связанный с факторизацией операторной матрицы (4.9) по Шуру-Фробениусу.

Лемма 8. *Операторная матрица $\mathcal{A}$ из (4.9) допускает факторизацию вида*

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} A & \hat\alpha A^{1/2} & bG \\ -\hat\alpha^\tau A^{1/2} & \hat\beta & 0 \\ -bG^* & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\hat\alpha^\tau A^{-1/2} & \hat I & 0 \\ -bQA^{-1/2} & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & (\hat\beta+\hat\alpha^\tau\hat\alpha) & \hat\alpha^\tau bQ^+ \\ 0 & b\hat\alpha Q & b^2QQ^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \hat\alpha A^{-1/2} & bA^{-1/2}Q^+ \\ 0 & \hat I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$Q:=G^*A^{-1/2}\in\mathcal{L}(\vec J_{0,S_1}(\Omega_1);\tilde H_\Gamma^{1/2}\subset H_\Gamma^{1/2}),$$

$$Q^+=A^{-1/2}G\in\mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2};\vec J^1_{0,S_1}(\Omega_1)).$$

Замыкание $\bar{\mathcal{A}}$ операторной матрицы $\mathcal{A}$ представляется в виде

$$\bar{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\hat\alpha^\tau A^{-1/2} & \hat I & 0 \\ -bQA^{-1/2} & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & (\hat\beta+\hat\alpha^\tau\hat\alpha) & \hat\alpha^\tau bQ^* \\ 0 & b\hat\alpha Q & b^2QQ^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \alpha A^{-1/2} & bA^{-1/2}Q^* \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$$Q^*:=\overline{Q^+}\quad (\text{см. } (3.25)),$$

и этот оператор действует на области определения

$$\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}})=\{y=(\vec u;\vec\psi;\eta)^\tau : \vec u+\hat\alpha A^{-1/2}\hat\psi+bA^{-1/2}Q^*\eta\in\mathcal{D}(A)\},$$

совпадающей, очевидно, с (4.17), *по закону (сравн. с* (4.18))

$$\bar{\mathcal{A}}y=\begin{pmatrix} A(\vec u+\hat\alpha A^{-1/2}\hat\psi+bA^{-1/2}Q^*\eta) \\ -\hat\alpha^\tau A^{1/2}\vec u+\hat\beta\hat\psi \\ -bG^*\vec u \end{pmatrix},\quad y\in\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}).$$

□

Учитывая, что крайние сомножители в (5.5) обратимы и равны сумме единичного и компактного оператора, а средний множитель — квазидиагональный самосопряжённый неотрицательный оператор, рассмотрим задачу Коши с замкнутым оператором из (5.5):

$$\mathcal{B}\frac{dy}{dt}=-(\mathcal{J}-\mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0(\mathcal{J}+\mathcal{F}_2)y+g(t),\quad y(0)=y^0, \tag{5.6}$$

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\hat{\alpha}^{\tau} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ -bQA^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \tag{5.7}$$

где $\mathcal{A}_0$ средний сомножитель из (5.5).

Осуществляя в задаче (5.6) замену искомой функции

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)y(t) =: w(t),$$

после применения к обеим частям оператора $(\mathcal{J}+\mathcal{F}_2)\mathcal{B}^{-1}$ получим для $w(t)$ задачу Коши

$$\frac{dw}{dt} = -(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0 w + \mathcal{B}^{-1}g(t), \quad w(0) = w^0, \tag{5.8}$$

где учтено, что

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)^{-1} = (\mathcal{J} - \mathcal{F}_2), \quad (\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)\mathcal{B}^{-1}g(t) = \mathcal{B}^{-1}g(t).$$

В задаче (5.8) оператор $-\mathcal{A}_0$ является самосопряжённым неположительным оператором и потому — генератором аналитической полугруппы операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Так как операторы $\mathcal{F}_k$ из (5.7) — компактные, то оператор

$$-(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0 = -(\mathcal{J} + \mathcal{F})\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}_0,$$

(где $\mathcal{F} := \mathcal{F}_2 - \mathcal{B}^{-1}\mathcal{F}_1\mathcal{B} - \mathcal{F}_2\mathcal{B}^{-1}\mathcal{F}_1\mathcal{B} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$) также является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащем положительную полуось. Значит, уравнение (5.8) является абстрактным параболическим, и для его сильной разрешимости требуется выполнение условий

$$\begin{gathered} w(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus L_{2,\Gamma}, \\ g(t) \in C^\delta([0,T];\mathcal{H}), \quad 0 < \delta \leq 1. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Повторяя рассуждения, проведенные в п.5.1, с учётом условий (5.9), сформулируем без доказательства следующую теорему о разрешимости исходной начально-краевой задачи (2.2)-(2.11) (см.[2, теоремы 4,5]).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (5.4), *а условия для* $\vec{f}_k(t,x)$ *заменены менее ограничительными:*

$$\vec{f}_k(t,x) \in C^\delta([0,T];\vec{L}_2(\Omega_k)), \quad k = 1,2, \quad 0 < \delta \leq 1.$$

Тогда задача (2.2)-(2.11) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$. □

5.3. К задаче о нормальных колебаниях гидросистемы

Рассмотрим теперь постановку задачи о малых нормальных движениях исследуемой гидросистемы, т.е. о таких решениях однородной задачи (5.1) с замкнутым основным оператором, которые зависят от t по закону

$$y(t) := (\vec{u}(t); \hat{\psi}(t); \eta(t))^\tau = (\vec{u}; \hat{\psi}; \eta)^\tau e^{-\lambda t},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексный декремент затухания, а $(\vec{u}; \hat{\psi}; \eta)^\tau$ — амплитудный элемент.

Тогда для отыскания амплитудных элементов возникает спектральная задача

$$\begin{aligned} &A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{1/2}\vec{\psi}_j + b(G^*A^{-1/2})^*\eta) = \lambda B\vec{u}, \\ &-\alpha_j^{1/2}A^{1/2}\vec{u} + \beta_j\vec{\psi}_j = \lambda\vec{\psi}_j, \quad j = \overline{1,m}, \\ &-bG^*\vec{u} = \lambda\eta. \end{aligned} \tag{5.10}$$

В случае $\lambda = 0$ приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} &A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{1/2}\vec{\psi}_j + bQ^*\eta) = \vec{0}, \\ &\beta_j\vec{\psi}_j = \alpha_j^{1/2}A^{1/2}\vec{u}, \quad j = \overline{1,m}, \\ &bG^*\vec{u} = \vec{0}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Из последней связи получаем, что $\vec{u} = \vec{0}$, тогда из второго соотношения следует, что $\vec{\psi}_j = \vec{0}$, $j = \overline{1,m}$, и, наконец, из первого — $\eta = 0$ в силу обратимости оператора Q^*. Таким образом, задача (5.11) имеет лишь тривиальное решение, т.е. $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (5.10).

Рассмотрим ещё случай, когда $\lambda = \beta_l$, $l = \overline{1,m}$. Вместо (5.10) теперь будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} &A^{1/2}(A^{1/2}\vec{u} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{1/2}\vec{\psi}_j + bQ^*\eta) = \beta_l B\vec{u}, \\ &-\alpha_j A^{1/2}\vec{u} + \beta_j\vec{\psi}_j = \beta_l\vec{\psi}_j, \quad j = \overline{1,m}, \\ &-bG^*\vec{u} = \beta_l\eta. \end{aligned}$$

Из второго соотношения при $j = l$ заключаем, что $\vec{u} = \vec{0}$ в силу обратимости оператора $A^{1/2}$. Тогда из третьего уравнения получим, что $\eta = 0$, а из второго при $j \neq l$ — свойство $\vec{\psi}_j = \vec{0}$. Подставляя эти результаты в первое уравнение, приходим к выводу, что $\vec{\psi}_l = \vec{0}$, т.е. $\lambda = \beta_l$, $l = \overline{1,m}$, тоже не является собственным значением задачи (5.10).

Опираясь на эти факты, преобразуем при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \beta_l$, $l = \overline{1,m}$, задачу (5.10) к спектральной проблеме для одного искомого элемента, исключив $\vec{\psi}_j$ и η. Имеем

$$\vec{\psi}_j = (\beta_j - \lambda)^{-1}\alpha_j^{1/2}A^{1/2}\vec{u}, \quad j = \overline{1,m}, \quad \eta = -\lambda^{-1}bG^*\vec{u},$$

и тогда $\vec{u}$ является собственным элементом задачи

$$A^{1/2}\vec{u} + \sum_{j=1}^{m}\alpha_j(\beta_j - \lambda)^{-1}A^{1/2}\vec{u} - \lambda^{-1}b^2(G^*A^{-1/2})^*G^*\vec{u} = \lambda A^{-1/2}B\vec{u}$$

Осуществляя ещё здесь замену

$$A^{1/2}\vec{u} =: \vec{\varphi} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1),$$

приходим к спектральной проблеме

$$L(\lambda)\vec{\varphi} := (e_0(\lambda)I - \lambda^{-1}b^2(G^*A^{-1/2})^*(G^*A^{-1/2}) - \lambda A^{-1/2}BA^{-1/2})\vec{\varphi} = \vec{0} \qquad (5.12)$$

$$e_0(\lambda) := 1 + \sum_{j=1}^{m}\alpha_j(\beta_j - \lambda)^{-1},$$

в пространстве $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ для операторного пучка $L(\lambda)$.

В этом пучке $\tilde{A} := A^{-1/2}BA^{-1/2}$ — компактный положительный оператор, действующий в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, а $\tilde{B} := (G^*A^{-1/2})^*(G^*A^{-1/2})$ — неотрицательный компактный оператор.

Пучок $L(\lambda)$ по своим общим свойствам операторных коэффициентов совпадает с пучком, возникшем в проблеме нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде (см. [5, 13, 14], а также [8, 6], [12, глава 11]). Подробное исследование свойств решений спектральных задач для операторных пучков подобного вида описано, например, в параграфах 11.1-11.5 из [12]. Поэтому ниже сформулируем без доказательств общие свойства решений спектральной задачи (5.12).

1. Спектр задачи (5.12) дискретный, расположен в правой комплексной полуплоскости и имеет $m+2$ ветви конечнократных положительных собственных значений с предельными точками $\lambda = 0$, $\lambda = +\infty$, а также точками γ_j, $e_0(\gamma_j) = 0$, $j = \overline{1,m}$. Кроме того, задача (5.12) может иметь ещё конечное число невещественных собственных значений, расположенных симметрично относительно вещественной оси.

2. Предельной точке $\lambda = +\infty$ отвечает ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(\infty)}\}_{k=1}^{\infty}$ с асимптотическим поведением

$$\lambda_k^{(\infty)} = \lambda_k^{-1}(\tilde{A})[1 + o(1)] \quad (k \to \infty),$$

а соответствующая этой ветви система собственных элементов $\{\vec{\varphi}_k^{(\infty)}\}_{k=1}^{\infty}$ (диссипативные волны в вязкоупругой жидкости) образует базис Рисса с конечным дефектом в пространстве $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и даже p-базис (с дефектом) для некоторого $p > 0$.

3. Предельной точке $\lambda = 0$ отвечает ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$, расположенных на промежутке $[0, \beta_1)$ и имеющая асимптотическое поведение

$$\lambda_k^{(0)} = b^2 \lambda_k(\tilde{B})[1 + o(1)], \quad (k \to \infty).$$

Соответствующая этой ветви система собственных элементов $\{\vec{\varphi}_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty}$ (поверхностные волны) вместе с базисом из $\ker \tilde{B}$ образует базис Рисса (с дефектом) в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ и даже p-базис (с дефектом).

4. Предельным точкам γ_j, $j = \overline{1, m}$, отвечают ветви собственных значений $\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, расположенных на промежутках $[\gamma_j, \beta_{j+1})$. Соответствующие этим ветвям системы собственных элементов $\{\vec{\varphi}_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ (вязкоупругие волны) образуют базис Рисса (с дефектом) и даже p-базис (с дефектом) в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$.

5. Задача (5.12) может иметь в качестве решений не только апериодически затухающие волны в вязкоупругой жидкости (см. свойства 2-4), но и конечное число затухающих осциллирующих волн, отвечающих невещественным собственным значениям. Если вязкость жидкости μ_1 достаточно велика, эти промежуточные осциллирующие волны отсутствуют, а упомянутые выше свойства базисности с конечным дефектом заменяются на свойства полной базисности.

Список цитируемых источников

1. *Агранович, М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей. // Успехи матем. наук. — 2002. — Т. 57, Вып. 5(347). — С. 3–78.

   Agranovich, M. S. Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in smooth and non-smooth domains. Russian Mathematical Surveys, 57:5(347), 3-78 (2002).

2. *Копачевский, Н. Д.* О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд. // Динамические системы. — 2017. — Т.7 (35), №1 — С. 109-145.

   Kopachevsky, N. D. Small motions of two viscoelastic fluids in stationary containers. Dynamical Systems 7(35), No.1, 109–145 (2017). (in Russian)

3. *Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo Zuy Kan Operator methods in linear hydrodynamic. Evolutional and Spectral problems. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)

4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

   Krein S. G. Linear differential equations in Banach space. Moscow: Nauka, 1967. (in Russian)

5. *Милославский, А. И.* Спектральный анализ малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом контейнере / Институт математики НАН Украины. — Киев, 1989. — Деп. рукопись №1221.

   Miloslavskii, A. I. Spectral Analysis of Small Oscillations of Visco-elastic fluid in the open container / Institute of mathematics NAS of Ukraine, Preprint №1221, Kiev, 1989.

6. *Сёмкина, Е. В.* Вольтерровы интегродифференциальные уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве и ассоциированные спектральные задачи. // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки». — 2012. — Т.25 (64), № 2 — С. 79-111.

   Syomkina, E. V. Linear Volterra integro-differential first-order equations in Hilbert space and corresponding spectral problems. Scientific notes of V. I. Vernadsky Taurida national University. Series "Mathematics 25(64):2, 79–111 (2012).
7. *Agranovich, M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary. // Russian Journal of Mathematical Physics — 2008. — Vol. 15., No.2. — P. 146–155.
8. *Azizov, T. Ya., Kopachevskii, N. D., Orlova, L. D.* Evolution and Spectral Problems Related to Small Motions of Viscoelastic Fluid // Proceedings of the St.-Petersburg Math. Society, Vol. VI. AMS Translations (2) —2000. — Vol. 199. — P. 1–24.
9. *Eirich, F. R.* Rheology. Theory and Applications. — New York: Academic Press, 1956. — 761p.
10. *Galiardo, E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova — 1957. — Vol. 27. — P. 284–305.
11. *Kopachevsky, Nikolay D., Krein, Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. — Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.128) — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2001. — 384 p.
12. *Kopachevsky, Nikolay D., Krein, Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics.. — Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.146) — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2003. — 444 p.
13. *Miloslavskii, A. I.* Stability of a viscoelastic isotropic medium // Soviet Physics Doklady. — 1988. — Vol. 33 — P. 300.
14. *Miloslavskii, A. I.* Stability of certain classes of evolution equations // Siberian Mathematical Journal. —1985. — Vol. 26, No.5. — P. 723–735.

Получена 06.11.2017