

# ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

---

Математический журнал

**Главный редактор:** д-р физ.-мат. наук О. В. Анашкин, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь.

**Заместитель главного редактора:** д-р физ.-мат. наук О. В. Починка, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород.

**Редакционная коллегия:**

Е. П. Белан, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

А. Т. Барабанов, д-р техн. наук, Севастопольский государственный ун-т, Севастополь;

В. З. Гринес, д-р физ.-мат. наук, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород;

Г. В. Демиденко, д-р физ.-мат. наук, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;

А. Л. Зуев, д-р физ.-мат. наук, Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany;

Н. Д. Копачевский, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

В. А. Лукьяненко, канд. физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

М. А. Муратов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

И. В. Орлов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

Г. С. Осипенко, д-р физ.-мат. наук, Севастопольский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, Севастополь;

В. Н. Тхай, д-р физ.-мат. наук, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Москва;

А. Ф. Хрусталева, д-р физ.-мат. наук, Севастопольский государственный ун-т, Севастополь;

В. Н. Чехов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь.

**Том 7(35), №2, 101-204.**

*Печатается по решению Научно-технического Совета КФУ протокол № 7 от 14.09.2017.*

**ISSN 0203–3755**

**Адрес редакционной коллегии:** Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, к. 203В, пр-т Вернадского, 4, Симферополь 295007, Россия. Тел. +7 978 7715582. E-mail: dynsys2011@yandex.ru

© Крымский федеральный ун-т, 2017

MSC 2010: 37C05, 37D15

# On obstructions to the existence of a simple arc, connecting the multidimensional Morse-Smale diffeomorphisms<sup>1</sup>

A. Dolgonosova, E. Nozdrinova, O. Pochinka

Higher School of Economics

Nizhny Novgorod. E-mail: [adolgonosova@hse.ru](mailto:adolgonosova@hse.ru), [maati@mail.ru](mailto:maati@mail.ru), [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru)

**Abstract.** In this paper we consider Morse-Smale diffeomorphisms defined on a multidimensional nonsimply connected closed manifold  $M^n$ ,  $n \geq 3$ . For such systems, the concept of trivial (nontrivial) connectedness of their periodic orbits is introduced. It is established that isotopic trivial and nontrivial diffeomorphisms can not be joined by an arc with codimension one bifurcations. Examples of such pair of Morse-Smale cascades on the manifold  $S^{n-1} \times S^1$  are constructed.

**Keywords:** Morse-Smale diffeomorphisms, bifurcation, smooth arc

## 1. Introduction and a formulation of results

The present paper has dealt with a solution of the Palis-Pugh problem [10] on the existence of an arc with a finite or countable set of bifurcations connecting two Morse-Smale systems on a smooth closed manifold  $M^n$ . S. Newhouse and M. Peixoto [8] proved that any Morse-Smale vector fields can be connected by a simple arc. Simplicity means that the arc consists of the Morse-Smale systems with the exception in a finite set of points in which the vector field deviates by at least way (in a certain sense) from the Morse-Smale system. Below we give a definition of the simple arc for discrete Morse-Smale systems.

Let  $Diff(M^n)$  be the space of diffeomorphisms on a closed manifold  $M^n$  with  $C^1$ -topology and  $MS(M^n)$  be the subset of Morse-Smale diffeomorphisms. *Smooth arc* in  $Diff(M^n)$  is a smooth map

$$\xi: M^n \times [0, 1] \rightarrow M^n,$$

that is a smoothly depending on  $(x, t) \in M^n \times [0, 1]$  family of diffeomorphisms

$$\{\xi_t \in Diff(M^n), t \in [0, 1]\}.$$

The arc  $\xi$  is called *simple* if  $\xi_t \in MS(M^n)$  for every  $t \in ([0, 1] \setminus B)$ , where  $B$  is a finite set and for  $t \in B$  diffeomorphisms undergo bifurcations of the following types: saddle-node, doubling period, heteroclinic tangency (see section 3 for details).

---

<sup>1</sup>The construction of simple arc was financial supported by RSF (Grant No. 17-11-01041), a study of the simple connectivity components was supported by the fundamental research program of the HSE (project 90) in 2017.

As follows from the papers by Sh. Matsumoto [6] and P. Blanchar [1], any oriented closed surface admits isotopic Morse-Smale diffeomorphisms, who can not be connected by a simple arc. In the paper by V. Grines and O. Pochinka [3] necessary and sufficient conditions were found for the fact that the Morse-Smale diffeomorphism without heteroclinic intersections on the 3-sphere is connected by a simple arc with the “source-sink” diffeomorphism. They also constructed examples of Morse-Smale diffeomorphisms on the 3-sphere that are not joined by a simple arc due to the wild embeddings of all saddle separatrices for one of them.

In the present paper we consider a  $f \in MS(M^n)$  which defined on a multidimensional not simply connected manifold  $M^n$  for  $n \geq 3$ . Denote by  $MS_0(M^n)$  the class of homotopic to identity Morse-Smale diffeomorphisms. Let  $f \in MS_0(M^n)$ . Through  $\mathcal{O}_x$  we denote the orbit of the point  $x \in M^n$  under the diffeomorphism  $f$ . Let  $\gamma \in H_1(M^n)$ .

Following to [6], we say that a periodic orbit  $\mathcal{O}_p$  is *homologically  $\gamma$ -related* to a periodic orbit  $\mathcal{O}_q$  if there is a curve  $c \subset M^n$  such that  $\partial c = \{q\} - \{p\}$  and for some integer  $N$  such that  $f^N(p) = p$  and  $f^N(q) = q$ ,  $[f^N(c) - c] = N\gamma$ . The definition independents on the choice  $c, N, p \in \mathcal{O}_p, q \in \mathcal{O}_q$ . We say that  $f$  is *trivial* if all periodic orbits of the diffeomorphism  $f$  are 0-related otherwise  $f$  is *nontrivial*.

In section 2 isotopic diffeomorphisms  $f_0, f_1 \in MS_0(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1), n \geq 3$  will constructed, one of which is trivial, the other is nontrivial. The main result of this paper is the following theorem.

**Theorem.** *There is no simple arc connecting a trivial diffeomorphism with a nontrivial diffeomorphism from the class  $MS_0(M^n)$ .*

## 2. The construction of a trivial-nontrivial pair of isotopic diffeomorphisms

Let

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

For the sphere  $\mathbb{S}^1$  also consider its complex form

$$\mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi\beta}, \beta \in [0; 1]\}.$$

Define a diffeomorphism  $\phi: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  by the formula:

$$\phi(\beta) = \beta + \beta(\beta - 1) \left( \beta - \frac{1}{2} \right).$$

Dynamics of a diffeomorphism of the circle sending a point  $e^{i2\pi\beta}$  to the point  $e^{i2\pi\phi(\beta)}$  is shown in Figure 1. Notice that the diffeomorphism  $\phi$  is isotopic to the identity since there is an isotopy  $\phi_t: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  given by the formula:

$$\phi_t(\beta) = \beta + t\beta(\beta - 1) \left( \beta - \frac{1}{2} \right),$$

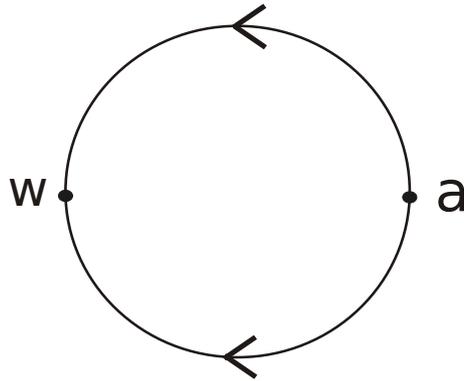


Fig. 1. Source-sink on the circle

for which  $\phi_0 = id$  and  $\phi_1 = g$ .

For  $n > 2$  let us define a diffeomorphism  $\psi: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  by the formula:

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \frac{4x_1}{5 - 3x_n}, \frac{4x_2}{5 - 3x_n}, \dots, \frac{5x_n - 3}{5 - 3x_n} \right).$$

Figure 2 depicts the dynamics of such a diffeomorphism for  $n = 3$ . The diffeomorphism

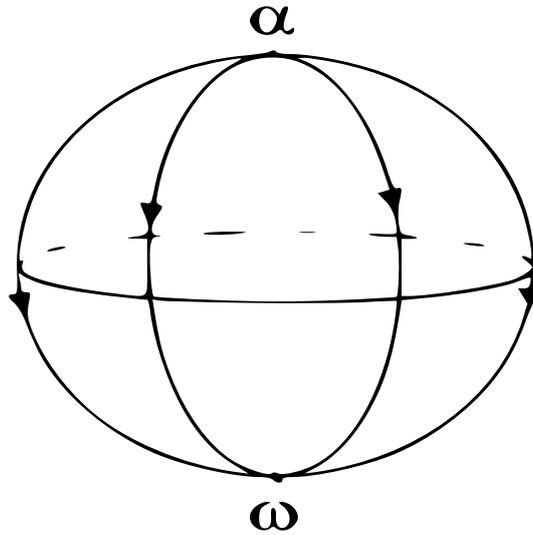


Fig. 2. Source-sink on the sphere

$\psi$  is also isotopic to the identity since there exists an isotopy  $\psi_t: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  given by the formula:

$$\psi_t(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \frac{x_1(1 + 3t)}{t(4 - 3x_n) + 1}, \frac{x_2(1 + 3t)}{t(4 - 3x_n) + 1}, \dots, \frac{t(4 - 3) + x_n}{t(4 - 3x_n) + 1} \right),$$

for which  $\psi_0 = id$  and  $\psi_1 = \psi$ .

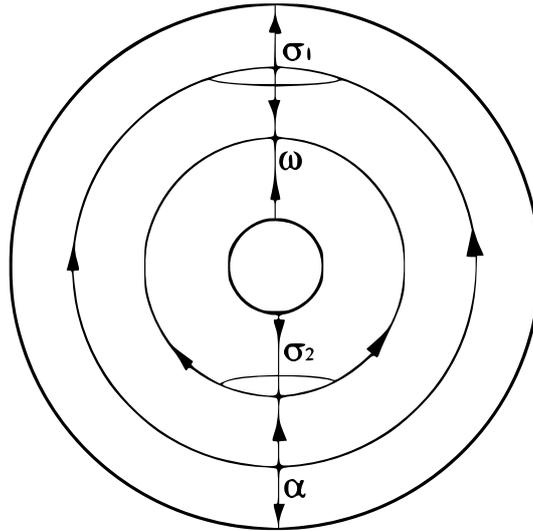


Fig. 3. Dynamic of the trivial diffeomorphism  $f_0: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

Let us consider the Cartesian product of our spheres  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  and define a diffeomorphism  $f_0: \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  by the formula:

$$f_0(x_1, \dots, x_n, e^{i2\pi\beta}) = (\psi(x_1, \dots, x_n), e^{i2\pi\phi(\beta)}).$$

By construction, the diffeomorphism  $f_0$  is a Morse-Smale diffeomorphism and its non-wandering set consists of one sink, one source, and two saddle points whose invariant manifolds do not intersect. Figure 3 shows a phase portrait for the case  $n = 3$ . Since there is an isotopy

$$f_{0,t}(x_1, \dots, x_n, e^{i2\pi\beta}) = (\psi_t(x_1, \dots, x_n), e^{i2\pi\phi_t(\beta)})$$

such that  $f_{0,0} = id$  and  $f_{0,1} = f_0$ , hence the diffeomorphism  $f_0$  is isotopic to the identity. In addition, it is easy to see that all its fixed points are trivially related.

On the sphere  $\mathbb{S}^{n-1}$  let us consider a subset of points  $(x_1, \dots, x_n)$ , for which  $x_n \in [0, \frac{3}{5}]$  (see Figure 4 for the case  $n = 3$ ). It is diffeomorphic to  $n$ -dimensional annulus, denote it by  $\mathbb{L}$ . In the cartesian product  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  we obtain a subset  $\mathbb{K} = \mathbb{L} \times \mathbb{S}^1$ ,  $x_n \in [0, \frac{3}{5}]$ . We define a diffeomorphism  $\varphi: \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  which is the identity outside  $\mathbb{K}$  and on  $\mathbb{K}$  is given by the formula:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, e^{i2\pi\beta}) = (x_1, \dots, x_n, e^{i2\pi(\beta + \frac{5}{3}x_n)}).$$

We show that the diffeomorphism  $\varphi$  is isotopic to the identity. To do this, we construct the isotopy  $\varphi_t$  as follows:

- 1)  $\varphi_t = id$  on the set  $\mathbb{K}^- = \{x_1, \dots, x_n, e^{i2\pi\beta} \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 : x_n < 0\}$ ;
- 2)  $\varphi_t(x_1, \dots, x_n, e^{i2\pi\beta})(x_1, \dots, x_n, e^{i2\pi(\beta + \frac{5}{3}x_n t)})$  on the set  $\mathbb{K}$ ;

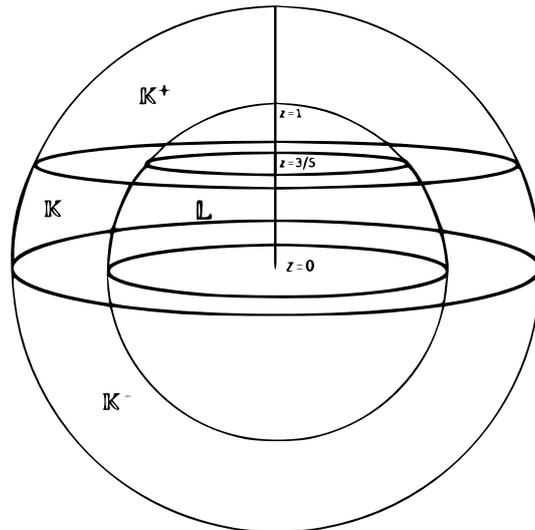


Fig. 4. The parts of  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

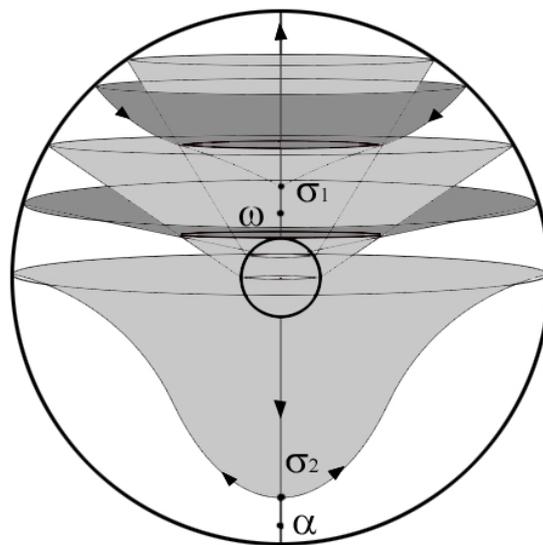


Fig. 5. Dynamic of the nontrivial diffeomorphism  $f_0: \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

3)  $\varphi_t(x_1, \dots, x_n, e^{i2\pi\beta}) = (x_1, \dots, x_n, e^{i2\pi(\beta+t)})$  on the set  $\mathbb{K}^+ = \{(x_1, \dots, x_n, e^{i2\pi\beta}) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 : x_n \in [\frac{3}{5}, 1)\}$ .

From the construction of isotopy  $\varphi_t$  it's clear that  $\varphi_0 = id, \varphi_1 = \varphi$ . We define a diffeomorphism  $f_1: \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  formula

$$f_1 = \varphi f_0.$$

Then the diffeomorphism  $f_1$  is isotopic to the identity by means of the isotopy  $f_{1,t} = \varphi_t f_{0,t}$ . By construction, the diffeomorphism  $f_1$  is a Morse-Smale diffeomorphism, its

non-wandering set consists of one sink, one source, and two saddle points whose two-dimensional manifolds intersect along a countable set of compact heteroclinic curves. In addition, the saddle points are not trivially related. In Figure 5 we show the Morse-Smale diffeomorphism  $f_1$  for the case  $n = 3$ .

### 3. Simple arcs

Let us consider a smooth map  $\xi: M^n \times [0, 1] \rightarrow M^n$  — a smooth arc such that  $\xi_t \in MS(M^n)$  for every  $t \in ([0, 1] \setminus B)$ , where  $B$  is a finite set. For a generic set of such arcs, the diffeomorphism  $\xi_b$ ,  $b \in B$  has the finite non-wandering set, has no cycles and under the direction of motion along the arc, undergoes bifurcations of the following types: saddle-node, doubling period, heteroclinic tangency, for exact details see, for example, [7]. Below we give an information about these bifurcations, for exact details see, for example, [5].

Let  $p$  be a fixed point of a diffeomorphism  $f: M^n \rightarrow M^n$ . Differential  $Df_p$  induces a decomposition of the tangent space  $T_p M^n$  into a direct sum of invariant subspaces

$$T_p M^n = E^u \oplus E^c \oplus E^s.$$

Linear maps  $Df_p|_{E^u}$ ,  $Df_p|_{E^c}$ ,  $Df_p|_{E^s}$  have eigenvalues, respectively, outside, on the boundary, inside the unit disc. There exists a unique smooth invariant submanifold  $W_p^u$  ( $W_p^s$ ) of the manifold  $M^n$  tangent to  $E^u$  ( $E^s$ ) at the point  $p$  and possessing the property

$$W_p^u = \{y \in M^n : \lim_{k \rightarrow -\infty} f^k(y) = p\} \quad (W_p^s = \{y \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(y) = p\}).$$

It is called by *unstable (stable) manifold* of the point  $p$ . In particular, if  $\dim E^c = 0$ , the point  $p$  is *hyperbolic*. Otherwise, there exists a smooth invariant submanifold  $W_p^c$  of the manifold  $M^n$  tangent to  $E^c$  at the point  $p$ . It is called the *central manifold* of a nonhyperbolic fixed point. A central manifold is not unique but the maps  $f|_{W_p^c}$  and  $f|_{\tilde{W}_p^c}$  are topologically conjugated for any central manifolds  $W_p^c$  and  $\tilde{W}_p^c$ .

The *central, stable and unstable manifolds* of a periodic point of period  $k$  is defined as the corresponding manifolds of this point as a fixed point of the diffeomorphism  $f^k$ .

In the explanatory drawings, double arrows schematically show the directions of motion with exponential contraction and expansion, and single directions indicate the directions of motion along the central manifold of the nonhyperbolic point.

1. All periodic orbits of the diffeomorphism  $\xi_b$  are hyperbolic with an exception in a one orbit  $\mathcal{O}_p$  of the period  $k$  for which all eigenvalues of  $(Df^k)_p$  different from 1 by absolute values except one  $\lambda = 1$ . The stable and the unstable manifolds of different periodic orbits of the diffeomorphism  $\xi_b$  intersect transversely and  $W_p^s \cap W_p^u = \{p\}$ . The transition through  $\xi_b$  is accompanied by a confluence and further disappearance of hyperbolic periodic points of the same period. This bifurcation is called *saddle-node* (see Figure 6).

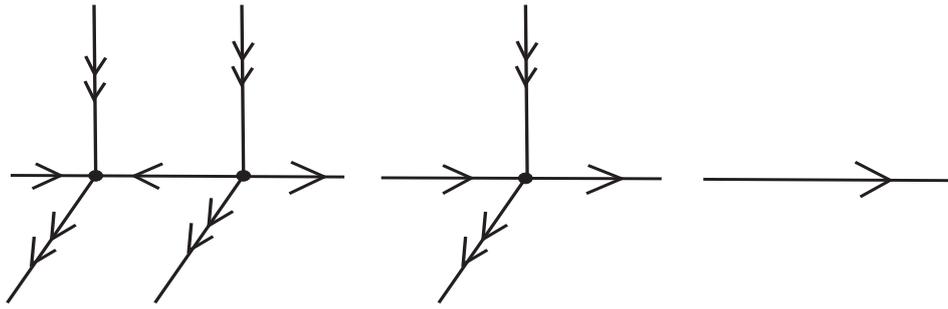


Fig. 6. Saddle-node bifurcation

2. All periodic orbits of the diffeomorphism  $\xi_b$  are hyperbolic with an exception in a one orbit  $\mathcal{O}_p$  of the period  $k$  for which all eigenvalues of  $(Df^k)_p$  different from 1 by the absolute value except one  $\lambda = -1$ . The stable and the unstable manifolds of different periodic orbits of the diffeomorphism  $\xi_b$  intersect transversely and  $W_p^s \cap W_p^u = \{p\}$ . By passing through  $\xi_b$  along the central manifold an attractor becomes a repeller and a periodic hyperbolic orbit of the period  $2k$  is generated. Such a bifurcation is called a *doubling period* (see Figure 7).

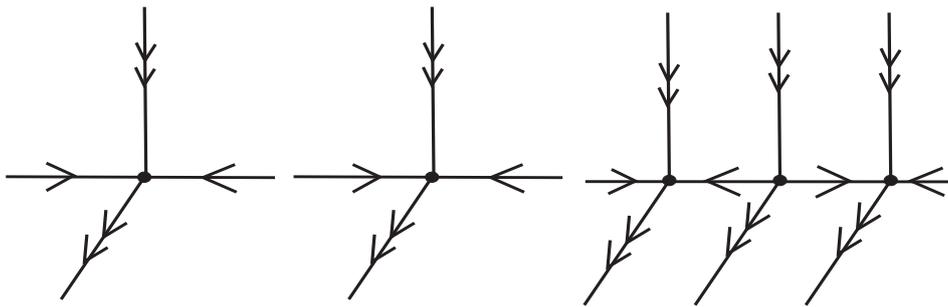


Fig. 7. Doubling period bifurcation

3. All periodic orbits of the diffeomorphism  $\xi_b$  are hyperbolic, their stable and unstable manifolds have transversal intersections everywhere except for one trajectory along which the intersection is quasi-transversal. Such a bifurcation is called a *bifurcation of a heteroclinic tangency* (see Figure 8).

#### 4. Proof of the main result

In this section we prove Theorem. Namely, we consider two homotopic to identity Morse-Smale diffeomorphisms  $f_0, f_1$  given on a not simply connected  $n$ -manifold  $M^n$  such that  $f_0$  is a trivial and the diffeomorphism  $f_1$  is a nontrivial. Let us prove that there is no simple arc joining the diffeomorphisms  $f_0$  and  $f_1$ .

*Proof.* Assume the contrary:  $f_0$  and  $f_1$  can be joined by a simple arc. Then on this arc there are two Morse-Smale diffeomorphisms  $g_0$  and  $g_1$  such that:

- 1)  $g_0$  and  $g_1$  can be connected with a simple arc  $\{g_t\}_{t \in [0,1]}$  with only one bifurcation point,  $g_{\frac{1}{2}} = h$  (see Figure 9);
- 2)  $g_0$  is a trivial diffeomorphism,  $g_1$  — nontrivial.

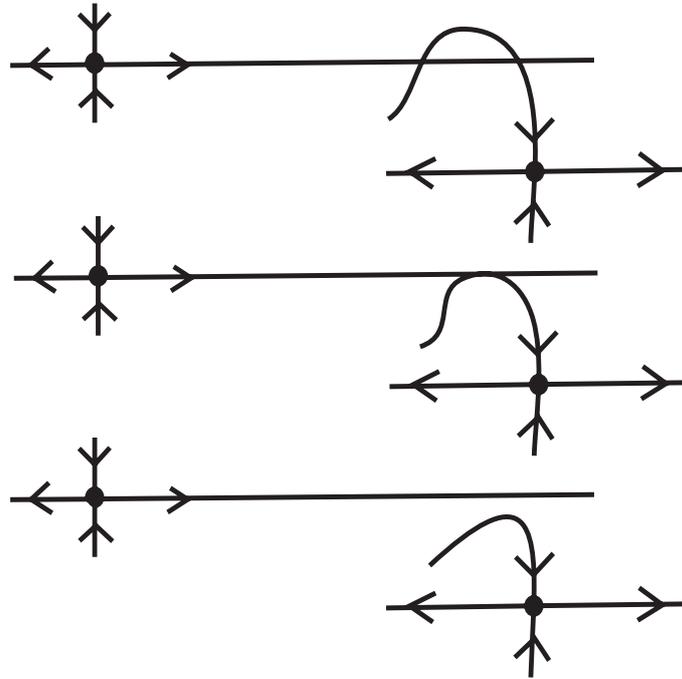


Fig. 8. Bifurcation of the heteroclinic tangency

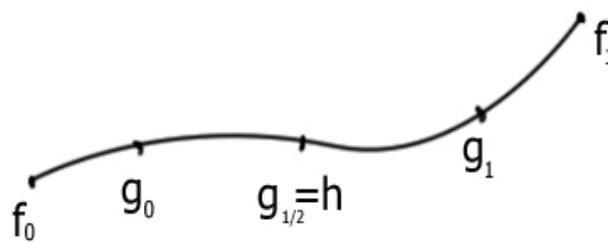


Fig. 9.

From the description of possible for a simple arc bifurcations (see the section 3) it follows that the non-wandering set  $\Omega_h$  of the diffeomorphism  $h$  has a periodic orbit saddle-node  $\mathcal{O}_p$  that is not trivially related to some (and, consequently, with any) other periodic orbit; in a comparison with the Morse-Smale diffeomorphism  $g_t, 0 \leq t < \frac{1}{2}$ ,

two periodic orbits of the different indexes appear for the Morse-Smale diffeomorphism  $g_t$ ,  $\frac{1}{2} < t < 1$ .

Let  $m, k \in \mathbb{N}$  be the dimensions of the unstable, stable manifolds  $W_p^u, W_p^s$  of the point  $p$ . Then  $m + k = n + 1$ . By an analogy with the properties of Morse-Smale diffeomorphisms (see, for example, [2] Theorem 2.1), one can establish that

$$M^n = \bigcup_{x \in \Omega_h} W_x^u = \bigcup_{x \in \Omega_h} W_x^s.$$

Since there are no cycles for the diffeomorphism  $h$ , there are hyperbolic points  $q, r \in \Omega_h$  such that

$$W_p^u \cap W_q^s \neq \emptyset, \quad W_p^s \cap W_r^u \neq \emptyset. \quad (4.1)$$

These points are not node as in this case  $p$  will 0-related with  $q$  or  $r$  by means a curve  $c$  on  $W_q^s$  or  $W_r^u$ . From the transversality of the intersection of the stable and the unstable manifolds of non-wandering points of the diffeomorphism  $h$  it follows that the invariant manifolds  $W_q^s$  and  $W_r^u$  are arbitrarily close to the point  $p$  and, therefore, are close each to other, this means that  $W_q^s \cap W_r^u \neq \emptyset$ .

It means that  $W_q^s \cap W_r^u \neq \emptyset$  for every diffeomorphism  $g_t$  for  $t$  near  $\frac{1}{2}$ . Moreover, if  $t < \frac{1}{2}$  then  $q$  and  $r$  are the nearest saddle points, that is the intersection  $W_q^s \cap W_r^u \neq \emptyset$  consists of a finite number connected components, denote it  $N$ . Then there is compact fundamental domains  $F_s$  of  $f|_{W_q^s \setminus q}$  containing exactly  $N$  connected components in the intersection with  $W_r^u$ . For  $t = \frac{1}{2}$  the conditions (4.1) imply that there is a compact subset  $C_u$  of  $W_r^u \setminus r$  such that the number of the connected components in the intersection  $F_s \cap C_u$  is greater than  $N + 2$ . Due to transversality condition for  $g_t$ ,  $t$  sufficiently near  $\frac{1}{2}$  the number of the connected components in the intersection  $F_s \cap C_u$  is preserving, that is contradicting the definition of  $N$ .  $\square$

## References

1. *Blanchard, P. R.* Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces, *Duke Math. J.* 47:1, 33-46 (1980).
2. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Springer International Publishing Switzerland, 2016.
3. *Grines, V. Z., Pochinka, O. V.* On the simple isotopy class of a source-sink diffeomorphism on a 3-sphere. *Mathematical Notes* 94, No.6, 828-845, (2013).
4. *Grines V., Pochinka O.* Morse-Smale cascades on 3-manifolds, *Russian Mathematical Surveys* 68, No.1, 117-173 (2013).
5. *Hirsch, M. W., Pugh, C. C., Shub, M.* Invariant Manifolds, *Lecture Notes in Math.*, 583, Berlin: Springer-Verlag, 1977.
6. *Matsumoto, S.* There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphism which can not be joined by simple arcs, *Invent. Math.* 51, No.1, 1-7 (1979).
7. *S. Newhouse, J. Palis and F. Takens.* Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms, *Publ. I.H.E.S.* , Vol. 57, 5-71 (1983).

8. *Newhouse, S., Peixoto, M. M.* There is a simple arc joining any two Morse-Smale flows, *Trois etudes en dynamique qualitative*, Asterisque, 31, Soc. Math. France, Paris, 15-41 (1976).
9. *Palis, J., de Melo, W.* Geometric theory of dynamical systems: An introduction. New York: Springer, 1982.
10. *Palis J., Pugh C. C.* Fifty problems in dynamical systems, *Dynamical Systems-Warwick*. Lecture Notes in Math., 468, pp. 345–353, Berlin: Springer-Verlag, 1974.

*Получена 15.06.2017*

MSC 2010: 37B05

# On periodic translations on $n$ -torus<sup>1</sup>

E. D. Kurenkov, K. A. Ryazanova

Higher School of Economics

Nizhny Novgorod. *E-mail:* ekurenkov@hse.ru, ksu\_ryaz@mail.ru

**Abstract.** We consider periodic translations on  $n$ -torus and investigate the set of all conjugating homeomorphisms for topologically conjugated translations. It was shown by J. Nielsen [Dansk Videnskabernes Selskab. Math.-fys. Meddelelser, 1937, Vol.15, 1-77] that two periodic homeomorphisms of two-torus such that all points have the same period are topologically conjugate if and only if they have the same period. We consider the problem when two periodic translations on  $n$ -torus are topologically conjugate by means of toral automorphism. The main result is that two periodic translations on  $n$ -torus of the same period are topologically conjugate by means of countable family of toral automorphisms. Moreover, we show that for two periodic translations that are topologically conjugate each homotopy class in the set of all conjugating homeomorphisms contains continuum of homeomorphisms.

**Keywords:** topological conjugacy, toral automorphism, homotopy.

## 1. Introduction and statement of results

Periodic translations of the  $n$ -dimensional ( $n \geq 2$ ) torus  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  are studied in this paper. The transformation  $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  is called periodic of period  $k$ , if  $f^k = id$ , and for any  $k' < k$  the inequality  $f^{k'} \neq id$  holds.

Periodic translations of two-dimensional surfaces were considered in detail by J. Nielsen [4]. Generally speaking, periodic translations of period  $k$  may have points of a period less than  $k$ . However, orientation-preserving periodic homeomorphisms have only a limited number of points of a period less than  $k$ , while all other points have the same period  $k$ .

In this article we study periodic  $n$ -dimensional translations such that all points have the same period, that are described by a shift to an  $n$ -dimensional vector with rational coordinates. The transformations  $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  have the following form:

$$f(x) = x + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \pmod{1}. \quad (1.1)$$

It is known (see, for example, [3]) that depending on the value of  $\gamma_i$ , the transformation  $f$  can have the following type:

---

<sup>1</sup>The authors thank V. Z. Grines for posing the problem and for useful discussions. The first author also thanks the Russian Science Foundation (project 17-11-01041) for financial support in the proof of Theorems 1 and 2. The study of periodic surface mappings was carried out within the framework of the fundamental research program of the HSE in 2017 (T-90 project).

1. If all  $\gamma_i$  are rational, then all the points of  $f$  have a period equal to the lowest common denominator of all  $\gamma_i$ ;
2. If  $\gamma_i$  are linearly independent over the field  $\mathbb{Q}$ , then  $f$  is topologically transitive and the trajectory of each point  $x \in \mathbb{T}^n$  is dense in  $\mathbb{T}^n$ ;
3. If  $\gamma_i$  are linearly dependent over  $\mathbb{Q}$ , but not all  $\gamma_i$  are rational, then the closure of the trajectory of any points of  $x \in \mathbb{T}^n$  is a finite union of  $k$ -dimensional tori  $\mathbb{T}^k$ , where  $1 \leq k \leq n - 1$ .

We denote by  $G_n$  the set of all periodic homeomorphisms of the  $n$ -dimensional torus of the form (1.1).

Nielsen [4] had shown that two periodic homeomorphisms of the two-dimensional torus  $\mathbb{T}^2$  such that all points have the same period are topologically conjugate if and only if their periods coincide. However, the problem whether two homeomorphisms of a torus are conjugate by means of a group automorphism of the torus was not considered. In this article we study the problem when two transformations from the class  $G_n$  are topologically conjugate by means of the group automorphism of the torus  $\mathbb{T}^n$ .

The main result of the article is presented in the following theorems.

**Theorem 1.** *If two periodic homeomorphisms of the  $n$ -torus  $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  and  $f': \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ ,  $f, f' \in G_n$  have the same period, then there exists a countable family  $\{h_i\}, i \in \mathbb{N}$  of group automorphisms of the  $n$ -torus  $h_i: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  conjugating the maps  $f$  and  $f'$ .*

From the results of D. Z. Arov [1] it follows that if two transitive translations of the  $n$ -torus are topologically conjugate, then the conjugating homeomorphism must be linear (a composition of a group automorphism and a shift). The opposite result holds for periodic shifts.

**Theorem 2.** *If two periodic homeomorphisms of the torus  $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  and  $f': \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ ,  $f, f' \in G_n$  are topologically conjugate by means of homeomorphism  $h: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ , then there is a continuum set of homeomorphisms of an  $n$ -dimensional torus  $\{h_\beta\}, \beta \in A$ ,  $h_\beta: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  homotopic to  $h$  such that  $h_\beta \circ f = f' \circ h_\beta$ .*

## 2. Proof of the results

We denote the greatest common divisor of the set of integers  $a_1, a_2, \dots, a_n$  by  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**Lemma 1.** *For any pair of  $n$ -dimensional vectors*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad u \quad v_2 = \begin{pmatrix} p_1/q \\ p_2/q \\ \vdots \\ p_n/q \end{pmatrix}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad p_i \in \mathbb{Z},$$

*such that  $(p_1, p_2, \dots, p_n, q) = 1$  there exists an unimodular matrix  $A$  and integers  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , such that an equality  $Av_1 = v_2 + (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$  holds.*

*Proof.* Suppose that the matrix  $A$  has the form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Let's set the elements of the matrix  $A$  and numbers  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , in such a way that they satisfy the conclusion of the lemma. Let elements  $a_{i1}, i = \overline{1, n}$  be of the form  $a_{i1} = p_i + qm_i$ . We denote the complement minor of the element  $a_{i1}$  by  $M_i$ . Let us show that the numbers  $m_1, \dots, m_n$  can be chosen in such a way that  $(p_1 + qm_1, \dots, p_n + qm_n) = 1$ . We introduce the notation  $r_i = (p_i, q)$ ,  $R = \max_i r_i$ . Since  $p_i/r_i$  and  $q/r_i$  are relatively prime, it follows from the Dirichlet theorem (see, for example, [2]) that any arithmetic progression with coprime the first term and the difference contains infinitely many prime terms. That is why, the sequence  $\frac{p_i}{r_i} + \frac{q}{r_i}m_i$ , where  $\frac{p_i}{r_i}$  and  $\frac{q}{r_i}$  are fixed, and  $m_i$  are different integer values, contains infinitely many simple terms. We choose  $m_i$  in such a way that  $\frac{p_i}{r_i} + \frac{q}{r_i}m_i$  will be different prime numbers exceeding in absolute value  $R$ . If we chose  $m_i$  in such a way, then an equality  $(a_{11}, \dots, a_{n1}) = 1$  holds, since  $(r_1, \dots, r_n) = 1$ .

Expanding  $\det(A)$  by the first column, we note that  $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{i1} M_i$ . We will prove the lemma if we can choose integer elements  $a_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{2, n}$  in such a way, that the corresponding values of  $M_i, i = \overline{1, n}$ , will be such that  $\sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{i1} M_i = 1$ .

For this, we show that we can choose the corresponding integer values  $a_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{2, n}$  for any fixed set of integer values  $M_i^*$  of complement minors  $M_i, i = \overline{1, n}$ . Let matrix  $A$  be of the form (2.1), i.e. a matrix whose  $a_{ij} = 0, i - j \geq 1, j \neq 1$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4n-1} & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

We prove this statement, using mathematical induction on  $n$ . The statement is obvious for  $n = 2$ , since the minors  $M_1, M_2$  coincide with the elements  $a_{12}, a_{22}$ . Suppose that it is true for  $n = k$  and show that it is also true for  $n = k + 1$ . Let

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1k} & a_{1k+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2k} & a_{2k+1} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3k} & a_{3k+1} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4k} & a_{4k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{kk+1} \\ a_{k+11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1k+1} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

By  $\widetilde{M}_i$  we denote the minors obtained from  $A$  by deleting the  $i$ -st and  $(k + 1)$ -th rows and the 1-th and  $(k + 1)$ -th column. Note that  $M_i = a_{k+1k+1}\widetilde{M}_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , expanding  $M_i$  by the last line. We set  $a_{k+1k+1} = (M_1^*, M_2^*, \dots, M_k^*)$ . By the induction hypothesis the numbers  $a_{ij}$ ,  $i - j \geq 0$ ,  $i = \overline{2, k}$ ,  $j = \overline{2, k}$  can be chosen in such a way that  $\widetilde{M}_i = \frac{M_i^*}{(M_1^*, M_2^*, \dots, M_k^*)}$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

Consider the minor  $M_{k+1}$ . We notice that  $M_{k+1} = \sum_{i=1}^k (-1)^{1+k}\widetilde{M}_i a_{ik+1}$ , expanding  $M_{k+1}$  by the last column. We chose the elements in such a way that  $(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2, \dots, \widetilde{M}_k) = 1$ . For this reason we can choose the elements  $a_{1k+1}, \dots, a_{kk+1}$  in such a way that the expression  $\sum_{i=1}^k (-1)^{1+k}\widetilde{M}_i a_{ik+1}$  will take the value  $M_{k+1}^*$ .  $\square$

Let's an elementary lemma before proceeding to the proof of theorem 1.

**Lemma 2.** *Let  $A$  and  $B$  be unimodular  $n \times n$  matrices, and  $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  and  $g: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  are the group automorphisms of the  $n$ -dimensional torus induced by them. Then the group automorphism of the  $n$ -dimensional torus induced by the product  $AB$  coincides with the composition of the maps  $f \circ g$  and the group automorphism induced by the matrix  $A^{-1}$  coincides  $f^{-1}$ .*

*Proof.* Let  $x \in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ , that is,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $0 \leq x_i < 1$ . We set  $Bx = y + v$ ,  $0 \leq y_i < 1$ ,  $v_i \in \mathbb{Z}$ . Therefore we have  $f \circ g(x) = A(Bx \text{ mod } 1) \text{ mod } 1 = A(y + v \text{ mod } 1) \text{ mod } 1 = A(Bx - v) \text{ mod } 1 = ABx - Av \text{ mod } 1 = ABx \text{ mod } 1$  by the definition of  $f$  and  $g$ , and taking into account the integer property of the elements of the matrix  $B$ . Let  $h: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  be a group toral automorphism induced by the matrix  $A^{-1}$ , then, we have  $f \circ h = h \circ f = id$  by virtue of the just proved, considering the product of matrices  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ .  $\square$

**Lemma 3.** *If two periodic homeomorphisms of  $n$ -torus  $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  and  $f': \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ ,  $f, f' \in G_n$  have the same periods, then they are topologically conjugate by means of the group automorphism of the  $n$ -torus  $h: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ .*

*Proof.* Let  $q$  be the period of the maps  $f$  and  $f'$ . Then  $f$  and  $f'$  can be represented in the form  $f(x) = x + u \text{ mod } 1$ ,  $f'(x) = x + u' \text{ mod } 1$ , where

$$u = \begin{pmatrix} p_1/q \\ p_2/q \\ \vdots \\ p_n/q \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} p'_1/q \\ p'_2/q \\ \vdots \\ p'_n/q \end{pmatrix}, \quad p_i, p'_i \in \mathbb{Z},$$

and  $(p_1, p_2, \dots, p_n, q) = 1$ ,  $(p'_1, p'_2, \dots, p'_n, q) = 1$ .

<sup>2</sup>Two dynamical systems  $f: X \rightarrow X$  и  $f': X \rightarrow X$ , defined on a topological space  $X$ , are topologically conjugate if there exists a homeomorphism  $h: X \rightarrow X$ , что  $f \circ h = h \circ f'$ .

Let  $g: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  be a periodic toral homeomorphism of the following form  $g(x) = x + v \pmod 1$ , where  $v = (1/q, 0, \dots, 0)^T$

It follows from lemma 1 that there exist unimodular  $n \times n$  matrices  $A$  and  $A'$  such that  $Av \equiv u \pmod 1$ ,  $A'v \equiv u' \pmod 1$ . Let us show that the group toral automorphisms  $h: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  and  $h': \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  induced by the matrices  $A$  и  $A'$  are such that  $f \circ h = h \circ g$  and  $f' \circ h' = h' \circ g$ . Fix the point  $x \in \mathbb{T}^n$ ,  $0 \leq x_i < 1$  and set  $w = (x+v) - (x+v \pmod 1)$ . We have  $h \circ g(x) = A(x+v \pmod 1) \pmod 1 = A(x+v-w) \pmod 1 = Ax + Av + Aw \pmod 1 = Ax + u \pmod 1 = (Ax \pmod 1 + u) \pmod 1 = f \circ h(x)$ . Since the point  $x$  was chosen arbitrary, we have an equality  $f \circ h = h \circ g$ . The second equality is proved similarly. We note that the group automorphism induced by the matrix  $AA'^{-1}$  coincides with  $h \circ h'^{-1}$  by the virtue of lemma 2. Now it is easy to see that the desired conjugation has the form  $f \circ (h \circ h'^{-1}) = (h \circ h'^{-1}) \circ f'$ .  $\square$

**Lemma 4.** *Let a periodic homeomorphism of an  $n$ -dimensional torus  $g: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  of*

*a period  $q$  has the form  $g(x) = x + v$ , where  $v = \begin{pmatrix} 1/q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . Then there exists a countable*

*set of unimodular  $n \times n$  matrices  $a_i$  such that the equality  $g \circ h_i = h_i \circ g$  holds for the group automorphisms of the  $n$ -dimensional torus  $h_i: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  induced by them.*

*Proof.* Let's denote a set of unimodular matrices such that the first column of the

matrix  $A_i$  has the form  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  by  $\{A_i\}, i \in \mathbb{N}$ .

Fix the point  $x \in \mathbb{T}^n$  and set  $w = (x + v) - (x + v \pmod 1)$ . We have  $h_i \circ g(x) = A_i(x + v \pmod 1) \pmod 1 = A_i(x + v - w) \pmod 1 = A_i x + A_i v - A_i w \pmod 1 = A_i x + v \pmod 1 = (A_i x \pmod 1 + v) \pmod 1 = g \circ h_i(x)$  by the choice of  $A_i$ . The equality  $h_i \circ g = g \circ h_i$  is true since the point  $x$  was chosen arbitrary.  $\square$

### 2.1. Proof of the theorem 1

*Proof.* Let  $q$  be the period of the maps  $f$  and  $f'$ , and let  $g: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  be the periodic homeomorphism defined in lemma 4. It follows from lemma 3 that there are group automorphisms  $h: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  and  $h': \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  induced by the matrices  $A$  and  $A'$ , respectively, for which the equalities  $h \circ f = g \circ h$ ,  $h' \circ f' = g \circ h'$  hold. It follows from lemma 4 that there exists a countable family of unimodular matrices  $\{A_i\}, i \in \mathbb{N}$  such that the group automorphisms  $h_i: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  induced by them are pairwise non-homotopic, and the equalities  $g \circ h_i = h_i \circ g$  hold. It follows from lemma 2 that the group automorphism induced by the matrix  $A'^{-1}A_iA$  coincides with  $(h'^{-1} \circ h_i \circ h)$  and the group automorphisms  $h'^{-1} \circ h_i \circ h$  are pairwise non-homotopic, since  $h_i$  are pairwise non-homotopic. It is easy to see that the desired conjugation has the form  $(h'^{-1} \circ h_i \circ h) \circ f = f' \circ (h'^{-1} \circ h_i \circ h)$ .  $\square$

## 2.2. Proof of the theorem 2

*Proof.* Let  $q$  be the period of the maps  $f$  and  $f'$ , and let  $g: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  be the homeomorphism defined in lemma 4. We have  $h \circ f = f' \circ h$  by the condition of the theorem. Since  $f'$  and  $g$  have the same period, then there is a homeomorphism  $h': \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  such that the equality  $h' \circ f' = g \circ h'$  holds. We consider the set  $\{h_\beta\}$  of all possible homeomorphisms  $h_\beta: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  of the form

$$h_\beta(x) = x + \begin{pmatrix} u_\beta(x_2, x_3, \dots, x_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \pmod{1},$$

where  $u_\beta: \mathbb{T}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  is an arbitrary continuous function of  $n - 1$  variables, periodic by each argument. Note that for any  $h_\beta$  we have the equality  $h_\beta \circ g = g \circ h_\beta$  and each homeomorphism  $\{h_\beta\}$  is homotopic to the identical mapping. We set  $h_\alpha = h'^{-1} \circ h_\beta \circ h' \circ h$ . It is easy to see that for the homeomorphism  $h'^{-1} \circ h_\beta \circ h' \circ h$  the equality  $(h'^{-1} \circ h_\beta \circ h' \circ h) \circ f = f' \circ (h'^{-1} \circ h_\beta \circ h' \circ h)$  holds. Moreover, the homeomorphism  $h'^{-1} \circ h_\beta \circ h' \circ h$  is homotopic to  $h$ , since the homeomorphism  $h'^{-1} \circ h_\beta \circ h'$  is homotopic to the identical mapping. Thus, the set  $\{h_\alpha\}$  is the desired family of conjugating homeomorphisms.  $\square$

## References

1. *Arov, D. Z.* On the topological similarity of automorphisms and translations of compact commutative groups // *Uspehi matematicheskikh nauk.* — 1963. — Vol.18, No.5. — P. 113–138.
2. *Gelfond, A. O., Linink, Y. V.* Elementary methods in analytic number theory. — M: Fizmatgiz, 1962. — 272 pp.
3. *Katok, A. B., Hasselblatt, B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. — Cambridge: Cambridge University Press, 1999. — 768 pp.
4. *Nielsen, J.* Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen // *Dansk Videnskabernes Selskab. Math.-fys. Meddelelser.* — 1937. — Vol.15. — P. 1–77.

Получена 10.06.2017

УДК 517:957

# Метаустойчивые структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной на отрезке

Ю. А. Хазова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь, 295007 *E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com*

**Аннотация.** Исследуется динамика стационарных структур в нелинейном оптическом резонаторе с преобразованием отражения. Математической моделью системы является параболическое уравнение с преобразованием отражения пространственной переменной и условиями периодичности. Исследуется эволюция форм и устойчивость структур при уменьшении коэффициента диффузии. В работе используется метод Галеркина. Реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций и метаустойчивых структур.

**Ключевые слова:** параболическая задача, существование решения, метаустойчивые структуры, бифуркация, устойчивость, метод Галеркина.

## Metastable structures in a parabolic problem with reflection of a spatial variable on a segment

Yu. A. Khazova

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, 295007.

**Abstract.** The dynamics of stationary structures in a nonlinear optical resonator with the transformation of reflection is studied. The mathematical model of the system is a parabolic equation with the transformation of reflection by a spatial variable and the conditions of periodicity. The evolution of forms and the stability of structures with decreasing diffusion coefficient are investigated. The Galerkin's method is used. A wide range of saddle-node bifurcations and metastable structures is realized.

**Keywords:** parabolic problem, the existence of solutions, metastable structures, bifurcation, stability, Galerkin's method.

**MSC 2010:** 35K20, 35K59, 35Q60, 78A05, 37L10, 35R10, 35B32, 35B10, 35B35, 35C07, 35C20

## Введение

Расширение исследований в нелинейной оптике в настоящее время вызвано интенсивным использованием оптических систем в информационных технологиях. Среди нелинейных оптических систем одной из самых популярных является система, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура двумерной обратной связи. Принципиальная особенность таких систем заключается в том, что внешний контур обратной

связи может быть использован для непосредственного воздействия на нелинейную динамику системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами.

Параболические функционально-дифференциальные уравнения с преобразованием аргументов искомой функции, используемые для моделирования оптических систем с двумерной обратной связью, представляют собой новый класс уравнений для исследования феномена структурообразования.

В таких нелинейных оптических системах внешний контур обратной связи может быть использован для управления нелинейной динамикой системы с помощью управляемых крупномасштабных пространственных и временных координат, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и др. устройствами. Уже при простейших видах преобразования: поворот, отражение от координатных осей, запаздывание реализуются различные режимы самоорганизации светового поля: многолепестковые и ротационные волны, оптические спирали, волны переключения, роллы, гексагоны и др. [1, 6, 2, 14].

Таким образом исследование модельных уравнений для нелинейных оптических систем с управляемым преобразованием аргументов в контуре обратной связи является актуальным направлением современных нелинейных процессов (теоретической и прикладной нелинейной оптики) [3, 4].

Целью данной работы является исследование условий рождения новых решений краевой задачи для функционально-дифференциального параболического уравнения с отражением пространственной переменной и условиями периодичности на отрезке, поведения решений в зависимости от бифуркационного параметра и анализ устойчивости рожденных решений при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности.

Исследование выполнено при поддержке Программы развития федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского» на 2015-2024 годы по проекту «Сеть академической мобильности «Академическая мобильность молодых ученых России» в 2016 году на базе лаборатории дифференциальных и разностных уравнений Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

## 1. Постановка задачи

Ранее в работах автора рассматривалось параболическое уравнение с отражением пространственной переменной и условиями периодичности на окружности: упрощенная модель [7, 5] и модель с квадратичным слагаемым [9, 10].

В этой статье на промежутке  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  будет рассматриваться краевая задача

$$v_t + Lv = \Lambda_1 \frac{1}{2} Qv^2 - \Lambda \frac{1}{6} Qv^3, \quad (1.1)$$

где  $L = 1 - D\Delta - \Lambda Q$  — линейный оператор,  $Qv(x) = v(-x)$  — оператор отражения пространственной переменной,  $\Lambda_1 = -\Lambda \operatorname{ctg} \omega$  — вычисляемая переменная, с

условиями периодичности

$$u_x\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0. \tag{1.2}$$

**Лемма 1.** Оператор  $L$  с условием периодичности (1.2) имеет полную ортогональную систему собственных функций  $1, \sin \varphi, \cos 2\varphi, \sin 3\varphi, \cos 4\varphi, \dots$ , соответствующих собственным значениям [8]

$$\lambda_0 = 1 - \Lambda, \quad \lambda_1 = 1 + D + \Lambda, \quad \lambda_2 = 1 + 4D - \Lambda, \quad \lambda_3 = 1 + 9D + \Lambda, \dots$$

Критическими являются функции  $\sin \varphi, \sin 3\varphi, \sin 5\varphi, \dots$ , собственные значения которых могут поменять знак при изменении бифуркационного параметра  $D$ .

Если  $D > D_1 = -(1 + \Lambda)$ , то нулевое решение — асимптотически устойчивое решение задачи (1.1)-(1.2). При уменьшении  $D$  и его прохождении через значение  $D_1 = -(1 + \Lambda)$  нулевое решение теряет устойчивость. Обозначим  $D_{2k+1} = (2k + 1)^{-1}D_1, k = 1, 2, 3, \dots$ . Индекс неустойчивости нулевого решения при  $D_3 < D < D_1$  равен 1. При уменьшении  $D$  и его прохождении через следующие значения  $D_{2k+1} = (2k + 1)^{-1}D_1, k = 1, 2, 3, \dots$  каждый раз индекс неустойчивости решения  $\omega$  повышается на единицу и рождается новое пространственно неоднородное решение.

**Теорема 1.** Существует  $\delta_0 > 0$  такое, что если  $0 < D_1 - D < \delta_0$ , то задача (1.1)-(1.2) имеет два стационарных пространственно неоднородных решения  $v_1^\pm(x, D)$ , где

$$\begin{aligned} v_1^\pm(x, D) &= \pm \left( \frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right)^{1/2} \sin x + \\ &+ \left( \frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right) \frac{\Lambda_1}{4} \left( (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} - (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2x \right) \pm \\ &\pm \frac{1}{24} \left( \frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right)^{3/2} \left( 3\Lambda_1^2 (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} - \Lambda (\lambda_3 - 3\lambda_1)^{-1} \right) \sin 3x + O((D - D_1)^2), \\ c_1(D) &= -\frac{1}{4} \Lambda_1^2 \left( (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + \frac{1}{2} (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \right) + \frac{1}{8} \Lambda, \quad \Lambda_1 = -\Lambda \operatorname{ctg} \omega < 0. \end{aligned}$$

Решения  $v_1^\pm(x, D)$  — экспоненциально устойчивы [8].

## 2. Структуры параболической задачи с квадратичным слагаемым на отрезке

Для исследования динамики рождающихся пространственно неоднородных решений при уменьшении бифуркационного параметра  $D$  воспользуемся формализмом метода Галеркина. Рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (1.1) в виде

$$v = z_0 + \sum_{k=1}^N z_k \sin(2k - 1)x + \sum_{k=1}^N z_{k+N} \cos(2k)x. \tag{2.1}$$

Подставим (2.1) в уравнение (1.1). Приравняв затем коэффициенты при  $\sin(2k-1)x$  и  $\cos(2k)x$ ,  $k = \overline{1, N}$ , приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= -\lambda_0 z_0 + g_0(z), \\ \dot{z}_s &= -\lambda_{2s-1} z_s + g_s(z), \quad s = \overline{1, N}, \\ \dot{z}_{k+N} &= -\lambda_{2k} z_{k+N} + g_{k+N}(z), \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Системы уравнений (2.2) обладают рядом общих свойств. Для каждого  $N$  нулевое решение (2.2) — асимптотически устойчиво, если  $D > D_1$ . Нулевое решение (2.2) теряет устойчивость при прохождении параметра  $D$  через значение  $D_1$ . Максимальная точка спектра нулевого решения проходит в этом случае через нуль с ненулевой скоростью. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две устойчивые непрерывные ветви неподвижных точек  $\pm z^1(D, N) = \pm(z_0^1(D, N), z_1^1(D, N), z_2^1(D, N), \dots, z_N^1(D, N), 0, \dots, 0)$ .

В силу (2.2) и определения  $z^1(D, N)$  справедливо следующее равенство

$$\pm v_1(x, D) \approx z_0^1 + \sum_{s=1}^p z_s^1(D, N) \sin(2s-1)x. \quad (2.3)$$

Опишем динамику по параметру  $D$  стационарных решений  $\pm v_1(x, D)$  уравнения (1.1), опираясь на равенство (2.3) и численные расчеты непрерывной ветви  $\pm z^1(D, N)$  стационарных точек системы (2.2), проведенные для  $N \sim 33$ . Для значений параметра  $D$  вблизи  $D_1$   $\pm v_1(x, D)$  является квазигармонической функцией с малой амплитудой. Амплитуда функций (2.3) монотонно возрастает с убыванием параметра  $D$ , приближаясь к  $\frac{3\Lambda \operatorname{ctg} \omega \pm \sqrt{9\Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega + 24\Lambda^2 - 24\Lambda}}{2\Lambda}$  при  $D \rightarrow 0$ . На рис. 1 представлены приближенные решения  $v_1(x, D)$  полученные согласно (2.3) для  $N = 20$ .

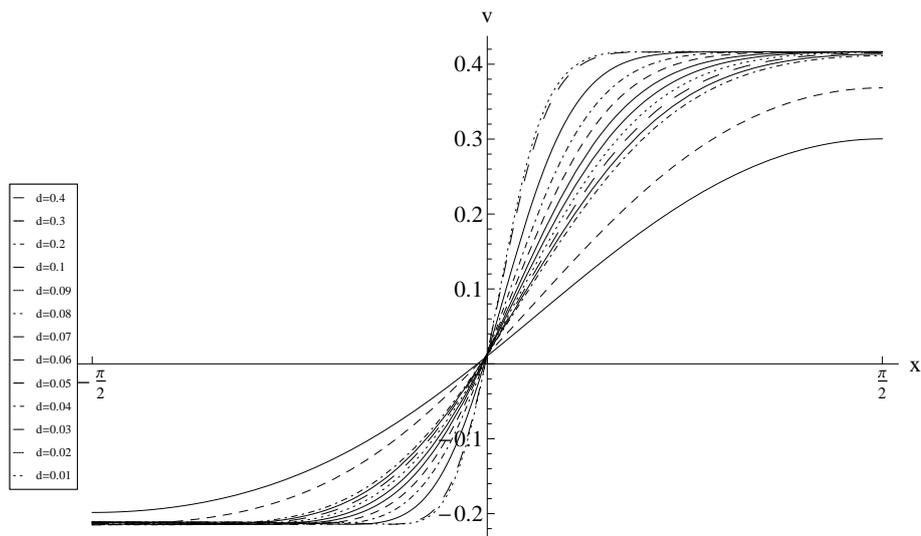


Рис. 1. Приближенные решения (1.1)  $+v_{\pm}^1(x, D)$   $N = 10$ ,  $\omega = 0.317$ ,  $\Lambda = -1.5$ .

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости пространственно неоднородного стационарного решения  $\pm v_1(x, D)$ . С этой целью обратимся к динамике спектра  $\sigma(z^1(D, N))$  ветви неподвижных точек  $z^1(D, N)$  системы (2.2). Проведенный анализ показал, что при убывании параметра  $D$  точки спектра сближаются. При этом максимальная точка спектра  $\mu_1^1 < 0$  — отрицательна и практически не меняется, а остальные точки — возрастают. В качестве примера приведем 4 максимальные точки спектра, когда  $N = 20$ ,  $\Lambda = -1.5$

$$\sigma(z^1(0.4, 20)) = \{\dots, -3.596 + 0.199I, -3.596 - 0.199I, -2.243, -0.221\},$$

$$\sigma(z^1(0.1, 20)) = \{\dots, -2.019, -1.232 + 0.9412I, -1.232 - 0.9412I, -1.230\},$$

$$\sigma(z^1(0.06, 20)) = \{\dots, -1.997, -1.123 + 1.068I, -1.123 - 1.068I, -1.211\},$$

$$\sigma(z^1(0.01, 20)) = \{\dots, -1.121 - 1.114I, -1.013 + 1.131I, -1.013 - 1.131I, -1.222\}.$$

Здесь  $I$  — мнимая единица. Проведенный анализ для  $N$  от 16 до 33 показал, что решение  $v_1(x, D)$  асимптотически устойчиво на всем промежутке  $(0, D_1)$  изменения параметра  $D$ .

### 2.1. Неустойчивые структуры параболической задачи с квадратичным слагаемым на отрезке

Перейдем теперь к анализу формы и устойчивости стационарных решений  $\pm v_3(x, D)$  уравнения (1.1). Эта пара решений рождается из нуля неустойчивой с индексом неустойчивости 1 тогда, когда параметр  $D$ , убывая, проходит через  $D_3 = \frac{D_1}{9}$ . Для анализа поведения  $\pm v_3(x, D)$  при отходе параметра  $D$  от точки бифуркации обратимся к системам (2.2). В этих системах индекс неустойчивости нуля повышается на единицу и становится равным двум тогда, когда параметр  $D$ , убывая, проходит через  $D_3$ . В результате имеет место бифуркация «вилки» — от нуля ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек  $\pm z^3(D, N) = \pm(0, z_k^3(D, N), z_{k+N}^3(D, N))$ ,  $k = \overline{0, N}$ , где от нуля отличны только координаты с индексами  $0, 2, 5, 8, \dots$

Как и выше, воспользовавшись равенством (2.1), приходим к следующему приближенному равенству

$$\pm v_3(D) = v_3(x, D) \approx z_0^3 + \sum_{k=1}^N z_k^3(D, N) \sin(2s - 1)x. \quad (2.4)$$

Равенства (2.4) позволяют описать динамику  $\pm v_3(x, D)$  при убывании  $D$ . Отметим, что при  $D \rightarrow 0$   $\pm v_3(x, D)$  приближается к ступенчатой функции, принимающей значения  $\frac{3\Lambda \operatorname{ctg} \omega \pm \sqrt{9\Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega + 24\Lambda^2 - 24\Lambda}}{2\Lambda}$  и точками перехода  $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$ .

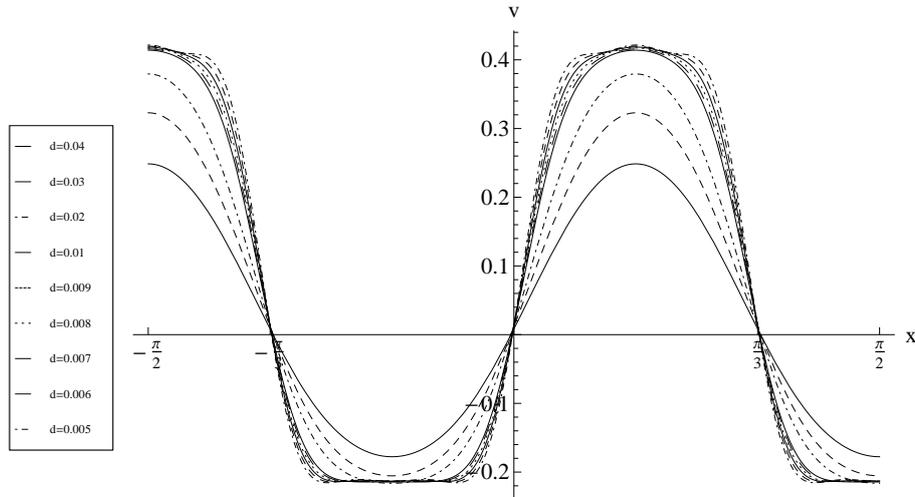


Рис. 2. Неустойчивые решения  $+v_3(x, D)$   $N = 20$ ,  $\omega = 0.317$ ,  $\Lambda = -1.5$ .

На рис. 2 представлены, согласно (2.4), приближенные решения  $+v_3(x, D)$ , где  $N = 20$ ,  $\omega = 0.317$ ,  $\Lambda = -1.5$  и различных значениях параметра  $D$ .

Как уже отмечалось решение  $\pm v_3(x, D)$  рождается из нуля неустойчивым с индексом неустойчивости 1. Вопрос об устойчивости  $\pm v_3(x, D)$  при уменьшении параметра  $D$  приводит к вопросу о поведении максимального собственного значения решения  $\pm v_3(x, D)$ . Обратимся в этой связи к вопросу о динамике при уменьшении параметра  $D$  максимального собственного значения  $\mu_1^3(D, N)$  неподвижных точек  $\pm z^3(D, N)$  системы (2.2). Спектр матрицы устойчивости  $\pm z^3(D, N)$  лежит на вещественной оси и его максимальная точка  $\mu_1^3(D, N)$  при малых  $D_3 - D > 0$  принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра лежат на отрицательной полуоси.

Согласно проведенному анализу динамика спектра  $\pm z^3(D, N)$  зависит от поведения  $\mu_1^3(D, N)$  при уменьшении  $D$ . С уменьшением  $D$   $\mu_1^3(D, N)$  убывая приближается к нулю, затем медленно меняется вблизи нуля, оставаясь на положительной полуоси.

Приведем иллюстрирующий пример:  $\Lambda = -1.5$ ,  $\mu_1^3(0.02, 19) = 0.00853148$ ,  $\mu_1^3(0.01, 19) = 0.000160262$ ,  $\mu_1^3(0.009, 19) = 0.000689485$ ,  $\mu_1^3(0.007, 19) = 0.00290803$ ,  $\mu_1^3(0.006, 19) = 0.00540983$ .

Проведенный анализ позволяет сделать заключение о том, что  $v_3(\varphi, D)$  на интервале  $(0, D_3)$  сохраняет индекс неустойчивости.

## 2.2. Метаустойчивые структуры параболического уравнения с квадратичным слагаемым на отрезке.

В системах (2.2) размерности  $N$  согласно проведенному бифуркационному анализу для значений  $N$  от 20 до 30 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при средних (не очень малых) значениях параметра  $D$ . В результате бифуркации седло-узел в однопараметрической системе (2.2) появляются две

непрерывные по  $D$  ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Эти ветви стационарных точек определены для всех положительных значений параметра  $D$ , которые меньше соответствующего бифуркационного. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (2.2) отвечают в силу (2.4) две непрерывные ветви приближенных стационарных решений (1.1) типа внутреннего переходного слоя. Будем говорить, что приближенные решения (1.1) указанного типа отвечают седло-узловым бифуркациям в системе (2.2). Некоторые из седло-узловых бифуркаций в (2.2) порождают непрерывные по  $D$  ветви приближенных стационарных решений (1.1) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода.

Реализация в системе (2.2) бифуркаций седло-узел с указанными выше свойствами вызвана медленной эволюцией вблизи нуля максимальной точки спектра ветвей стационарных точек  $\pm z^3(D, N)$  на достаточно большом интервале изменения параметра  $D$ . Далее для определенности ограничимся анализом бифуркаций седло-узел, связанных с ветвью стационарных точек  $\pm z^3(D, N)$ . Бифуркации седло-узел указанного типа объединяются в конечные наборы бифуркаций, которые называются далее каскадами седло-узловых бифуркаций.

Рассмотрим один из каскадов, который порождает приближенные решения краевой задачи (1.1) с точками перехода, принадлежащими интервалам  $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3})$  и  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ . Имеет место 2 таких бифуркации с бифуркационными значениями  $D = D_k, k = 1, 2, D_1 > D_2$ . Подчеркнем, что  $D_k = D_k(N), k = 1, 2$ , убывают с ростом  $N$ . Приведем теперь в качестве иллюстрации для случая  $N = 20$  приближенные бифуркационные значения  $D$ , соответствующие им координаты точек и 5 наибольших точек их спектров:

$$\begin{aligned}
 & D_1 = 0.0221 \\
 & (0.0736, 0.0694, 0.362, -0.0461, 0.0519, \dots) \\
 & \{\dots, -1.083 + 1.0974I, -1.083 - 1.0974I, -1.307, -1.164, -0.00657\} \\
 & (0.0761, 0.0702, 0.366, -0.0481, 0.0559 \dots) \\
 & \{\dots, -1.066 + 1.108I, -1.066 - 1.108I, -1.490, -1.121, 0.00128\} \\
 & D_2 = 0.0146 \\
 & (0.0734, 0.167, 0.315, -0.065, 0.108, \dots) \\
 & \{\dots, -1.063 + 1.110I, -1.063 - 1.110I, -1.310, -1.198, -0.000113\} \\
 & (0.0735, 0.138, 0.332, -0.0652, 0.096, \dots) \\
 & \{\dots, -1.068 + 1.107I, -1.068 - 1.107I, -1.362, -1.255, 0.00203\}
 \end{aligned}$$

С целью сокращения многоточием обозначены остальные координаты стационарных точек, здесь  $I$  — мнимая единица. Устойчивая и неустойчивая ветви неподвижных точек, родившиеся в результате седло-узловой бифуркации системы (2.2), расходятся медленно с уменьшением параметра  $D$ . Соответственно медленно расходятся и отвечающие им в силу (2.1) непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (1.1).

Приведенным стационарным точкам системы (2.2), где  $N = 20$ ,  $D = 0.05$ , отвечают приближенные решения задачи (1.1) на рис. 3.

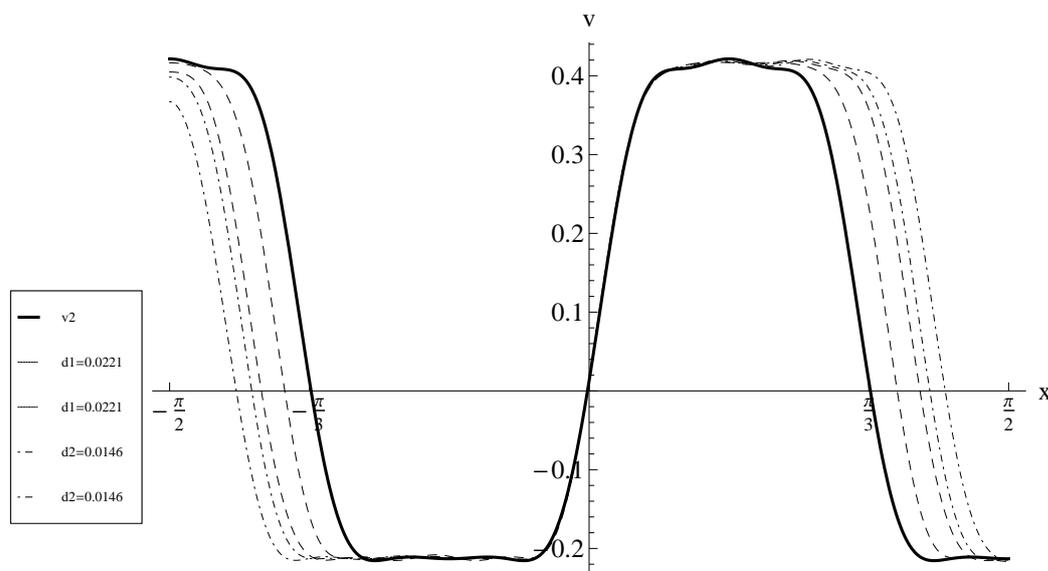


Рис. 3. Приближенные стационарные решения (1.1),  $\Lambda = -1.5$ ,  $\omega = 0.317$ ,  $D = 0.05$

Обозначим  $v_k^s = v_k^s(\varphi, D, N)$ ,  $v_k^u = v_k^u(\varphi, D, N)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  непрерывные по  $D$  ветви приближенных решений (1.1), отвечающие соответственно в силу (2.1) устойчивой, неустойчивой непрерывным ветвям стационарных решений системы (2.2), рожденных в результате седло-узловой бифуркации с номером  $k$ . Подчеркнем, что имеет место слабая зависимость указанных функций от  $N$ .

Положим далее  $N = 20$ . Рассмотрим решения  $S_D^t v_3^s$ ,  $S_D^t v_3^u$  уравнения (1.1) с начальными условиями  $v_k^s = v_k^s(\varphi, D, N)$ ,  $v_k^u = v_k^u(\varphi, D, N)$ . Согласно численным расчетам на значительных промежутках изменения времени решения  $S_D^t v_3^s$ ,  $S_D^t v_3^u$  меняются медленно. Приближенные решения  $v_2^s$ ,  $v_2^u$  порождают метаустойчивые структуры [12, 13]. На рис. 4 представлено решение  $S_D^t v_3^s$  уравнения (1.1). Видно, что с течением времени решения  $S_D^t v_3^s$  медленно меняются. Затем за достаточно короткий по сравнению с этапом медленной эволюции промежуток времени  $S_D^t v_3^s$  оказывается вблизи устойчивого стационарного решения.

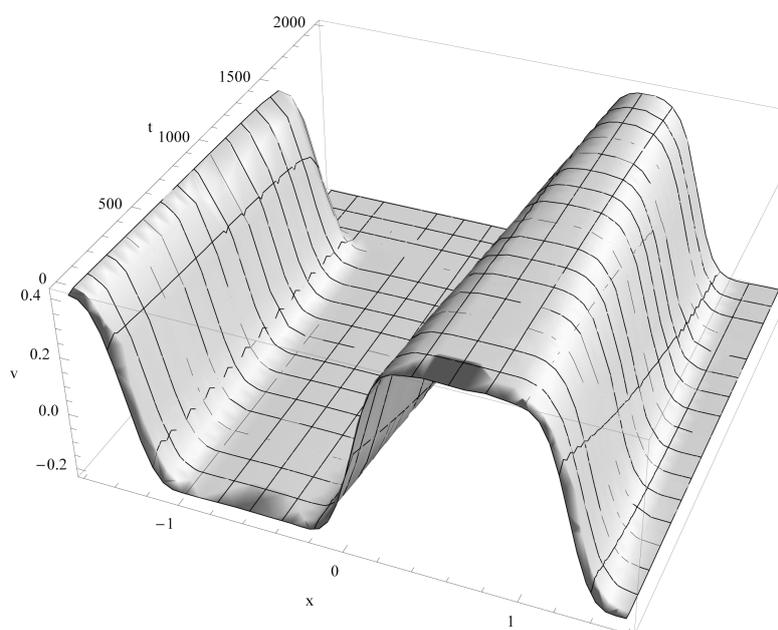


Рис. 4. Метаустойчивая структура (1.1),  $\Lambda = -1.5$ ,  $\omega = 0.317$ ,  $D = 0.005$

На рис. 4 показана метаустойчивая структура (1.1)  $S_D^t v_2^3$  с начальной функцией  $v_k^2$ .

## Заключение

Для параболического уравнения с отражением пространственной переменной на отрезке рассмотрены вопросы о существовании, форме и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений:

1. С помощью метода центральных многообразий доказана теорема о существовании пространственно неоднородного стационарного решения.
2. На основании формализма метода Галеркина исследована динамика изменений неоднородных стационарных решений.
3. Исследована задача о приближенных стационарных решениях уравнения типа переходного слоя с тремя точками перехода. Множество приближенных стационарных решений указанного выше типа правильно отражает характер эволюции метаустойчивых структур с тремя точками перехода при увеличении  $t$  и при средних значениях параметра  $D$ .
4. Численные расчеты с помощью пакета Mathematica показали, что применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

5. При исследовании метаустойчивых структур задача о приближенных стационарных решениях является ключевой. Показаны условия возникновения метаустойчивых структур.

### Список цитируемых источников

1. *Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей. // Новые принципы оптической обработки информации. — М.: Наука. — 1990. — С. 263-325.  
Akhmanov, S. A., Vorontsov, M. A., Ivanov, V. Yu. Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback: on the way to creation of nonlinear optical analogs of neural networks. In *Novye printsipy opticheskoi obrabotki informatsii* (pp. 263-325), Moscow: Nauka, 1990. (in Russian)
2. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. — М.: Физматлит, 2007. — 485 с.  
Akhromeeva, T. S., Kurdyumov, S. P., Malinetskiĭ, G. G., Samarskiĭ, A. A. Structures and chaos in nonlinear media. Moscow: Fizmatlit, 2007. (in Russian)
3. *Белан Е. П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной. // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — Т.46, №5. — С. 95-111.  
Belan, E. P. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflected spatial argument. *Cybern. Syst. Anal.* 46, No. 5, 772-783 (2010).
4. *Белан Е. П.* Стационарные структуры в параболическом уравнении с преобразованием отражения пространственной переменной. // Динамические системы. — 2010. — Вып. 28. — С. 35-47.  
Belan, E. P. Stationary structures in parabolic equations with inversion transformer spatial argument. *Dinamicheskie Sistemy* 28, 35-47 (2010). (in Russian)
5. *Белан Е. П., Хазова Ю. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с преобразованием отражения пространственной переменной. // Динамические системы. — 2014. — Т. 4(32), №1-2. — 43-57.  
Belan, E. P.; Khazova, Yu. A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dinamicheskie Sistemy* 4(32), No.1-2, 43-57 (2014). (in Russian)
6. *Разгулин А. В.* Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1993. — Т.33, №10. — С. 1499-1508.  
Razgulin, A. V. The stability of self-excited bifurcation oscillations in a nonlinear parabolic problem with transformed argument. *Comput. Math. Math. Physics* 33, No.10, 1323-1330 (1993).
7. *Хазова Ю. А.* Динаміка стаціонарних структур в параболічній задачі з відображенням просторової змінної. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. — 2014. — Вип. 22. — С. 30-40.

- Khazova, Yu. A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. Vestnik Ivovskogo universiteta. Seria prikladnaya matematika i informatika 22, 30–40 (2014). (in Ukraine)
8. *Хазова Ю. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной. // Динамические системы. — 2014. — Т.4(32), No 3–4. — С. 245–257.
- Khazova, Yu. A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of segment. Dinamicheskie Sistemy Vol.4(32), No 3-4, 245–257 (2014). (in Russian)
9. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной. // Таврический вестник информатики и математики. — 2015.— No.3(28). — С. 82–95.
- Khazova, Yu. A. Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki No.3 (28), 82–95 (2015). (in Russian)
10. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной. // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — 2015. — Т.3, № 8–4 (19-4). — С. 314–317.
- Khazova, Yu. A. Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. Aktualniye napravleniya nauchnih issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika 3, 3–16 (2015). (in Russian)
11. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
- Henry, D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1981.
12. *Carr J., Pego R. L.* Metastable Patterns in Solution of  $u_t = \mu^2 u_{xx} - f(u)$ . Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1989. — Vol. XLII. — P. 523–576.
13. *Fusco G., Hale J. K.* Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singular Perturbations. // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 1989. — Vol. 1, no.1. — P. 75–94.
14. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics. // Nonlinear Analysis. Theory. Methods & Applications. — 1998. — Vol.12, No.2. — P. 261-278.

Получена 07.01.2017



MSC 2010: 74P05, 74C15, 65H05, 90C05

# Geometrically and physically nonlinear optimization problem for the 3-bar truss

**V. V. Chekhov**

V. I. Vernadsky Crimean Federal University,

4 Vernadskogo Prospekt, Simferopol, 295007 *E-mail: v\_chekhov@ukr.net*

**Abstract.** The analysis and optimal design problems are considered for the statically loaded symmetric 3-bar truss with taking into account material nonlinearity and finite deformation. The strain compatibility condition as well as the relationship between the cross-sectional areas of bars and the stress levels in them was derived for the finite deformation. It is shown that even though the problem of analysis of the truss is a nonlinear one, the optimization problem is a linear programming problem. Properties of optimal designs are compared using various structural alloys.

**Keywords:** symmetric 3-bar truss, physical nonlinearity, geometrical nonlinearity, optimal design problem.

## 1. Introduction

The use of simple test models is of great benefit for testing the methods of structural analysis/optimization. Such models allow you to check results of the used algorithm by using known solutions and also to represent a complicated process of loading or designing the structure in an obvious form which is suitable for the aid of comprehension or training. Among such simple models, a symmetrical flat three-bar truss is often found. This is one of the simplest static indeterminate structures. There is a rather detailed estimation of the stress-strain state and the safety margin of the truss in educational literature, both in the linear-elastic formulation and the one with taking into account plastic properties of the materials used (physical nonlinearity). For example, the solution of this task in [3] is given under symmetrical loading for the truss with an arbitrarily defined angle between the rods using different materials in the central and lateral rods. The analysis of the truss deformation with the occurrence of finite deformation (geometric nonlinearity) represents a more difficult task. Currently, it is used for test calculations in works devoted to methods of geometrically nonlinear structural analysis [9, 10, 13].

When considering the optimal design problem for the 3-bar truss, values of the cross-sectional area of the rods are usually assumed as the design parameters. The problem includes constraints on the stress levels in the rods [1], as well as constraints from below on the design parameters: zero (to correspond the physical meaning of the problem) or or positive (known as the technology constraints) to prevent degeneration of the rods. Other types of constraints can also be added to the task [7]: the displacement value in the loaded node, stability and/or the natural frequency. The above constraints can

be specified simultaneously for several different loading cases, which contain different values and directions of the external load. Usually, two loading cases are considered [1, 4, 7]. In these publications, the truss is considered with the corner angle  $\pi/4$  and with the behavior based on the geometrically and physically linear-elastic finite element model. When optimizing the truss by taking into account the geometrical nonlinearity, the consideration is most often limited to one loading case with a symmetrically applied tensile external load [9, 11, 13]. The design of the single-material truss is considered in the mentioned publications.

If the ability to specify its own material for each type of bar is added to the problem, then an additional degree of freedom appears, resulting in phenomena that are not present using just one material. In particular, it is possible here that the optimal design obtained with allowance for physical nonlinearity proves to be heavier than the same linearelastic one [12]. This contradicts the widespread view that the use of the linear-elastic model for materials leads to the design “in reserve” and the growth of the structural mass.

When taken into account, the material plasticity results in the increased level of displacement and strain in comparison with the linear-elastic case. Therefore it is necessary to take into account the geometrical nonlinearity to ensure the reliability of results. Theoretically, this is difficult to do and, therefore, large deformations are currently taken into account, usually only in practical calculations, using modern packages of the finite element method. However, the simplicity of a 3-bar truss makes it possible to theoretically consider the problem of optimal design taking into account possible finite deformations and to estimate their influence on the accuracy of the calculations. The results of such a study are presented in this paper.

## 2. Description of the analytical model

A symmetric three-bar truss shown in Fig.1 is considered. The truss is symmetrically statically loaded at the point of intersection of the rods by an external constant tensile force  $P$ . The possible appearance of large deformation under the load is taken into account, so the initial state and the deformed one are assumed to be different (for comparison, the similar relations for small deformation are given). All quantities related to the initial configuration are denoted by a zero in the upper index. The angle  $\alpha^0$  between the rods can be specified arbitrarily in the range  $0 \leq \alpha^0 < \pi/2$ . All values related to the central bar are denoted by the subscript “ $c$ ”, and the quantities related to the lateral bars have the subscript “ $s$ ”. Two materials which may be different are set in the central bar and in the lateral ones. We confine ourselves to the consideration of standard structural alloys whose physically nonlinear behavior can be described using the deformation plasticity theory [3]. The notation of the quantities and the scheme of the deformation of the truss are shown in Fig. 2. It is obvious that only one kind of rods (central or lateral) can be deformed arbitrarily, which uniquely determines the deformation of the other rod(-s). Let's define the compatibility condition for deformations for the general geometrically nonlinear case.

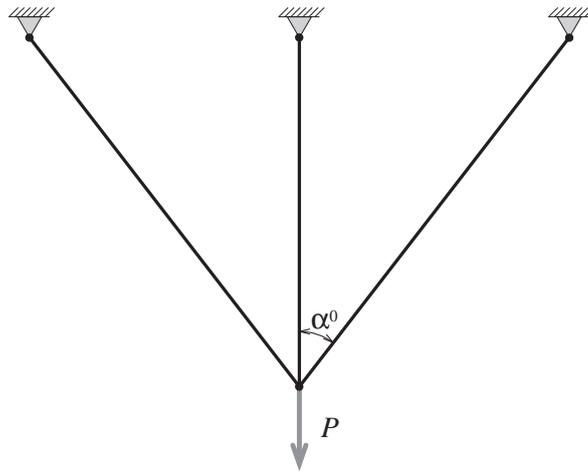


Fig. 1. The 3-bar truss

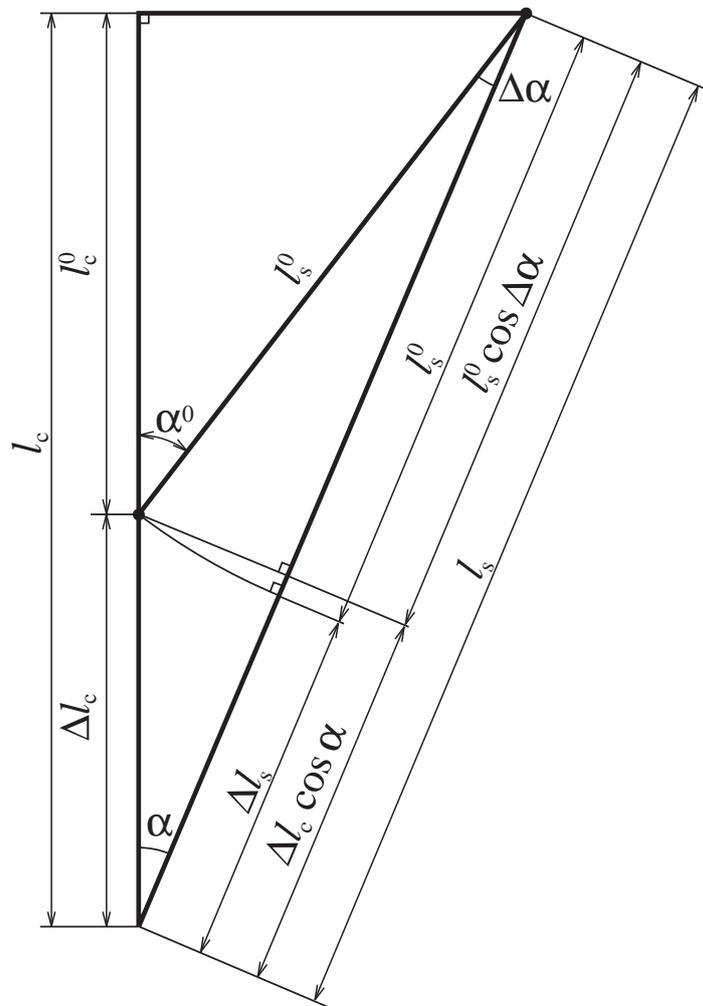


Fig. 2. The deformation of the truss

### 3. The compatibility condition under an arbitrary deformation

Using the notation of figure 2, we can write the following obvious relationships:

$$l_c^0 = l_s^0 \cos \alpha^0, \quad (3.1)$$

$$l_c = l_s \cos \alpha, \quad (3.2)$$

$$l_c = l_c^0 + \Delta l_c, \quad (3.3)$$

$$\alpha^0 = \alpha + \Delta \alpha, \quad (3.4)$$

$$l_s = l_s^0 \cos \Delta \alpha + \Delta l_c \cos \alpha. \quad (3.5)$$

By successive elimination of the following terms from relation (3.5):  $\Delta l_c$  with the aid of (3.3),  $l_c$  by the use of (3.2),  $\Delta \alpha$  by virtue of (3.4), and  $l_c^0$  by means of (3.1), while carrying out the necessary transformations and reductions, we obtain a fairly compact expression

$$\frac{l_s}{l_s^0} = \frac{\sin \alpha^0}{\sin \alpha}.$$

Similarly, eliminating the following terms from (3.5) successively:  $\Delta l_c$  with the aid of (3.3),  $l_s$  by the use of (3.2),  $\Delta \alpha$  by virtue of (3.4), and  $l_s^0$  by means of (3.1), we derive an expression

$$l_c = l_c^0 \frac{\operatorname{tg} \alpha^0}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

These conditions can be more conveniently expressed in terms of stretch

$$\lambda = \frac{l}{l^0}$$

which is an important value in the theory of large deformations.

$$\lambda_s = \frac{\sin \alpha^0}{\sin \alpha}, \quad \lambda_c = \frac{\operatorname{tg} \alpha^0}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \frac{\lambda_s}{\lambda_c} = \frac{\cos \alpha^0}{\cos \alpha}. \quad (3.6)$$

After squaring the last expression and eliminating  $\sin \alpha$  from it using the first expression, we derive after cancellations the strain compatibility condition for the 3-bar truss:

$$\lambda_s^2 = \lambda_c^2 \cos^2 \alpha^0 + \sin^2 \alpha^0. \quad (3.7)$$

If we express the compatibility condition in terms of strain

$$\varepsilon = \lambda - 1, \quad (3.8)$$

then the first and second expressions (3.6) take the form

$$\varepsilon_s = \frac{\sin \alpha^0 - \sin \alpha}{\sin \alpha}, \quad \varepsilon_c = \frac{\operatorname{tg} \alpha^0 \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha}.$$

Dividing the first expression by the second one, after some transformations, we get

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_c} = \frac{\sin \alpha^0 \sin \Delta\alpha}{1 + \cos \Delta\alpha} + \cos^2 \alpha^0.$$

At small deformation  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ , whence  $\sin \Delta\alpha \rightarrow 0$ ,  $\cos \Delta\alpha \rightarrow 1$ . As a result, we obtain the well-known formulation of the compatibility condition for small deformations:

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_c} = \cos^2 \alpha^0. \tag{3.9}$$

In particular,  $\alpha^0 = \pi/4$  gives  $\varepsilon_c = 2\varepsilon_s$ .

#### 4. Relationship between stresses in bars and their cross-sectional areas

In projection to the axis of the central rod, the equilibrium equation for the forces at the acting load point has the following form:

$$N_c + 2N_s \cos \alpha = P.$$

Here  $N_c = \sigma_c F_c$ ,  $N_s = \sigma_s F_s$  — internal forces at the rods,  $\sigma_c$ ,  $\sigma_s$  — stresses at the rods,  $F_c$ ,  $F_s$  — the cross-sectional areas of the rods. Eliminating  $\cos \alpha$  from this equation by using (3.6), we express the internal forces in terms of the stresses:

$$\sigma_c F_c + 2\sigma_s F_s \frac{\lambda_c}{\lambda_s} \cos \alpha^0 = P.$$

In addition, it is possible to take into account the true stresses in this equation. Allowing for the fact that the cross-sectional area of a bar decreases while stretching the bar, according to the generalized Hooke's law [3] (here it is desirable for the materials to specify the true stress-strain diagrams), the equation takes on form:

$$\sigma_c (1 - \nu_c \varepsilon_c)^2 F_c^0 + 2\sigma_s \frac{\lambda_c}{\lambda_s} (1 - \nu_s \varepsilon_s)^2 F_s^0 \cos \alpha^0 = P \tag{4.1}$$

where  $\nu_c$ ,  $\nu_s$  are the Poisson ratios of the used materials. Thus, the equation has been obtained linking the cross-sectional areas of the rods with the stresses in them.

Equation (4.1) connects four parameters (the cross-sectional areas and the stresses). Now, if we join it with the compatibility condition (3.7) (which connects the stresses — two of these parameters) then we obtain a system which allows to specify values for the two parameters and to derive values for the other two. The most simple from the available possibilities is to set the stress in one of the rods and the cross-sectional area of one of the rods (the choice of the rod is arbitrary in both cases). The procedure is the following:

1. the strain value is obtained from the specified stress by the use of the stress-strain curve of the bar;

2. the stretch value is obtained from the strain value by means of (3.8);
3. the stretch of the other bar is obtained by the compatibility condition (3.7) from the already known stretch;
4. the strain of the other bar is obtained from the its stretch;
5. the stress in the other bar is obtained from the its strain;
6. already known values of stress, strain and stretch are substituted in equation (4.1);
7. the specified value of the cross-sectional area of one of the bars is substituted in this equation;
8. the derived equality is the linear equation from which the cross-sectional area of the residual bar is expressed.

It should be noted that even when physical and geometric nonlinearities are taken into account, equation (4.1) *linearly* connects the cross-sectional areas  $F_c^0$ ,  $F_s^0$  of the rods. Therefore, in the plane of the variables  $F_c^0$ ,  $F_s^0$ , lines of equal stresses will always be the straight ones intersecting the coordinate axes at the points

$$\left\{ F_c^0 = 0, \quad F_s^0 = \frac{\lambda_s}{2\lambda_c} \frac{P}{\sigma_s(1 - \nu\varepsilon_s)^2 \cos \alpha^0} = \frac{P}{\sigma_s(1 - \nu\varepsilon_s)^2 \cos \alpha} \right\},$$

$$\left\{ F_c^0 = \frac{P}{\sigma_c(1 - \nu\varepsilon_c)^2}, \quad F_s^0 = 0 \right\}$$

Similarly, in the case of small deformations, according to (4.3), the intersection points of the equal stress lines with the coordinate axes are

$$\left\{ F_c^0 = 0, \quad F_s^0 = \frac{P}{2\sigma_s \cos \alpha^0} \right\}, \quad \left\{ F_c^0 = \frac{P}{\sigma_c}, \quad F_s^0 = 0 \right\}.$$

Using the system (4.1), (3.7), we can also solve the direct problem of calculating the stress values in rods for given areas of their cross-section. To do this, from equation (3.7) we express the value of one of the stretches through the other one (noting that for the problem being solved the physical meaning exists when  $\lambda \geq 1$ ). For compactness of the result, it is more convenient to express the stretch of the central bar:

$$\lambda_c = \frac{\sqrt{\lambda_s^2 - \sin^2 \alpha^0}}{\cos \alpha^0}.$$

Substituting this expression in equation (4.1), we obtain a nonlinear equation from which we can calculate  $\lambda_s$ :

$$\sigma_c(\varepsilon_c) \Big|_{\varepsilon_c = \frac{\sqrt{\lambda_s^2 - \sin^2 \alpha^0}}{\cos \alpha^0} - 1} \left( 1 - \nu_c \left( \frac{\sqrt{\lambda_s^2 - \sin^2 \alpha^0}}{\cos \alpha^0} - 1 \right) \right)^2 F_c^0 +$$

$$+ 2 \frac{\sigma_s(\varepsilon_s) \Big|_{\varepsilon_s = \lambda_s - 1} \sqrt{\lambda_s^2 - \sin^2 \alpha^0} (1 - \nu_s(\lambda_s - 1))^2}{\lambda_s} F_s^0 = P. \quad (4.2)$$

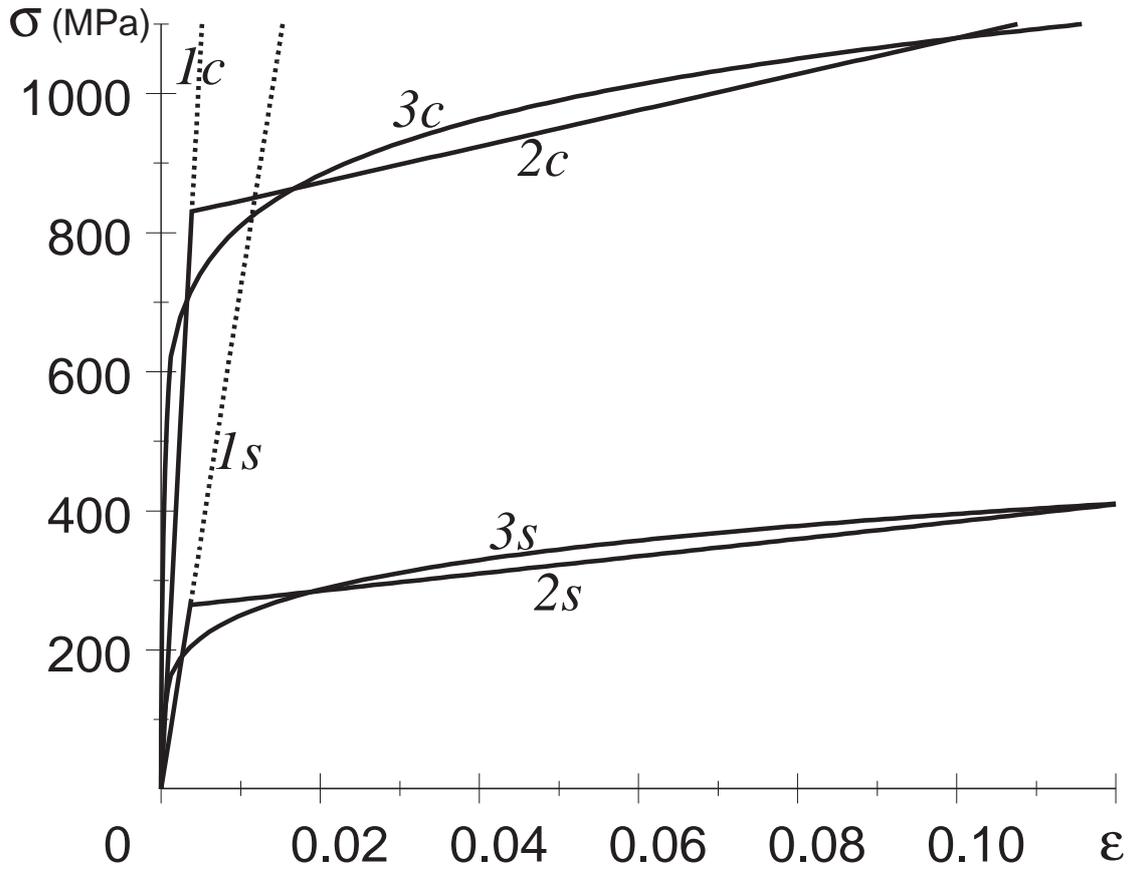


Fig. 3. The stress-strain relations of the materials 30HGSA and D16

Let us see how the left side of this equation behaves. For example, let us set the cross-sectional areas of all the bars to  $1 \text{ cm}^2$ , and the materials: the 30HGSA steel in the central bar, and the D16 aluminium alloy in the side bars. As a model of the materials, we consider a linearly elastic  $\sigma = E\varepsilon$  (with the values  $E_c = 215 \text{ GPa}$  and  $E_s = 72 \text{ GPa}$ , and also the plastic one: with the linear hardening (passing through the points  $\{0, 0\}$ ,  $\{\sigma_t/E, \sigma_t\}$ ,  $\{\varepsilon_b, \sigma_b\}$  with the values  $\sigma_{tc} = 830 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{bc} = 1080 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{bc} = 0.1$ ,  $\sigma_{ts} = 265 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{bs} = 410 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{bs} = 0.12$ ), and with the power approximation ( $\sigma_c = 1440\varepsilon_c^{1/8}$ ,  $\sigma_s = 627\varepsilon_s^{1/5}$ ). The corresponding graphs are shown on figure 3. The Poisson's ratio for both the materials is given  $\nu = 0.3$ . Fig. 4 demonstrates the variants of behavior of the left-hand side of equation (4.2). Numbers 1, 2, 3 indicate the left-hand side graphs for the linearly elastic, linearly hardening, and power-law models of materials, respectively. Numbers 1a, 2a, 3a indicate similar graphs for the case when the reduction in the cross-sectional area of the rods is not taken into account when they are stretched (by assignment  $\nu_c = \nu_s = 0$ ). It can be seen that if we neglect the decrease in the areas of the bar cross-sections under tension, then the behavior of the left side of equation (4.2) is monotonic, having a unique solution for any level

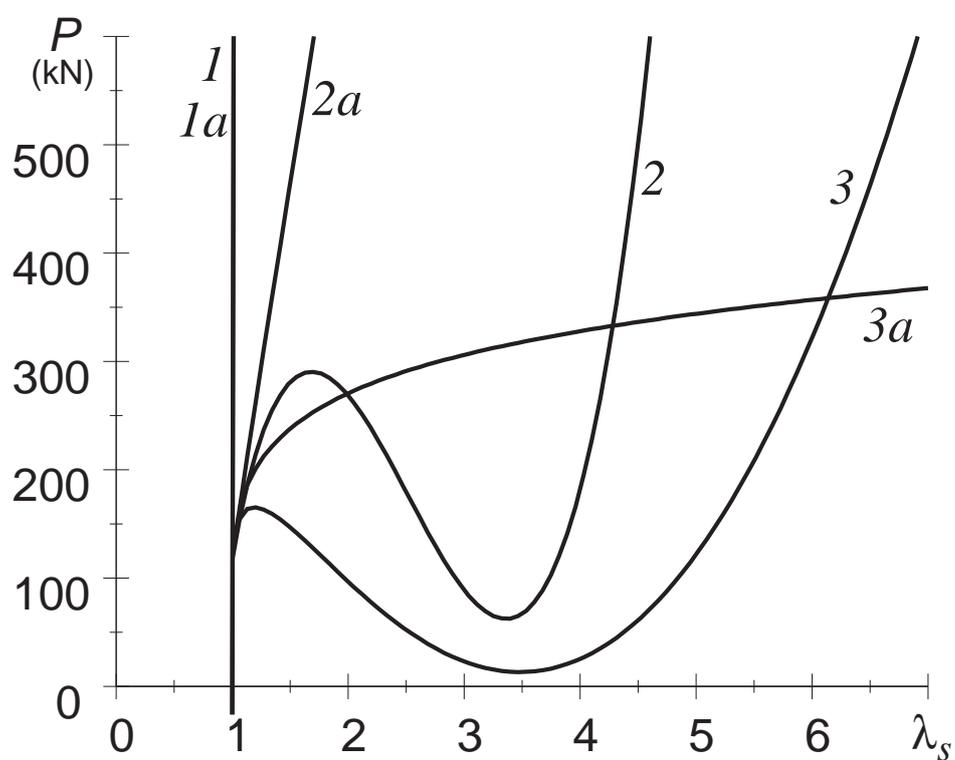
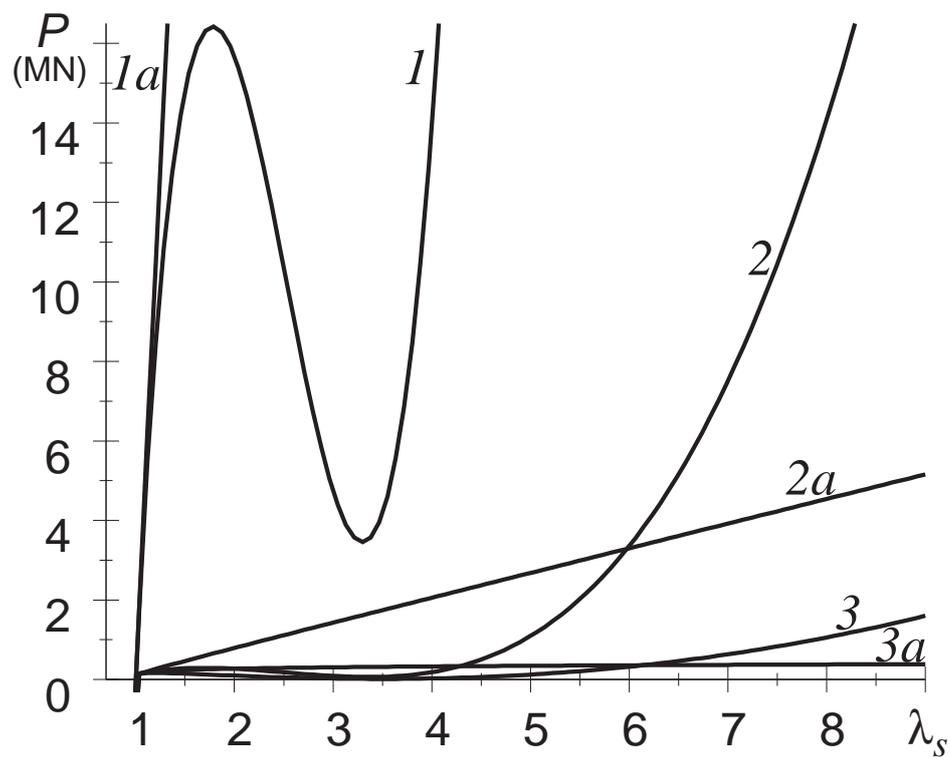


Fig. 4. Variants of behavior of the left side of equation (4.2) for various material models

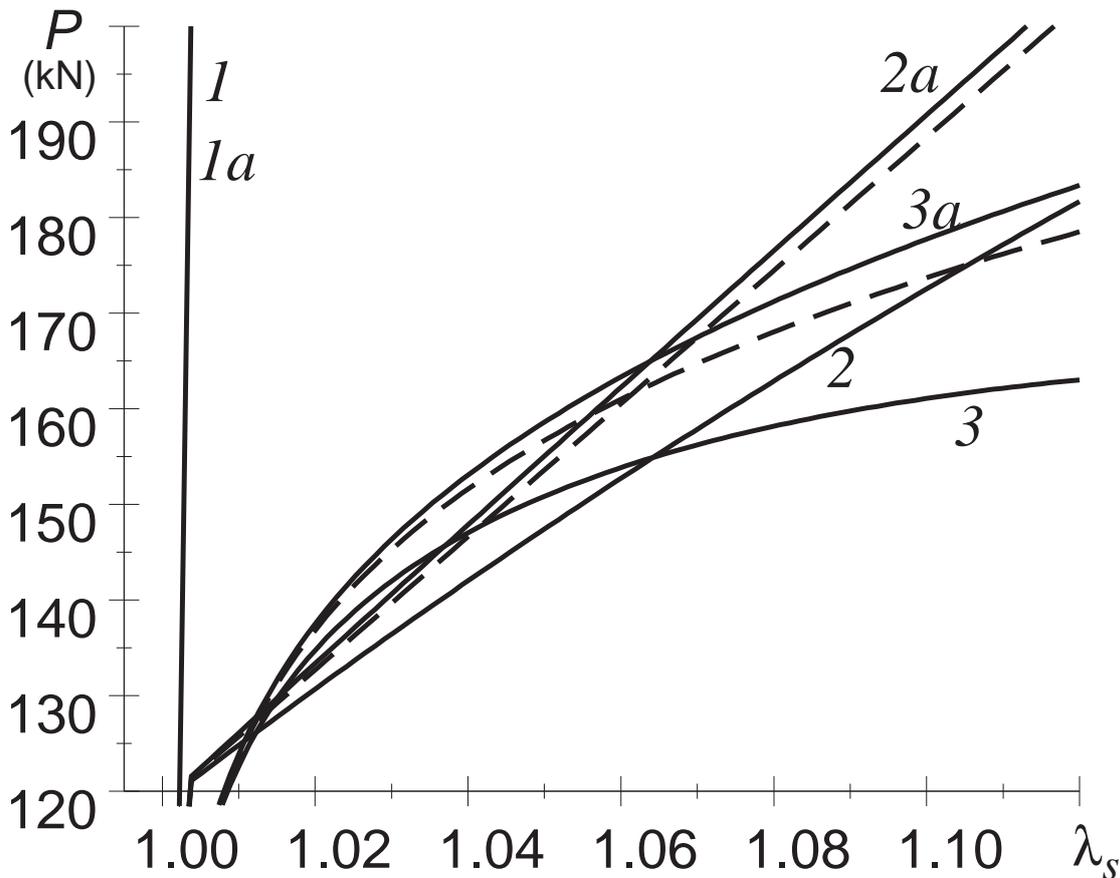


Fig. 5. Variants of behavior of the left side of equation (4.2) for various material models within the limits of strength

of external load. Nevertheless, when taking into account the true stresses, even with a linear-elastic model of materials, there is a range of values of the external load  $P$ , in which the deformed configuration of the truss is not the only one (three solutions become possible). However, the domain of non-uniqueness is beyond the real strength of the material used; therefore, it is of no practical interest. Within the limits of strength, behavior of the left-hand side of the equation written for all material models (it is shown in figure 5 by solid lines) is monotonic and gives the equation a unique solution. Although the curves in this area are rather close to each other, it is clear that neglecting the transverse compression of the rods results in an underestimation of the strain level near the ultimate strength by about 40%. It should also be noted that when using non-smooth approximations for the stress-strain curve, the equation solution graph will also have kinks, so when solving the equation by numerical methods one should use methods that do not use the derivative.

For small deformations, equation (4.1) becomes

$$\sigma_c F_c^0 + 2\sigma_s F_s^0 \cos \alpha^0 = P. \quad (4.3)$$

This equation, together with the condition of compatibility of small deformations (3.9), form a set of equations, similarly to the set (4.1), (3.7) for large strain. The conclusions obtained for the set (4.1), (3.7) are also valid for this set (except for the use of the concept of stretch  $\lambda$ ). After eliminating the value  $\varepsilon_c$  from (4.3) (by the use of (3.9)), we obtain a nonlinear equation with respect to  $\varepsilon_s$ . This equation is in fact a weighted sum of stress-strain diagrams of the materials used. The behavior of the left side of this equation is shown vs the scale of stretches in Fig. 5 by dashed lines. It can be seen that a geometrically linear solution is even slightly more accurate than a solution for finite deformations without taking into account the true stresses.

Being considered for the linear case, both geometrically and physically, the system (3.9), (4.3) allow us to obtain explicit expressions for unknown parameters via given ones [3].

## 5. The formulation of the optimal design problem

Consider the problem of optimization the symmetric statically loaded three-bar truss, described above (see Fig. 1). It is required to find the values of the cross-sectional area of the bars, which ensure the minimum of mass for the truss under constraints from above on the stress levels in rods and the technology constraints. The design parameters are  $F_c^0$  and  $F_s^0$  — the cross-sectional areas of the rods of each type. The mass value of the truss is obviously expressed in terms of the design variables:

$$m = \rho_c F_c^0 l_c^0 + 2\rho_s F_s^0 l_s^0 = l_c^0 \left( \rho_c F_c^0 + \frac{2\rho_s}{\cos \alpha^0} F_s^0 \right)$$

where  $\rho_c, \rho_s$  are density of the materials used (we neglect the change in density during deformation).

Thus, the optimization problem is formulated as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_c F_c^0 + \frac{2\rho_s}{\cos \alpha^0} F_s^0 \rightarrow \min_{F_c^0, F_s^0} \\ \sigma_c < \bar{\sigma}_c; \quad \sigma_s < \bar{\sigma}_s \\ \sigma_c = f_c(\lambda_c); \quad \sigma_s = f_s(\lambda_s) \\ \sigma_c (1 - \nu \varepsilon_c)^2 F_c^0 + 2\sigma_s \frac{\lambda_c}{\lambda_s} (1 - \nu \varepsilon_s)^2 F_s^0 \cos \alpha^0 = P \quad \text{where } \varepsilon = \lambda - 1 \\ \lambda_s^2 = \lambda_c^2 \cos^2 \alpha^0 + \sin^2 \alpha^0 \\ F_c^0 \geq \bar{F}_c; \quad F_s^0 \geq \bar{F}_s \end{array} \right.$$

We can exclude dependent variables from the problem, and taking into account the fact that the dependences  $\sigma = f(\lambda)$  are assumed to be monotonically nondecreasing,

we can write:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_c F_c^0 + \frac{2\rho_s}{\cos \alpha^0} F_s^0 \rightarrow \min_{F_c^0, F_s^0} \\ \lambda_c < f_c^{-1}(\bar{\sigma}_c); \quad \lambda_c < \frac{\sqrt{(f_s^{-1}(\bar{\sigma}_s))^2 - \sin^2 \alpha^0}}{\cos \alpha^0} \\ g_c(\lambda_c) F_c^0 + 2g_s \left( \sqrt{\lambda_c^2 \cos^2 \alpha^0 + \sin^2 \alpha^0} \right) F_s^0 \cos \alpha^0 = \frac{P}{\lambda_c} \\ F_c^0 \geq \bar{F}_c; \quad F_s^0 \geq \bar{F}_s \end{array} \right. \quad (5.1)$$

where  $g(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda} (\lambda\nu - \nu - 1)^2$

For the case of small deformations, the problem of optimizing the truss is conveniently formulated using the formulation of the stress-strain relation through the secant modulus of elasticity ( $\sigma = E^{\text{sec.}} \cdot \varepsilon$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_c F_c^0 + \frac{2\rho_s}{\cos \alpha^0} F_s^0 \rightarrow \min_{F_c^0, F_s^0} \\ \sigma_c < \bar{\sigma}_c; \quad \sigma_s < \bar{\sigma}_s \\ \sigma_c = E_c^{\text{sec.}} \cdot \varepsilon_c; \quad \sigma_s = E_s^{\text{sec.}} \cdot \varepsilon_s \\ \sigma_c F_c^0 + 2\sigma_s F_s^0 \cos \alpha^0 = P \\ \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_c} = \cos^2 \alpha^0 \\ F_c^0 \geq \bar{F}_c; \quad F_s^0 \geq \bar{F}_s \end{array} \right.$$

It follows from the two bottom equalities that

$$\varepsilon_c (E_c^{\text{sec.}} \cdot F_c^0 + 2E_s^{\text{sec.}} \cdot F_s^0 \cos^3 \alpha^0) = P,$$

and the optimization problem can be written in the form:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_c F_c^0 + \frac{2\rho_s}{\cos \alpha^0} F_s^0 \rightarrow \min_{F_c^0, F_s^0} \\ E_c^{\text{sec.}} \cdot F_c^0 + 2E_s^{\text{sec.}} \cdot F_s^0 \cos^3 \alpha^0 > \frac{P}{\bar{\sigma}_c} E_c^{\text{sec.}} \\ E_c^{\text{sec.}} \cdot F_c^0 + 2E_s^{\text{sec.}} \cdot F_s^0 \cos^3 \alpha^0 > \frac{P}{\bar{\sigma}_s} E_s^{\text{sec.}} \cdot \cos^2 \alpha^0 \\ F_c^0 \geq \bar{F}_c; \quad F_s^0 \geq \bar{F}_s \end{array} \right.$$

It can be seen from the above formulations that, for both small and finite deformations, the optimization problem of the considered truss is a linear programming problem. Accounting for each type of nonlinearity only affects change in scale of calibration of the coordinate axes. The acceptable region of the design variables and the



in the figure by the letters  $C$  (which have  $F_c^0 > \bar{F}_c$ ,  $F_s^0 = \bar{F}_s$ ) and  $S$  ( $F_c^0 = \bar{F}_c$ ,  $F_s^0 > \bar{F}_s$ ): one of them having a smaller mass is the optimal design. Also it is possible (but improbable) the case when the gradient of the objective function is orthogonal to the active stress constraint, and the designs  $C$  and  $S$  have an equal mass. Then the optimal solution is any design belonging to the segment  $CS$ .

## 6. Influence of nonlinearities on the properties of the optimal design

Let us consider how the appearance and properties of the optimal design are changed while taking into account the physical and geometric nonlinearities. Restricted to small deformations, simple examples [8] (such as pure bending or torsion of a beam, loading of the considered here three-bar truss) clearly demonstrate that when considering the actual plastic behavior of a material, the internal forces acting in it are distributed more evenly compared to the linearly elastic case. As a result, accounting for the physical nonlinearity shows the increased load-carrying capacity of the structure. Thereby, one can meet assertions that a design based on the linear-elastic model of the material should result in an increase of the safety margin, and, in turn, the development taking into account the plasticity of the material should reduce the mass of the optimal design. For example, “design taking into account nonlinear characteristics of the material allows you to achieve an essential reduction in material consumption” [2]; “Elastic calculation leaves unused reserves of load-carrying capacity in statically redundant systems. The involvement of these reserves in the work, associated with significant savings in building materials, is only possible with the moving to calculation taking into account the plastic work of the material” [6]. It also notes that “The actual effect of the transition from conventional to ‘plastic’ frame design is expressed in 25-30% of the metal savings.” However, the simple models used as a basis for these observations contain only one structural material. If more than one material is used then an additional degree of freedom arises related to the ratio of the densities of the materials used. This degree of freedom can result in the opposite effect. As for the nature of the influence of accounting for geometric nonlinearity on the properties of optimal designs, there are no simple examples that allow to draw unambiguous conclusions. With all this, it is obvious that

Table 1. The properties of the used materials

Material	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$E$ (GPa)	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_b$ (MPa)	$\varepsilon_b$ (%)
Bronze BrO10	8800	104	175	215	7
Brass L75	8630	103	110	370	60
Steel 30HGSA	7850	215	830	1080	10
Cast iron SCh35	7400	140	—	350	$\sigma_b/E$
Titanium alloy VT6	4450	115	1030	1080	6
Aluminium alloy D16	2770	72	265	410	12
Aluminium alloy ML5	1810	43	90	160	2

the simultaneous consideration of the physical and geometric nonlinearities should lead to the most realistic and adequate design.

Several standard structural alloys [5] was selected for the investigation. Their parameters are given in Table 1. The properties of optimal designs were analyzed with all possible combinations of materials use, i.e. altogether 49 possible options. The optimization problem (5.1) was considered with the following parameters:  $l_c^0 = 1$  m,  $\alpha^0 = \pi/4$ ,  $P = 10$  kN,  $\bar{F}_c = \bar{F}_s = 1$  mm<sup>2</sup>, the strength limits  $\bar{\sigma}$  was specified by the ultimate stresses  $\sigma_b$ . To describe the geometrically nonlinear behavior of materials, a model with the linear hardening was used (except for the cast iron, which, through its brittleness, was considered to be linearly elastic in all calculations).

Combinations of materials, giving rise to the minimum or maximum mass of the optimal design, are shown in Table 2 (in this and the following tables, the used materials are enumerated with specifying the material of the central bar, and then through the dash, the material of the side rods). From the changes in the set of materials, it can be seen that the physical nonlinearity has a greater effect on the change in the properties of the optimal design than the geometric one. Wherein, even though as expected on the basis of simple examples, use of physical nonlinearity results in a decrease in the mass of the optimal design, optimal designs with the largest mass were also obtained taking into account the physical nonlinearity.

Table 3 analyzes the nature of the changes in the mass of the truss at accounting for each of the kinds of nonlinearity. In particular, taking into account the physical nonlinearity leads to an unambiguous reduction in the mass of the optimal design only when one structural material is used in all the rods. Meanwhile, already for two materials, the cases of increasing as well as decreasing mass value appear. In addition, in seven cases the mass and other parameters of the optimal design did not change (all these cases are connected with the use of non-plastic cast iron in the fully stressed element (i.e. the bar with an active stress constraint) and the compatible stress level below the plasticity zone in the understressed element; among them there is a rather strange design VT6–SCh35 in which the fully stressed element is simultaneously

Table 2. Optimal designs having the smallest and largest mass value

Taking into account nonlinearities	Smallest mass			Largest mass		
	materials	design	$m$ (g)	materials	design	$m$ (g)
Lin. elast., small def.	VT6–D16	$C$	47	BrO10–BrO10	$C$	428
Plast., small def.	VT6–ML5	$C$	46	L75–BrO10	$C$	516
Lin. elast., fin. def.	VT6–D16	$C$	47	BrO10–BrO10	$C$	428
Plast., fin. def.	VT6–ML5	$C$	46	L75–BrO10	$C$	528
including for the one-material truss						
Lin. elast., small def.	VT6–VT6	$C$	51	BrO10–BrO10	$C$	428
Plast., small def.	VT6–VT6	$C$	48	BrO10–BrO10	$C$	423
Lin. elast., fin. def.	VT6–VT6	$C$	51	BrO10–BrO10	$C$	428
Plast., fin. def.	VT6–VT6	$C$	48	BrO10–BrO10	$C$	425

Table 3. Change in the mass of the optimal project at accounting for the nonlinearities

Nonlinearity		$m_{lin.} > m_{nonl.}$		$m_{lin.} = m_{nonl.}$	$m_{lin.} < m_{nonl.}$	
under study	other	cases	$\Delta m_{max}$	number of cases		$\Delta m_{max}$
Physical	small def.	27	355%	7	15	51%
	fin. def.	25	359%	7	17	52%
Geometric	lin. elast.	1	0.03%	0	48	0.22%
	plast.	14	1.57%	0	35	8.3%
including for the one-material truss						
Physical	small def.	6	6.2%	1	0	—
	fin. def.	5	6.3%	1	1	7.6%
Geometric	lin. elast.	0	—	0	7	0.04%
	plast.	1	0.06%	0	6	8.3%

prone to degeneration). The effect of increasing the mass of the optimal design, while taking into account the physical nonlinearity, was manifested for 15 combinations of the materials used, as can be seen from Table 3. In 7 cases (from these 15) this effect is the most appreciable (weight increase is greater than 2.5%). The corresponding designs are shown in Table 4. Also, tables 3 and 4 make it possible to note that an additional account for geometric nonlinearity has a weak influence on the quantitative trend of the mass change. Nevertheless, here it is possible to increase the mass of a physically nonlinear design from one material (L75–L75), which is not obtained from the calculation on the basis of small deformations and does not confirm the analysis of the simplest examples.

It was analyzed how much the designs  $C$  and  $S$  differ in their mass for the same problem, and how realistic in practice is the optimality of the entire segment  $CS$ . The ranges in which there is a difference in mass between these designs are shown in Table 5. As a matter of fact, both for small and finite deformations, linearly elastic calculation gives the optimal design  $C$  in all 49 cases. However, when physically nonlinear calculation was used, design  $S$  was already optimal in 11 cases. This demonstrates the fundamental possibility of changing not only numerical parameters, but also the

Table 4. Optimal designs with increasing mass when allowance for physical linearity

Used materials	Small deformations			Finite deformations		
	Lin.-elast.	Plastic	$\Delta m$	Lin.-elast.	Plastic	$\Delta m$
L75–BrO10	$C$ (252 g)	$C$ (516 g)	51%	$C$ (252 g)	$C$ (528 g)	52%
L75–SCh35	$C$ (246 g)	$S$ (427 g)	42%	$C$ (246 g)	$S$ (426 g)	42%
ML5–SCh35	$C$ (130 g)	$C$ (191 g)	32%	$C$ (130 g)	$C$ (191 g)	32%
D16–ML5	$C$ (72 g)	$C$ (92 g)	23%	$C$ (94 g)	$C$ (120 g)	21%
30HGSA–SCh35	$C$ (90 g)	$C$ (111 g)	18%	$C$ (90 g)	$C$ (111 g)	18%
30HGSA–ML5	$C$ (77 g)	$C$ (88 g)	13%	$C$ (77 g)	$C$ (89 g)	13%
L75–L75	$C$ (252 g)	$C$ (250 g)	–0.7%	$C$ (252 g)	$C$ (272 g)	8%

Table 5. Difference in mass between the designs  $C$  and  $S$  (in % of  $m_{opt}$ )

Accounting of nonlinearities	min. difference			max. difference		
	materials	opt.	$\Delta m$	materials	opt.	$\Delta m$
Lin. elast., small. def.	L75–30HGSA	$C$	64.9	D16–BrO10	$C$	592
Plast., small. def.	30HGSA–BT6	$C$	10.4	VT6–L75	$C$	1843
Lin. elast., finite def.	L75–30HGSA	$C$	64.6	D16–BrO10	$C$	591
Plast., finite def.	30HGSA–VT6	$C$	9.7	VT6–L75	$C$	1822
including for the one-material truss						
Lin. elast., small. def.	30HGSA–30HGSA	$C$	199	BrO10–BrO10	$C$	276
Plast., small. def.	VT6–VT6	$C$	67.9	SCh35–SCh35	$C$	263
Lin. elast., finite def.	VT6–VT6	$C$	198	ML5–ML5	$C$	282
Plast., finite def.	VT6–VT6	$C$	67	SCh35–SCh35	$C$	262

geometry of the optimal design, taking into account the physical nonlinearity. The specified cases of changing the geometry are shown in the Table 6. It can be seen from the table that in all these cases the linear design has its technology constraints active in the side bars, and the nonlinear one has them active in the central bar. At the same time, in the linear case, the stress constraint is active only in the central bar, but in the nonlinear case it is active in the central bar in 4 cases (are abnormal projects in which the fully stressed element is simultaneously prone to degeneration) and in 7 cases it is active in the side bars. Qualitatively, the same results were obtained for finite deformations (in the table a comma-separated value of the mass relates to the corresponding geometrically nonlinear design, if it differs from the geometrically linear case). Thus, the physical nonlinearity has a greater impact on the change in the

Table 6. Optimal designs with a modified geometry after taking into account the physical nonlinearity

Materials	Optimal design	
	Linear-elastic (small and finite def.)	Plastic (small, finite def.)
BrO10–SCh35	$C$ (422 g)	$S$ (424 g)
BrO10–30HGSA	$C$ (419 g)	$S$ (177 g, 175 g)
BrO10–D16	$C$ (413 g)	$S$ (187 g, 185 g)
BrO10–ML5	$C$ (412 g)	$S$ (231 g, 229 g)
BrO10–VT6	$C$ (415 g)	$S$ (91 g, 90 g)
ML5–VT6	$C$ (122 g)	$S$ (87 g, 86 g)
L75–SCh35	$C$ (246 g)	$S$ (427 g, 426 g)
L75–30HGSA	$C$ (243 g)	$S$ (151 g, 149 g)
L75–D16	$C$ (237 g)	$S$ (141 g, 139 g)
L75–ML5	$C$ (236 g)	$S$ (232 g, 231 g)
L75–VT6	$C$ (239 g)	$S$ (90 g, 89 g)

configuration of the optimal design than the geometric one.

The existence of unusual designs having the fully stressed element, which is prone to degeneration, can be explained by the fact that the other (underloaded) element made of material with large allowable stress. And, despite its underload, the last element has the stress level higher than that in the fully stressed one; i.e., this effect is due to the use of different materials in the one structure.

## 7. Conclusion

In spite of its simplicity, the problem of optimal design of a three-bar truss can exhibit quite interesting effects when geometric and physical nonlinearities are taken into account. In general, the geometric nonlinearity affects the changes in the optimal design appreciably weaker than the physical one. This is the most evident especially in calculations performed on the basis of a linearly elastic material model. In this structure, geometrically nonlinear effects can appear more significant while using rubberlike materials which allow to achieve large deformations within the limits of their strength.

## References

1. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации: Пер. с англ. — М: Наука, 1977. — 344 с.  
Aoki M. Introduction to Optimization Techniques: Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming. New York: Macmillan Company, 1971.
2. *Баничук Н. В.* Введение в оптимизацию конструкций. — М: Наука, 1986. — 304 с.  
Banichuk, N. V. Introduction to optimization of structures. New York: Springer, 1990.
3. *Биргер И. А., Мавлютов Р. Р.* Сопротивление материалов: Учебн. пособие. — М: Наука, 1986. — 560 с.  
Birger I. A., & Mavlyutov R. R. Strength of materials. Moscow: Fizmatlit, 1986. (in Russian).
4. *Липин Е. К., Фролов В. М., Чедрик В. В., Шаныгин А. Н.* Алгоритм оптимизации силовых конструкций по условиям прочности с компенсацией нарушенных ограничений // Ученые записки ЦАГИ. — 1988. — Т. XIX, №1. — С. 58–66.  
Lipin, E. K., Frolov, V. M., Chedrik, V. V., & Shanygin, A. N. An algorithm of optimization of load-bearing structures relative to the strength conditions with compensation for violated constraints, Uchen. Zap. TSAGI, 19, No. 1, 58–66 (1988). (in Russian).
5. *Марочник стали и сплавов.* — [http://www.splav-kharkov.com/choose\\_type.php](http://www.splav-kharkov.com/choose_type.php).  
The marker of steel and alloys [http://www.splav-kharkov.com/choose\\_type.php](http://www.splav-kharkov.com/choose_type.php) Accessed 27.12.2017 (in Russian).
6. *Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений расчётно-теоретический.* Ред. Уманский А.А. — М: ГСИ, 1967. — 1046 с.  
Ed. Umansky A. A. The calculational and theoretical handbook for a designer of industrial, residential and public buildings and structures. Moscow: GSI, 1967. (in Russian).

7. Хог. Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции: Пер. с англ. — М: Мир, 1983. — 478 с.  
Haug. E.J., Arora J.S. Applied optimal design: mechanical and structural systems. New York: Wiley Interscience, John Wiley and Sons, 1979.
8. Ходжс Ф. Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций: Пер. с англ. — М: Машгиз, 1963. — 380 с.  
Hodge Ph. G., Jr. Plastic analysis of structures. New York: McGraw-Hill Book Co, 1959.
9. Greco M., Gesualdo F. A. R., Venturini W. S., Coda H. B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. Finite Elements in Analysis and Design, 42, No. 12, 1079–1086 (2006).
10. Hodge P. G., Bathe K. J., Dvorkin E. N. Causes and Consequences of Nonuniqueness in an Elastic-Perfectly-Plastic Truss. Journal of Applied Mechanics, 53, 235–241 (1986).
11. Ryu Y. S., Haririan M., Wu C. C., Arora J. S. Structural design sensitivity analysis of nonlinear response. Computers & Structures, 21, No. 1/2, 2045–2055 (1985).
12. Selyugin S. V., Chekhov V. V. Multimaterial design of physically nonlinear structures. Structural and Multidisciplinary Optimization, 21, No. 3, 209–217 (2001).
13. Yang W. H. Large deformation of structures by sequential limit analysis. International Journal of Solids and Structures, 30, No. 7, 1001–1013 (1993).

Получена 20.06.2017

УДК 517.98

# Негладкие вариационные задачи с подвижной границей с точки зрения обобщенного метода множителей Лагранжа

Е. М. Кузьменко, С. И. Смирнова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. E-mail: kuzmenko.e.m@mail.ru, si\_smirnova@mail.ru

**Аннотация.** Метод множителей Лагранжа обобщается на случай условного экстремума субгладкого функционала при субгладком условии связи. Наш подход основан на недавно предложенной в работах И.В. Орлова субгладкой форме теорем об обратной и неявной функции, а также на операторной базе этих результатов, изложенной в работах И.В. Орлова и С.И. Смирновой.

Упомянутые результаты позволили распространить метод множителей Лагранжа на случай негладкого условного экстремума, что составляет содержание первой части работы.

Вторая часть работы посвящена негладким вариационным функционалам и опирается на теорию сильных субдифференциалов, рассмотренную в работах И.В. Орлова, а также на методы исследования негладких вариационных функционалов, описанные в совместном учебном пособии И.В. Орлова, Ф.С. Столякина и С.И. Смирновой. Здесь получено обобщенное условие трансверсальности, которое уже рассматривалось нами ранее в более частном случае, а также приведены примеры его применения.

В частности, в качестве простейшего примера отмечен “квазиклассический” случай, когда гладкое условие на подвижную границу комбинируется с негладким интегрантом вариационного функционала.

**Ключевые слова:** негладкие вариационные задачи, подвижная граница, сильные субдифференциалы, метод множителей Лагранжа.

## Nonsmooth variational problems with a moving boundary via generalized Lagrange multipliers method

E. M. Kuzmenko, S. I. Smirnova

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** The Lagrange multiplier method is generalized to the case of a conditional extremum of the sub-smooth functional with a sub-smooth constraint condition. Our approach is based on the recently proposed in the works by I.V. Orlov a sub-smooth form of the inverse and implicit functions, as well as on the operator base of these results, described in the works by I.V. Orlov and S.I. Smirnova. The above results made it possible to extend the Lagrange multiplier method to the case of a nonsmooth conditional extremum, which is the content of the first part of the paper. The second part of the paper is devoted to nonsmooth variational functionals and is based on the theory of strong subdifferentiable functionals, considered in the works by I.V. Orlov, and also on the methods of investigating the nonsmooth variational functionals described in the joint textbook by I.V. Orlov,

F.S. Stonyakin and S.I. Smirnova. Here we obtain the generalized transversality condition, which we have already considered earlier in a more particular case, as well as the examples of its application. In particular, the “quasiclassical” case is noted as the simplest example, when a smooth condition on a moving boundary is combined with a nonsmooth integrand of the variational functional.

**Keywords:** nonsmooth variational problems, moving boundary, strong subdifferentials, Lagrange multiplier method.

**MSC 2010:** 47H04, 54C65, 46B22, 49N45, 47N10

## Введение

Наш подход основан на недавно предложенной в работе [6] субгладкой форме теорем об обратной и неявной функции, а также на операторной базе этих результатов, изложенной в [10]–[13].

Упомянутые результаты позволили распространить метод множителей Лагранжа на случай негладкого условного экстремума, что составляет содержание первой части работы.

Вторая часть работы посвящена негладким вариационным функционалам и опирается на теорию сильных субдифференциалов, рассмотренную в [5], [7], [9], а также на методы исследования негладких вариационных функционалов, описанные в [1], [7]. Здесь получено обобщенное условие трансверсальности, которое уже рассматривалось нами ранее в более частных случаях [2]–[4], а также приведены примеры его применения.

## 1. Приложение теоремы Дини о неявной функции к методу множителей Лагранжа в субгладком случае

Всюду далее,  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — вещественные банаховы пространства,  $Y \cong Z$ ,  $U(x, y)$  является окрестностью некоторой точки  $(x, y) \in X \times Y$ , отображения  $F : X \times Y \supset U(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$  и  $G : X \times Y \supset U(x, y) \rightarrow Z$  из класса  $C_{sub}^1$ , а суб-оператор  $\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{sub}(x, y)$  суб-обратим. Рассмотрим задачу на условный экстремум

$$F \mapsto \text{extr}, \quad G = 0.$$

Применяя классический метод Лагранжа-Люстерника (см., например, [8]), введем вспомогательное отображение вида

$$\Phi = F + \lambda(G) \quad (\lambda \in Z^*),$$

которое достигает экстремума в точке  $(x, y)$  вместе с  $F$ . Применение обобщенной леммы Ферма (см. [5]) к  $\Phi$  приводит к системе включений:

$$\begin{cases} 0 \in \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{sub}(x, y) + \lambda \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{sub}(x, y)\right]; \\ 0 \in \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{sub}(x, y) + \lambda \left[\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{sub}(x, y)\right]. \end{cases} \quad (1)$$

Далее, согласно результатам [10], каждый субдифференциал в системе (1) можно заменить системой базисных селекторов ( $A \mapsto A_{sub} = \{A^s\}_{s \in S}$ ). Тогда второе включение в (1) можно выразить в виде точного равенства:

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{sub}^s(x, y) + \lambda \left[\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{sub}^s(x, y)\right] \quad (2)$$

для некоторого  $s \in S$ , где  $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^s(x, y) \in \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{sub}(x, y)$  и  $\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^s(x, y) \in \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{sub}(x, y)$ . Из (2) следует

$$\lambda = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^s(x, y) \cdot \left[\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^s(x, y)\right]^{-1} \in -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{sub}(x, y) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{sub}^{-1}(x, y). \quad (3)$$

Наконец, подставляя (3) в первое включение из (1), мы приходим к включению

$$0 \in \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{sub}(x, y) - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{sub}(x, y) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{sub}^{-1}(x, y) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{sub}(x, y). \quad (4)$$

Сформулируем полученный результат.

**Теорема.** Пусть, при вышеупомянутых условиях, функционал  $F$  достигает в  $(x, y)$  условного экстремума. Тогда функция Лагранжа  $\Phi = F + \lambda(G)$  удовлетворяет в  $(x, y)$  необходимому условию экстремума  $0 \in \partial_{sub}\Phi(x, y)$ , которое можно представить в виде (4).

Заметим, что в скалярном случае ( $Y = Z = \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) включение (4) может быть легко выражено через верхние и нижние производные (в сокращенной форме):

$$0 \in \left[ \left[ \frac{\partial F/\partial x}{\partial G/\partial x} \quad \overline{\frac{\partial F/\partial y}}{\partial G/\partial y} \right]; \left[ \overline{\frac{\partial F/\partial x}}{\partial G/\partial x} \quad \frac{\partial F/\partial y}{\partial G/\partial y} \right] \right]. \quad (5)$$

## 2. Приложение к обобщенному условию трансверсальности

Рассмотрим вариационную задачу с подвижными границами в следующей форме:

$$\begin{cases} F(x_1, y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx \mapsto \text{extr}; \\ G(x_1, y) = \int_{x_0}^{x_1} g(x, y, y') dx; \end{cases} \quad (f, g \in C_{sub}^1). \quad (6)$$

Следует отметить, что случай  $g(x, y, y') = \varphi'(x) - y'$  при  $f, g \in C^1$  приводит к классическому условию трансверсальности (см. [8]). Введем функцию Лагранжа,

соответствующую задаче (6), следующим образом:  $\Phi = F - \lambda \cdot G$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ). Для простоты, вместо оценки (5) будем непосредственно использовать оценку  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{sub}$  в случае неподвижной границы (см. [5]). Здесь  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{sub}$  можно вычислить непосредственно. Таким образом, отсюда следует

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \in \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{sub}(x_1, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_1, y) = [f(x_1, y, y') - \lambda g(x_1, y, y')] = (f - \lambda g)|_{x=x_1}; \\ 0 \in \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{sub}(x_1, y) \cdot h \subset \left[ \int_{x_0}^{x_1} \underline{L}(f - \lambda g)(x, y, y') dx; \int_{x_0}^{x_1} \overline{L}(f - \lambda g)(x, y, y') dx \right]. \end{array} \right. \quad (7)$$

Здесь мы обозначаем через  $\underline{L}$  и  $\overline{L}$ , соответственно, нижний и верхний лагранжианы функции  $(f - \lambda g)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{L}(f - \lambda g) = \frac{\partial}{\partial y}(f - \lambda g) - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial}{\partial y'}(f - \lambda g) \right]; \\ \overline{L}(f - \lambda g) = \frac{\overline{\partial}}{\partial y}(f - \lambda g) - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\overline{\partial}}{\partial y'}(f - \lambda g) \right]. \end{array} \right.$$

Далее, равенство в (7) ведет к  $\lambda = \frac{f}{g}|_{x=x_1}$ . Включение в (7) можно привести к следующим двум случаям.

а) Полагая  $h(x_0) = h(x_1) = 0$  и следуя обычным преобразованиям, мы получаем так называемое *включение Эйлера-Лагранжа* для  $(f - \lambda g)$  (см. [5]):

$$0 \in [\underline{L}(f - \lambda g); \overline{L}(f - \lambda g)](x, y, y'). \quad (8)$$

Назовем включение (8) *совместным включением Эйлера-Лагранжа* для задачи (6).

б) Полагая  $h(x_0) = 0$  при произвольном значении  $h(x_1)$  и локализуя  $h(x)$  вблизи  $x_1$ , получим оценку

$$0 \in \left[ \frac{\partial}{\partial y'}(f - \lambda g); \overline{\frac{\partial}{\partial y'}}(f - \lambda g) \right](x, y, y'). \quad (9)$$

В конечном счете, подставляя вычисленное выше  $\lambda$  в (8) и (9), мы приводим необходимое условие экстремума для задачи (6) к системе

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \in [\underline{L}(g|_{x_1} \cdot f - f|_{x_1} \cdot g); \overline{L}(g|_{x_1} \cdot f - f|_{x_1} \cdot g)](x, y, y'); \\ 0 \in \left[ g|_{x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} - f|_{x_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial y'}; g|_{x_1} \cdot \frac{\overline{\partial} f}{\partial y'} - f|_{x_1} \cdot \frac{\overline{\partial} g}{\partial y'} \right](x, y, y'). \end{array} \right. \quad (10)$$

Здесь первое включение в (10) является совместным включением Эйлера-Лагранжа для системы (6), а второе включение в (10) является обобщенным включением трансверсальности для данной задачи.

В качестве простейшего примера рассмотрим в заключение квазиклассический случай  $y|_{x_1} = \varphi(x_1)$ . Здесь  $g(x, y, y') = \varphi'(x) - y'$  и система (10) принимает вид

$$\begin{cases} 0 \in [\underline{L}(f); \overline{L}(f)](x, y, y'); \\ 0 \in (\varphi' - y')|_{x_1} \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial y'}; \frac{\partial f}{\partial y'} \right](x, y, y') - f|_{x_1}. \end{cases} \quad (11)$$

Разумеется, обычное условие трансверсальности  $f|_{x_1} = (\varphi' - y')|_{x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$  и обычное уравнение Эйлера-Лагранжа  $L(f)(x, y, y')$  следуют из (11) при  $f \in C^1$ .

### 3. Обобщенное условие трансверсальности в случае модуляции гладкого интегранта

Рассмотрим задачу с подвижной границей следующего вида:

$$\left\{ \Phi(x_1, y) = \int_{x_0}^{x_1} |f(x, y, y')| dx \mapsto \text{extr}; \quad y|_{x_1} = \varphi(x_1); \quad (f \in C^1, \varphi \in C^1) \right\}. \quad (12)$$

1) В случае неподвижной границы вопрос о включении Эйлера-Лагранжа для функционала  $\Phi$  был исследован в [5]. Так как в случае (12) лагранжиан  $L(g) = 0$ , то совместное условие Эйлера-Лагранжа для задачи (12) сводится к условию:

$$(0 \in [\underline{L}(|f|); \overline{L}(|f|)]) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{либо } L(f) = 0 & (f \neq 0); \\ \text{либо } f = 0. \end{cases} \quad (13)$$

2) Далее, поскольку

$$\left( \frac{\partial(|f|)}{\partial y'} \right)_{sub} = \begin{cases} \text{sign } f \cdot \frac{\partial f}{\partial y'}, & \text{при } f \neq 0; \\ [-1; 1] \cdot \frac{\partial f}{\partial y'}, & \text{при } f = 0; \end{cases}$$

то обобщенное условие трансверсальности (11) приводится к виду:

$$\begin{cases} \text{либо } f|_{x_1} = (\varphi' - y')|_{x_1} \cdot \text{sign } f \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} & (f \neq 0); \\ \text{либо } f|_{x_1} \in [-1; 1] \cdot (\varphi' - y')|_{x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} & (f = 0). \end{cases} \quad (14)$$

Объединяя(13)–(14), приходим в итоге к условиям:

$$\begin{cases} \text{либо } \begin{cases} L(f) = 0; \\ f|_{x_1} = (\varphi' - y')|_{x_1} \cdot \text{sign } f \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} & (f|_{x_1} \neq 0); \end{cases} \\ \text{либо } f|_{x_1} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

3) Рассмотрим в заключение конкретный класс примеров:

$$\begin{cases} \Phi(x_1, y) = \int_0^{x_1} |y'^2 - y^2| dx \mapsto \text{extr} & (y(0) = 0); \\ y|_{x_1} = \varphi(x_1) & (\varphi \in C^1). \end{cases} \quad (16)$$

а) Как показано в [5], включение Эйлера-Лагранжа в данном случае принимает вид альтернативы: [либо  $y'' + y = 0$ ; либо  $y' \pm y = 0$ ]. В частности, данным условиям удовлетворяет гладкая экстремаль вида

$$y = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi/4; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{x-\pi/4}, & \pi/4 \leq x \leq x_1; \end{cases} \quad (17)$$

на которой, в случае неподвижной границы  $x_1$ , реализуется строгий минимум функционала  $\Phi$ .

б) Применяя к экстремали (17) условие  $y|_{x_1} = \varphi(x_1)$ , имеем:

$$\varphi(x_1) = \begin{cases} \sin x_1, & 0 \leq x_1 \leq \pi/4; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{x_1-\pi/4}, & \pi/4 \leq x_1 < \infty. \end{cases} \quad (18)$$

Составим, наконец, условие трансверсальности. Имеем:

$$f|_{x_1} = \begin{cases} \cos 2x_1, & 0 \leq x_1 \leq \pi/4; \\ 0, & \pi/4 \leq x_1 < \infty; \end{cases}$$

$$(\varphi' - y')|_{x_1} = \begin{cases} -\cos x_1, & 0 \leq x_1 \leq \pi/4; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{x_1-\pi/4} - \cos 2x_1, & \pi/4 \leq x_1 < \infty; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{sub} = \begin{cases} 2 \cos x, & 0 \leq x < \pi/4; \\ [0; \sqrt{2}], & x = \pi/4; \\ 0, & \pi/4 < x < \infty. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения в (15), получаем:

$$x_n = \pi/4 + n\pi \quad (n \in \mathbb{N}).$$

## Заключение

Таким образом, описанная в работе методика позволяет исследовать на обобщенную трансверсальность широкие классы вариационных функционалов с подвижной границей, которые не допускают применения классических методов.

## Список цитируемых источников

1. Кузьменко, Е. М., Орлов, И. В., Смирнова, С. И. Исследование на компактный экстремум вариационных функционалов в пространствах Соболева в случаях гладкого и субгладкого интегранта // Новая наука: стратегии и вектор развития. — 2015. — Т. 5–2. — С. 16–21.

Kuzmenko, E. M., Orlov, I. V., Smirnova, S. I. Research to the compact extremum of variational functionals in Sobolev spaces in the cases of a smooth and sub-smooth integrand. New science: strategy and vector of development, 5–2, 16–21 (2015). (in Russian).

2. Кузьменко, Е. М., Смирнова, С. И. Негладкие вариационные экстремальные задачи с подвижной границей // Материалы международной научной конференции “Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - VI” — Ростов-на-Дону, 2016. — С. 31–32.

Kuzmenko, E. M., Smirnova, S. I. Nonsmooth variational extremal problems with moving boundary. Proceedings of the international scientific conference “Modern methods and problems of operator theory and harmonic analysis and their applications - VI”, Rostov-na-Donu, 2016, pp. 31–32 (in Russian).

3. Кузьменко, Е. М., Смирнова, С. И. Негладкая форма условия трансверсальности в вариационных задачах с подвижной границей // Сборник тезисов II научной конференции профессорско-преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых “Дни науки КФУ им. В.И. Вернадского”. — Симферополь, 2016. — Т. 7. — С. 567.

Kuzmenko, E. M., Smirnova, S. I. Non-smooth form of transversality conditions in variational problems with moving boundary. Abstracts of II scientific conference of the faculty, graduate students and young scientists “Science Days of V. Vernagsky CFU”, Simferopol, 2016, Vol.7, 567 (in Russian).

4. Кузьменко, Е. М., Смирнова, С. И. Негладкие экстремальные вариационные задачи с интегрантом, зависящим от подвижной границы // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Т. 5. — № 8–1 (34–1). — Воронеж: ФГБОУ ВО “ВГЛУ”, 2017. — С. 246–249.

Kuzmenko, E. M., Smirnova, S. I. Nonsmooth extreme variational problems with integrand depending on moving boundary. Actual directions of scientific research of the XXI century: theory and practice, 5, no.8–1 (34–1), 246–249 (2017). (in Russian).

5. Орлов, И. В. Введение в сублинейный анализ // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2014. — Т. 53. — С. 64–132.

Orlov, I. V. Introduction to sublinear analysis. Journal of Mathematical Sciences, 218, 430–502 (2016).

6. Орлов, И. В. Теоремы об обратной и неявной функциях в классе субгладких отображений // Математические заметки. — 2016. — Т. 99, №4. — С. 631–634.

Orlov, I. V. Inverse and implicit function theorems in the class of subsmooth maps. Math. Notes, 99:3, 619–622 (2016).

7. Орлов, И. В., Стопякин, Ф. С., Смирнова, С. И. Справочное учебно-методическое пособие по курсу “Выпуклый и негладкий анализ”. — Симферополь: КФУ, 2015. — 104 с.  
Orlov, I. V., Stonyakin, F. S., Smirnova, S. I. Reference textbook in “Convex and nonsmooth analysis”, Simferopol, CFU, 2015. (in Russian).
8. Cartan, H. Calcul différentiel. Formes différentielles, Paris: Hermann, 1967.
9. Orlov, I. V. Subdifferentials via sub-operators. 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 235–239 (2017).
10. Orlov I. V., Smirnova S. I. Invertibility of multivalued sublinear operators. Eurasian Math. J., V. 6, no.4, 44–58 (2015).
11. Orlov, I. V., Smirnova, S. I. Subinvertibility of compact-valued sublinear operators. Proceedings of the 18th Intern. Saratov Winter School “Modern problems of the theory of functions and their applications”, 10–14 (2016).
12. Smirnova, S. Representation of the compact-valued sublinear operator by means of “basis” selectors packet. Constructive nonsmooth analysis and related topics. Abstracts of the International conference dedicated to the memory of Professor V.F. Demyanov, V. 1, no. I, 40–43 (2017).
13. Smirnova S. I., Orlov I. V. Representation of the compact-valued sublinear operator by basis selectors packet and sub-invertibility // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 295–298 (2017).

Получена 11.05.2017

УДК 517.929

# Запаздывание в регуляции популяционной динамики — модель клеточного автомата<sup>1</sup>

А. Ю. Переварюха

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН  
Санкт-Петербург 199178. E-mail: temp\_elf@mail.ru

**Аннотация.** Обсуждается метод математической формализации запаздывающей регуляции биологических процессов, в том числе предложенная нами модификация дифференциального уравнения для критического варианта развития популяционных флуктуаций. Использование популяционных моделей с отклоняющимся аргументом  $\dot{x} = rv(x)f(x(t-\tau))$  в некоторых случаях противоречит данным экспериментальных наблюдений. Рассмотрена проблема сущностной интерпретации величины  $\tau$  в контексте причин её появления. Для демонстрации эволюции ситуации с комплексом реалистичных факторов временного последствия предложен алгоритм клеточного автомата с троичным состоянием клеток. Условия трансформации состояния клеток показывают, что в гораздо большей степени формализуемое в уравнениях Хатчинсона и «blowfly's equation» запаздывание относится к динамике взаимодействия вида и поддерживающей условия жизни среды. Взаимодействие не может отражаться константным параметром. Действие запаздывания весьма поверхностно можно отождествлять с характеристиками непосредственно биологического вида. Диффузионную составляющую в нелокальных модификациях уравнений логичнее отражать зависимой от времени реакции величиной.

**Ключевые слова:** уравнения с запаздыванием, критические сценарии популяционной динамики, механизмы регуляции, клеточный автомат.

## Delay in the regulation of population dynamics — cellular automaton model

A. Yu. Perevaryukha

St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg 199178 .

**Abstract.** The article discusses the technique of mathematical formalization delayed regulation of biological processes. The modification of the differential equation proposed by us earlier for a specific variant of development of the population process is compared with analogues. The use of population models with deviating argument  $\dot{x} = rv(x)f(x(t-\tau))$  in some cases, contradictory to the experimental results. The problem of the intrinsic interpretation of the value  $\tau$  in the context of the causes of its appearance is considered. To demonstrate the evolution of the situation with a complex of realistic factors of temporary aftereffect, an algorithm for a cellular automaton with a ternary cell state is proposed. The cell state transformation algorithm shows that, to a much greater degree, the delay formalized in the Hutchinson equations and “blowfly's equation” refers to the interaction dynamics of the species and the supporting environment of the medium, which can not be expressed by a constant parameter. The action of delay in a very abstract sense can be identified with a directly characteristic

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках проекта РФФИ: № 17-07-00125 (СПИИРАН).

of a biological species. The diffusion component in the modifications of these equations is more logically to represent by the time-dependent response of the systems.

**Keywords:** delay equations, critical scenarios of population dynamics, regulation mechanism, cellular automaton.

**MSC 2010:** 34A09, 65L07

## 1. Введение

В исторически первой модели экспоненциального роста численности популяции  $N(t) = N(0)e^{rt}$  для описания изменений состояния малой популяций не предполагалась отдельная формализация действующих механизмов регуляции в функциональной форме, только на уровне корректировки базового значения репродуктивного параметра  $r$ . Параметр  $r$  — репродуктивный потенциал (он же «мальтузианский параметр») объяснялся как разница между мгновенной рождаемостью и смертностью:  $r = \alpha - \beta$ . Полагалось априори  $r > 0$  независимо от  $t$ . Уравнение  $\dot{N} = rN_t$  экспоненциального роста давно не рассматривается всерьёз, упоминается как курьёз из истории математической биологии [3], хотя очевидно из многих примеров инвазий чужеродных видов, что свойства репродуктивной активности просто не могут сохраняться  $\forall t$ . В дальнейшем развивались двухвидовые модели взаимодействия. Одной из проблем стало подтверждение на практике наблюдений или в экспериментах существования замкнутых циклических траекторий для численности противоборствующих популяций, которые предсказывает известная модель Вольтерра. Оказалось, что урожайность поколений канадских зайцев из хрестоматийного примера колеблется сама по себе и даже вне ареала рысей. Колебания двух видов получил в экспериментах С. Утида для другого типа биологического взаимодействия «паразит-хозяин», но эти флуктуации жука и осы даже приблизительно не подходили на орбитально устойчивый цикл. Для объяснения противоречий возникла гипотеза, что эффект саморегуляции действует не от текущего состояния, но от существовавшего в прошлом и проявляется через некоторое время. Такая гипотеза подходила для имевшегося математического аппарата из области моделирования упругих деформаций — дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

## 2. Формализация запаздывающей регуляции

В ряде наблюдений и лабораторных экспериментов подтвердилось [16], что флуктуации численности могут возникать у изолированных популяций (не испытывающей межвидового трофического взаимодействия). Для формализации появления популяционных колебаний одновидовой саморегулируемой системы Хатчинсоном [14] предложено логистическое уравнение с запаздыванием:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) \quad (1)$$

где  $K$  — поддерживающая емкость среды обитания. При увеличении величины запаздывания  $\tau$  (или репродуктивной  $r$ —характеристики) реализуется бифуркация Андронова-Хопфа [1]. Чаще всего появление запаздывания связывали с продолжительностью и этапностью формирования взрослых половозрелых организмов. При запаздывании немного большем критического значения возникший цикл быстро приобретает релаксационную форму с очень низкими и продолжительными минимумами. Для улучшения характеристик цикла модели колебаний предложено значительное количество модификаций уравнения (1) (наиболее известно «food-limited equation» [10], [11]), в том числе с периодически возмущаемыми коэффициентами в [12]. Экстраординарное усложнение говорит о том, что методика согласования моделей и данных наблюдений зашла в тупик. Можно включить непосредственно в показатель степени  $N(t) = N(0)e^{rf(t)}$  функцию  $f(x) : f(x + Z) = f(x)$ ,  $\max f(x) > 0$ ,  $\min f(x) < 0$  получив колебания без всякого  $N(t - \tau)$ , но возникнет неразрешимый вопрос, откуда в экологических факторах (оперирующих рациональными числами) могут возникнуть тригонометрической формы зависимости...?

В экспериментах австралийского энтомолога Никольсона с лабораторной популяцией мухи возникали сложные флуктуаций поколений и происходили смены режимов поведения при изменении количества и регулярности поступления в ящики с мухами корма, по современному анализу у колебаний выделяются две частотные составляющие [5]. Однако, количество корма не является бифуркационным параметром для уравнения (1). Доступности питательных веществ в (1) скорее соответствует масштабирующая амплитуду колебаний величина  $K$ , отождествляемая чаще с пределом «экологической ниши». В среднем плодовитость и время прохождения стадий онтогенеза особей можно считать постоянными на период наблюдений. Очевидно, в эксперименте можно было имитировать перемены скорости восстановления ресурсов. Недостаток питания влияет на смертность личинок, но данная величина не обособлена в модификациях уравнения Хатчинсона.

Для лучшего согласования экспериментов требовался непосредственный учет мгновенной убыли от текущей численности  $\beta$  (дополнительный бифуркационный параметр) одновременно с подавлением конкуренцией репродуктивного потенциала. Было предложено принципиально другое уравнение с запаздыванием, известное как «Nicholson's blowflies equation» [4] с отвечающей за саморегуляцию эффективности воспроизводства экспоненциальной нелинейностью ( $\Upsilon, \gamma, \beta = const > 0$ ):

$$\frac{dN}{dt} = \Upsilon N(t - \tau)e^{-\gamma N(t - \tau)} - \beta N(t), \quad (2)$$

где  $\tau$  полагалось временем, необходимым для выхода их экзувия взрослой мухи, а величина  $1/\gamma$  характеризует состояние популяции с максимально эффективным воспроизводством [13]. С поведением модели мясных мух связано несколько открытых проблем [4]. При больших  $\tau$  решение показывает сложные колебания (график 2 на рис. 1,  $\tau = 15, \beta = 0.3$ ). При меньшем запаздывании и малых  $\beta \ll 1$  демонстрирует затухающих осцилляции (кривая 2 на рис. 1:  $\tau = 8, \beta = 0.015$ ) —

сценарий мягкого завершения инвазионного процесса чужеродного вида с единственным пиком, не относящегося к экстремальному развитию вспышки. К такому

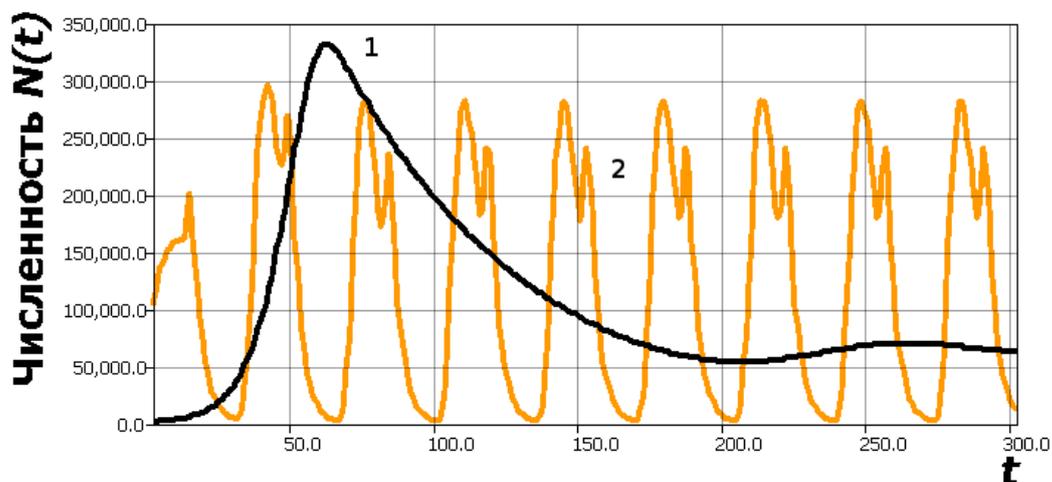


Рис. 1. Релаксационный цикл и затухающие осцилляции в (2).

сценарию относится, например, инвазия гребневика *Mnemiopsis leidyi* в Черное море (рис. 2 из [15]), но динамика его численности после вселения в Каспийское море в известные модели не укладывается (подробнее в следующей статье). Значимого

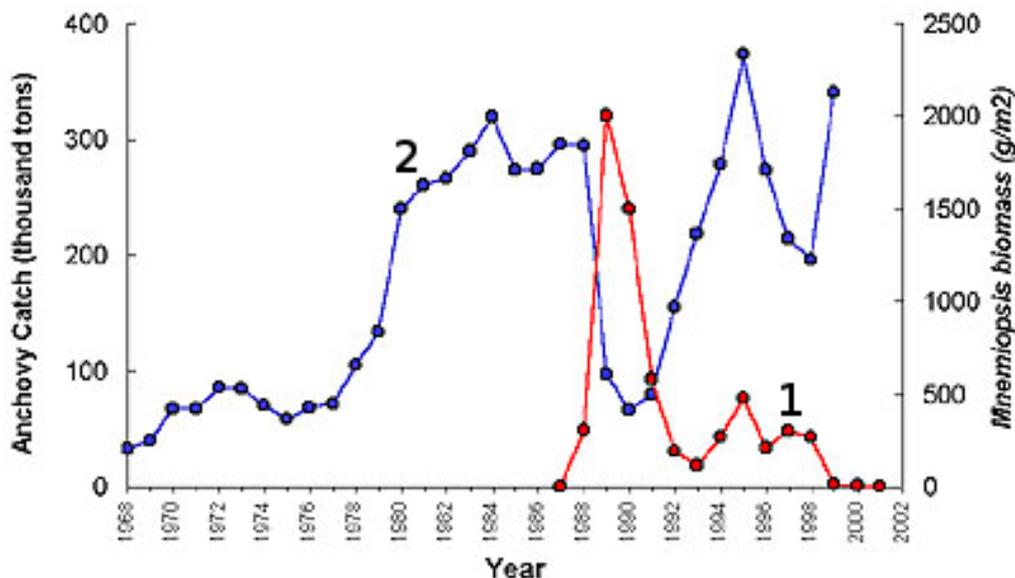


Рис. 2. Инвазия гребневика *Mnemiopsis leidyi* в Черное море: 1 — динамика численности гребневика; 2 — объемы вылова анчоуса.

запаздывания в резком падении уловов анчоуса и их восстановлении при нараста-

ющей инвазии гребневика на графике не прослеживается. Характеристика  $\gamma \ll 1$  по-видимому была заимствована из известной дискретной модели расчета пополнения запасов популяций рыб Рикера после сезона нереста:

$$N_{n+1} = \Upsilon N_n e^{-\gamma N_n} - Q N_n, \quad (3)$$

где  $0 < Q < 1$  — доля промыслового изъятия. Тут параметр  $\Upsilon > 1$  несколько отличается по трактовке от  $r$  из (1), и выражает максимально возможную эффективность пополнения при  $e^{-\gamma N_n} \rightarrow 1$ . Для (3) реализуется сценарий хаотизации М. Фейгенбаума [7] через каскад удвоений периода цикла  $p = 2^i$  при возрастании  $\Upsilon$  (или сокращении  $Q$ ). В итерационной модели (3) тоже можно учитывать запаздывание, указывая в вычислениях  $N_{n-p}$ :

$$N_{n+1} = \Upsilon N_n e^{-\gamma N_{n-1}} - Q N_n,$$

но такое включение  $N_{n-1}$  приведет к качественно другим метаморфозам фазового портрета: появлению альтернативных циклов, которые сложно интерпретировать биологически. В современной теории формирования пополнения промысловых запасов рыб применяются непрерывно-дискретные модели выживаемости на интервале  $t \in [0, \mathcal{T}]$  [17]. Существует мнение о том, что дискретные модели лучше непрерывных для описания флуктуаций. В итерациях  $x_{n+1} = \psi(x_n; a)$  функций, удовлетворяющих критериям теоремы Сингера, естественным образом возникают периодические точки  $\psi^n(x_i) = \psi^{n+p}(x_i)$  после потери устойчивости стационарной точки  $\psi(x^*) = x^*$  при  $\psi'(x^*) = -1, a = \hat{a}$ , и в дальнейших бифуркациях удвоения периода при  $a > \hat{a}, p = 2^i, i = 1 \dots \infty$ . Однако, помимо периода, циклические траектории  $\{\psi^n(x_0)\}$  различаются порядком обхода составляющих их точек.

Необходимо упомянуть, методика моделирования расширялась с рассмотрением динамики пространственного распределения особей — включения диффузии. Обычно предполагалась так называемая «Fickian diffusion», где поток особей пропорционален их концентрации, что приводило к модификации уравнений с добавлением диффузионного слагаемого, для (1) например так:

$$\frac{\partial N(x, t)}{\partial t} = r N(x, t) \left( 1 - \frac{N(x, t - \tau)}{K} \right) + D \frac{\partial^2 N(x, t)}{\partial x^2} \quad (4)$$

где  $D$  — диффузионный коэффициент [9]. Однако у подобного подхода имеется принципиальное возражение — запаздывание и пространственная диффузия не являются независимыми, то есть особи не находились изначально вместе в некоторый момент в прошлом.

В предыдущей работе [2] мы модифицировали (1) следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) (H - N(t - \tau)), \quad (5)$$

где дополнили концепцию предельной поддерживающей емкости среды  $K$  действующим на выраженность регуляции предпороговым уровнем численности  $H$ .

В новой модели релаксационный цикл после бифуркации Андронова-Хопфа называется переходным режимом существования. Последующее образование псевдопериодической неограниченной траектории трактуется как катастрофическая популяционная динамика, сценарий «проблемы Рара Ни» загадочной гибели цивилизации о. Пасхи. Сценарий с разрушением среды характерен для островных популяций, как в случае исчезновения быстро размножавшихся северных оленей выпущенных на острове Беринга в конце XIX в., при очень низкой скорости восстановления кормовой базы — лишайника (в экологии говорят о  $P/B$ -коэффициенте, отношении продуктивности к биомассе). Подобные модификации модели представляют значимость для исследования редких сценариев популяционной динамики, которые мы называем экстремальными, как например масштабные вспышки численности вредителей, заканчивающиеся дефолиацией лесных массивов в субарктических регионах.

Таким образом, существует проблема экологического истолкования запаздывания  $\tau$ , определения связи его величины с какой-то непосредственной популяционной характеристикой или свойствами условий обитания. Можно назвать много случаев, когда временные масштабы обсуждаемых критических явлений даже приблизительно не совпадают в интервалом  $t \in [0, T]$  индивидуального развития. При повторяющихся с более чем четвертьвековыми промежутками пилообразных вспышках численности никакие сдвиги характеристик онтогенеза короткоциклового бабочки еловой листовёртки не могут быть причиной бифуркации, приводящей к появлению серии отстоящих друг от друга крайне многочисленных поколений [6]. Долговременные флуктуации характерны для тихоокеанской сельди, хотя этот вид способен достигать зрелости на второй год. В упомянутых экспериментах проявляется тот факт, что скорость восполнения ресурсов явным образом влияет на колебания, и вероятно должна отражаться в величине запаздывающей регуляции потребителей. Для понимания проблем ситуации, которую призваны моделировать уравнения, переведем непрерывную формулировку в задачу дискретной динамики, но не в итерационную, а в алгоритмическую.

### 3. Клеточный автомат запаздывающей регуляции

Непрерывность единиц измерения совсем не обязательна для популяционной динамики, потому возникают альтернативные методы описания процессов, автоматы и когнитивные графы. Клеточный автомат, знаменитый как «Conway's Game of Life» [8], был популяризован Джоном Конвеем для объяснения процессов самоорганизации в различных естественных науках и просто как наглядная модель при обучении программированию. Популярность объясняется всего двумя правилами расчета следующего поколения группы клеток, которые могут быть живыми либо мёртвыми. Если рядом с мёртвой клеткой три живые, то мёртвая становится живой. Живая остаётся в своём состоянии, если рядом есть две или три живые. Игровое поле может быть ограниченным, замкнутым — в виде компьютерной эмуляции поверхности тора (наиболее часто встречающийся вариант) или бесконечным, как изначально полагал Конвей. При этом простота правил с бинарным

разделением клеток обеспечивает огромное разнообразие форм и интересных вариантов расстановки живых клеток в первом поколении, которые приводят устойчивым или периодическим вариантам итоговой расстановки, называемых фигурами. Существует модификация игры с непрерывным пространством без клеток с очень впечатляющей визуальной реализацией.

Было бы интересно создать принципиально отличный вариант клеточного автомата, где можно было бы рассматривать включение и выключение эффектов запаздывания. Для иллюстрации проблемы параметрического выражения действия запаздывания в динамических моделях и как новый объект для поиска форм самоорганизации мы предложим математическую игру с более сложными правилами, где клетка автомата будет иметь не два, а три допустимых состояния. Возможно, параметр автомата, относящийся к сущности возникновения запаздывающей регуляции, будет интересно изменять по ходу игры, имитируя эволюционную адаптацию сообщества к появлению нового вида.

Определим следующие правила алгоритма новой игры:

- I. Задано аналогичное игре «Жизнь» поле клеток (в замкнутом варианте). Каждая клетка имеет 8 смежных. Изначально в каждой клетке произрастает дуб. В клетке содержащей дуб может поселиться грызун.
- II. Взрослый грызун каждый сезон может плодить давать  $r(= 2)$  потомка, если хотя бы в одной из смежных с его клеткой тоже живет грызун.
- III. Если вокруг грызуна оказывается занято более 5 клеток, то грызун погибает от перенаселенности, а дуб становится свободным.
- IV. Грызуны подтачивают корни дерева. Дуб падает и грызун погибает. До падения дуба грызун может размножиться не более  $k(= 3)$  раз.
- V. Потомки грызуна станут взрослым через два сезона, если к этому моменту займут пригодный дуб, иначе он гибнет. Новый грызун занимает ближайший свободный дуб с наименьшим числом занятых соседних клеток, осматривая смежные по часовой стрелке.
- VI\*. Для занятия дуба грызун может мигрировать за сезон на расстояние не более  $l(=2)$  соседних клеток (аналог скорости света в игре Конвея). [Оptionное миграционное усложнение.]
- VII. На месте упавшего дуба вырастает новый за  $t(= 6)$  сезонов.

В правилах преобразования состояния клеток заложено сразу несколько аспектов, относящихся к явлению запаздывающей регуляции. Более того, эти факторы являются противоборствующими в игре. Параметр  $t$  мы предлагаем сделать «управляющим» для оценки воздействия в сценариях с замедлением темпов восстановления ресурсов, что не было в алгоритме «Жизни», но согласуется с экологической реальностью.

## Заключение

В анализе алгоритма Конвея оказался интересен поиск нетривиальных начальных расстановок, но в динамике экологических процессов, стремящих к некоторому установившемуся стационарному или колебательному режиму, начальные условия не столь значимая характеристика. Новый алгоритм преобразования клеток включает три динамически взаимодействующих фактора: онтогенетическую задержку, необходимость восстановления ресурсов для дальнейшего развития популяции и диффузионную составляющую, как мы видим зависящую от темпа развития взрослого организма, т.е. оказывается  $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ . Будем считать, что четвертый возможный фактор накопления отравляющих продуктов метаболизма, связанный с зависимостью от предшествующих состояний, преодолевается за счет диффузии. Предложенный автомат базируется на гипотезе, что запаздывающая регуляция не относится к свойствам вида или только среды, но представляет собой аддитивную характеристику процесса взаимодействия или прямого противоборства вида в конкретном биотическом окружении. Для развития методов моделирования перспективным выглядит пересмотр формализации предела экологической ниши, от чего отказались в «blowflies equation», но что можно вернуть, используя альтернативную  $\Upsilon x e^{-\gamma x}$  унимодальную функцию. В условиях нарастающей инвазии эта величина не может выражаться единственным параметром, не зависящим от времени, так как видом-вселенцем часто генерируются последовательно уменьшающиеся пики численности. В современных работах проблему описания экстремальной динамики инвазий не удается разрешить за счет метода множественности включенных величин с запаздывания [18] «multiple state-dependent delays». Альтернативный подход к моделированию заключается в описании непосредственного взаимодействия в системе ресурс потребитель, где можно отразить естественную экологическую характеристику среды  $P/B$ –коэффициент, но этот сценарий не годится для перехода к колебаниям у лабораторной популяции.

### Список цитируемых источников

1. Борздыко В. И. Об исследовании популяционной модели Хатчинсона // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21. — С 316–318.  
Borzdyko V. I. An investigation of Hutchinson's population model (in Russian). Differ. Uravn. 21, No.2, 316-318 (1985).
2. Переварюха А. Ю. Модель сценария популяционного кризиса в результате бифуркации Андронова–Хопфа // Динамические системы. — 2016. — Т. 6(34), №2. — С. 149–159.  
Perevaryukha A. Y. The scenario of the population crisis as a result of the Andronov-Hopf bifurcation (in Russian). Dinamicheskie Sistemy 6(34), No.2, 121–130 (2016).
3. Bacaer N. A Short History of Mathematical Population Dynamics. — London: Springer-Verlag, 2011. — 160 p.
4. Berezansky L., Braverman E., Idels L. Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems // Applied Mathematical Modelling. — 2010. — Vol. 34. — P. 1405–1417.

5. *Brillinger D.* The Nicholson blowfly experiments: some history and EDA // *Journal of Time Series Analysis.* — 2012. — Vol. 33, Iss. 5. — P. 718–723.
6. *Cooke B., Nealis V., Regniere J.* Insect Defoliators as Periodic Disturbances in Northern Forest Ecosystems // *Plant disturbance ecology: the process and the response.* — Burlington.: Elsevier, 2007. — P. 487–525.
7. *Feigenbaum M.* Universal behavior in nonlinear systems // *Physica D.* — 1983. — Vol.7. — P. 16–39.
8. *Gardner M.* Mathematical Games — The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game «life» // *Scientific American.* — 1970. — Vol. 223. — P. 120–123.
9. *Gourley S. A., Ruan S.* Dynamics of the diffusive Nicholson's blowflies equation with distributed delay // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics.* — 2000. — Vol. 130. — P. 1275–1291.
10. *Gopalsamy K., Kulenovic M., Ladas G.* Time lags in a «food-limited» population model // *Applicable Analysis.* — 1988. — Vol. 31. — P. 225–237.
11. *Gopalsamy K.* Global stability in the Delay-logistic Equation with discrete delays // *Houston J. Math.* — 1990. — Vol. 16. — P. 347–356.
12. *Gopalsamy K., Kulenovic M., Ladas G.* Environmental periodicity and time delays in a «food-limited» population model // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* — 1990. — Vol. 147. — P. 545–555.
13. *Gurney W., Blythe S. P., Nisbet R. M.* Nicholson's blowflies revisited // *Nature.* — 1980. — Vol. 287. — P. 17–21.
14. *Hutchinson G.* An Introduction to Population Ecology. — New Haven.: Yale University Press. — 1978, 260 p.
15. *Kideys A. E.* The invasive ctenophore *Mnemiopsis* problem in the Black and Caspian Seas // *Biomare Newsletter.* — 2002. — Vol. 3. — P. 5–6.
16. *Nicholson A.* An outline of the dynamics of animal populations // *Australian Journal of Zoology.* — 1954. — Vol. 2, Iss. 1. — P. 9–65.
17. *Perevaryukha A. Y.* Cyclic and unstable chaotic dynamics in models of two populations of sturgeon fish // *Numerical Analysis and Applications.* — 2012. — Vol.5. — P. 254–264.
18. *Ruan S.* Delay Differential Equations in Single Species Dynamics // *Delay Differential Equations and Applications.* — Berlin.: Springer, 2006. — P. 477–517.

Получена 09.03.2017



УДК 517.98

# Теоремы о функциональной отделимости в специальном классе нормированных конусов<sup>1</sup>

**Ф. С. Стонякин, А. С. Андрееenkova**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. *E-mail: fedyor@mail.ru*

**Аннотация.** Работа посвящена некоторым проблемам анализа в специальном классе строгих выпуклых нормированных конусов (СВНК), который недавно был введён первым автором. Показана метризуемость всякого СВНК и существование сублинейного изометричного непрерывного вложения в некоторое нормированное пространство. Построен иллюстрирующий пример соответствующей топологии. Исследована возможность обобщения теорем о функциональной отделимости выпуклых замкнутых подмножеств на класс СВНК с использованием как линейных, так и нелинейных функционалов.

**Ключевые слова:** строгий выпуклый нормированный конус, однородная метрика, теорема о функциональной отделимости, сублинейное изометричное непрерывное вложение, однородный функционал, сублинейный функционал.

## Theorems on functional separability in a special class of normed cones

**F. S. Stonyakin, A. S. Andreenkova**

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** The paper is devoted to some problems of analysis in a special class of strict convex normed cones (SCNC), which was recently introduced by the first author. We show the metrizable of each SCNC and the existence of a sublinear isometric continuous embedding in some normed space. An illustrative example of the corresponding topology is constructed. The possibility of generalizing theorems on the functional separability of convex closed subsets on the class of SCNC using both linear and nonlinear functionals is investigated.

**Keywords:** strict convex normed cone, homogeneous metric, theorem on functional separability, sublinear isometric continuous embedding, homogeneous functional, sublinear functional.

**MSC 2010:** 46A22, 46A20, 46B10

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук, проект МК-176.2017.1

## Введение

В последние десятилетия активно развивается теория так называемых абстрактных выпуклых нормированных конусов (см., например, [3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 15]). Напомним, что *абстрактными выпуклыми конусами* или *выпуклыми конусами* называют набор элементов  $X$  с заданными операциями сложения, а также умножения на неотрицательный скаляр, причём  $X$  — коммутативная полугруппа по сложению и для произвольных чисел  $\lambda, \mu \geq 0$ , а также элементов  $x, y \in X$  верны соотношения:

$$1 \cdot x = x; \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x); \quad 0 \cdot x = 0; \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$$

Попутно, как правило, также требуется выполнение так называемого *закона сокращения*:  $x + y = y + z$  верно тогда и только тогда, когда  $x = z$ . Только при выполнении этого условия выпуклый конус  $X$  линейно инъективно вложен в некоторое линейное пространство.

Выпуклыми конусами будут, в частности, наборы векторов с неотрицательными координатами, наборы неотрицательных функций, неубывающих функций с естественными операциями сложения и умножения на скаляр, а также наборы выпуклых компактов банахова пространства со сложением по Минковскому. В некоторых выпуклых конусах  $X$  возможно ввести аналог нормы  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad \|\lambda x\| = \lambda \|x\|; \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (0.1)$$

для всяких  $x, y \in X$  и произвольного  $\lambda \geq 0$ . Всюду далее будем называть такие структуры *нормированными конусами*.

Вообще говоря, даже в случае выполнения закона сокращения норма в конусе может не быть следом обычной нормы (или полунормы) некоторого линейного пространства. В частности, это выполняется для каждого линейного пространства с так называемой *несимметричной нормой* (см., например, [1, 2]). Отметим приложения несимметрично нормированных пространств к некоторым проблемам теоретической информатики [3, 11, 13], а также теории приближений [7, 9].

В настоящей работе мы получаем новые теоремы о функциональной отделимости точек и множеств в специальном классе абстрактных выпуклых конусов с нормой. Заметим, что в [5, 10, 12, 13, 15] рассмотрены некоторые теоремы о функциональной отделимости точек и множеств в специальных классах нормированных конусов с использованием лишь *неотрицательных монотонных* линейных функционалов (см., например, [2, 10, 12, 13, 15]). Однако этот подход приводит к некоторым проблемам. В частности, такие функционалы могут не отделять точки нормированного конуса [10].

Мы в [14] предлагаем рассматривать более широкий класс неотрицательных линейных функционалов и вводим сопряженный конус (определение 4) как набор линейных ограниченных функционалов, неотрицательных в некоторых ненулевых точках. Такой подход позволил доказать существование сублинейного изометричного вложения в линейное нормированное пространство в достаточно широком классе нормированных конусов.

Многие результаты теории выпуклых нормированных конусов связаны с возможностью их надления метрической структурой (метрикой или некоторым ее аналогом). Отметим известную теорему J. Radstrom [8] о линейном изометричном вложении конуса в нормированное пространство с однородной метрикой, инвариантной относительно сдвигов  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ :

$$d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x, y) \quad d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in X, \lambda \geq 0.$$

В недавних работах [2, 4, 10] показано, что в нормированных конусах можно ввести так называемую *квазиметрику*  $q : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ , которая может быть несимметричной (как правило,  $q(x, y) \neq q(y, x)$ ). Отметим, что возможно либо  $q(x, y) = +\infty$ , либо  $q(x, y) = 0$  для некоторых  $x \neq y$ . Заметим, что такая квазиметрика однородна и *субинвариантна относительно сдвигов* (см., например, [2, 4, 10]):

$$q(x + z, y + z) \leq q(x, y) \quad \forall x, y, z \in X. \quad (0.2)$$

Наша работа основана на [14], где был доказан аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении функционала в абстрактных выпуклых конусах и рассмотрены некоторые его приложения. В частности, в ([14], см. раздел 4) был выделен специальный класс *строгих выпуклых нормированных конусов* СВНК и доказано существование сублинейного инъективного изометричного вложения всякого СВНК в банахово пространство  $E$ .

В настоящей работе на базе полученной в [14] для специального класса *строгих выпуклых нормированных конусов* теоремы о функциональной отделимости точек (теорема 1) вводится специальная конечная однородная метрика  $d_* : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Используя эту метрику, мы доказываем аналог теоремы J. Radstrom о существовании *сублинейного* изометричного непрерывного вложения всякого строго выпуклого нормированного конуса СВНК в линейное нормированное пространство (см. теорему 3). Вообще говоря, линейность такого вложения невозможна (см. замечание 6). На базе теоремы 3 нами исследована возможность обобщения теорем о функциональной отделимости для выпуклых замкнутых в классе СВНК. Напомним несколько вспомогательных понятий из [14].

**Определение 1.** Будем говорить, что  $X$  — строгий конус, если выполняется следующее свойство:

$$x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0 \quad \text{для всех } x, y \in X. \quad (0.3)$$

В каждом строгом выпуклом конусе  $X$  мы можем рассмотреть следующий частичный порядок [14]:

$$x \preceq y \quad \text{если } y = x + z \quad \text{для некоторого } z \in X. \quad (0.4)$$

Теперь напомним свойство порядковой отделимости для строгих выпуклых конусов и понятие строгого выпуклого нормированного конуса СВНК, рассмотренные нами в [14].

**Определение 2.** Будем говорить, что  $X$  порядково отделим, если для всяких  $x, y \in X$ :

$$\alpha x \preceq y \preceq \beta x \text{ для всех } \alpha < 1 < \beta \Rightarrow y = x. \quad (0.5)$$

**Определение 3.** Абстрактный выпуклый конус  $X$  называется строгим выпуклым нормированным конусом СВНК, если  $X$  — порядково отделимый выпуклый нормированный конус с законом сокращения и для всех  $x, y \in X$ :

$$x \preceq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|. \quad (0.6)$$

Приведём пример СВНК, не вложенного линейно изометрично ни в какое нормированное пространство (см. [14], пример 8).

*Пример 1.* Рассмотрим набор числовых пар

$$X_2 = \{(a, b) \mid a, b \geq 0 \text{ и } a = 0 \Rightarrow b = 0\}$$

с нормой  $\|(a, b)\| := a$ .

Единичный шар с центром в нуле в этом случае принимает вид, указанный на рисунке 1.

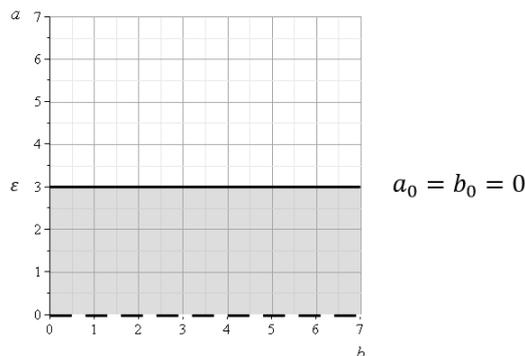


Рисунок 1.

## 1. Функциональная отделимость точек в нормированных конусах

Напомним полученный в [14] аналог теоремы Хана-Банаха о функциональной отделимости точек в классе СВНК. Для нормированных конусов в [14] введен следующий аналог понятия сопряжённого пространства.

**Определение 4.** Через  $X^*$  будем обозначать набор линейных функционалов  $\ell : X \rightarrow \mathbb{R}$ , принимающих неотрицательное значение хотя бы в одной точке  $x_0 \neq 0$  и ограниченных по полунорме

$$\|\ell\|_* := \sup_{x \neq 0} \frac{\ell(x)}{\|x\|}.$$

Оказывается, возможно привести пример нормированного конуса  $X$ , для которого  $\ell(x_1) = \ell(x_2)$  при всяком  $\ell \in X^*$  для различных  $x_1, x_2 \in X$ . Для построения этого примера и других вопросов мы будем использовать следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** *Всякий линейный функционал  $\ell : X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , где*

$$X_2 = \{(a, b) \mid a, b \geq 0 \text{ и } a = 0 \Rightarrow b = 0\}$$

*имеет вид*

$$\ell((a, b)) = \lambda a + \mu b. \tag{1.1}$$

*для некоторых констант  $\lambda$  и  $\mu$ .*

*Если мы рассмотрим норму  $\|(a, b)\| := a$  на  $X_2$ , то сопряженный конус к  $X_2$  имеет вид:*

$$X_2^* = \{\ell((a; b)) = \lambda a + \mu b \mid \lambda \geq 0, \mu \leq 0\}. \tag{1.2}$$

*Доказательство.* Во-первых, всякий функционал  $\ell$  положительно однороден:

$$\ell(\lambda(a, b)) = \lambda \ell((a, b)) \quad \forall \lambda \geq 0. \tag{1.3}$$

Если мы возьмем некоторую пару  $x_0 = (a_0, b_0) \in X_2$ , то в направлении луча  $\{\lambda x_0\}_{\lambda \geq 0}$  имеем для  $x_0 \neq (0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \ell(\lambda x_0) < 0 \quad \forall \lambda > 0, \text{ или } \quad \ell(\lambda x_0) > 0 \quad \forall \lambda > 0, \\ \text{или } \ell(\lambda x_0) = 0 \quad \forall \lambda \geq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Если (1.4) верно, то  $\{\lambda x_0\}_{\lambda \geq 0}$  назовем *нейтральным лучом* для  $\ell$ .

а) Если  $\ell \neq 0$ , то не существует более одного нейтрального луча. Действительно, если существует два различных нейтральных луча  $p_1$  и  $p_2$ , то для всякой пары  $x = (a, b)$  имеем  $\ell(x) = 0$  в конусе  $K_0$  (см. рис. 2), ограниченный лучами  $p_1$  и  $p_2$ .

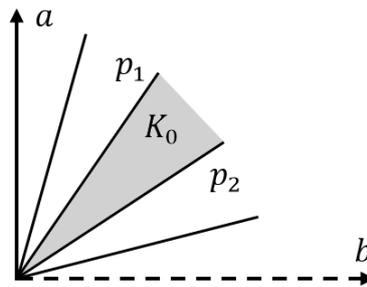


Рисунок 2. "Два нейтральных луча".

Из линейности  $\ell$  имеем, что  $\ell$  принимает нулевое значение во всех точках конусов, симметричных к  $K_0$  относительно  $p_1$  и  $p_2$ . Возможно покрыть конус  $X_2$  конечным множеством таких конусов как  $K_0$ , т.е.  $\ell \equiv 0$ .

б) Если один нейтральный луч существует для  $\ell$ , то в точках лучей, параллельных этому лучу, функционал  $\ell$  принимает постоянные значения (см. рис. 3), т.е.  $\ell$  задается в виде (1.1).

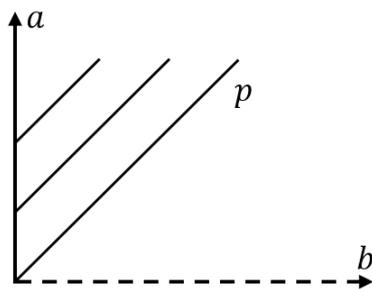


Рисунок 3. "Один нейтральный луч".

с) Если для  $\ell$  нет нейтральных лучей в  $X_2$ , то на всех лучах, заданных в виде  $\{\lambda x_0\}_{\lambda \geq 0}$  ( $x_0 \neq (0, 0)$ )  $\ell$  принимает либо положительные, либо отрицательные значения. Возьмем следующие три луча  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  (см. рис. 4) и выберем такие точки  $x, y$  и  $z$  на них, что  $\ell(x) = \ell(y) = \ell(z) \neq 0$ . Это может быть достигнуто ввиду однородности функционала  $\ell$ .

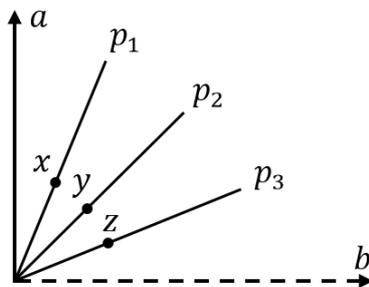


Рисунок 4. "Три луча".

Очевидно, что  $y = \lambda_1 x + \lambda_2 z$  для некоторых  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ . Тогда

$$\ell(y) = \lambda_1 \ell(x) + \lambda_2 \ell(z) = (\lambda_1 + \lambda_2) \ell(y),$$

откуда  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , поскольку  $\ell(y) \neq 0$ . Это означает, что  $x, y$  и  $z$  лежат на одной прямой. Следовательно, для каждого  $C \neq 0$  множества, заданные в виде  $\{x \in X_2 \mid \ell(x) = C\}$  являются частями параллельных прямых, т.е.  $\ell$  задается в виде (1.1).

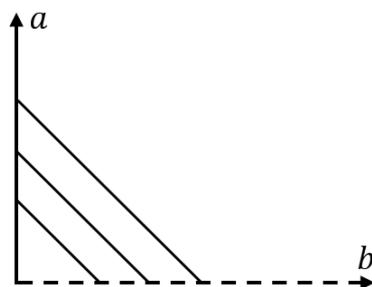


Рисунок 5. "Нет нейтрального луча".

Случай  $\ell \equiv 0$  тривиален.

Условие  $\ell \in X_2^*$  означает, что  $\lambda a + \mu b \leq Ca$  для всех  $(a, b) \in X$  и для некоторого числа  $C > 0$ . Ясно, что для всех  $\mu > 0$  можно выбрать достаточно большое  $b > 0$ , для которого неравенство  $\lambda a + \mu b \leq Ca$  нарушается. Аналогично, для  $\lambda < 0$   $\ell \notin X_2^*$ . Следовательно, (1.2) выполняется.  $\square$

Приведём теперь пример выпуклого нормированного конуса, где линейные полуограниченные функционалы могут не разделять точки.

*Пример 2.* Пусть  $X = X'_2 = \{(a, b) \mid a \geq 0, b \in \mathbb{R}; a = 0 \Rightarrow b = 0\}$ . Норма на  $X'_2$  вводится следующим образом  $\|(a, b)\| = a$ .

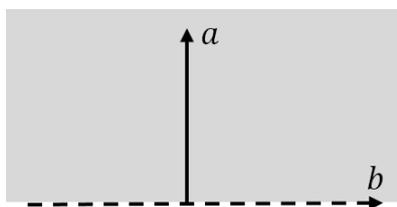


Рисунок 6. "Конус  $X'_2$ ".

По лемме 1 для каждого линейного функционала  $\ell : X'_2 \rightarrow \mathbb{R}$   $\ell((a, b)) = \lambda a + \mu b$  для некоторых фиксированных  $\lambda$  и  $\mu$ . Поскольку  $a \neq 0$  и  $b$  может быть произвольным числом, условие ограниченности

$$\ell((a, b)) = \lambda a + \mu b \leq Ca$$

для некоторого  $C > 0$  означает  $\mu = 0$  (в противном случае неравенство не выполняется при соответствующем выборе  $b$ ). Очевидно, функционалы вида  $\ell((a, b)) = \lambda a$  не разделяют точки  $X'_2$ .

*Замечание 1.* Конус  $X'_2$  эквивалентен следующему конусу

$$X'_2 = \{[\alpha; \beta] \mid \alpha < \beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}.$$

с нормой

$$\|[\alpha; \beta]\| = \beta - \alpha \in X'_2.$$

Приведённые примеры показывают, что для выполнения функциональной отделимости элементов нормированного конуса необходимо ввести некоторые дополнительные требования и рассматривать соответствующий подкласс нормированных конусов. Примером такого подкласса может служить, например, введённый в [14] класс строгих выпуклых нормированных конусов СВНК. В завершении данного пункта напомним несколько вспомогательных результатов из [14].

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — СВНК. Тогда для всех  $x_1 \neq x_2$  ( $x_1, x_2 \in X$ ) существует функционал  $\ell \in X^* \setminus \{0\}$ , такой что  $\ell(x_1) \neq \ell(x_2)$  и  $\ell(x_1) > 0$  или  $\ell(x_2) > 0$ .

*Замечание 2.* Отметим, что в выпуклом нормированном конусе из примера 2 (для которого не выполнено свойство функциональной отделимости точек) справедливы все аксиомы СВНК, кроме (0.5). Для того, чтобы проверить этот факт, достаточно рассмотреть пары  $x = (1, 1)$  и  $y = (1, 0)$ .

Для произвольного линейного функционала  $\ell \in X^*$  рассмотрим следующий ограниченный функционал:

$$p_\ell(x) = \max\{0, \ell(x)\}. \quad (1.5)$$

Из теоремы 1 вытекает

**Теорема 2.** Пусть  $X$  — СВНК. Тогда для всех  $x_0, x_1, x_2 \in X$ :

- (i) если  $x_0 \neq 0$ , то существует  $\ell \in X^* \setminus 0$ , такой что  $\|\ell\|_* = 1$  и  $p_\ell(x_0) = \|x_0\|$ ;
- (ii) если  $x_1 \neq x_2$  то существует функционал  $\ell \in X^* \setminus 0$  такой, что  $p_\ell(x_1) \neq p_\ell(x_2)$ .

*Замечание 3.* Аналогичный утверждению (i) теоремы 2 результат известен в специальном классе нормированных конусов  $X$  для неотрицательных линейных функционалов  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  (см. [13], теорема 2.14). Однако, вообще говоря, неравенство  $f(x_0) = \|x_0\|$  невозможно (см. замечание после теоремы 2.14 в [13]). Отметим, что условие  $\ell(x_0) = p_\ell(x_0) = \|x_0\|$  в утверждении (i) теоремы 2 существенно для некоторых базовых результатов (например, для теорем 1 и 3).

## 2. Метризуемость строгих выпуклых нормированных конусов

Переходим к изложению полученных нами результатов.

С использованием теорем 1 и 2 мы доказываем теорему о непрерывном вложении произвольного строгого выпуклого нормированного конуса в нормированное пространство (см. теорему 3 далее). Для этого введём аналог второго сопряжённого пространства в рассматриваемом нами классе СВНК. Из теоремы 2(ii) следует, что функционалы вида (1.5) разделяют точки всякого СВНК  $X$ . Обозначим через  $X_{sub}^*$  наименьший выпуклый конус, содержащий все функционалы вида (1.5).  $X_{sub}^*$  будем называть субсопряжённым конусом к  $X$ . На  $X_{sub}^*$  естественно можно ввести норму:

$$\|p\|_* := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{p(x)}{\|x\|} \right\} \quad \forall p \in X_{sub}^*. \quad (2.1)$$

Рассмотрим теперь набор линейных функционалов  $\psi : X_{sub}^* \rightarrow \mathbb{R}$  с естественными операциями сложения и умножения на скаляр:

$$[\psi_1 + \psi_2](p) := \psi_1(p) + \psi_2(p); \quad [\lambda\psi](p) := \lambda\psi(p)$$

для любых линейных функционалов  $\psi, \psi_{1,2} : X_{sub}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , произвольного скаляра  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $p \in X_{sub}^*$ . Будем называть сопряженным пространством к  $X_{sub}^*$  набор линейных функционалов  $\psi : X_{sub}^* \rightarrow \mathbb{R}$  относительно нормы

$$\|\psi\|_{**} := \sup_{p \in X_{sub}^* \setminus \{0\}} \left\{ \frac{|\psi(p)|}{\|p\|_*} \right\} = \sup_{p: \|p\|_* = 1} |\psi(p)|.$$

Указанное пространство  $(X_{sub}^*)^* =: X^{**}$  будем называть вторым сопряженным к СВНК  $X$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** *Во всяком СВНК  $X$  существует однородная метрика  $d_* : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $d_*(0, x) = \|x\| \forall x \in X$  и  $X$  сублинейно, инъективно, изометрично и  $d_*$ -непрерывно вложен в второе сопряженное пространство  $X^{**}$ .*

*Замечание 4.* Отметим, что возможно ввести еще одну метрику  $d_o : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$d_o(x, y) = \sup_{\ell \in X^*: \|\ell\|_* = 1} |\max\{0, \ell(x)\} - \max\{0, \ell(y)\}| \leq d_*(x, y),$$

где  $X^*$  — сопряженный конус к СВНК  $X$  (см. определение 4 выше).

*Замечание 5.* Система  $d_*$ -окрестностей (и  $d_o$ -окрестностей) точек в СВНК  $X$  определяется следующим естественным образом ( $x \in X, \varepsilon > 0$ ):

$$O_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d_*(x, y) \leq \varepsilon\}; \tag{2.2}$$

$$O_\varepsilon^\circ(x) = \{y \in X \mid d_o(x, y) \leq \varepsilon\}. \tag{2.3}$$

Очевидно, для каждого  $x \in X$  и  $\varepsilon > 0$

$$O_\varepsilon(x) \subset O_\varepsilon^\circ(x), \quad O_\varepsilon(0) = O_\varepsilon^\circ(0) = \{x \in X \mid \|x\| \leq \varepsilon\}. \tag{2.4}$$

Теперь проиллюстрируем  $d_o$ -окрестности точек  $x \in X$  в нормированном конусе из примера 1.

*Пример 3.* Рассмотрим СВНК

$$X_2 = \{(a, b) \mid a, b \geq 0 \text{ и } a = 0 \Rightarrow b = 0\}$$

с нормой  $\|(a, b)\| := a$ . По лемме 1 всякий линейный функционал  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  имеет вид  $f((a, b)) = \lambda a + \mu b$ , где  $\lambda \geq 0$  и  $\mu \leq 0$  — фиксированные константы:

$$X^* = \{\ell((a; b)) = \lambda a + \mu b \mid \lambda \geq 0, \mu \leq 0\}. \tag{2.5}$$

Таким образом,

$$\|\ell\|_* = \|\max\{0, \ell(\cdot)\}\|_{X_{sub}^*} = \sup_{a=1} \frac{\ell((a; b))}{a} = \sup_{b \geq 0} \frac{\lambda a + \mu b}{a} = \sup_{b \geq 0} \left( \lambda + \mu \frac{b}{a} \right) = \lambda,$$

т.е.  $\|\ell\|_* = 1 \iff \ell((a; b)) = a + \mu b$  для некоторого  $\mu \leq 0$ . Таким образом, следующее равенство верно

$$d_o(A, B) = \sup_{\mu \leq 0} |\max\{0, a_1 + \mu b_1\} - \max\{0, a_2 + \mu b_2\}|, \quad (2.6)$$

где  $A = (a_1, b_1)$ ,  $B = (a_2, b_2) \in X = X_2$ .

Положим

$$g(A, B, \mu) := \max\{0, a_1 + \mu b_1\} - \max\{0, a_2 + \mu b_2\}.$$

Если  $a_{1,2} \neq 0$  и  $b_{1,2} \neq 0$ , тогда возможны следующие случаи:

- 1)  $g(A, B, \mu) = a_1 - a_2 + \mu(b_1 - b_2)$  для  $\mu \geq \max\left\{-\frac{a_1}{b_1}; -\frac{a_2}{b_2}\right\}$ ;
- 2)  $g(A, B, \mu) = a_1 + \mu b_1$  для  $-\frac{a_1}{b_1} \leq \mu \leq -\frac{a_2}{b_2}$ ;
- 3)  $g(A, B, \mu) = -(a_2 + \mu b_2)$  для  $-\frac{a_2}{b_2} \leq \mu \leq -\frac{a_1}{b_1}$ ;
- 4)  $g(A, B, \mu) = 0$  в противном случае.

Легко видеть, что для фиксированных  $A$  и  $B$  функция  $|g(A, B, \mu)|$  достигает своего максимума на  $\alpha \leq \mu \leq \beta$  только для  $\mu = \alpha$  или для  $\mu = \beta$ . Отсюда, в случае  $-\frac{a_1}{b_1} \leq -\frac{a_2}{b_2}$  наибольшее возможное значение  $|g(A, B, \mu)|$  может быть одним из следующих чисел:

$$|a_1 - a_2|, \quad a_2 - \frac{a_2}{b_2} b_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2},$$

$$\left| a_1 - a_2 - \frac{a_2}{b_2} (b_1 - b_2) \right| = \left| a_1 - a_2 - \frac{a_2}{b_2} b_1 + a_2 \right| = \left| \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2} \right| = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2},$$

и для  $\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_2}{b_2}$  ( $b_1, b_2 \neq 0$ ) имеем

$$d_o(A, B) = \max \left\{ |a_1 - a_2|, \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2} \right\}.$$

Аналогично, для  $\frac{a_2}{b_2} \geq \frac{a_1}{b_1}$  ( $b_1, b_2 \neq 0$ ) имеем

$$d_o(A, B) = \max \left\{ |a_1 - a_2|, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1} \right\}.$$

Таким образом, для  $b_1, b_2 > 0$  (и отсюда  $a_1, a_2 > 0$ )

$$d_o(A, B) = \max \left\{ |a_1 - a_2|, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1}, \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2} \right\}. \quad (2.7)$$

Для  $b_1 = 0$  имеем  $d_o(A, B) = \sup_{\mu \leq 0} |\max\{0, a_2 + \mu b_2\} - a_1|$ . Для  $b_2 > 0$  и  $\mu \leq -\frac{a_2}{b_2}$  имеем  $|\max\{0, a_2 + \mu b_2\} - a_1| = a_1$ ; для  $\mu \geq -\frac{a_2}{b_2}$  выполнено следующее отношение:

$$|\max\{0, a_2 + \mu b_2\} - a_1| = |a_2 - a_1 + \mu b_2| \leq \max\{a_1, |a_1 - a_2|\}.$$

В случае  $b_1 = b_2 = 0$   $d_o(A, B) = |a_1 - a_2|$ . Таким образом, выполнено следующее отношение:

$$d_o(A, B) = \begin{cases} \max\{a_1, |a_1 - a_2|\}, & \text{для } b_1 = 0, b_2 > 0; \\ \max\{a_2, |a_1 - a_2|\}, & \text{для } b_1 > 0, b_2 = 0; \\ |a_1 - a_2|, & \text{для } b_1 = b_2 = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Вышеуказанные соотношения (2.7) и (2.8) позволяют нам явно описать  $d_o$ -окрестности любого элемента  $A_0 = (a_0, b_0) \in X_2$ :

$$O_\varepsilon^\circ(A_0) = \{A = (a, b) \in X \mid d_o(A, A_0) \leq \varepsilon\}. \quad (2.9)$$

Если  $b_0 > 0$  то  $A = (a, b) \in O_\varepsilon^\circ(A_0)$  для  $b > 0$ , если выполняются следующие неравенства

$$\begin{cases} a_0 - \varepsilon \leq a \leq a_0 + \varepsilon, \\ a - \frac{a_0}{b_0} b \leq \varepsilon, \\ a_0 - \frac{a}{b} b_0 \leq \varepsilon, \end{cases}$$

что для достаточно маленького  $\varepsilon > 0$  задает трапецию (см. Рис. 7).

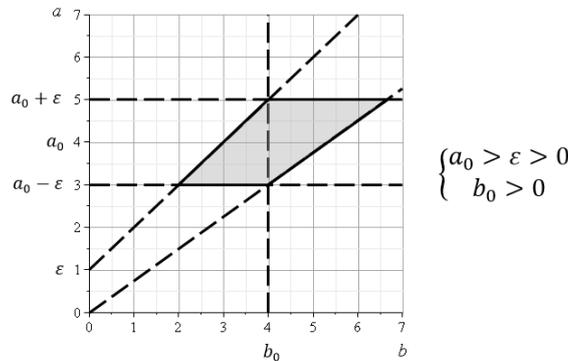


Рисунок 7.

Кроме этого множества  $d_o$ -окрестность будет также включать в себя точки вида

$$A = \{(a, 0) : \max\{a_0, |a - a_0|\} \leq \varepsilon\},$$

то есть, для  $a_0 \leq \varepsilon$  это отношение будет удовлетворять всем  $a : |a - a_0| \leq \varepsilon$ . Таким образом, если  $a_0 \leq \varepsilon$  то  $d_o$ -окрестность  $A_0 = (a_0, b_0)$  будет иметь форму, показанную на Рис. 8. Как можно видеть, эта окрестность — невыпуклое множество.

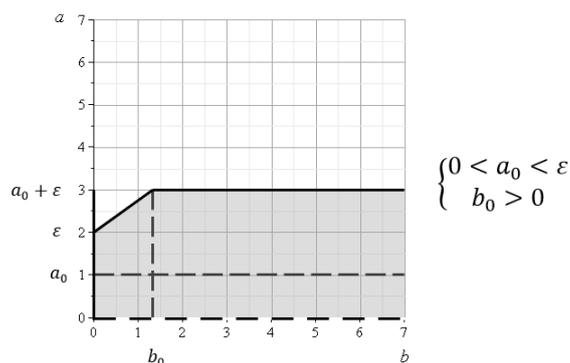


Рисунок 8.

Соотношения (2.8) позволяют нам определить  $d_\sigma$ -окрестность  $A_0 = (a_0, 0)$ . Если  $0 < a_0 \leq \varepsilon$ , то такая окрестность будет иметь форму полосы (см. Рис. 9), как в случае  $a_0 = 0$  (см. Рис. 1).

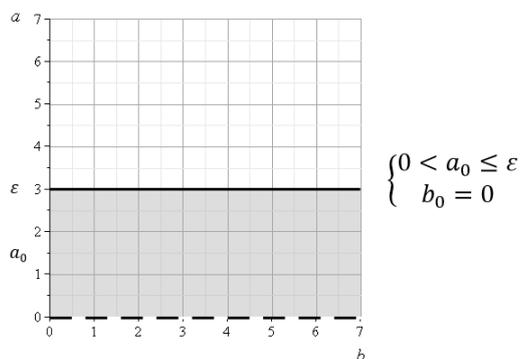


Рисунок 9.

Если  $a_0 > \varepsilon$  то  $d_\sigma$ -окрестность имеет форму следующего отрезка (см. Рис. 10)

$$\{(a, 0) \mid a_0 - \varepsilon \leq a \leq a_0 + \varepsilon\}.$$

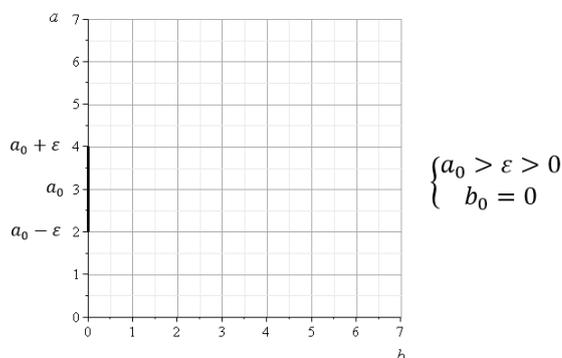


Рисунок 10.

*Замечание 6.* Вообще говоря, метрики  $d_*$  и  $d_o$  не субинвариантны относительно сдвигов (см. (0.2)). Действительно, для  $y \in X_2$  возможно  $O_\varepsilon(y) \subset y + O_\varepsilon(0)$  (см. пример 3, рис. 8). Если  $x \in O_\varepsilon(0)$  (т.е.  $\|x\| < \varepsilon$ ) и  $x + y \notin O_\varepsilon(y)$ , тогда

$$\|x\| = d_*(x, 0) = d_o(x, 0) < d_o(x + y, y) \leq d_*(x + y, y).$$

### 3. Теоремы о функциональной отделимости множеств в строгих выпуклых нормированных конусах

Теорема 3 указывает на возможность переноса в класс СВНК классических результатов анализа в банаховых пространствах. В данном пункте работы мы рассмотрим аналоги теоремы Хана-Банаха о функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества в классе СВНК. Сохраняя обозначения предыдущих пунктов, напомним, что отношения частичного порядка  $\preceq$  вводится в  $X^{**}$  так:

$$\forall \psi_{1,2} \in X^{**} \quad \psi_1 \preceq \psi_2 \Leftrightarrow \psi_1(p) \leq \psi_2(p) \quad p \in X_{sub}^*. \quad (3.1)$$

Наши рассуждения основаны на существовании сублинейного инъективного изометричного и  $d_*$ -непрерывного вложения  $\varphi : X \rightarrow X^{**}$  (см. теорему 3 выше). Сублинейность здесь мы понимаем в следующем смысле:

$$\varphi(x_1 + x_2) \preceq \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Нелинейность вложения  $\varphi$  порождает проблему описания свойств множества  $\varphi(U) \subset X^{**}$  для  $U \in X$ , в частности, проверку свойства выпуклости  $\varphi(U)$ . Однозначно можно утверждать выпуклость  $\varphi(U)$ , если

- а)  $U$  одноточечно;
- б)  $U = [\alpha; \beta] \cdot \{x\} = \{\lambda x \mid \alpha \leq \lambda \leq \beta; \alpha, \beta \geq 0\} \quad \forall x \in X$ ;
- в)  $U = \{\lambda x \mid \alpha \leq \lambda < +\infty\} \quad \forall \alpha \geq 0, x \in X$ .

Выделим класс подмножеств  $U \subset X$  таких, что  $\varphi(U)$  выпукло в  $X^{**}$ .

**Определение 5.** Будем говорить, что  $U \subset X$   $*$ -выпукло, если  $\varphi(U)$  выпукло в пространстве  $X^{**}$ .

Простейшие примеры  $*$ -выпуклых множеств приведены выше. Введем также свойство  $*$ -замкнутости  $U \subset X$ , опираясь на метрику  $d_* : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , существование которой обосновано в теореме 3.

**Определение 6.** Будем называть множество  $U \subset X$   $*$ -замкнутым, если  $U$  замкнуто в метрическом пространстве  $(X, d_*)$ .

Пусть  $U$  —  $*$ -выпуклое и  $d_*$ -замкнутое множество в  $X$ ,  $x_0 \notin U$ . Тогда

$$d_*(x_0, U) = \inf_{u \in U} d_*(x_0, u) = \varepsilon > 0.$$

Если  $B = O_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) = \{\psi \in X^{**} \mid \|\psi\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$  — замкнутый шар радиуса  $\frac{\varepsilon}{2}$  с центром в 0 в пространстве  $X^{**}$ , то  $(\varphi(x_0) + B) \cap (\overline{\varphi(U)} + B) = \emptyset$ , где  $\overline{\varphi(U)}$  — замыкание  $\varphi(U)$  в пространстве  $X^{**}$ . Поэтому  $\varphi(x_0) \notin \overline{\varphi(U)}$ ,  $\overline{\varphi(U)}$  — замкнуто и выпукло в  $X^{**}$ . Это означает, что по стандартной теореме Хана-Банаха о функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества в нормированном пространстве  $\exists \ell \in (X^{**})^* = X^{***} \setminus \{0\}$ :

$$\ell(\varphi(x_0)) > \sup \ell(\overline{\varphi(U)}) = \sup \ell(\varphi(U)). \quad (3.2)$$

Рассмотрим функционал  $\ell(\varphi(\cdot)) : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Для всякого

$$x \in X : \quad |\ell(\varphi(x))| \leq \|\ell\|_{X^{***}} \cdot \|\varphi(x)\|_{X^{**}} = \|\ell\|_{X^{***}} \cdot \|x\|$$

ввиду изометричности  $\varphi$  по теореме 3. Нетрудно также проверить однородность функционала  $\ell(\varphi(\cdot)) : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 4.** *Если множество  $U \subset X$   $*$ -выпукло и  $*$ -замкнуто,  $x_0 \notin U$ , то существует однородный ограниченный функционал  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ :*

$$h(x_0) > \sup h(U).$$

*Замечание 7.* Некоторой проблемой является описание  $*$ -выпуклых и  $*$ -замкнутых подмножеств  $X$ . В этом плане мы можем лишь привести примеры:  $U = \{x_0\}$  и  $U = [\alpha; \beta] \cdot \{x_0\}$  для всякого  $x_0 \in X$  и  $0 \leq \alpha \leq \beta$ .

Сформулируем также естественное следствие из теоремы 4. Пусть

$$O_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d_*(x, y) \leq \varepsilon\}, \quad O_\varepsilon(U) = \bigcup_{u \in U} O_\varepsilon(u)$$

для всяких  $x \in X$ ,  $U \subset X$  и  $\varepsilon > 0$ .

**Следствие 1.** *Если  $U \subset X$   $*$ -выпукло и  $*$ -замкнуто, а  $x_0 \notin O_\varepsilon(U)$ , то существует однородный ограниченный функционал  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ :*

$$h(x_0) > \sup h(O_\varepsilon(U)).$$

*Замечание 8.* Нетрудно показать, что в теореме 4 и следствии 1 функционал  $h$  нельзя, вообще говоря, выбрать линейным и ограниченным по норме. Действительно, в СВНК  $X_2 = \{(a, b) \mid a, b \geq 0 : a = 0 \Rightarrow b = 0\}$  с нормой  $\|(a, b)\|_{X_2} = a$  множество  $Q = \{(a, 0) \mid a_0 - \varepsilon \leq a \leq a_0 + \varepsilon\}$  будет выпуклым,  $*$ -выпуклым,  $d_*$ -замкнутым (см. пример 3 из предыдущего пункта). По лемме 1 для всякого  $\ell \in X_2^*$   $\ell((a, b)) = \lambda a + \mu b$  при  $\lambda \geq 0, \mu \leq 0$ . Тогда  $\ell((a_0, b)) \leq \ell((a_0, 0)) \leq \sup \ell(Q)$ , то есть  $\ell((a_0, b)) > \sup \ell(Q)$  неверно ни при каком  $\ell \in X_2^*$ .

*Замечание 9.* Опираясь на пример 3, можно показать, что в случае невыпуклого множества  $U \subset X$  функционал  $h$ , вообще говоря, нельзя выбрать сублинейным (выпуклым).

Тем не менее, возможно сформулировать аналог теоремы Хана-Банаха о функциональной отделимости точки и \*-замкнутого выпуклого множества для линейных функционалов в специальном виде — с требованием  $O_\varepsilon(0) \subset U$ , где

$$O_\varepsilon(0) = \{x \in X \mid d_*(0, x) \leq \varepsilon\} = \{x \in X \mid \|x\| \leq \varepsilon\}.$$

**Теорема 5.** Пусть  $U$  — \*-замкнутое выпуклое множество в  $X$ ,  $O_\varepsilon(0) \subset U$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ . Если  $x_0 \notin U$ , то  $\exists \ell \in X^*$ :

$$\ell(x_0) > \sup \ell(U).$$

*Доказательство.* Здесь рассуждения будут весьма близкими к стандартным. Рассмотрим функционал Минковского  $p_U(x) = \inf\{\lambda \geq 0 \mid x \in \lambda^{-1}U\}$ , который конечен для всякого  $x \in X$  ввиду  $O_\varepsilon \subset U$ . Ясно, что  $p_U(x) \leq 1 \forall x \in U$  и  $p_U(x_0) > 1$  ввиду \*-замкнутости  $U \subset X$ . Также из  $O_\varepsilon(0) \subset U$  следует  $p_U(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x\|_X$  для всякого  $x \in X$ . Если  $X$  — СВНК, то для множества  $X_0 = \{\lambda x_0 \mid \lambda \geq 0\} \subset X$  и линейного функционала  $p_U$  на  $X_0$  можно применить аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении функционала из [14]. Из этого результата вытекает существование линейного функционала  $\ell : X \rightarrow \mathbb{R}$ :  $\ell(x_0) = p_U(x_0)$  и  $\ell(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x\|_X \forall x \in X$  (а также  $\ell(x) \leq p_U(x) \forall x \in X$ ). Ясно, что  $\ell \in X^*$  и  $\forall x \in U \ell(x) \leq p_U(x) \leq 1$ , а  $\ell(x_0) = p_U(x_0) > 1$ , то есть функционал  $\ell$  — искомый.  $\square$

*Замечание 10.* Пример из замечания 8 указывает на существенность условия  $O_\varepsilon(0) \subset U$ . Даже если в обозначениях этого примера положить  $U = (a_0, 0) + O_\varepsilon(0)$  для которых  $a_0 > 0$  и  $\varepsilon > 0$ , то для всякого  $\ell \in X_2^*$   $\ell((a, b)) = \lambda a + \mu b$  при  $\lambda \geq 0$  и  $\mu \leq 0$ . Если  $a < a_0 - \varepsilon$ , то  $\ell((a, b)) < \ell((a_0, 0)) \leq \sup \ell(U)$  при всяком  $b \geq 0$ , хотя  $(a, b) \notin U$ , то есть неравенство из теоремы 5 не может быть выполнено ни при каком  $\ell \in X^*$ .

## Заключение

В завершении отметим, что результаты работы могут быть обобщены на следующий класс выпуклых конусов с нормой.

**Определение 7.** Будем называть что абстрактный выпуклый конус  $X$  выпуклым упорядоченным нормированным конусом СВНК, если  $X$  есть строгий выпуклый порядково отделимый нормированный конус с законом сокращения и для всех  $x \in X$ :

$$x \neq 0 \Rightarrow \inf\{\|y\| \mid x \preceq y\} > 0. \quad (3.3)$$

*Замечание 11.* Очевидно, (3.3) следует из (0.6). Следовательно, каждый СВНК является СВНК, но существуют СВНК без свойства (0.6). Пример такой структуры рассмотрен ниже.

*Пример 4.* Пусть  $X$  — множество пар неотрицательных чисел  $(a, b)$ :

$$X = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a > 0 \text{ и } b > 0\}.$$

Введем норму в  $X$  следующим образом:

$$\|(a, b)\| = \max \left\{ a, \frac{b^2}{a} \right\} \text{ для } a \neq 0 \text{ и } \|(0, 0)\| = 0.$$

Ясно, что  $\|(a, b)\| = p_W((a, b))$ , где  $p_W(\cdot)$  — функционал Минковского множества  $W$ , ограниченный параболой  $a = b^2$  и прямой линией  $a = 1$  (см. Рис. 11).

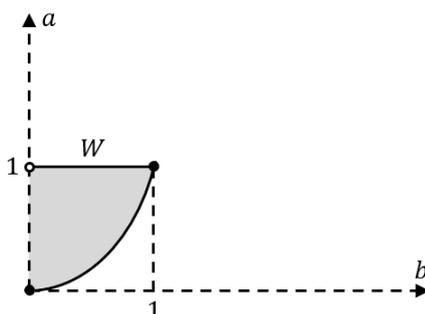


Рисунок 11.

Таким образом,  $\|\cdot\|$  — выпуклый функционал на  $X$ . Покажем, что  $\|\cdot\|$  может не быть полунормой в линейном пространстве  $E \supset \varphi(X)$  для всякого линейного инъективного вложения  $\varphi : X \rightarrow E$ . Действительно, для пар  $(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}) + (\frac{7}{8}, \frac{1}{8}) = (1, 1)$  имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \left( \frac{1}{8}, \frac{7}{8} \right) \right\| &= \frac{49}{8}, \quad \left\| \left( \frac{7}{8}, \frac{1}{8} \right) \right\| = \frac{7}{8}, \quad \|(1, 1)\| = 1, \\ \|(1, 1)\| + \left\| \left( \frac{7}{8}, \frac{1}{8} \right) \right\| &< \left\| \left( \frac{1}{8}, \frac{7}{8} \right) \right\|, \end{aligned}$$

т.е. неравенство  $\|(a_1, b_1)\| + \|(a_1, b_1) + (a_2, b_2)\| \geq \|(a_2, b_2)\|$  не выполняется.

Можно привести еще один пример выпуклого нормированного конуса, который линейно инъективно изометрично не вложен ни в какое линейное нормированное пространство.

*Пример 5.* Пусть  $X$  — множество пар неотрицательных чисел  $(a, b)$ :

$$X = \{(0, 0)\} \cup \{(a, b) \mid a > 0 \text{ и } b > 0\}.$$

Введем следующую норму на  $X$ :

$$\|(a, b)\| = \max \left\{ \frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a} \right\} \text{ для } a, b \neq 0 \text{ и } \|(0, 0)\| = 0.$$

Ясно, что  $\|(a, b)\| = p_W((a, b))$ , где  $p_W(\cdot)$  — функционал Минковского множества  $W$  (см Рис. 12).

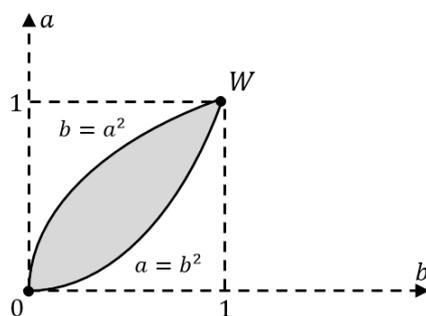


Рисунок 12.

Представляет интерес дальнейшее исследование свойств введённых классов нормированных конусов, а также их приложений в разных задачах анализа.

### Список цитируемых источников

1. *Borodin P. A.* The Banach-Mazur Theorem for Spaces with Asymmetric Norm // *Math. Notes.* — 2001. — Vol. 69, no. 3. — P. 298–305.
2. *Cobzas S.* Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces. — Basel: Birkhauser/Springer, 2013. — 219 p.
3. *Garcia-Raffi L. M., Romaguera S., Sanchez-Perez E. A.* Sequence spaces and asymmetric norms in the theory of computational complexity // *Math. Comput. Modelling.* — 2002. — Vol. 36. — P. 1–11.
4. *Garcia-Raffi L. M., Romaguera S., Sanchez-Perez E. A., Valero O.* Metrizable of the unit ball of the dual of a quasi-normed cone // *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana.* — 2004. — Ser. 8, Vol. 7-B, no. 2. — P. 483–492.
5. *Keimel K., Roth W.* Ordered cones and approximation. *Lecture Notes in Math*, 1517. — Berlin: Springer, 1992. — 134 p.
6. *Keimel K.* Topological Cones: Functional Analysis in a  $T_0$ -Setting // *Semigroup Forum.* — 2008. — Vol. 77. — P. 109–142.
7. *Mustÿata C.* On the extremal semi-Lipschitz functions // *Ann. Numer. Theory Approx.* — 2002. — Vol. 31. — P. 103–108.
8. *Rådström J. H.* An embedding theorem for space of convex sets // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1952. — Vol. 3. — P. 165–169.
9. *Romaguera S., Sanchis M.* Semi-Lipschitz functions and best approximation in quasi-metric spaces // *J. Approx. Theory.* — 2000. — Vol. 103. — P. 292–301.
10. *Romaguera S., Sanchez-Perez E. A., Valero O.* A Characterization of Generalized Monotone Normed Cones // *Acta Mathematica Sinica, English Series.* — 2007. — Vol. 23, no. 6. — P. 1067–1074.
11. *Romaguera S., Sanchez-Perez E. A., Valero O.* The Dual Complexity Space as the Dual of a Normed Cone // *Electronic Notes in Theoretical Computer Science.* — 2006. — Vol. 161. — P. 165–174.
12. *Roth W.* Hahn-Banach type theorems for locally convex cones // *Journal of the Australian Math. Soc.* — 2000. — Ser. A, Vol. 68, no. 1. — P. 104–125.

13. *Selinger P.* Towards a semantics for higher-order quantum computation // Proceedings of the 2nd International Workshop on Quantum Programming Languages. Turku Centre for Computer Science General Publication. — 2004. — Vol. 33. — P. 127–143.
14. *Stonyakin F. S.* An analogue of the Hahn-Banach Theorem for functionals on abstract convex cone // Eurasian. Math. J. — 2016. — Vol. 7, no. 3. — P. 89–99.
15. *Tix R.* Some results on Hahn–Banach-type theorems for continuous D-cones // Theoretical Comput. Sci. — 2001. — Vol. 264. — P. 205–218.

*Получена 22.05.2017*

УДК 621.371.1

# Моделирование сверхширокополосного радиолокатора, использующего двухполосный метод компенсации ионосферных искажений<sup>1</sup>

А. К. Строев

Московский физико-технический институт (государственный университет).

E-mail: ak.stroev@gmail.com

**Аннотация.** Рассмотрена задача моделирования сверхширокополосной радиолокационной станции, предназначенной для наблюдения за космическими объектами. На построенной модели исследован двухполосный метод компенсации ионосферных искажений при наличии шума и доплеровского сдвига частоты

**Ключевые слова:** двухполосный метод, ионосфера, сверхширокополосная радиолокация.

## Simulation of ultrawideband radar using a two-band ionospheric distortion compensation method

A. K. Stroevev

Moscow Physics-Technical University, .

**Abstract.** The problem of modelling an ultrawideband radar for observation of space objects is studied. On the constructed model, a two-band method of ionospheric distortion compensation in the presence of noise and Doppler frequency shift is investigated.

**Keywords:** two-band method, ionosphere, ultrawideband radar.

**MSC 2010:** 00A71

### 1. Введение

Рассматривается задача обработки сверхширокополосного радиолокационного сигнала, отраженного от космического объекта. Как показано в [1], одним из основных эффектов, мешающих такой обработке, является дисперсия ионосферной плазмы. Данный эффект проявляется как дополнительный фазовый сдвиг, зависящий от частоты и полного электронного содержания (total electron content, ТЕС) вдоль пути распространения сигнала. Следовательно, при известном ТЕС можно создать фильтр, позволяющий компенсировать ионосферные искажения. Существует несколько способов оценки ТЕС. Одним из наиболее перспективных является двухполосный метод [2], не требующий использования сигналов специального

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ НШ-6831.2016.8)

вида или большого количества фильтров, но позволяющий при этом компенсировать мелкомасштабные ионосферные неоднородности. В работе [2] данный метод исследован без учета доплеровского сдвига. В настоящей работе описывается моделирование обработки сигнала, отраженного от быстро движущегося космического объекта, с применением двухполосного метода.

## 2. Математическая модель радиолокационной обработки

Пусть излучаемый сверхширокополосный сигнал с несущей частотой  $\omega_0$  представлен в спектральном виде

$$s(t) = A_0 e^{-i\omega_0 t} \int s(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega, \quad (2.1)$$

где  $A_0$  — амплитуда излучаемого сигнала,  $s(\Omega)$  — спектр огибающей сигнала. Принимаемый от точечного объекта сигнал тогда имеет вид

$$u(t) = A_1 e^{-i\omega_0(t - \frac{2R}{c})} \int s(\Omega) e^{-i\Omega(t - \frac{2R}{c})} e^{i2\varphi(\Omega)} d\Omega, \quad (2.2)$$

где  $A_1$  — амплитуда принимаемого сигнала,  $R$  — расстояние до наблюдаемого объекта,  $\varphi(\Omega)$  — дополнительная фазовая задержка, вызываемая ионосферой. Величина данной фазовой задержки дается формулой [3]

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega}{c} L(\omega), \quad (2.3)$$

где  $L(\omega)$  — дополнительный фазовый путь, вызываемый ионосферой, который может быть вычислен по формуле

$$L(F) = -\frac{K}{F^2} \cdot \text{TEC}, \quad (2.4)$$

где  $F = \omega/2\pi$  — частота в МГц,  $\text{TEC} = \int_0^R N(\mathbf{l}\sigma) d\sigma$  — полная электронная концентрация в  $\text{м}^{-2}$  (здесь  $N(\mathbf{r})$  — распределение электронной концентрации в пространстве,  $\mathbf{l}$  — единичный вектор вдоль направления распространения сигнала), и  $K = 40.3 \cdot 10^{-12} \text{ МГц}^2 \cdot \text{м}^3$ , так что результат измеряется в метрах. Как следует из (2.3) и (2.4), ионосферная фазовая поправка обратно пропорциональна частоте. Удобно представить ее в виде трех слагаемых следующим образом:

$$\varphi(\omega_0 + \Omega) = \frac{\omega_0}{c} L(\omega_0) - \frac{\Omega}{c} L(\omega_0) + \frac{\Omega^2}{\omega_0(\omega_0 + \Omega)} \frac{\omega_0}{c} L(\omega_0), \quad (2.5)$$

где первое слагаемое — несущественный при обработке постоянный фазовый сдвиг, второе определяет дополнительную групповую задержку, а третье вызывает искажение формы импульса и ухудшение отклика согласованного фильтра. Двухполосный метод определения TEC основан на измерении разности групповых задержек

сигнала на разных частотах. Для этого принимаемый сигнал обрабатывается при помощи двух полосовых фильтров с центральными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Временные задержки в каждом из этих фильтров будут равны:

$$\tau_1 = \frac{2R}{c} - \frac{2L(\omega_1)}{c} \quad (2.6)$$

$$\tau_2 = \frac{2R}{c} - \frac{2L(\omega_2)}{c} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.4) в (2.6) – (2.7) и решая систему уравнений, получим следующее выражение для оценки ТЕС:

$$\text{ТЕС} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2K \cdot \left( \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right)}. \quad (2.8)$$

### 3. Программное моделирование радолокационной системы

Для проверки предложенного алгоритма была создана программа, позволяющая моделировать распространение сигналов через ионосферу и их обработку. При этом в модели должен учитываться ряд эффектов: шум, дисперсионное расплывание импульса, доплеровский сдвиг, сложная форма отклика от объекта. Опишем сначала наиболее простую версию модели без всех перечисленных эффектов. Излучаемый сигнал определяется комплексной огибающей и несущей частотой. Программа позволяет анализировать сигналы различного вида, однако в данной работе мы ограничимся ЛЧМ сигналом, огибающая которого имеет вид

$$A(t) = \exp\left(\frac{i\pi\Delta Ft^2}{T}\right), \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad (3.1)$$

где  $\Delta F$  — половина ширины полосы частот сигнала,  $T$  — длительность. Для моделирования сигнала необходимо перейти к дискретному виду огибающей  $A_n = A(t_n)$ , где  $t_n = -\frac{T}{2} + n \cdot \delta t$ . Спектр сигнала рассчитывается при помощи быстрого преобразования Фурье следующим образом:

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} A_n \exp\left(i2\pi \frac{k \cdot n}{N}\right), \quad (3.2)$$

где  $N$  — число отсчетов сигнала,  $k$  — номер отсчета в спектральной области. Наблюдаемый объект определяется совокупностью основных центров рассеяния — блестящих точек. Каждая блестящая точка задается ее координатами относительно условного центра объекта и своей эффективной площадью рассеяния (ЭПР). Кроме того, существует возможность задать угол наблюдения объекта — изменение этого угла во времени позволяет получать двумерные изображения объекта. Относительное расстояние до  $m$ -й блестящей точки:

$$R_m = x_m \cos \varphi + y_m \sin \varphi. \quad (3.3)$$

Отклик от сложного объекта вычисляется в спектральном виде. Это, во-первых, позволяет легко моделировать задержку, не кратную шагу дискретизации по времени, а во-вторых, упрощает дальнейшее добавление ионосферной дисперсии. В дискретном виде огибающая принимаемого сигнала имеет вид:

$$u_k = \sum_m A_k \sigma_m \exp\left(-i \frac{4\pi F_k}{c} R_m\right), \quad (3.4)$$

где  $\sigma_m$  — ЭПР  $m$ -й блестящей точки,  $F_k = F_0 + k \delta F$  — частота соответствующей спектральной компоненты,  $F_0$  — частота несущей. Полученный сигнал обрабатывается при помощи согласованного фильтра со спектральной характеристикой:

$$H_k = A_k^*, \quad (3.5)$$

где звездочкой обозначено комплексное сопряжение. Отклик фильтра в спектральном виде:

$$V_k = \sum_m |A_k|^2 \sigma_m \exp\left(-i \frac{4\pi F_k}{c} R_m\right). \quad (3.6)$$

После преобразования Фурье во временную область получаем:

$$V_n = \sum_k \sum_m |A_k|^2 \sigma_m \exp\left(-i \frac{4\pi F_k}{c} R_m + i 2\pi \frac{n \cdot k}{N}\right). \quad (3.7)$$

Учитывая, что по свойствам дискретного преобразования Фурье  $\frac{1}{N} = \delta t \delta F$ , данную формулу можно представить в виде:

$$V_n = \sum_k \sum_m |A_k|^2 \sigma_m \exp\left(-i \frac{4\pi F_0}{c} R_m + i 2\pi k \delta F \left(n \delta t - \frac{2R_m}{c}\right)\right). \quad (3.8)$$

Если рассматривать отклик от отдельной блестящей точки, то видно, что модуль отклика фильтра будет максимален при  $n \delta t \approx \frac{2R_m}{c}$ , что и обеспечивает построение дальностного портрета наблюдаемого объекта (см. Рис. 1 в «Примерах»). Если же объект содержит несколько плохо разрешаемых блестящих точек, то форма отклика может оказаться сложной из-за их интерференции (Рис. 2).

Перейдем теперь к моделированию алгоритма оценки ТЕС двухполосным методом. Для начала дополним модель влиянием ионосферы. Принимаемый сигнал тогда будет описываться следующим образом:

$$u'_k = u_k \exp(i 2\varphi_k), \quad (3.9)$$

где  $\varphi_k$  описывает дополнительный фазовый сдвиг и находится в соответствии с (2.3) и (2.4):

$$\varphi_k = \frac{2\pi K \cdot \text{ТЕС}}{c \cdot F_k}. \quad (3.10)$$

Пример отклика обычного согласованного фильтра на сигнал, искаженный ионосферой, приведен на Рис. 3. В исследуемом алгоритме оценки ТЕС сигнал обрабатывается двумя узкополосными фильтрами со следующими спектральными характеристиками:

$$H_{1k} = \begin{cases} A_k^*, & F_k \leq F_{b1} \\ 0, & F_k > F_{b1} \end{cases}, \quad (3.11)$$

$$H_{2k} = \begin{cases} 0, & F_k < F_{b2} \\ A_k^*, & F_k \geq F_{b2} \end{cases}, \quad (3.12)$$

где  $F_{b1}$  и  $F_{b2}$  — соответственно нижняя и верхняя граничные частоты. Формулы обработки сигнала при помощи данных фильтров аналогичны формулам (3.6)—(3.8). Обозначим отклики фильтров  $V_{1n}$  и  $V_{2n}$ . Мы ожидаем, что отклики отличаются сдвигом на некоторую величину, зависящую от ТЕС:

$$V_{2n} = V_{1(n+\theta)}. \quad (3.13)$$

Для нахождения сдвига используется корреляционный метод [5]

$$\hat{\theta} = \arg \max \left( \sum_n V_{1n} V_{2(n-l)} \right) \quad (3.14)$$

Корреляция вычисляется с использованием свойств преобразования Фурье:

$$\sum_n V_{1n} V_{2(n-l)} = \text{IFFT} [\text{FFT} [V_1] \cdot (\text{FFT} [V_2])^*], \quad (3.15)$$

где FFT — прямое, а IFFT — обратное преобразование Фурье. Поскольку положение максимума не обязано быть целым числом дискретов, для его нахождения используется представление функции корреляции в виде ряда Котельникова. Оценку задержки получим по формуле:

$$\hat{\tau} = \hat{\theta} \cdot \delta t. \quad (3.16)$$

Подставив (3.16) в (2.8), получим окончательное выражение для оценки ТЕС:

$$\text{ТЕС} = \frac{\hat{\tau}}{2K \cdot \left( \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right)}. \quad (3.17)$$

Примеры отклика высокочастотного и низкочастотного фильтров и корреляционной функции приведены на Рис. 7–8.

#### 4. Учет шума

Всевозможные шумы аппаратуры и внешние помехи моделируются в программе аддитивным белым гауссовым шумом. Принимаемый сигнал с учетом шума равен:

$$\tilde{u}_k = u_k + \xi_k, \quad (4.1)$$

где  $u_k$  — принимаемый сигнал без учета шума,  $\xi_k$  — последовательность некоррелированных гауссовых случайных величин с нулевым средним и дисперсией, задаваемой отношением сигнал-шум. Рассмотрим, как вычислить эту дисперсию. По определению, отношение сигнал-шум равно:

$$\text{SNR} = \frac{E}{N_0}, \quad (4.2)$$

где  $E$  — энергия сигнала,  $N_0$  — спектральная мощность шума. Корреляционная функция белого шума:

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = N_0 \delta(t - t'). \quad (4.3)$$

Видно, что использовать в модели непосредственно входной белый шум мы не можем, так как его дисперсия бесконечна. Дискретная случайная последовательность  $\xi_k$  получается путем усреднения входного белого шума на интервале дискретизации:

$$\xi_k = \frac{1}{\delta t} \int_{-\frac{\delta t}{2}}^{\frac{\delta t}{2}} \xi(t) dt. \quad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) найдем искомую дисперсию:

$$\langle \xi_k^2 \rangle = \frac{1}{\delta t^2} \int_{-\frac{\delta t}{2}}^{\frac{\delta t}{2}} \int_{-\frac{\delta t}{2}}^{\frac{\delta t}{2}} \langle \xi(t) \xi(t') \rangle dt dt' = \frac{N_0}{\delta t} \quad (4.5)$$

Как видно, при заданном отношении сигнал-шум дисперсия шума обратно пропорциональна интервалу дискретизации. Данный результат важно учитывать при моделировании. Для программной генерации гауссовых величин с заданной дисперсией необходимо применить один из известных алгоритмов. В описываемой программе используется алгоритм Марсальи-Брея [4]. Пример отклика фильтра на зашумленный сигнал приведен на Рис. 4

#### 5. Учет доплеровского сдвига

При наблюдении за быстро движущимися космическими объектами необходимо также учитывать доплеровский сдвиг частоты. Поскольку ускорением свободно движущихся объектов на коротком временном промежутке длительности сигнала,

как правило, можно пренебречь, представим зависимость расстояния до объекта от времени в линейном виде:

$$R = R_0 + vt, \quad (5.1)$$

где  $R_0$  — расстояние до объекта в нулевой момент времени,  $v$  — радиальная скорость объекта. Подставив (5.1) в (2.2), получим:

$$u(t) = A_1 e^{-i\omega_0(t - \frac{2R}{c} - \frac{2vt}{c})} \int s(\Omega) e^{-i\Omega(t - \frac{2R}{c} - \frac{2vt}{c})} e^{i2\varphi(\Omega)} d\Omega. \quad (5.2)$$

Проведем теперь замену переменных  $\Omega' = \gamma\Omega$ , где  $\gamma = 1 - \frac{2v}{c}$ . Тогда (5.2) примет вид:

$$u(t) = A_1 e^{-i\gamma\omega_0 t} \int s\left(\frac{\Omega'}{\gamma}\right) e^{-i\Omega'(t - \frac{2R}{\gamma c})} e^{i2\varphi(\frac{\Omega'}{\gamma})} d\Omega' \quad (5.3)$$

Как видно из (5.3), произошел сдвиг частоты — несущая переместилась на частоту  $\gamma\omega_0$ , а огибающая принятого сигнала на частоте  $\Omega'$  оказалась пропорциональной огибающей излученного на частоте  $\frac{\Omega'}{\gamma}$ . Эти два эффекта необходимо учесть в моделировании. Искажение формы огибающей описывается формулой:

$$u_k' = U\left(\frac{F_k}{\gamma}\right), \quad (5.4)$$

где  $U(f)$  — непрерывный спектр огибающей, соответствующий дискретному спектру огибающей  $u_k = U(F_k)$ . Значения непрерывного спектра в интересующих нас точках найдем по формуле ряда Котельникова:

$$U(f) = \sum_k \frac{u_k \sin \pi \left( \frac{f - F_0}{\delta F} - k \right)}{\pi \left( \frac{f - F_0}{\delta F} - k \right)}. \quad (5.5)$$

Отметим, что другие аппроксимационные формулы (например, линейная аппроксимация) не являются применимыми, так как спектр широкополосного сигнала не является достаточно плавно изменяющейся функцией. Формулу же ряда Котельникова можно применять, так как длительность сигнала ограничена, следовательно, его спектр можно считать функцией с финитным «спектром».

Другим эффектом, вызываемым доплеровским сдвигом, является несовпадение несущей частоты принимаемого сигнала и несущей частоты фильтра. Пусть принимаемый сигнал описывается формулой (2.2). Выделим в нем другую несущую частоту  $\omega_0' \neq \omega_0$ :

$$u(t) = A_1 e^{-i\omega_0' t} e^{-i\Delta\omega t} \int s(\Omega) e^{-i\Omega(t - \frac{2R}{c})} e^{i2\varphi(\Omega)} d\Omega, \quad (5.6)$$

где  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_0'$ . Множитель  $e^{-i\Delta\omega t}$  необходимо внести под знак интеграла и провести замену переменных  $\Omega' = \Omega + \Delta\omega$ . В результате получим, что спектр огибающей принимаемого сигнала на другой частоте имеет вид:

$$u'(\Omega') = u(\Omega' - \Delta\omega). \quad (5.7)$$

Вычисление значения спектра на заданной частоте, как и раньше, производится при помощи ряда Котельникова. Следует отметить, что несовпадение несущей частоты сигнала и опорной частоты обрабатывающего фильтра может вызываться не только доплеровским сдвигом, но и, например, неидеальностью аппаратуры. Пример отклика фильтра, не согласованного по доплеровской частоте, приведен на Рис. 5.

## 6. Примеры работы модели

Примеры отклика системы обработки в различных условиях приведены на Рис. 1–6.

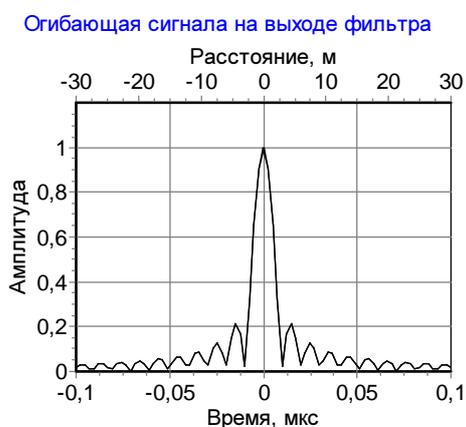


Рис. 1. Идеальный отклик.

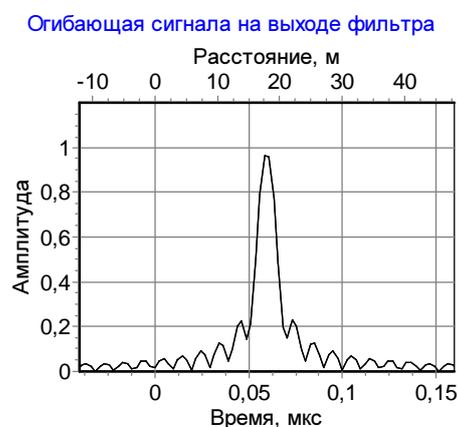


Рис. 3. Ионосферные искажения  $TEC = 50$  TECU.

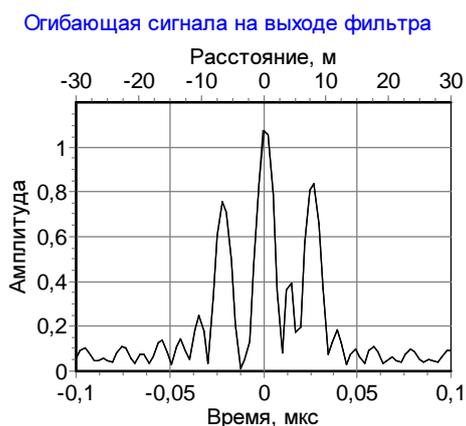


Рис. 2. Отклик от объекта сложной формы (три блестящие точки, разнесенные на 3-4 метра).

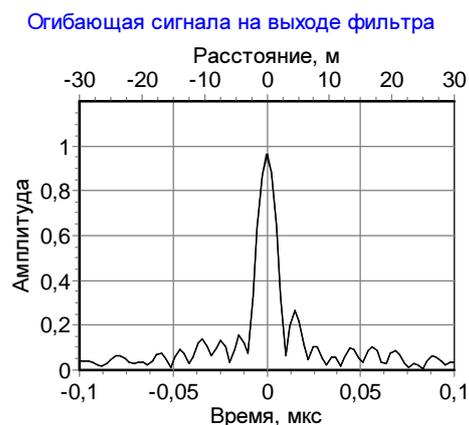


Рис. 4. Сигнал с шумом.

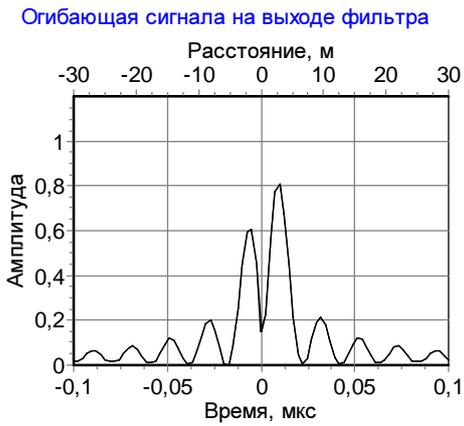


Рис. 5. Неучтенный доплеровский сдвиг с радиальной скоростью 2 км/с.

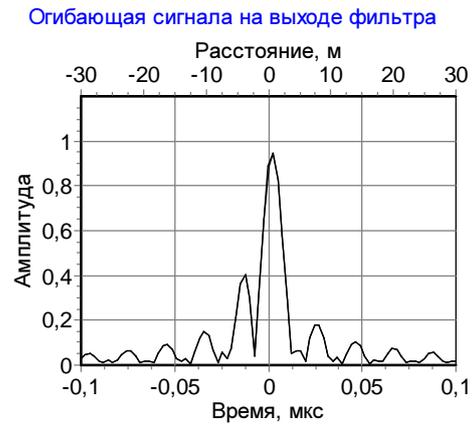


Рис. 6. Доплеровский сдвиг с учетом только сдвига несущей.

Графики, демонстрирующие оценку ТЕС двухполосным методом, показаны на Рис. 7–8.

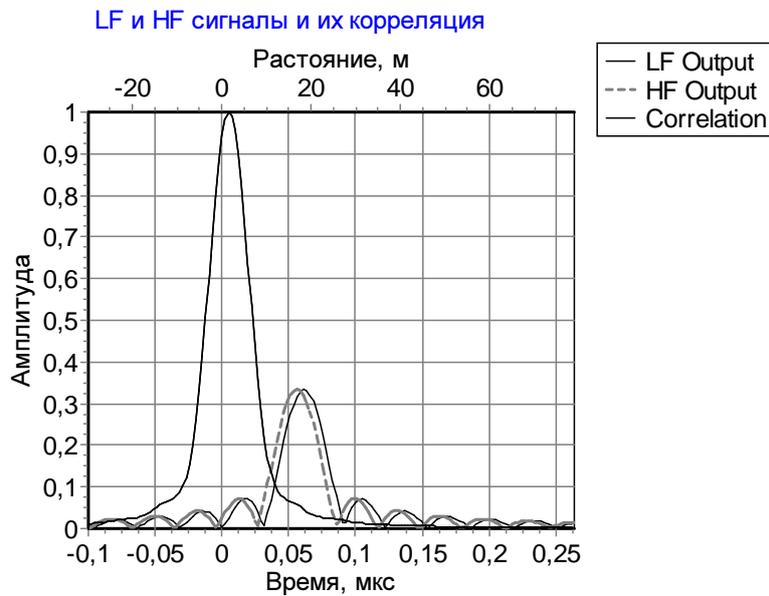


Рис. 7. Оценка ТЕС в идеальном случае.

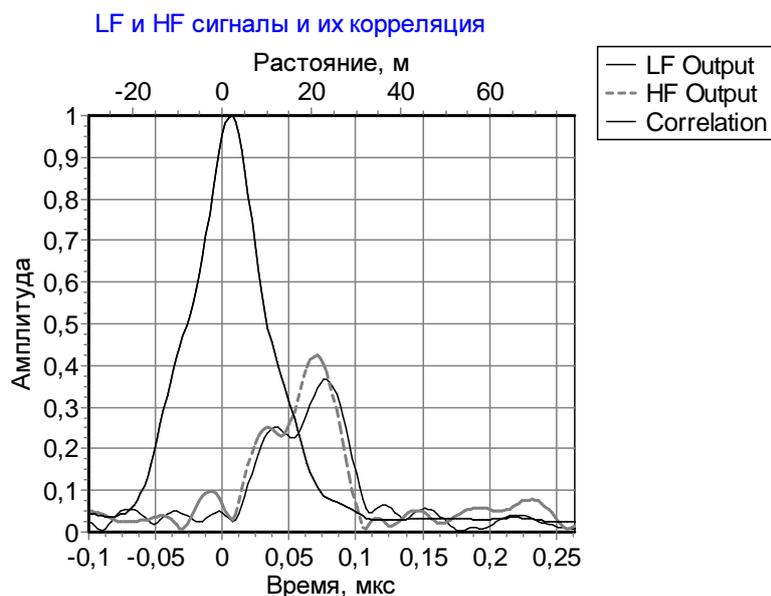


Рис. 8. Оценка ТЕС при сложной форме отклика, наличии шума и неучтенного доплеровского сдвига.

Моделирование проводилось со следующими характеристиками:

- длительность импульса 5 мкс,
- принимаемая длительность сигнала 10 мкс,
- частота 1500 МГц,
- полоса 100 МГц,
- дисперсия 50 TECU ( $1 \text{ TECU} = 10^{16} \text{ м}^{-2}$ ),
- отношение сигнал-шум -1 дБ,
- радиальная скорость 2 км/с.

## 7. Выводы

Созданная программа позволяет моделировать различные сценарии радиолокационного наблюдения, что годится, в частности, для изучения работоспособности двухполосного метода оценки ТЕС. Примеры работы программы приведены на рисунках. Выделены некоторые нюансы подобного моделирования, такие, как необходимость учета зависимости дисперсии дискретного шума от частоты дискретизации и необходимость использования формулы ряда Котельникова для аппроксимации спектра.

**Список цитируемых источников**

1. *Виноградов А. Г., Лучин А. А., Теохаров А. Н.* Обработка сверхширокополосных сигналов и формирования радиолокационных изображений в РЛС дальнего обнаружения L-диапазона. // *Наукоёмкие технологии.* — 2013. — Т. 14, №9. — С. 32–36.  
Vinogradov A. G., Luchin A. A., Teokharov, A. N. Problems of Processing Very Broadband Signals and Constructing Radar Images in Long-Range Radars of L-Range. *Naukoemkie tekhnologii (Science Intensive Technologies)* 14:9, 32–36 (2013). (in Russian)
2. *Аджемов С. С., Виноградов А. Г., Лобов Е. М., Теохаров А. Н.* Прямая оценка полного электронного содержания ионосферы (ТЕС) путем специальной обработки широкополосного радиолокационного сигнала // *Сборник трудов научно-технической конференции «Системы синхронизации, формирования и обработки сигналов в инфокоммуникациях» «СИНХРОИНФО 2015».* — С-Петербург, 2015. — С. 167–169.  
Adjemov S. S., Vinogradov A. G., Lobov E. M., Teokharov A. N. Direct Evaluation of the Total Electron Content (TEC) of Ionosphere by Wideband Radar Signal Special Processing. In *Proceedings of the Scientific Conference «SYNCHROINFO 2015», St-Petersburg, 2015*, pp. 167–169. (in Russian)
3. *Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И., Виноградов А. Г.* Прохождение радиоволн через атмосферу Земли. — М.: Радио и связь, 1983. — 224 с.  
Kravtsov, Yu. A., Feizulin, Z. I., Vinogradov, A. G. Passage of radio waves through the Earth's atmosphere. Moscow: Radio i Svyaz', 1983.
4. *Marsaglia, George, and Thomas A. Bray.* A convenient method for generating normal variables. // *SIAM Review.* — 1964. — Vol.6, No.3. — P. 260-264.
5. *Виноградов А. Г., Теохаров А. Н.* Применение двухполосного метода оценки полного электронного содержания ионосферы (ТЕС) по отраженному от сложного объекта широкополосному сигналу. // *Динамические системы.* — 2016. — Т.6(34), №4. — С. 369-379.  
Vinogradov, A. G., Teokharov, A. N. Two-band Method of Estimating Complete Electron Content of the Ionosphere Applied to Wideband Signal Reflected from a Complex Object. *Dinamicheskie Sistemy* 6(34), No.4, 369-379 (2016). (in Russian)

*Получена 06.08.2016*

## РЕФЕРАТЫ

УДК 517.938

А. ДОЛГОНОСОВА, Е. НОЗДРИНОВА, О. ПОЧИНКА. **О препятствиях к существованию простой дуги, соединяющей многомерные диффеоморфизмы Морса-Смейла** (английский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №2. — С. 103–112.

В настоящей работе рассматриваются диффеоморфизмы Морса-Смейла, заданные на неодносвязном замкнутом многообразии  $M^n$ ,  $n \geq 3$ . Для таких систем вводится понятие тривиальной (нетривиальной) связности их периодических орбит. Устанавливается, что изотопные тривиальные и нетривиальные диффеоморфизмы не могут быть соединены дугой с бифуркациями ко-размерности один. Построены примеры таких каскадов Морса-Смейла на многообразии  $S^{n-1} \times S^1$ .

**Ключевые слова:** диффеоморфизмы Морса-Смейла, бифуркация, гладкая дуга

Ил. 9. Библиогр. 10 назв.

УДК 517.938

Е. Д. КУРЕНКОВ, К. А. РЯЗАНОВА. **О периодических сдвигах на  $n$ -торах** (английский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №2. — С. 113–118.

В настоящей работе рассматриваются, периодические сдвиги на  $n$ -мерном торе, и для двух топологически сопряженных сдвигов исследуется множество сопрягающих их гомеоморфизмов. Из результатов J. Nielsen [Dansk Videnskabernes Selskab. Math.-fys. Meddelelser, 1937, Vol.15, 1-77] следует, что для периодических гомеоморфизмов двумерного тора таких, что все точки имеют один период, период является полным инвариантом топологической сопряженности. В настоящей работе исследуется вопрос, когда два периодических сдвига на  $n$ -мерном торе топологически сопряжены с помощью группового автоморфизма. Основным результатом работы является доказательство теоремы о том, что два периодических сдвига на  $n$ -мерном торе, имеющих один период, топологически сопряжены посредством счетного семейства групповых автоморфизмов тора. Кроме того, показано, что для двух фиксированных топологически сопряженных сдвигов множество сопрягающих их гомеоморфизмов в каждом гомотопическом классе содержит континуум гомеоморфизмов.

**Ключевые слова:** топологическая сопряженность, автоморфизмы тора, гомотопия

Библиогр. 4 назв.

УДК 517:957

Ю. А. ХАЗОВА. **Метаустойчивые структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной на отрезке** (русский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №2. — С. 119–129.

Исследуется динамика стационарных структур в нелинейном оптическом резонаторе с преобразованием отражения. Математической моделью системы является параболическое уравнение с преобразованием отражения пространственной переменной и условиями периодичности. Исследуется эволюция форм и устойчивость структур при уменьшении коэффициента диффузии. В работе используется метод Галеркина. Реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций и метаустойчивых структур.

**Ключевые слова:** параболическая задача, существование решения, метаустойчивые структуры, бифуркация, устойчивость, метод Галеркина.

Ил. 4. Библиогр. 14 назв.

УДК 139.3

В. В. ЧЕХОВ. **Геометрически и физически нелинейная задача оптимизации трехстержневой фермы** (английский) // *Динамические системы*, 2017. — Том 7(35), №2. — С. 131–148.

Рассматриваются задачи анализа и оптимального проектирования статически нагруженной симметричной трёхстержневой фермы с учётом нелинейности используемых материалов, а также конечности деформаций. Получено условие совместности деформаций, а также связь площадей сечений стержней с уровнями напряжений в них при конечных деформациях. Показано, что, хотя задача анализа фермы в общем случае нелинейна, однако оптимизационная задача является задачей линейного программирования. Сравняются свойства оптимальных проектов при использовании различных конструкционных сплавов.

**Ключевые слова:** симметричная трёхстержневая ферма, физическая нелинейность, геометрическая нелинейность, задача оптимального проектирования.

Ил. 6. Табл. 6. Библиогр. 13 назв.

УДК 517.98

Е. М. КУЗЬМЕНКО, С. И. СМИРНОВА. **Негладкие вариационные задачи с подвижной границей с точки зрения обобщенного метода множителей Лагранжа** (русский) // *Динамические системы*, 2017. — Том 7(35), №2. — С. 149–156.

Метод множителей Лагранжа обобщается на случай условного экстремума субгладкого функционала при субгладком условии связи. Наш подход основан на недавно предложенной в работах И.В. Орлова субгладкой форме теорем об обратной и неявной функции, а также на операторной базе этих результатов, изложенной в работах И.В. Орлова и С.И. Смирновой.

Упомянутые результаты позволили распространить метод множителей Лагранжа на случай негладкого условного экстремума, что составляет содержание первой части работы.

Вторая часть работы посвящена негладким вариационным функционалам и опирается на теорию сильных субдифференциалов, рассмотренную в работах И.В. Орлова, а также на методы исследования негладких вариационных функционалов, описанные в совместном учебном пособии И.В. Орлова, Ф.С. Столякина и С.И. Смирновой. Здесь получено обобщенное условие трансверсальности, которое уже рассматривалось нами ранее в более частном случае, а также приведены примеры его применения.

В частности, в качестве простейшего примера отмечен “квазиклассический” случай, когда гладкое условие на подвижную границу комбинируется с негладким интегрантом вариационного функционала.

**Ключевые слова:** негладкие вариационные задачи, подвижная граница, сильные субдифференциалы, метод множителей Лагранжа.

Библиогр. 13 назв.

УДК 517.929

А. Ю. ПЕРЕВАРЮХА. **Запаздывание в регуляции популяционной динамики — модель клеточного автомата** (русский) // *Динамические системы*, 2017. — Том 7(35), №2. — С. 157–165.

Обсуждается метод математической формализации запаздывающей регуляции биологических процессов, в том числе предложенная нами модификация дифференциального уравнения для критического варианта развития популяционных флуктуаций. Использование популяционных моделей с отклоняющимся аргументом  $\dot{x} = rv(x)f(x(t-\tau))$  в некоторых случаях противоречит данным экспериментальных наблюдений. Рассмотрена проблема сущностной интерпретации

величины  $\tau$  в контексте причин её появления. Для демонстрации эволюции ситуации с комплексом реалистичных факторов временного последствия предложен алгоритм клеточного автомата с троичным состоянием клеток. Условия трансформации состояния клеток показывают, что в гораздо большей степени формализуемое в уравнениях Хатчинсона и «blowfly's equation» запаздывание относится к динамике взаимодействия вида и поддерживающей условия жизни среды. Взаимодействие не может отражаться константным параметром. Действие запаздывания весьма поверхностно можно отождествлять с характеристиками непосредственно биологического вида. Диффузионную составляющую в нелокальных модификациях уравнений логичнее отражать зависимой от времени реакции величиной.

**Ключевые слова:** уравнения с запаздыванием, критические сценарии популяционной динамики, механизмы регуляции, клеточный автомат.

Ил. 2. Библиогр. 18 назв.

УДК 517.98

Ф. С. СТОНЯКИН, А. С. АНДРЕЕНКОВА. **Теоремы о функциональной отделимости в специальном классе нормированных конусов** (русский) // *Динамические системы*, 2017. — Том 7(35), №2. — С. 167–184.

Работа посвящена некоторым проблемам анализа в специальном классе строгих выпуклых нормированных конусов (СВНК), который недавно был введен первым автором. Показана метризуемость всякого СВНК и существование сублинейного изометричного непрерывного вложения в некоторое нормированное пространство. Построен иллюстрирующий пример соответствующей топологии. Исследована возможность обобщения теорем о функциональной отделимости выпуклых замкнутых подмножеств на класс СВНК с использованием как линейных, так и нелинейных функционалов.

**Ключевые слова:** строгий выпуклый нормированный конус, однородная метрика, теорема о функциональной отделимости, сублинейное изометричное непрерывное вложение, однородный функционал, сублинейный функционал.

Библиогр. 15 назв.

УДК 621.371.1

А. К. СТРОЕВ. **Моделирование сверхширокополосного радиолокатора, использующего двухполосный метод компенсации ионосферных искажений** (русский) // *Динамические системы*, 2017. — Том 7(35), №2. — С. 185–195.

Рассмотрена задача моделирования сверхширокополосной радиолокационной станции, предназначенной для наблюдения за космическими объектами. На построенной модели исследован двухполосный метод компенсации ионосферных искажений при наличии шума и доплеровского сдвига частоты

**Ключевые слова:** двухполосный метод, ионосфера, сверхширокополосная радиолокация.

Ил. 8. Библиогр. 5 назв.

## ABSTRACTS

MSC 2010: 37C05, 37D15

A. DOLGONOSOVA, E. NOZDRINOVA, O. POCHINKA. **On obstructions to the existence of a simple arc, connecting the multidimensional Morse-Smale diffeomorphisms** (English). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.2, 103–112 (2017).

In this paper we consider Morse-Smale diffeomorphisms defined on a multidimensional nonsimply connected closed manifold  $M^n$ ,  $n \geq 3$ . For such systems, the concept of trivial (nontrivial) connectedness of their periodic orbits is introduced. It is established that isotopic trivial and nontrivial diffeomorphisms can not be joined by an arc with codimension one bifurcations. Examples of such pair of Morse-Smale cascades on the manifold  $S^{n-1} \times S^1$  are constructed.

**Keywords:** Morse-Smale diffeomorphisms, bifurcation, smooth arc

Fig. 9. Ref. 10.

MSC 2010: 37B05

E. D. KURENKOV, K. A. RYAZANOVA. **On periodic translations on  $n$ -torus** (English). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.2, 113–118 (2017).

We consider periodic translations on  $n$ -torus and investigate the set of all conjugating homeomorphisms for topologically conjugated translations. It was shown by J. Nielsen [Dansk Videnskabernes Selskab. Math.-fys. Meddelelser, 1937, Vol.15, 1-77] that two periodic homeomorphisms of two-torus such that all points have the same period are topologically conjugate if and only if they have the same period. We consider the problem when two periodic translations on  $n$ -torus are topologically conjugate by means of toral automorphism. The main result is that two periodic translations on  $n$ -torus of the same period are topologically conjugate by means of countable family of toral automorphisms. Moreover, we show that for two periodic translations that are topologically conjugate each homotopy class in the set of all conjugating homeomorphisms contains continuum of homeomorphisms.

**Keywords:** topological conjugacy, toral automorphism, homotopy.

Ref. 4.

MSC 2010: 35K20, 35K59, 35Q60, 78A05, 37L10, 35R10, 35B32, 35B10, 35B35, 35C07, 35C20

YU. A. KHAZOVA. **Metastable structures in a parabolic problem with reflection of a spatial variable on a segment** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.2, 119–129 (2017).

The dynamics of stationary structures in a nonlinear optical resonator with the transformation of reflection is studied. The mathematical model of the system is a parabolic equation with the transformation of reflection by a spatial variable and the conditions of periodicity. The evolution of forms and the stability of structures with decreasing diffusion coefficient are investigated. The Galerkin's method is used. A wide range of saddle-node bifurcations and metastable structures is realized.

**Keywords:** parabolic problem, the existence of solutions, metastable structures, bifurcation, stability, Galerkin's method.

Fig. 4. Ref. 14.

MSC 2010: 74P05, 74C15, 65H05, 90C05

V. V. CHEKHOV. **Geometrically and physically nonlinear optimization problem for the 3-bar truss** (English). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.2, 131–148 (2017).

The analysis and optimal design problems are considered for the statically loaded symmetric 3-bar truss with taking into account material nonlinearity and finite deformation. The strain compatibility

condition as well as the relationship between the cross-sectional areas of bars and the stress levels in them was derived for the finite deformation. It is shown that even though the problem of analysis of the truss is a nonlinear one, the optimization problem is a linear programming problem. Properties of optimal designs are compared using various structural alloys.

**Keywords:** symmetric 3-bar truss, physical nonlinearity, geometrical nonlinearity, optimal design problem.

Fig. 6. Tbl. 6. Ref. 13.

MSC 2010: 47H04, 54C65, 46B22, 49N45, 47N10

E. M. KUZMENKO, S. I. SMIRNOVA. **Nonsmooth variational problems with a moving boundary via generalized Lagrange multipliers method** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.2, 149–156 (2017).

The Lagrange multiplier method is generalized to the case of a conditional extremum of the sub-smooth functional with a sub-smooth constraint condition. Our approach is based on the recently proposed in the works by I.V. Orlov a sub-smooth form of the inverse and implicit functions, as well as on the operator base of these results, described in the works by I.V. Orlov and S.I. Smirnova. The above results made it possible to extend the Lagrange multiplier method to the case of a nonsmooth conditional extremum, which is the content of the first part of the paper. The second part of the paper is devoted to nonsmooth variational functionals and is based on the theory of strong subdifferentiable functionals, considered in the works by I.V. Orlov, and also on the methods of investigating the nonsmooth variational functionals described in the joint textbook by I.V. Orlov, F.S. Stonyakin and S.I. Smirnova. Here we obtain the generalized transversality condition, which we have already considered earlier in a more particular case, as well as the examples of its application. In particular, the “quasiclassical” case is noted as the simplest example, when a smooth condition on a moving boundary is combined with a nonsmooth integrand of the variational functional.

**Keywords:** nonsmooth variational problems, moving boundary, strong subdifferentials, Lagrange multiplier method.

Ref. 13.

MSC 2010: 34A09, 65L07

A. YU. PEREVARYUKHA. **Delay in the regulation of population dynamics — cellular automaton model** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.2, 157–165 (2017).

The article discusses the technique of mathematical formalization delayed regulation of biological processes. The modification of the differential equation proposed by us earlier for a specific variant of development of the population process is compared with analogues. The use of population models with deviating argument  $\dot{x} = rv(x)f(x(t-\tau))$  in some cases, contradictory to the experimental results. The problem of the intrinsic interpretation of the value  $\tau$  in the context of the causes of its appearance is considered. To demonstrate the evolution of the situation with a complex of realistic factors of temporary aftereffect, an algorithm for a cellular automaton with a ternary cell state is proposed. The cell state transformation algorithm shows that, to a much greater degree, the delay formalized in the Hutchinson equations and “blowfly’s equation” refers to the interaction dynamics of the species and the supporting environment of the medium, which can not be expressed by a constant parameter. The action of delay in a very abstract sense can be identified with a directly characteristic of a biological species. The diffusion component in the modifications of these equations is more logically to represent by the time-dependent response of the systems.

**Keywords:** delay equations, critical scenarios of population dynamics, regulation mechanism, cellular automaton.

Fig. 2. Ref. 18.

MSC 2010: 46A22, 46A20, 46B10

F. S. STONYAKIN, A. S. ANDREENKOVA. **Theorems on functional separability in a special class of normed cones** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.2, 167–184 (2017).

The paper is devoted to some problems of analysis in a special class of strict convex normed cones (SCNC), which was recently introduced by the first author. We show the metrizable of each SCNC and the existence of a sublinear isometric continuous embedding in some normed space. An illustrative example of the corresponding topology is constructed. The possibility of generalizing theorems on the functional separability of convex closed subsets on the class of SCNC using both linear and nonlinear functionals is investigated.

**Keywords:** strict convex normed cone, homogeneous metric, theorem on functional separability, sublinear isometric continuous embedding, homogeneous functional, sublinear functional.

Ref. 15.

MSC 2010: 00A71

A. K. STROEV. **Simulation of ultrawideband radar using a two-band ionospheric distortion compensation method** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.2, 185–195 (2017).

The problem of modelling an ultrawideband radar for observation of space objects is studied. On the constructed model, a two-band method of ionospheric distortion compensation in the presence of noise and Doppler frequency shift is investigated.

**Keywords:** two-band method, ionosphere, ultrawideband radar.

Fig. 8. Ref. 5.

# Dinamicheskie sistemy (Dynamical Systems)

---

Volume 7(35) no.2

2017

---

## Table of Contents

A. DOLGONOSOVA, E. NOZDRINOVA, O. POCHINKA. On obstructions to the existence of a simple arc, connecting the multidimensional Morse-Smale diffeomorphisms	103
E. D. KURENKOV, K. A. RYAZANOVA. On periodic translations on $n$ -torus	113
YU. A. KHAZOVA. Metastable structures in a parabolic problem with reflection of a spatial variable on a segment	119
V. V. CHEKHOV. Geometrically and physically nonlinear optimization problem for the 3-bar truss	131
E. M. KUZMENKO, S. I. SMIRNOVA. Nonsmooth variational problems with a moving boundary via generalized Lagrange multipliers method	149
A. YU. PEREVARYUKHA. Delay in the regulation of population dynamics — cellular automaton model	157
F. S. STONYAKIN, A. S. ANDREENKOVA. Theorems on functional separability in a special class of normed cones	167
A. K. STROEV. Simulation of ultrawideband radar using a two-band ionospheric distortion compensation method	185

Подписано в печать 14.09.2017. Формат 60x84/8.  
Усл. печ. л. 11, 63. Тираж 50 экз. Заказ № НП/157.  
Бесплатно. Дата выхода в свет 01. 03. 2018.  
Отпечатано в управлении редакционно-издательской  
деятельности КФУ имени В. И. Вернадского  
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7.