Динамические системы, 2017, том 7(35), №2, 149–156

УДК 517.98

Негладкие вариационные задачи с подвижной границей с точки зрения обобщенного метода множителей Лагранжа

Е. М. Кузьменко, С. И. Смирнова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: kuzmenko.e.m@mail.ru*, *si_smirnova@mail.ru*

Аннотация. Метод множителей Лагранжа обобщается на случай условного экстремума субгладкого функционала при субгладком условии связи. Наш подход основан на недавно предложенной в работах И.В. Орлова субгладкой форме теорем об обратной и неявной функции, а также на операторной базе этих результатов, изложенной в работах И.В. Орлова и С.И. Смирновой.

Упомянутые результаты позволили распространить метод множителей Лагранжа на случай негладкого условного экстремума, что составляет содержание первой части работы.

Вторая часть работы посвящена негладким вариационным функционалам и опирается на теорию сильных субдифференционалов, рассмотренную в работах И.В. Орлова, а также на методы исследования негладких вариационных функционалов, описанные в совместном учебном пособии И.В. Орлова, Ф.С. Стонякина и С.И. Смирновой. Здесь получено обобщенное условие трансверсальности, которое уже рассматривалось нами ранее в более частном случае, а также приведены примеры его применения.

В частности, в качестве простейшего примера отмечен "квазиклассический" случай, когда гладкое условие на подвижную границу комбинируется с негладким интегрантом вариационного функционала.

Ключевые слова: негладкие вариационные задачи, подвижная граница, сильные субдифференциалы, метод множителей Лагранжа.

Nonsmooth variational problems with a moving boundary via generalized Lagrange multipliers method

E. M. Kuzmenko, S. I. Smirnova

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. The Lagrange multiplier method is generalized to the case of a conditional extremum of the sub-smooth functional with a sub-smooth constraint condition. Our approach is based on the recently proposed in the works by I.V. Orlov a sub-smooth form of the inverse and implicit functions, as well as on the operator base of these results, described in the works by I.V. Orlov and S.I. Smirnova. The above results made it possible to extend the Lagrange multiplier method to the case of a nonsmooth conditional extremum, which is the content of the first part of the paper. The second part of the paper is devoted to nonsmooth variational functionals and is based on the theory of strong subdifferentiable functionals, considered in the works by I.V. Orlov, and also on the methods of investigating the nonsmooth variational functionals described in the joint textbook by I.V. Orlov,

F.S. Stonyakin and S.I. Smirnova. Here we obtain the generalized transversality condition, which we have already considered earlier in a more particular case, as well as the examples of its application. In particular, the "quasiclassical" case is noted as the simplest example, when a smooth condition on a moving boundary is combined with a nonsmooth integrand of the variational functional.
Keywords: nonsmooth variational problems, moving boundary, strong subdifferentionals, Lagrange multiplier method.
MSC 2010: 47H04, 54C65, 46B22, 49N45, 47N10

Введение

Наш подход основан на недавно предложенной в работе [6] субгладкой форме теорем об обратной и неявной функции, а также на операторной базе этих результатов, изложенной в [10]–[13].

Упомянутые результаты позволили распространить метод множителей Лагранжа на случай негладкого условного экстремума, что составляет содержание первой части работы.

Вторая часть работы посвящена негладким вариационным функционалам и опирается на теорию сильных субдифференционалов, рассмотренную в [5], [7], [9], а также на методы исследования негладких вариационных функционалов, описанные в [1], [7]. Здесь получено обобщенное условие трансверсальности, которое уже рассматривалось нами ранее в более частных случаях [2]–[4], а также приведены примеры его применения.

1. Приложение теоремы Дини о неявной функции к методу множителей Лагранжа в субгладком случае

Всюду далее, X, Y и Z — вещественные банаховы пространства, $Y \cong Z$, $U(x,y)$ является окрестностью некоторой точки $(x,y) \in X \times Y$, отображения $F : X \times Y \supset U(x,y) \to \mathbb{R}$ и $G : X \times Y \supset U(x,y) \to Z$ из класса C^1_{sub}, а суб-оператор $\left(\dfrac{\partial G}{\partial y}\right)_{sub}(x,y)$ суб-обратим. Рассмотрим задачу на условный экстремум

$$F \mapsto \text{extr}, \quad G = 0.$$

Применяя классический метод Лагранжа-Люстерника (см., например, [8]), введем вспомогательное отображение вида

$$\Phi = F + \lambda(G) \quad (\lambda \in Z^*),$$

которое достигает экстремума в точке (x,y) вместе с F. Применение обобщенной леммы Ферма (см. [5]) к Φ приводит к системе включений:

$$\begin{cases} 0 \in \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{sub}(x,y) + \lambda\left[\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)_{sub}(x,y)\right]; \\ 0 \in \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{sub}(x,y) + \lambda\left[\left(\dfrac{\partial G}{\partial y}\right)_{sub}(x,y)\right]. \end{cases} \qquad (1)$$

Далее, согласно результатам [10], каждый субдифференциал в системе (1) можно заменить системой базисных селекторов ($A \mapsto A_{sub} = \{A^s\}_{s\in S}$). Тогда второе включение в (1) можно выразить в виде точного равенства:

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^s_{sub}(x,y) + \lambda\left[\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^s_{sub}(x,y)\right] \tag{2}$$

для некоторого $s \in S$, где $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^s(x,y) \in \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{sub}(x,y)$ и $\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^s(x,y) \in \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{sub}(x,y)$. Из (2) следует

$$\lambda = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^s(x,y)\cdot\left[\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^s(x,y)\right]^{-1} \in -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{sub}(x,y)\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{-1}_{sub}(x,y). \tag{3}$$

Наконец, подставляя (3) в первое включение из (1), мы приходим к включению

$$0 \in \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{sub}(x,y) - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{sub}(x,y)\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{-1}_{sub}(x,y)\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{sub}(x,y). \tag{4}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Пусть, при вышеупомянутых условиях, функционал F достигает в (x,y) условного экстремума. Тогда функция Лагранжа $\Phi = F + \lambda(G)$ удовлетворяет в (x,y) необходимому условию экстремума $0 \in \partial_{sub}\Phi(x,y)$, которое можно представить в виде* (4).

Заметим, что в скалярном случае ($Y = Z = \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$) включение (4) может быть легко выражено через верхние и нижние производные (в сокращенной форме):

$$0 \in \left[\left|\ \underline{\frac{\partial F/\partial x}{\partial G/\partial x}}\quad \frac{\overline{\partial F/\partial y}}{\partial G/\partial y}\ \right|;\quad \left|\ \frac{\overline{\partial F/\partial x}}{\partial G/\partial x}\quad \underline{\frac{\partial F/\partial y}{\partial G/\partial y}}\ \right|\right]. \tag{5}$$

2. Приложение к обобщенному условию трансверсальности

Рассмотрим вариационную задачу с подвижными границами в следующей форме:

$$\begin{cases} F(x_1,y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\,dx \mapsto \mathrm{extr}; \\ G(x_1,y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} g(x,y,y')\,dx; \qquad\qquad (f,g \in C^1_{sub}). \end{cases} \tag{6}$$

Следует отметить, что случай $g(x,y,y') = \varphi'(x) - y'$ при $f,g \in C^1$ приводит к классическому условию трансверсальности (см. [8]). Введем функцию Лагранжа, соответствующую задаче (6), следующим образом: $\Phi = F - \lambda \cdot G$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Для простоты, вместо оценки (5) будем непосредственно использовать оценку $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{sub}$ в случае неподвижной границы (см. [5]). Здесь $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{sub}$ можно вычислить непосредственно. Таким образом, отсюда следует

$$\begin{cases} 0 \in \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{sub}(x_1, y) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x_1, y) = [f(x_1, y, y') - \lambda g(x_1, y, y')] = (f - \lambda g)\big|_{x = x_1}; \\ 0 \in \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{sub}(x_1, y) \cdot h \subset \left[\int\limits_{x_0}^{x_1} \underline{L}(f - \lambda g)(x, y, y')\, dx; \int\limits_{x_0}^{x_1} \overline{L}(f - \lambda g)(x, y, y')\, dx\right]. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь мы обозначаем через $\underline{L}$ и $\overline{L}$, соответственно, нижний и верхний лагранжианы функции $(f - \lambda g)$:

$$\begin{cases} \underline{L}(f - \lambda g) = \underline{\underline{\dfrac{\partial}{\partial y}}}(f - \lambda g) - \dfrac{d}{dx}\left[\underline{\underline{\dfrac{\partial}{\partial y'}}}(f - \lambda g)\right]; \\ \overline{L}(f - \lambda g) = \overline{\overline{\dfrac{\partial}{\partial y}}}(f - \lambda g) - \dfrac{d}{dx}\left[\overline{\overline{\dfrac{\partial}{\partial y'}}}(f - \lambda g)\right]. \end{cases}$$

Далее, равенство в (7) ведет к $\lambda = \dfrac{f}{g}\Big|_{x = x_1}$. Включение в (7) можно привести к следующим двум случаям.

а) Полагая $h(x_0) = h(x_1) = 0$ и следуя обычным преобразованиям, мы получаем так называемое *включение Эйлера–Лагранжа* для $(f - \lambda g)$ (см. [5]):

$$0 \in \left[\underline{L}(f - \lambda g); \overline{L}(f - \lambda g)\right](x, y, y'). \tag{8}$$

Назовем включение (8) *совместным включением Эйлера-Лагранжа* для задачи (6).

б) Полагая $h(x_0) = 0$ при произвольном значении $h(x_1)$ и локализуя $h(x)$ вблизи x_1, получим оценку

$$0 \in \left[\underline{\dfrac{\partial}{\partial y'}}(f - \lambda g); \overline{\dfrac{\partial}{\partial y'}}(f - \lambda g)\right](x, y, y'). \tag{9}$$

В конечном счете, подставляя вычисленное выше λ в (8) и (9), мы приводим необходимое условие экстремума для задачи (6) к системе

$$\begin{cases} 0 \in \left[\underline{L}(g|_{x_1} \cdot f - f|_{x_1} \cdot g); \overline{L}(g|_{x_1} \cdot f - f|_{x_1} \cdot g)\right](x, y, y'); \\ 0 \in \left[g\big|_{x_1} \cdot \underline{\dfrac{\partial f}{\partial y'}} - f\big|_{x_1} \cdot \underline{\dfrac{\partial g}{\partial y'}}; g\big|_{x_1} \cdot \overline{\dfrac{\partial f}{\partial y'}} - f\big|_{x_1} \cdot \overline{\dfrac{\partial g}{\partial y'}}\right](x, y, y'). \end{cases} \tag{10}$$

Здесь первое включение в (10) является совместным включением Эйлера-Лагранжа для системы (6), а второе включение в (10) является обобщенным включением трансверсальности для данной задачи.

В качестве простейшего примера рассмотрим в заключение квазиклассический случай $y\big|_{x_1} = \varphi(x_1)$. Здесь $g(x, y, y') = \varphi'(x) - y'$ и система (10) принимает вид

$$\begin{cases} 0 \in \left[\underline{L}(f); \overline{L}(f)\right](x, y, y'); \\ 0 \in (\varphi' - y')\big|_{x_1} \cdot \left[\underline{\dfrac{\partial f}{\partial y'}}; \overline{\dfrac{\partial f}{\partial y'}}\right](x, y, y') - f\big|_{x_1}. \end{cases} \tag{11}$$

Разумеется, обычное условие трансверсальности $f\big|_{x_1} = (\varphi' - y')\big|_{x_1} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}$ и обычное уравнение Эйлера-Лагранжа $L(f)(x, y, y')$ следуют из (11) при $f \in C^1$.

3. Обобщенное условие трансверсальности в случае модуляции гладкого интегранта

Рассмотрим задачу с подвижной границей следующего вида:

$$\left\{ \Phi(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} |f(x, y, y')|\, dx \mapsto \text{extr}; \quad y\big|_{x_1} = \varphi(x_1); \quad (f \in C^1,\ \varphi \in C^1) \right\}. \tag{12}$$

1) В случае неподвижной границы вопрос о включении Эйлера-Лагранжа для функционала Φ был исследован в [5]. Так как в случае (12) лагранжиан $L(g) = 0$, то совместное условие Эйлера-Лагранжа для задачи (12) сводится к условию:

$$(0 \in [\underline{L}(|f|); \overline{L}(|f|)]) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \text{либо} & L(f) = 0 \quad (f \neq 0); \\ \text{либо} & \quad f = 0. \end{array} \right. \tag{13}$$

2) Далее, поскольку

$$\left(\frac{\partial(|f|)}{\partial y'}\right)_{sub} = \begin{cases} \operatorname{sign} f \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y'}, & \text{при} \quad f \neq 0; \\ [-1; 1] \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y'}, & \text{при} \quad f = 0; \end{cases}$$

то обобщенное условие трансверсальности (11) приводится к виду:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{либо} & f\big|_{x_1} = (\varphi' - y')\big|_{x_1} \cdot \operatorname{sign} f \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y'} \quad (f \neq 0); \\ \text{либо} & f\big|_{x_1} \in [-1; 1] \cdot (\varphi' - y')\big|_{x_1} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y'} \quad (f = 0). \end{array} \right. \tag{14}$$

Объединяя(13)–(14), приходим в итоге к условиям:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{либо} & \begin{cases} L(f) = 0; \\ f\big|_{x_1} = (\varphi' - y')\big|_{x_1} \cdot \operatorname{sign} f \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y'} \quad (f\big|_{x_1} \neq 0); \end{cases} \\ \text{либо} & \qquad f\big|_{x_1} = 0. \end{array} \right. \tag{15}$$

3) Рассмотрим в заключение конкретный класс примеров:

$$\begin{cases} \Phi(x_1, y) = \int\limits_0^{x_1} |y'^2 - y^2|\, dx \mapsto \mathrm{extr} & (y(0) = 0); \\ y\big|_{x_1} = \varphi(x_1) & (\varphi \in C^1). \end{cases} \tag{16}$$

а) Как показано в [5], включение Эйлера-Лагранжа в данном случае принимает вид альтернативы: [либо $y''+y=0$; либо $y' \pm y = 0$]. В частности, данным условиям удовлетворяет гладкая экстремаль вида

$$y = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \pi/4; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{x-\pi/4}, & \pi/4 \le x \le x_1; \end{cases} \tag{17}$$

на которой, в случае неподвижной границы x_1, реализуется строгий минимум функционала Φ.

б) Применяя к экстремали (17) условие $y\big|_{x_1} = \varphi(x_1)$, имеем:

$$\varphi(x_1) = \begin{cases} \sin x_1, & 0 \le x_1 \le \pi/4; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{x_1-\pi/4}, & \pi/4 \le x_1 < \infty. \end{cases} \tag{18}$$

Составим, наконец, условие трансверсальности. Имеем:

$$f\big|_{x_1} = \begin{cases} \cos 2x_1, & 0 \le x_1 \le \pi/4; \\ 0, & \pi/4 \le x_1 < \infty; \end{cases}$$

$$(\varphi' - y')\big|_{x_1} = \begin{cases} -\cos x_1, & 0 \le x_1 \le \pi/4; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{x_1-\pi/4} - \cos 2x_1, & \pi/4 \le x_1 < \infty; \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{sub} = \begin{cases} 2\cos x, & 0 \le x < \pi/4; \\ [0; \sqrt{2}], & x = \pi/4; \\ 0, & \pi/4 < x < \infty. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения в (15), получаем:

$$x_n = \pi/4 + n\pi \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Заключение

Таким образом, описанная в работе методика позволяет исследовать на обобщенную трансверсальность широкие классы вариационных функционалов с подвижной границей, которые не допускают применения классических методов.

Список цитируемых источников

1. *Кузьменко, Е. М., Орлов, И. В., Смирнова, С. И.* Исследование на компактный экстремум вариационных функционалов в пространствах Соболева в случаях гладкого и субгладкого интегранта // Новая наука: стратегии и вектор развития. — 2015. — Т. 5–2. — С. 16–21.

   Kuzmenko, E. M., Orlov, I. V., Smirnova, S. I. Research to the compact extremum of variational functionals in Sobolev spaces in the cases of a smooth and sub-smooth integrand. New science: strategy and vector of development, 5–2, 16–21 (2015). (in Russian).

2. *Кузьменко, Е. М., Смирнова, С. И.* Негладкие вариационные экстремальные задачи с подвижной границей // Материалы международной научной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - VI" — Ростов-на-Дону, 2016. — С. 31–32.

   Kuzmenko, E. M., Smirnova, S. I. Nonsmooth variational extremal problems with moving boundary. Proceedings of the international scientific conference "Modern methods and problems of operator theory and harmonic analysis and their applications - VI", Rostov-na-Donu, 2016, pp. 31–32 (in Russian).

3. *Кузьменко, Е. М., Смирнова, С. И.* Негладкая форма условия трансверсальности в вариационных задачах с подвижной границей // Сборник тезисов II научной конференция профессорско-преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых "Дни науки КФУ им. В.И. Вернадского". — Симферополь, 2016. — Т. 7. — С. 567.

   Kuzmenko, E. M., Smirnova, S. I. Non-smooth form of transversality conditions in variational problems with moving boundary. Abstracts of II scientific conference of the faculty, graduate students and young scientists "Science Days of V. Vernagsky CFU", Simferopol, 2016, Vol.7, 567 (in Russian).

4. *Кузьменко, Е. М., Смирнова, С. И.* Негладкие экстремальные вариационные задачи с интегрантом, зависящим от подвижной границы // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Т. 5. — № 8–1 (34–1). — Воронеж: ФГБОУ ВО "ВГЛТУ", 2017. — С. 246–249.

   Kuzmenko, E. M., Smirnova, S. I. Nonsmooth extreme variational problems with integrand depending on moving boundary. Actual directions of scientific research of the XXI century: theory and practice, 5, no.8–1 (34–1), 246–249 (2017). (in Russian).

5. *Орлов, И. В.* Введение в сублинейный анализ // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2014. — Т. 53. — С. 64—132.

   Orlov, I. V. Introduction to sublinear analysis. Journal of Mathematical Sciences, 218, 430–502 (2016).

6. *Орлов, И. В.* Теоремы об обратной и неявной функциях в классе субгладких отображений // Математические заметки. — 2016. — Т. 99, №4. — С. 631–634.

   Orlov, I. V. Inverse and implicit function theorems in the class of subsmooth maps. Math. Notes, 99:3, 619–622 (2016).

7. *Орлов, И. В., Стонякин, Ф. С., Смирнова, С. И.* Справочное учебно-методическое пособие по курсу “Выпуклый и негладкий анализ”. — Симферополь: КФУ, 2015. — 104 с.

   Orlov, I. V., Stonyakin, F. S., Smirnova, S. I. Reference textbook in “Convex and nonsmooth analysis”, Simferopol, CFU, 2015. (in Russian).
8. *Cartan, H.* Calcul différentiel. Formes différentielles, Paris: Hermann, 1967.
9. *Orlov, I. V.* Subdifferentials via sub-operators. 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 235–239 (2017).
10. *Orlov I. V., Smirnova S. I.* Invertibility of multivalued sublinear operators. Eurasian Math. J., V. 6, no.4, 44–58 (2015).
11. *Orlov, I. V., Smirnova, S. I.* Subinvertibility of compact-valued sublinear operators. Proceedings of the 18th Intern. Saratov Winter School “Modern problems of the theory of functions and their applications”, 10–14 (2016).
12. *Smirnova, S.* Representation of the compact-valued sublinear operator by means of “basis” selectors packet. Constructive nonsmooth analysis and related topics. Abstracts of the International conference dedicated to the memory of Professor V.F. Demyanov, V. 1, no. I, 40–43 (2017).
13. *Smirnova S. I., Orlov I. V.* Representation of the compact-valued sublinear operator by basis selectors packet and sub-invertibility // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 295–298 (2017).

Получена 11.05.2017