Динамические системы, 2017, том 7(35), №2, 167–184

УДК 517.98

Теоремы о функциональной отделимости в специальном классе нормированных конусов[1]

Ф. С. Стонякин, А. С. Андреенкова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: fedyor@mail.ru*

Аннотация. Работа посвящена некоторым проблемам анализа в специальном классе строгих выпуклых нормированных конусов (СВНК), который недавно был введён первым автором. Показана метризуемость всякого СВНК и существование сублинейного изометричного непрерывного вложения в некоторое нормированное пространство. Построен иллюстрирующий пример соответствующей топологии. Исследована возможность обобщения теорем о функциональной отделимости выпуклых замкнутых подмножеств на класс СВНК с использованием как линейных, так и нелинейных функционалов.

Ключевые слова: строгий выпуклый нормированный конус, однородная метрика, теорема о функциональной отделимости, сублинейное изометричное непрерывное вложение, однородный функционал, сублинейный функционал.

Theorems on functional separability in a special class of normed cones

F. S. Stonyakin, A. S. Andreenkova

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. The paper is devoted to some problems of analysis in a special class of strict convex normed cones (SCNC), which was recently introduced by the first author. We show the metrizability of each SCNC and the existence of a sublinear isometric continuous embedding in some normed space. An illustrative example of the corresponding topology is constructed. The possibility of generalizing theorems on the functional separability of convex closed subsets on the class of SCNC using both linear and nonlinear functionals is investigated.

Keywords: strict convex normed cone, homogeneous metric, theorem on functional separability, sublinear isometric continuous embedding, homogeneous functional, sublinear functional.

MSC 2010: 46A22, 46A20, 46B10

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук, проект МК-176.2017.1

Введение

В последние десятилетия активно развивается теория так называемых абстрактных выпуклых нормированных конусов (см., например, [3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 15]). Напомним, что *абстрактными выпуклыми конусами* или *выпуклыми конусами* называют набор элементов X с заданными операциями сложения, а также умножения на неотрицательный скаляр, причём X — коммутативная полугруппа по сложению и для произвольных чисел $\lambda, \mu \geq 0$, а также элементов $x, y \in X$ верны соотношения:

$$1 \cdot x = x; \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x); \quad 0 \cdot x = 0; \quad \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \quad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x.$$

Попутно, как правило, также требуется выполнение так называемого *закона сокращения*: $x+y = y+z$ верно тогда и только тогда, когда $x = z$. Только при выполнении этого условия выпуклый конус X линейно инъективно вложен в некоторое линейное пространство.

Выпуклыми конусами будут, в частности, наборы векторов с неотрицательными координатами, наборы неотрицательных функций, неубывающих функций с естественными операциями сложения и умножения на скаляр, а также наборы выпуклых компактов банахова пространства со сложением по Минковскому. В некоторых выпуклых конусах X возможно ввести аналог нормы $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$:

$$||x|| \geq 0, \; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \; ||\lambda x|| = \lambda||x||; \; ||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \tag{0.1}$$

для всяких $x, y \in X$ и произвольного $\lambda \geq 0$. Всюду далее будем называть такие структуры *нормированными конусами.*

Вообще говоря, даже в случае выполнения закона сокращения норма в конусе может не быть следом обычной нормы (или полунормы) некоторого линейного пространства. В частности, это выполняется для каждого линейного пространства с так называемой *несимметричной нормой* (см., например, [1, 2]). Отметим приложения несимметрично нормированных пространств к некоторым проблемам теоретической информатики [3, 11, 13], а также теории приближений [7, 9].

В настоящей работе мы получаем новые теоремы о функциональной отделимости точек и множеств в специальном классе абстрактных выпуклых конусов с нормой. Заметим, что в [5, 10, 12, 13, 15] рассмотрены некоторые теоремы о функциональной отделимости точек и множеств в специальных классах нормированных конусов с использованием лишь *неотрицательных монотонных* линейных функционалов (см., например, [2, 10, 12, 13, 15]). Однако этот подход приводит к некоторым проблемам. В частности, такие функционалы могут не отделять точки нормированного конуса [10].

Мы в [14] предлагаем рассматривать более широкий класс неотрицательных линейных функционалов и вводим сопряженный конус (определение 4) как набор линейных ограниченных функционалов, неотрицательных в некоторых ненулевых точках. Такой подход позволил доказать существование сублинейного изометричного вложения в линейное нормированное пространство в достаточно широком классе нормированных конусов.

Многие результаты теории выпуклых нормированных конусов связаны с возможностью их наделения метрической структурой (метрикой или некоторым ее аналогом). Отметим известную теорему J. Radstrom [8] о линейном изометричном вложении конуса в нормированное пространство с однородной метрикой, инвариантной относительно сдвигов $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$:

$$d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x, y) \quad d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \forall\, x, y, z \in X, \lambda \geq 0.$$

В недавних работах [2, 4, 10] показано, что в нормированных конусах можно ввести так называемую *квазиметрику* $q : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, которая может быть несимметричной (как правило, $q(x, y) \neq q(y, x)$). Отметим, что возможно либо $q(x, y) = +\infty$, либо $q(x, y) = 0$ для некоторых $x \neq y$. Заметим, что такая квазиметрика однородна и *субинвариантна относительно сдвигов* (см., например, [2, 4, 10]):

$$q(x + z, y + z) \leq q(x, y) \quad \forall\, x, y, z \in X. \tag{0.2}$$

Наша работа основана на [14], где был доказан аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении функционала в абстрактных выпуклых конусах и рассмотрены некоторые его приложения. В частности, в ([14], см. раздел 4) был выделен специальный класс *строгих выпуклых нормированных конусов* СВНК и доказано существование сублинейного инъективного изометричного вложения всякого СВНК в банахово пространство E.

В настоящей работе на базе полученной в [14] для специального класса *строгих выпуклых нормированных конусов* теоремы о функциональной отделимости точек (теорема 1) вводится специальная конечная однородная метрика $d_* : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Используя эту метрику, мы доказываем аналог теоремы J. Radstrom о существовании *сублинейного* изометричного непрерывного вложения всякого строго выпуклого нормированного конуса СВНК в линейное нормированное пространство (см. теорему 3). Вообще говоря, линейность такого вложения невозможна (см. замечание 6). На базе теоремы 3 нами исследована возможность обобщения теорем о функциональной отделимости для выпуклых замкнутых в классе СВНК. Напомним несколько вспомогательных понятий из [14].

Определение 1. Будем говорить, что X — строгий конус, если выполняется следующее свойство:

$$x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0 \text{ для всех } x, y \in X. \tag{0.3}$$

В каждом строгом выпуклом конусе X мы можем рассмотреть следующий частичный порядок [14]:

$$x \preceq y \text{ если } y = x + z \text{ для некоторого } z \in X. \tag{0.4}$$

Теперь напомним свойство порядковой отделимости для строгих выпуклых конусов и понятие строгого выпуклого нормированного конуса СВНК, рассмотренные нами в [14].

Определение 2. Будем говорить, что X порядково отделим, если для всяких $x, y \in X$:

$$\alpha x \preceq y \preceq \beta x \text{ для всех } \alpha < 1 < \beta \Rightarrow y = x. \tag{0.5}$$

Определение 3. Абстрактный выпуклый конус X называется строгим выпуклым нормированным конусом СВНК, если X — порядково отделимый выпуклый нормированный конус с законом сокращения и для всех $x, y \in X$:

$$x \preceq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|. \tag{0.6}$$

Приведём пример СВНК, не вложенного линейно изометрично ни в какое нормированное пространство (см. [14], пример 8).

Пример 1. Рассмотрим набор числовых пар

$$X_2 = \{(a, b) \,|\, a, b \geq 0 \text{ и } a = 0 \Rightarrow b = 0\}$$

с нормой $||(a, b)|| := a$.

Единичный шар с центром в нуле в этом случае принимает вид, указанный на рисунке 1.

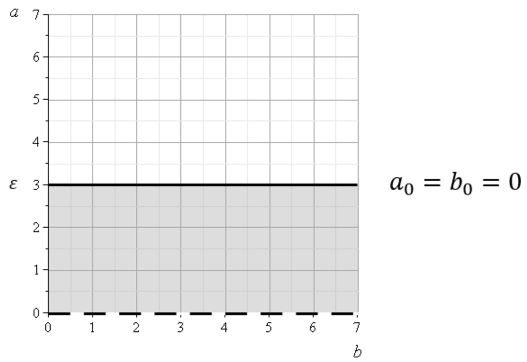

Рисунок 1.

1. Функциональная отделимость точек в нормированных конусах

Напомним полученный в [14] аналог теоремы Хана-Банаха о функциональной отделимости точек в классе СВНК. Для нормированных конусов в [14] введен следующий аналог понятия сопряжённого пространства.

Определение 4. Через X^* будем обозначать набор линейных функционалов $\ell : X \to \mathbb{R}$, принимающих неотрицательное значение хотя бы в одной точке $x_0 \neq 0$ и ограниченных по полунорме

$$\|\ell\|_* := \sup_{x \neq 0} \frac{\ell(x)}{\|x\|}.$$

Оказывается, возможно привести пример нормированного конуса X, для которого $\ell(x_1) = \ell(x_2)$ при всяком $\ell \in X^*$ для различных x_1, $x_2 \in X$. Для построения этого примера и других вопросов мы будем использовать следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Всякий линейный функционал* $\ell : X_2 \to \mathbb{R}$, *где*

$$X_2 = \{(a, b) \,|\, a, b \geq 0 \ \text{и}\ a = 0 \Rightarrow b = 0\}$$

имеет вид

$$\ell((a, b)) = \lambda a + \mu b. \tag{1.1}$$

для некоторых констант λ *и* μ.

Если мы рассмотрим норму $\|(a, b)\| := a$ *на* X_2, *то сопряженный конус к* X_2 *имеет вид:*

$$X_2^* = \{\ell((a; b)) = \lambda a + \mu b \,|\, \lambda \geq 0, \mu \leq 0\}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Во-первых, всякий функционал ℓ положительно однороден:

$$\ell(\lambda(a, b)) = \lambda\ell((a, b)) \ \forall\lambda \geq 0. \tag{1.3}$$

Если мы возьмем некоторую пару $x_0 = (a_0, b_0) \in X_2$, то в направлении луча $\{\lambda x_0\}_{\lambda\geq 0}$ имеем для $x_0 \neq (0, 0)$:

$$\ell(\lambda x_0) < 0 \ \forall\lambda > 0, \ \text{или} \quad \ell(\lambda x_0) > 0 \ \forall\lambda > 0,$$
$$\text{или}\ \ell(\lambda x_0) = 0 \ \forall\lambda \geq 0. \tag{1.4}$$

Если (1.4) верно, то $\{\lambda x_0\}_{\lambda\geq 0}$ назовем *нейтральным лучом* для ℓ.

a) Если $\ell \not\equiv 0$, то не существует более одного нейтрального луча. Действительно, если существует два различных нейтральных луча p_1 и p_2, то для всякой пары $x = (a, b)$ имеем $\ell(x) = 0$ в конусе K_0 (см. рис. 2), ограниченный лучами p_1 и p_2.

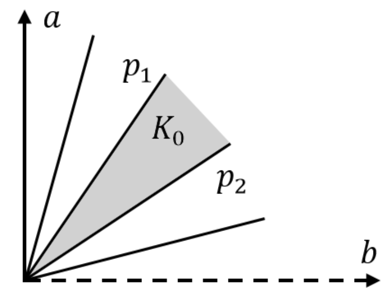

Рисунок 2. "Два нейтральных луча".

Из линейности ℓ имеем, что ℓ принимает нулевое значение во всех точках конусов, симметричных к K_0 относительно p_1 и p_2. Возможно покрыть конус X_2 конечным множеством таких конусов как K_0, т.е. $\ell \equiv 0$.

b) Если один нейтральный луч существует для ℓ, то в точках лучей, параллельных этому лучу, функционал ℓ принимает постоянные значения (см. рис. 3), т.е. ℓ задается в виде (1.1).

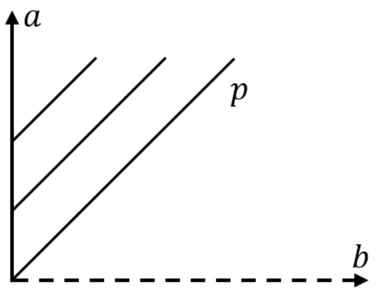

Рисунок 3. "Один нейтральный луч".

c) Если для ℓ нет нейтральных лучей в X_2, то на всех лучах, заданных в виде $\{\lambda x_0\}_{\lambda \geq 0}$ $(x_0 \neq (0,0))$ ℓ принимает либо положительные, либо отрицательные значения. Возьмем следующие три луча p_1, p_2 и p_3 (см. рис. 4) и выберем такие точки x, y и z на них, что $\ell(x) = \ell(y) = \ell(z) \neq 0$. Это может быть достигнуто ввиду однородности функционала ℓ.

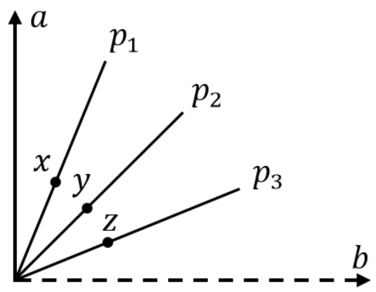

Рисунок 4. "Три луча".

Очевидно, что $y = \lambda_1 x + \lambda_2 z$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Тогда

$$\ell(y) = \lambda_1 \ell(x) + \lambda_2 \ell(z) = (\lambda_1 + \lambda_2)\ell(y),$$

откуда $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, поскольку $\ell(y) \neq 0$. Это означает, что x, y и z лежат на одной прямой. Следовательно, для каждого $C \neq 0$ множества, заданные в виде $\{x \in X_2 \,|\, \ell(x) = C\}$ являются частями параллельных прямых, т.е. ℓ задается в виде (1.1).

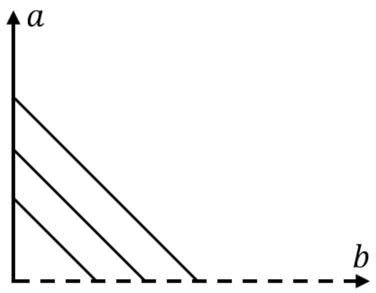

Рисунок 5. "Нет нейтрального луча".

Случай $\ell \equiv 0$ тривиален.

Условие $\ell \in X_2^*$ означает, что $\lambda a + \mu b \leq Ca$ для всех $(a, b) \in X$ и для некоторого числа $C > 0$. Ясно, что для всех $\mu > 0$ можно выбрать достаточно большое $b > 0$, для которого неравенство $\lambda a + \mu b \leq Ca$ нарушается. Аналогично, для $\lambda < 0$ $\ell \notin X_2^*$. Следовательно, (1.2) выполняется. □

Приведём теперь пример выпуклого нормированного конуса, где линейные полуограниченные функционалы могут не разделять точки.

Пример 2. Пусть $X = X_2' = \{(a, b) \,|\, a \geq 0, b \in \mathbb{R}; a = 0 \Rightarrow b = 0\}$. Норма на X_2' вводится следующим образом $||(a, b)|| = a$.

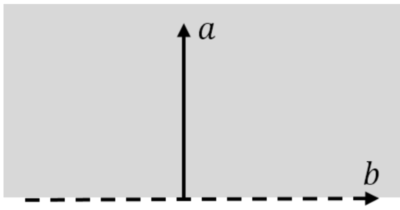

Рисунок 6. "Конус X_2'".

По лемме 1 для каждого линейного функционала $\ell : X_2' \to \mathbb{R}$ $\ell((a, b)) = \lambda a + \mu b$ для некоторых фиксированных λ и μ. Поскольку $a \neq 0$ и b может быть произвольным числом, условие ограниченности

$$\ell((a, b)) = \lambda a + \mu b \leq Ca$$

для некоторого $C > 0$ означает $\mu = 0$ (в противном случае неравенство не выполняется при соответствующем выборе b). Очевидно, функционалы вида $\ell((a, b)) = \lambda a$ не разделяют точки X_2'.

Замечание 1. Конус X_2' эквивалентен следующему конусу

$$X_2' = \{[\alpha; \beta] \,|\, \alpha < \beta;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \bigcup \{0\}.$$

с нормой

$$||[\alpha; \beta]|| = \beta - \alpha \in X_2'.$$

Приведённые примеры показывают, что для выполнения функциональной отделимости элементов нормированного конуса необходимо ввести некоторые дополнительные требования и рассматривать соответствующий подкласс нормированных конусов. Примером такого подкласса может служить, например, введённый в [14] класс строгих выпуклых нормированных конусов СВНК. В завершении данного пункта напомним несколько вспомогательных результатов из [14].

Теорема 1. *Пусть X — СВНК. Тогда для всех $x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in X)$ существует функционал $\ell \in X^* \backslash 0$, такой что $\ell(x_1) \neq \ell(x_2)$ и $\ell(x_1) > 0$ или $\ell(x_2) > 0$.*

Замечание 2. Отметим, что в выпуклом нормированном конусе из примера 2 (для которого не выполнено свойство функциональной отделимости точек) справедливы все аксиомы СВНК, кроме (0.5). Для того, чтобы проверить этот факт, достаточно рассмотреть пары $x = (1, 1)$ и $y = (1, 0)$.

Для произвольного линейного функционала $\ell \in X^*$ рассмотрим следующий ограниченный функционал:

$$p_\ell(x) = max\{0, \ell(x)\}. \tag{1.5}$$

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть X — СВНК. Тогда для всех $x_0, x_{1,} x_2 \in X$:*

(i) если $x_0 \neq 0$, то существует $\ell \in X^* \backslash 0$, такой что $\|\ell\|_* = 1$ и $p_\ell(x_0) = \|x_0\|$;

(ii) если $x_1 \neq x_2$ то существует функционал $\ell \in X^* \backslash 0$ такой, что $p_\ell(x_1) \neq p_\ell(x_2)$.

Замечание 3. Аналогичный утверждению (i) теоремы 2 результат известен в специальном классе нормированных конусов X для неотрицательных линейных функционалов $f : X \to \mathbb{R}$ (см. [13], теорема 2.14). Однако, вообще говоря, неравенство $f(x_0) = \|x_0\|$ невозможно (см. замечание после теоремы 2.14 в [13]). Отметим, что условие $\ell(x_0) = p_\ell(x_0) = \|x_0\|$ в утверждении (i) теоремы 2 существенно для некоторых базовых результатов (например, для теорем 1 и 3).

2. Метризуемость строгих выпуклых нормированных конусов

Переходим к изложению полученных нами результатов.

С использованием теорем 1 и 2 мы доказываем теорему о непрерывном вложении произвольного строгого выпуклого нормированного конуса в нормированное пространство (см. теорему 3 далее). Для этого введём аналог второго сопряжённого пространства в рассматриваемом нами классе СВНК. Из теоремы 2(ii) следует, что функционалы вида (1.5) разделяют точки всякого СВНК X. Обозначим через X^*_{sub} наименьший выпуклый конус, содержащий все функционалы вида (1.5). X^*_{sub} будем называть субсопряженным конусом к X. На X^*_{sub} естественно можно ввести норму:

$$||p||_* := \sup_{x \in X \backslash \{0\}} \left\{ \frac{p(x)}{||x||} \right\} \ \forall p \in X^*_{sub}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим теперь набор линейных функционалов $\psi : X^*_{sub} \to \mathbb{R}$ с естественными операциями сложения и умножения на скаляр:

$$[\psi_1 + \psi_2](p) := \psi_1(p) + \psi_2(p); \ [\lambda\psi](p) := \lambda\psi(p)$$

для любых линейных функционалов $\psi, \psi_{1,2} : X^*_{sub} \to \mathbb{R}$, произвольного скаляра $\lambda \in \mathbb{R}$ и $p \in X^*_{sub}$. Будем называть сопряженным пространством к X^*_{sub} набор линейных функционалов $\psi : X^*_{sub} \to \mathbb{R}$ относительно нормы

$$||\psi||_{**} := \sup_{p \in X^*_{sub} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{|\psi(p)|}{||p||_*} \right\} = \sup_{p:||p||_*=1} |\psi(p)|.$$

Указанное пространство $(X^*_{sub})^* =: X^{**}$ будем называть вторым сопряженным к СВНК X. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Во всяком СВНК X существует однородная метрика $d_* : X \times X \to \mathbb{R}$ такая, что $d_*(0, x) = \|x\|$ $\forall x \in X$ и X сублинейно, инъективно, изометрично и d_*-непрерывно вложен во второе сопряженное пространство X^{**}.*

Замечание 4. Отметим, что возможно ввести еще одну метрику $d_\circ : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$d_\circ(x, y) = \sup_{\ell \in X^*:||\ell||_*=1} |\max\{0, \ell(x)\} - \max\{0, \ell(y)\}| \leq d_*(x, y),$$

где X^* — сопряженный конус к СВНК X (см. определение 4 выше).

Замечание 5. Система d_*-окрестностей (и $d_\circ$-окрестностей) точек в СВНК X определяется следующим естественным образом ($x \in X$, $\varepsilon > 0$):

$$O_\varepsilon(x) = \{y \in X \,|\, d_*(x, y) \leq \varepsilon\}; \tag{2.2}$$

$$O^\circ_\varepsilon(x) = \{y \in X \,|\, d_\circ(x, y) \leq \varepsilon\}. \tag{2.3}$$

Очевидно, для каждого $x \in X$ и $\varepsilon > 0$

$$O_\varepsilon(x) \subset O^\circ_\varepsilon(x), \quad O_\varepsilon(0) = O^\circ_\varepsilon(0) = \{x \in X \,|\, \|x\| \leq \varepsilon\}. \tag{2.4}$$

Теперь проиллюстрируем $d_\circ$-окрестности точек $x \in X$ в нормированном конусе из примера 1.

Пример 3. Рассмотрим СВНК

$$X_2 = \{(a, b) \,|\, a, b \geq 0 \text{ и } a = 0 \Rightarrow b = 0\}$$

с нормой $||(a, b)|| := a$. По лемме 1 всякий линейный функционал $f : X \to \mathbb{R}$ имеет вид $f((a, b)) = \lambda a + \mu b$, где $\lambda \geq 0$ и $\mu \leq 0$ — фиксированные константы:

$$X^* = \{\ell((a; b)) = \lambda a + \mu b \,|\, \lambda \geq 0, \mu \leq 0\}. \tag{2.5}$$

Таким образом,

$$||\ell||_* = ||\max\{0, \ell(\cdot)\}||_{X^*_{sub}} = \sup_{a=1} \frac{\ell((a; b))}{a} = \sup_{b \geq 0} \frac{\lambda a + \mu b}{a} = \sup_{b \geq 0} \left(\lambda + \mu \frac{b}{a}\right) = \lambda,$$

т.е. $||\ell||_* = 1 \Longleftrightarrow \ell((a;b)) = a+\mu b$ для некоторого $\mu \leq 0$. Таким образом, следующее равенство верно

$$d_\circ(A,B) = \sup_{\mu\leq 0} |\max\{0, a_1+\mu b_1\} - \max\{0, a_2+\mu b_2\}|, \tag{2.6}$$

где $A=(a_1,b_1)$, $B=(a_2,b_2)\in X = X_2$.

Положим

$$g(A,B,\mu) := \max\{0, a_1+\mu b_1\} - \max\{0, a_2+\mu b_2\}.$$

Если $a_{1,2}\neq 0$ и $b_{1,2}\neq 0$, тогда возможны следующие случаи:

1) $g(A,B,\mu) = a_1 - a_2 + \mu(b_1-b_2)$ для $\mu \geq \max\left\{-\frac{a_1}{b_1}; -\frac{a_2}{b_2}\right\}$;

2) $g(A,B,\mu) = a_1+\mu b_1$ для $-\frac{a_1}{b_1}\leq \mu \leq -\frac{a_2}{b_2}$;

3) $g(A,B,\mu) = -(a_2+\mu b_2)$ for $-\frac{a_2}{b_2}\leq \mu \leq -\frac{a_1}{b_1}$;

4) $g(A,B,\mu) = 0$ в противном случае.

Легко видеть, что для фиксированных A и B функция $|g(A,B,\mu)|$ достигает своего максимума на $\alpha\leq\mu\leq\beta$ только для $\mu=\alpha$ или для $\mu=\beta$. Отсюда, в случае $-\frac{a_1}{b_1}\leq -\frac{a_2}{b_2}$ наибольшее возможное значение $|g(A,B,\mu)|$ может быть одним из следующих чисел:

$$|a_1-a_2|,\ a_2 - \frac{a_2}{b_2}b_1 = \frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_2},$$

$$\left|a_1-a_2-\frac{a_2}{b_2}(b_1-b_2)\right| = \left|a_1-a_2-\frac{a_2}{b_2}b_1+a_2\right| = \left|\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_2}\right| = \frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_2},$$

и для $\frac{a_1}{b_1}\geq\frac{a_2}{b_2}$ $(b_1,b_2\neq 0)$ имеем

$$d_\circ(A,B) = \max\left\{|a_1-a_2|, \frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_2}\right\}.$$

Аналогично, для $\frac{a_2}{b_2}\geq\frac{a_1}{b_1}$ $(b_1,b_2\neq 0)$ имеем

$$d_\circ(A,B) = \max\left\{|a_1-a_2|, \frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1}\right\}.$$

Таким образом, для $b_1,b_2>0$ (и отсюда $a_1,a_2>0$)

$$d_\circ(A,B) = \max\left\{|a_1-a_2|, \frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1}, \frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_2}\right\}. \tag{2.7}$$

Для $b_1 = 0$ имеем $d_\circ(A, B) = \sup\limits_{\mu \le 0} |\max\{0, a_2 + \mu b_2\} - a_1|$. Для $b_2 > 0$ и $\mu \le -\frac{a_2}{b_2}$ имеем $|\max\{0, a_2 + \mu b_2\} - a_1| = a_1$; для $\mu \ge -\frac{a_2}{b_2}$ выполнено следующее отношение:

$$|\max\{0, a_2 + \mu b_2\} - a_1| = |a_2 - a_1 + \mu b_2| \le \max\{a_1, |a_1 - a_2|\}.$$

В случае $b_1 = b_2 = 0$ $d_\circ(A, B) = |a_1 - a_2|$. Таким образом, выполнено следующее отношение:

$$d_\circ(A, B) = \begin{cases} \max\{a_1, |a_1 - a_2|\}, \text{ для } b_1 = 0, b_2 > 0; \\ \max\{a_2, |a_1 - a_2|\}, \text{ для } b_1 > 0, b_2 = 0; \\ |a_1 - a_2|, \text{ для } b_1 = b_2 = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Вышеуказанные соотношения (2.7) и (2.8) позволяют нам явно описать $d_\circ$-окрестности любого элемента $A_0 = (a_0, b_0) \in X_2$:

$$O^\circ_\varepsilon(A_0) = \{A = (a, b) \in X \mid d_\circ(A, A_0) \le \varepsilon\}. \tag{2.9}$$

Если $b_0 > 0$ то $A = (a, b) \in O^\circ_\varepsilon(A_0)$ для $b > 0$, если выполняются следующие неравенства

$$\begin{cases} a_0 - \varepsilon \le a \le a_0 + \varepsilon, \\ a - \frac{a_0}{b_0} b \le \varepsilon, \\ a_0 - \frac{a}{b} b_0 \le \varepsilon, \end{cases}$$

что для достаточно маленького $\varepsilon > 0$ задает трапецию (см. Рис. 7).

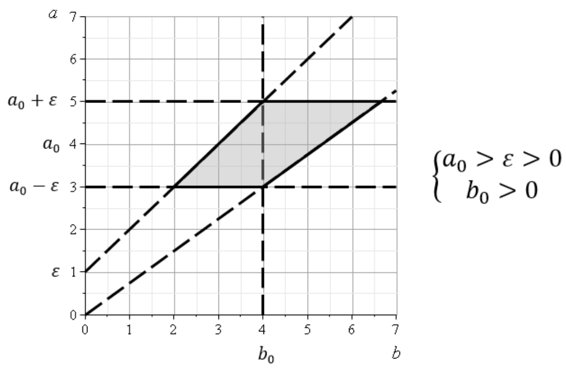

Рисунок 7.

Кроме этого множества $d_\circ$-окрестность будет также включать в себя точки вида

$$A = \{(a, 0) : \max\{a_0, |a - a_0|\} \le \varepsilon\},$$

то есть, для $a_0 \le \varepsilon$ это отношение будет удовлетворять всем $a : |a - a_0| \le \varepsilon$. Таким образом, если $a_0 \le \varepsilon$ то $d_\circ$-окрестность $A_0 = (a_0, b_0)$ будет иметь форму, показанную на Рис. 8. Как можно видеть, эта окрестность — невыпуклое множество.

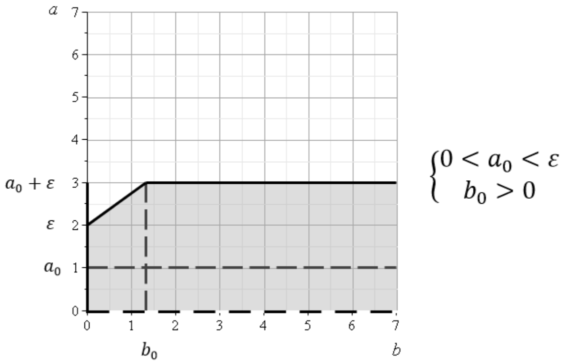

Рисунок 8.

Соотношения (2.8) позволяют нам определить $d_\circ$-окрестность $A_0 = (a_0, 0)$. Если $0 < a_0 \leq \varepsilon$, то такая окрестность будет иметь форму полосы (см. Рис. 9), как в случае $a_0 = 0$ (см. Рис. 1).

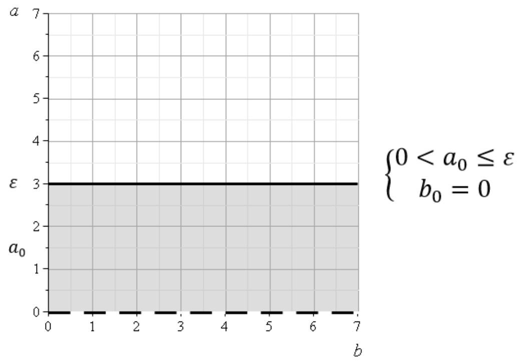

Рисунок 9.

Если $a_0 > \varepsilon$ то $d_\circ$-окрестность имеет форму следующего отрезка (см. Рис. 10)

$$\{(a, 0) \,|\, a_0 - \varepsilon \leq a \leq a_0 + \varepsilon\}.$$

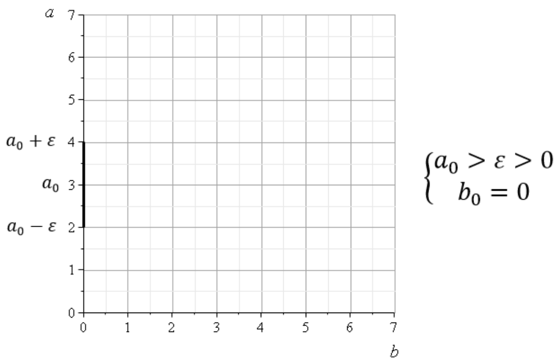

Рисунок 10.

Замечание 6. Вообще говоря, метрики d_* и $d_\circ$ не субинвариантны относительно сдвигов (см. (0.2)). Действительно, для $y \in X_2$ возможно $O_\varepsilon(y) \subset y + O_\varepsilon(0)$ (см. пример 3, рис. 8). Если $x \in O_\varepsilon(0)$ (т.е. $\|x\| < \varepsilon$) и $x + y \notin O_\varepsilon(y)$, тогда

$$\|x\| = d_*(x,0) = d_\circ(x,0) < d_\circ(x+y,y) \le d_*(x+y,y).$$

3. Теоремы о функциональной отделимости множеств в строгих выпуклых нормированных конусах

Теорема 3 указывает на возможность переноса в класс СВНК классических результатов анализа в банаховых пространствах. В данном пункте работы мы рассмотрим аналоги теоремы Хана-Банаха о функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества в классе СВНК. Сохраняя обозначения предыдущих пунктов, напомним, что отношения частичного порядка $\preceq$ вводится в X^{**} так:

$$\forall \psi_{1,2} \in X^{**}\ \psi_1 \preceq \psi_2 \Leftrightarrow \psi_1(p) \le \psi_2(p)\ p \in X^*_{sub}. \tag{3.1}$$

Наши рассуждения основаны на существовании сублинейного инъективного изометричного и d_*-непрерывного вложения $\varphi : X \to X^{**}$ (см. теорему 3 выше). Сублинейность здесь мы понимаем в следующем смысле:

$$\varphi(x_1 + x_2) \preceq \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Нелинейность вложения φ порождает проблему описания свойств множества $\varphi(U) \subset X^{**}$ для $U \in X$, в частности, проверку свойства выпуклости $\varphi(U)$. Однозначно можно утверждать выпуклость $\varphi(U)$, если

а) U одноточечно;

б) $U = [\alpha;\beta]\cdot\{x\} = \{\lambda x \,|\, \alpha \le \lambda \le \beta;\ \alpha,\beta \ge 0\}\ \forall x \in X$;

в) $U = \{\lambda x \,|\, \alpha \le \lambda < +\infty\}\ \forall \alpha \ge 0, x \in X$.

Выделим класс подмножеств $U \subset X$ таких, что $\varphi(U)$ выпукло в X^{**}.

Определение 5. Будем говорить, что $U \subset X$ $*$-выпукло, если $\varphi(U)$ выпукло в пространстве X^{**}.

Простейшие примеры $*$-выпуклых множеств приведены выше. Введем также свойство $*$-замкнутости $U \subset X$, опираясь на метрику $d_* : X \times X \to \mathbb{R}$, существование которой обосновано в теореме 3.

Определение 6. Будем называть множество $U \subset X$ $*$-замкнутым, если U замкнуто в метрическом пространстве (X, d_*).

Пусть U — $*$-выпуклое и d_*-замкнутое множество в X, $x_0 \notin U$. Тогда

$$d_*(x_0, U) = \inf_{u \in U} d_*(x_0, u) = \varepsilon > 0.$$

Если $B = O_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) = \{\psi \in X^{**} \,|\, ||\psi|| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$ — замкнутый шар радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ с центром в 0 в пространстве X^{**}, то $(\varphi(x_0)+B) \cap (\overline{\varphi(U)}+B) = \emptyset$, где $\overline{\varphi(U)}$ — замыкание $\varphi(U)$ в пространстве X^{**}. Поэтому $\varphi(x_0) \notin \overline{\varphi(U)}, \overline{\varphi(U)}$ — замкнуто и выпукло в X^{**}. Это означает, что по стандартной теореме Хана-Банаха о функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества в нормированном пространстве $\exists \ell \in (X^{**})^* = X^{***} \setminus \{0\}$:

$$\ell(\varphi(x_0)) > \sup \ell(\overline{\varphi(U)}) = \sup \ell(\varphi(U)). \tag{3.2}$$

Рассмотрим функционал $\ell(\varphi(\cdot)) : X \to \mathbb{R}$. Для всякого

$$x \in X: \quad |\ell(\varphi(x))| \leq ||\ell||_{X^{***}} \cdot ||\varphi(x)||_{X^{**}} = ||\ell||_{X^{***}} \cdot ||x||$$

ввиду изометричности φ по теореме 3. Нетрудно также проверить однородность функционала $\ell(\varphi(\cdot)) : X \to \mathbb{R}$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 4. *Если множество $U \subset X$ $*$-выпукло и $*$-замкнуто, $x_0 \notin U$, то существует однородный ограниченный функционал $h : X \to \mathbb{R}$:*

$$h(x_0) > \sup h(U).$$

Замечание 7. Некоторой проблемой является описание $*$-выпуклых и $*$-замкнутых подмножеств X. В этом плане мы можем лишь привести примеры: $U = \{x_0\}$ и $U = [\alpha; \beta] \cdot \{x_0\}$ для всякого $x_0 \in X$ и $0 \leq \alpha \leq \beta$.

Сформулируем также естественное следствие из теоремы 4. Пусть

$$O_\varepsilon(x) = \{y \in X \,|\, d_*(x, y) \leq \varepsilon\}, \quad O_\varepsilon(U) = \bigcup_{u \in U} O_\varepsilon(U)$$

для всяких $x \in X$, $U \subset X$ и $\epsilon > 0$.

Следствие 1. *Если $U \subset X$ $*$-выпукло и $*$-замкнуто, а $x_0 \notin O_\epsilon(U)$, то существует однородный ограниченный функционал $h : X \to \mathbb{R}$:*

$$h(x_0) > \sup h(O_\varepsilon(U)).$$

Замечание 8. Нетрудно показать, что в теореме 4 и следствии 1 функционал h нельзя, вообще говоря, выбрать линейным и ограниченным по норме. Действительно, в СВНК $X_2 = \{(a,b) \,|\, a, b \geq 0 : a = 0 \Rightarrow b = 0\}$ с нормой $||(a,b)||_{X_2} = a$ множество $Q = \{(a,0) \,|\, a_0 - \varepsilon \leq a \leq a_0 + \varepsilon\}$ будет выпуклым, $*$-выпуклым, d_*-замкнутым (см. пример 3 из предыдущего пункта). По лемме 1 для всякого $\ell \in X_2^*$ $\ell((a,b)) = \lambda a + \mu b$ при $\lambda \geq 0, \mu \leq 0$. Тогда $\ell((a_0, b)) \leq \ell((a_0, 0)) \leq \sup \ell(Q)$, то есть $\ell((a_0, b)) > \sup \ell(Q)$ неверно ни при каком $\ell \in X_2^*$.

Замечание 9. Опираясь на пример 3, можно показать, что в случае невыпуклого множества $U \subset X$ функционал h, вообще говоря, нельзя выбрать сублинейным (выпуклым).

Тем не менее, возможно сформулировать аналог теоремы Хана-Банаха о функциональной отделимости точки и $*$-замкнутого выпуклого множества для линейных функционалов в специальном виде — с требованием $O_\varepsilon(0) \subset U$, где

$$O_\varepsilon(0) = \{x \in X \,|\, d_*(0, x) \le \varepsilon\} = \{x \in X \,|\, ||x|| \le \varepsilon\}.$$

Теорема 5. *Пусть U — $*$-замкнутое выпуклое множество в X, $O_\varepsilon(0) \subset U$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Если $x_0 \notin U$, то $\exists \ell \in X^*$:*

$$\ell(x_0) > \sup \ell(U).$$

Доказательство. Здесь рассуждения будут весьма близкими к стандартным. Рассмотрим функционал Минковского $p_U(x) = \inf\{\lambda \ge 0 \,|\, x \in \lambda^{-1}U\}$, который конечен для всякого $x \in X$ ввиду $O_\varepsilon \subset U$. Ясно, что $p_U(x) \le 1$ $\forall x \in U$ и $p_U(x_0) > 1$ ввиду $*$-замкнутости $U \subset X$. Также из $O_\varepsilon(0) \subset U$ следует $p_U(x) \le \frac{1}{\varepsilon}||x||_X$ для всякого $x \in X$. Если X — СВНК, то для множества $X_0 = \{\lambda x_0 \,|\, \lambda \ge 0\} \subset X$ и линейного функционала p_U на X_0 можно применить аналог теоремы Хана-Банаха о продолжении функционала из [14]. Из этого результата вытекает существование линейного функционала $\ell : X \to \mathbb{R}$: $\ell(x_0) = p_U(x_0)$ и $\ell(x) \le \frac{1}{\varepsilon}||x||_X$ $\forall x \in X$ (а также $\ell(x) \le p_U(x)$ $x \in X$). Ясно, что $\ell \in X^*$ и $\forall x \in U$ $\ell(x) \le p_U(x) \le 1$, а $\ell(x_0) = p_U(x_0) > 1$, то есть функционал ℓ — искомый. □

Замечание 10. Пример из замечания 8 указывает на существенность условия $O_\varepsilon(0) \subset U$. Даже если в обозначениях этого примера положить $U = (a_0, 0) + O_\varepsilon(0)$ для которых $a_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$, то для всякого $\ell \in X_2^*$ $\ell((a, b)) = \lambda a + \mu b$ при $\lambda \ge 0$ и $\mu \le 0$. Если $a < a_0 - \varepsilon$, то $\ell((a, b)) < \ell((a_0, 0)) \le \sup \ell(U)$ при всяком $b \ge 0$, хотя $(a, b) \notin U$, то есть неравенство из теоремы 5 не может быть выполнено ни при каком $\ell \in X^*$.

Заключение

В завершении отметим, что результаты работы могут быть обобщены на следующий класс выпуклых конусов с нормой.

Определение 7. Будем называть что абстрактный выпуклый конус X выпуклым упорядоченным нормированным конусом СВНК, если X есть строгий выпуклый порядково отделимый нормированный конус с законом сокращения и для всех $x \in X$:

$$x \ne 0 \Rightarrow inf\{\|y\| | x \preceq y\} > 0. \tag{3.3}$$

Замечание 11. Очевидно, (3.3) следует из (0.6). Следовательно, каждый СВНК является СВНК, но существуют СВНК без свойства (0.6). Пример такой структуры рассмотрен ниже.

Пример 4. Пусть X — множество пар неотрицательных чисел (a, b):

$$X = \{(0,0)\} \cup \{(a,b) \mid a > 0 \text{ и } b > 0\}.$$

Введем норму в X следующим образом:

$$||(a,b)|| = \max\left\{a, \frac{b^2}{a}\right\} \text{ для } a \neq 0 \text{ и } ||(0,0)|| = 0.$$

Ясно, что $||(a,b)|| = p_W((a,b))$, где $p_W(\cdot)$ — функционал Минковского множества W, ограниченный параболой $a = b^2$ и прямой линией $a = 1$ (см. Рис. 11).

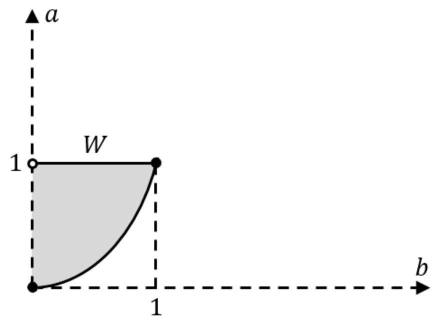

Рисунок 11.

Таким образом, $||\cdot||$ — выпуклый функционал на X. Покажем, что $||\cdot||$ может не быть полунормой в линейном пространстве $E \supset \varphi(X)$ для всякого линейного инъективного вложения $\varphi : X \to E$. Действительно, для пар $\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) + \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) = (1,1)$ имеем:

$$\left\|\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)\right\| = \frac{49}{8}, \ \left\|\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)\right\| = \frac{7}{8}, \ ||(1,1)|| = 1,$$

$$||(1,1)|| + \left\|\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)\right\| < \left\|\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)\right\|,$$

т.е. неравенство $||(a_1,b_1)|| + ||(a_1,b_1) + (a_2,b_2)|| \geq ||(a_2,b_2)||$ не выполняется.

Можно привести еще один пример выпуклого нормированного конуса, который линейно инъективно изометрично не вложен ни в какое линейное нормированное пространство.

Пример 5. Пусть X — множество пар неотрицательных чисел (a, b):

$$X = \{(0,0)\} \cup \{(a,b) \mid a > 0 \text{ и } b > 0\}.$$

Введем следующую норму на X:

$$||(a,b)|| = \max\left\{\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right\} \text{ для } a, b \neq 0 \text{ и } ||(0,0)|| = 0.$$

Ясно, что $||(a,b)|| = p_W((a,b))$, где $p_W(\cdot)$ — функционал Минковского множества W (см Рис. 12).

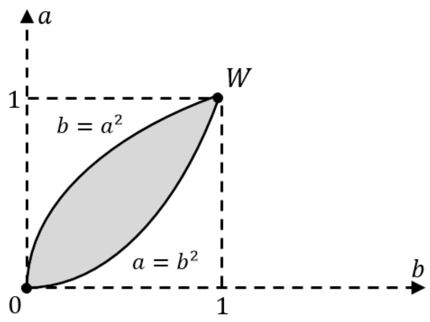

Рисунок 12.

Представляет интерес дальнейшее исследование свойств введённых классов нормированных конусов, а также их приложений в разных задачах анализа.

Список цитируемых источников

1. *Borodin P. A.* The Banach-Mazur Theorem for Spaces with Asymmetric Norm // Math. Notes. — 2001. — Vol. 69, no. 3. — P. 298–305.
2. *Cobzas S.* Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces. — Basel: Birkhauser/Springer, 2013. — 219 p.
3. *Garcia-Raffi L. M., Romaguera S., Sanchez-Perez E. A.* Sequence spaces and asymmetric norms in the theory of computational complexity // Math. Comput. Modelling. — 2002. — Vol. 36. — P. 1–11.
4. *Garcia-Raffi L. M., Romaguera S., Sanchez-Perez E. A., Valero O.* Metrizability of the unit ball of the dual of a quasi-normed cone // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. — 2004. — Ser. 8, Vol. 7-B, no. 2. — P. 483–492.
5. *Keimel K., Roth W.* Ordered cones and approximation. Lecture Notes in Math, 1517. — Berlin: Springer, 1992. — 134 p.
6. *Keimel K.* Topological Cones: Functional Analysis in a T_0-Setting // Semigroup Forum. — 2008. — Vol. 77. — P. 109–142.
7. *Mustăţa C.* On the extremal semi-Lipschitz functions // Ann. Numer. Theory Approx. — 2002. — Vol. 31. — P. 103–108.
8. *Rädström J. H.* An embedding theorem for space of convex sets // Proc. Amer. Math. Soc. — 1952. — Vol. 3. — P. 165–169.
9. *Romaguera S., Sanchis M.* Semi-Lipschitz functions and best approximation in quasi-metric spaces // J. Approx. Theory. — 2000. — Vol. 103. — P. 292–301.
10. *Romaguera S., Sanchez-Perez E. A., Valero O. A* Characterization of Generalized Monotone Normed Cones // Acta Mathematica Sinica, English Series. — 2007. — Vol. 23, no. 6. — P. 1067–1074.
11. *Romaguera S., Sanchez-Perez E. A., Valero O.* The Dual Complexity Space as the Dual of a Normed Cone// Electronic Notes in Theoretical Computer Science. — 2006. — Vol. 161. — P. 165–174.
12. *Roth W.* Hahn-Banach type theorems for locally convex cones // Journal of the Australian Math. Soc. — 2000. — Ser. A, Vol. 68, no. 1. — P. 104–125.

13. *Selinger P.* Towards a semantics for higher-order quantum computation // Proceedings of the 2nd International Workshop on Quantum Programming Languages. Turku Centre for Computer Science General Publication. — 2004. — Vol. 33. — P. 127–143.
14. *Stonyakin F. S.* An analogue of the Hahn-Banach Theorem for functionals on abstract convex cone // Eurasian. Math. J. — 2016. — Vol. 7, no. 3. — P. 89–99.
15. *Tix R.* Some results on Hahn–Banach-type theorems for continuous D-cones // Theoretical Comput. Sci. — 2001. — Vol. 264. — P. 205–218.

Получена 22.05.2017