

УДК 517:957

# Метаустойчивые структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной на отрезке

Ю. А. Хазова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь, 295007 *E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com*

**Аннотация.** Исследуется динамика стационарных структур в нелинейном оптическом резонаторе с преобразованием отражения. Математической моделью системы является параболическое уравнение с преобразованием отражения пространственной переменной и условиями периодичности. Исследуется эволюция форм и устойчивость структур при уменьшении коэффициента диффузии. В работе используется метод Галеркина. Реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций и метаустойчивых структур.

**Ключевые слова:** параболическая задача, существование решения, метаустойчивые структуры, бифуркация, устойчивость, метод Галеркина.

## Metastable structures in a parabolic problem with reflection of a spatial variable on a segment

Yu. A. Khazova

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, 295007.

**Abstract.** The dynamics of stationary structures in a nonlinear optical resonator with the transformation of reflection is studied. The mathematical model of the system is a parabolic equation with the transformation of reflection by a spatial variable and the conditions of periodicity. The evolution of forms and the stability of structures with decreasing diffusion coefficient are investigated. The Galerkin's method is used. A wide range of saddle-node bifurcations and metastable structures is realized.

**Keywords:** parabolic problem, the existence of solutions, metastable structures, bifurcation, stability, Galerkin's method.

**MSC 2010:** 35K20, 35K59, 35Q60, 78A05, 37L10, 35R10, 35B32, 35B10, 35B35, 35C07, 35C20

## Введение

Расширение исследований в нелинейной оптике в настоящее время вызвано интенсивным использованием оптических систем в информационных технологиях. Среди нелинейных оптических систем одной из самых популярных является система, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура двумерной обратной связи. Принципиальная особенность таких систем заключается в том, что внешний контур обратной

связи может быть использован для непосредственного воздействия на нелинейную динамику системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами.

Параболические функционально-дифференциальные уравнения с преобразованием аргументов искомой функции, используемые для моделирования оптических систем с двумерной обратной связью, представляют собой новый класс уравнений для исследования феномена структурообразования.

В таких нелинейных оптических системах внешний контур обратной связи может быть использован для управления нелинейной динамикой системы с помощью управляемых крупномасштабных пространственных и временных координат, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и др. устройствами. Уже при простейших видах преобразования: поворот, отражение от координатных осей, запаздывание реализуются различные режимы самоорганизации светового поля: многолепестковые и ротационные волны, оптические спирали, волны переключения, роллы, гексагоны и др. [1, 6, 2, 14].

Таким образом исследование модельных уравнений для нелинейных оптических систем с управляемым преобразованием аргументов в контуре обратной связи является актуальным направлением современных нелинейных процессов (теоретической и прикладной нелинейной оптики) [3, 4].

Целью данной работы является исследование условий рождения новых решений краевой задачи для функционально-дифференциального параболического уравнения с отражением пространственной переменной и условиями периодичности на отрезке, поведения решений в зависимости от бифуркационного параметра и анализ устойчивости рожденных решений при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности.

Исследование выполнено при поддержке Программы развития федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского» на 2015-2024 годы по проекту «Сеть академической мобильности «Академическая мобильность молодых ученых России» в 2016 году на базе лаборатории дифференциальных и разностных уравнений Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

## 1. Постановка задачи

Ранее в работах автора рассматривалось параболическое уравнение с отражением пространственной переменной и условиями периодичности на окружности: упрощенная модель [7, 5] и модель с квадратичным слагаемым [9, 10].

В этой статье на промежутке  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  будет рассматриваться краевая задача

$$v_t + Lv = \Lambda_1 \frac{1}{2} Qv^2 - \Lambda \frac{1}{6} Qv^3, \quad (1.1)$$

где  $L = 1 - D\Delta - \Lambda Q$  — линейный оператор,  $Qv(x) = v(-x)$  — оператор отражения пространственной переменной,  $\Lambda_1 = -\Lambda \operatorname{ctg} \omega$  — вычисляемая переменная, с

условиями периодичности

$$u_x\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0. \tag{1.2}$$

**Лемма 1.** Оператор  $L$  с условием периодичности (1.2) имеет полную ортогональную систему собственных функций  $1, \sin \varphi, \cos 2\varphi, \sin 3\varphi, \cos 4\varphi, \dots$ , соответствующих собственным значениям [8]

$$\lambda_0 = 1 - \Lambda, \quad \lambda_1 = 1 + D + \Lambda, \quad \lambda_2 = 1 + 4D - \Lambda, \quad \lambda_3 = 1 + 9D + \Lambda, \dots$$

Критическими являются функции  $\sin \varphi, \sin 3\varphi, \sin 5\varphi, \dots$ , собственные значения которых могут поменять знак при изменения бифуркационного параметра  $D$ .

Если  $D > D_1 = -(1 + \Lambda)$ , то нулевое решение — асимптотически устойчивое решение задачи (1.1)-(1.2). При уменьшении  $D$  и его прохождении через значение  $D_1 = -(1 + \Lambda)$  нулевое решение теряет устойчивость. Обозначим  $D_{2k+1} = (2k + 1)^{-1}D_1, k = 1, 2, 3, \dots$ . Индекс неустойчивости нулевого решения при  $D_3 < D < D_1$  равен 1. При уменьшении  $D$  и его прохождении через следующие значения  $D_{2k+1} = (2k + 1)^{-1}D_1, k = 1, 2, 3, \dots$  каждый раз индекс неустойчивости решения  $\omega$  повышается на единицу и рождается новое пространственно неоднородное решение.

**Теорема 1.** Существует  $\delta_0 > 0$  такое, что если  $0 < D_1 - D < \delta_0$ , то задача (1.1)-(1.2) имеет два стационарных пространственно неоднородных решения  $v_1^\pm(x, D)$ , где

$$\begin{aligned} v_1^\pm(x, D) &= \pm \left( \frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right)^{1/2} \sin x + \\ &+ \left( \frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right) \frac{\Lambda_1}{4} \left( (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} - (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2x \right) \pm \\ &\pm \frac{1}{24} \left( \frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right)^{3/2} \left( 3\Lambda_1^2 (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} - \Lambda (\lambda_3 - 3\lambda_1)^{-1} \right) \sin 3x + O((D - D_1)^2), \\ c_1(D) &= -\frac{1}{4} \Lambda_1^2 \left( (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + \frac{1}{2} (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \right) + \frac{1}{8} \Lambda, \quad \Lambda_1 = -\Lambda \operatorname{ctg} \omega < 0. \end{aligned}$$

Решения  $v_1^\pm(x, D)$  — экспоненциально устойчивы [8].

## 2. Структуры параболической задачи с квадратичным слагаемым на отрезке

Для исследования динамики рождающихся пространственно неоднородных решений при уменьшении бифуркационного параметра  $D$  воспользуемся формализмом метода Галеркина. Рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (1.1) в виде

$$v = z_0 + \sum_{k=1}^N z_k \sin(2k - 1)x + \sum_{k=1}^N z_{k+N} \cos(2k)x. \tag{2.1}$$

Подставим (2.1) в уравнение (1.1). Приравняв затем коэффициенты при  $\sin(2k-1)x$  и  $\cos(2k)x$ ,  $k = \overline{1, N}$ , приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= -\lambda_0 z_0 + g_0(z), \\ \dot{z}_s &= -\lambda_{2s-1} z_s + g_s(z), \quad s = \overline{1, N}, \\ \dot{z}_{k+N} &= -\lambda_{2k} z_{k+N} + g_{k+N}(z), \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Системы уравнений (2.2) обладают рядом общих свойств. Для каждого  $N$  нулевое решение (2.2) — асимптотически устойчиво, если  $D > D_1$ . Нулевое решение (2.2) теряет устойчивость при прохождении параметра  $D$  через значение  $D_1$ . Максимальная точка спектра нулевого решения проходит в этом случае через нуль с ненулевой скоростью. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две устойчивые непрерывные ветви неподвижных точек  $\pm z^1(D, N) = \pm(z_0^1(D, N), z_1^1(D, N), z_2^1(D, N), \dots, z_N^1(D, N), 0, \dots, 0)$ .

В силу (2.2) и определения  $z^1(D, N)$  справедливо следующее равенство

$$\pm v_1(x, D) \approx z_0^1 + \sum_{s=1}^p z_s^1(D, N) \sin(2s-1)x. \quad (2.3)$$

Опишем динамику по параметру  $D$  стационарных решений  $\pm v_1(x, D)$  уравнения (1.1), опираясь на равенство (2.3) и численные расчеты непрерывной ветви  $\pm z^1(D, N)$  стационарных точек системы (2.2), проведенные для  $N \sim 33$ . Для значений параметра  $D$  вблизи  $D_1$   $\pm v_1(x, D)$  является квазигармонической функцией с малой амплитудой. Амплитуда функций (2.3) монотонно возрастает с убыванием параметра  $D$ , приближаясь к  $\frac{3\Lambda \operatorname{ctg} \omega \pm \sqrt{9\Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega + 24\Lambda^2 - 24\Lambda}}{2\Lambda}$  при  $D \rightarrow 0$ . На рис. 1 представлены приближенные решения  $v_1(x, D)$  полученные согласно (2.3) для  $N = 20$ .

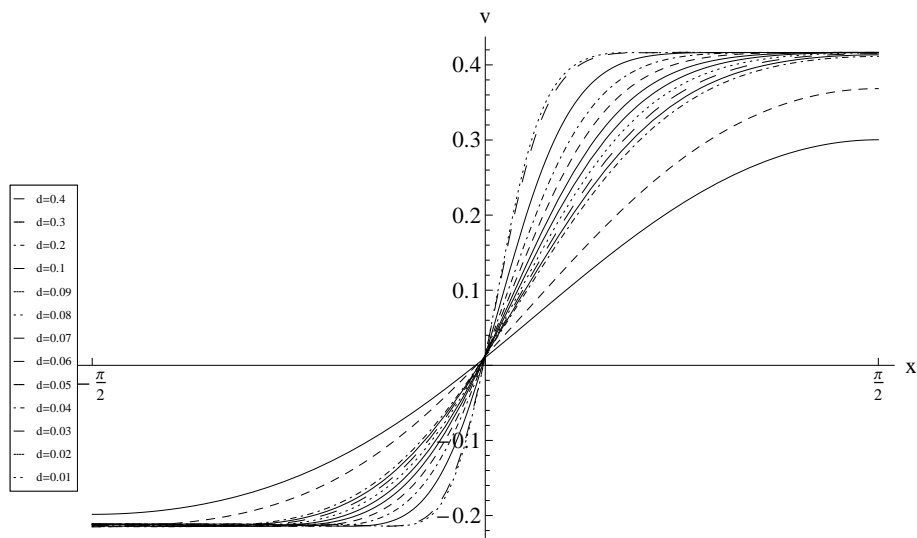


Рис. 1. Приближенные решения (1.1)  $+v_{\pm}^1(x, D)$   $N = 10$ ,  $\omega = 0.317$ ,  $\Lambda = -1.5$ .

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости пространственно неоднородного стационарного решения  $\pm v_1(x, D)$ . С этой целью обратимся к динамике спектра  $\sigma(z^1(D, N))$  ветви неподвижных точек  $z^1(D, N)$  системы (2.2). Проведенный анализ показал, что при убывании параметра  $D$  точки спектра сближаются. При этом максимальная точка спектра  $\mu_1^1 < 0$  — отрицательна и практически не меняется, а остальные точки — возрастают. В качестве примера приведем 4 максимальные точки спектра, когда  $N = 20$ ,  $\Lambda = -1.5$

$$\sigma(z^1(0.4, 20)) = \{\dots, -3.596 + 0.199I, -3.596 - 0.199I, -2.243, -0.221\},$$

$$\sigma(z^1(0.1, 20)) = \{\dots, -2.019, -1.232 + 0.9412I, -1.232 - 0.9412I, -1.230\},$$

$$\sigma(z^1(0.06, 20)) = \{\dots, -1.997, -1.123 + 1.068I, -1.123 - 1.068I, -1.211\},$$

$$\sigma(z^1(0.01, 20)) = \{\dots, -1.121 - 1.114I, -1.013 + 1.131I, -1.013 - 1.131I, -1.222\}.$$

Здесь  $I$  — мнимая единица. Проведенный анализ для  $N$  от 16 до 33 показал, что решение  $v_1(x, D)$  асимптотически устойчиво на всем промежутке  $(0, D_1)$  изменения параметра  $D$ .

### 2.1. Неустойчивые структуры параболической задачи с квадратичным слагаемым на отрезке

Перейдем теперь к анализу формы и устойчивости стационарных решений  $\pm v_3(x, D)$  уравнения (1.1). Эта пара решений рождается из нуля неустойчивой с индексом неустойчивости 1 тогда, когда параметр  $D$ , убывая, проходит через  $D_3 = \frac{D_1}{9}$ . Для анализа поведения  $\pm v_3(x, D)$  при отходе параметра  $D$  от точки бифуркации обратимся к системам (2.2). В этих системах индекс неустойчивости нуля повышается на единицу и становится равным двум тогда, когда параметр  $D$ , убывая, проходит через  $D_3$ . В результате имеет место бифуркация «вилки» — от нуля ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек  $\pm z^3(D, N) = \pm(0, z_k^3(D, N), z_{k+N}^3(D, N))$ ,  $k = \overline{0, N}$ , где от нуля отличны только координаты с индексами  $0, 2, 5, 8, \dots$

Как и выше, воспользовавшись равенством (2.1), приходим к следующему приближенному равенству

$$\pm v_3(D) = v_3(x, D) \approx z_0^3 + \sum_{k=1}^N z_k^3(D, N) \sin(2s - 1)x. \quad (2.4)$$

Равенства (2.4) позволяют описать динамику  $\pm v_3(x, D)$  при убывании  $D$ . Отметим, что при  $D \rightarrow 0$   $\pm v_3(x, D)$  приближается к ступенчатой функции, принимающей значения  $\frac{3\Lambda \operatorname{ctg} \omega \pm \sqrt{9\Lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \omega + 24\Lambda^2 - 24\Lambda}}{2\Lambda}$  и точками перехода  $-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$ .

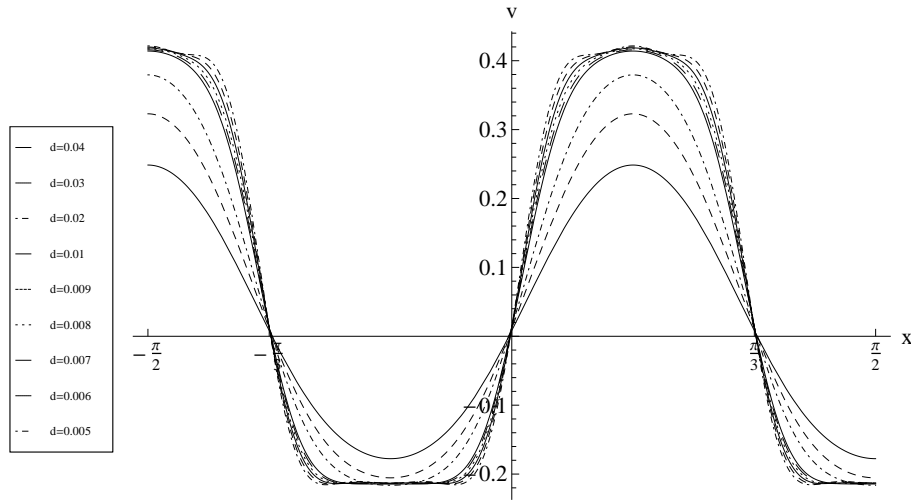


Рис. 2. Неустойчивые решения  $+v_3(x, D)$   $N = 20$ ,  $\omega = 0.317$ ,  $\Lambda = -1.5$ .

На рис. 2 представлены, согласно (2.4), приближенные решения  $+v_3(x, D)$ , где  $N = 20$ ,  $\omega = 0.317$ ,  $\Lambda = -1.5$  и различных значениях параметра  $D$ .

Как уже отмечалось решение  $\pm v_3(x, D)$  рождается из нуля неустойчивым с индексом неустойчивости 1. Вопрос об устойчивости  $\pm v_3(x, D)$  при уменьшении параметра  $D$  приводит к вопросу о поведении максимального собственного значения решения  $\pm v_3(x, D)$ . Обратимся в этой связи к вопросу о динамике при уменьшении параметра  $D$  максимального собственного значения  $\mu_1^3(D, N)$  неподвижных точек  $\pm z^3(D, N)$  системы (2.2). Спектр матрицы устойчивости  $\pm z^3(D, N)$  лежит на вещественной оси и его максимальная точка  $\mu_1^3(D, N)$  при малых  $D_3 - D > 0$  принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра лежат на отрицательной полуоси.

Согласно проведенному анализу динамика спектра  $\pm z^3(D, N)$  зависит от поведения  $\mu_1^3(D, N)$  при уменьшении  $D$ . С уменьшением  $D$   $\mu_1^3(D, N)$  убывая приближается к нулю, затем медленно меняется вблизи нуля, оставаясь на положительной полуоси.

Приведем иллюстрирующий пример:  $\Lambda = -1.5$ ,  $\mu_1^3(0.02, 19) = 0.00853148$ ,  $\mu_1^3(0.01, 19) = 0.000160262$ ,  $\mu_1^3(0.009, 19) = 0.000689485$ ,  $\mu_1^3(0.007, 19) = 0.00290803$ ,  $\mu_1^3(0.006, 19) = 0.00540983$ .

Проведенный анализ позволяет сделать заключение о том, что  $v_3(\varphi, D)$  на интервале  $(0, D_3)$  сохраняет индекс неустойчивости.

## 2.2. Метаустойчивые структуры параболического уравнения с квадратичным слагаемым на отрезке.

В системах (2.2) размерности  $N$  согласно проведенному бифуркационному анализу для значений  $N$  от 20 до 30 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при средних (не очень малых) значениях параметра  $D$ . В результате бифуркации седло-узел в однопараметрической системе (2.2) появляются две

непрерывные по  $D$  ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Эти ветви стационарных точек определены для всех положительных значений параметра  $D$ , которые меньше соответствующего бифуркационного. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (2.2) отвечают в силу (2.4) две непрерывные ветви приближенных стационарных решений (1.1) типа внутреннего переходного слоя. Будем говорить, что приближенные решения (1.1) указанного типа отвечают седло-узловым бифуркациям в системе (2.2). Некоторые из седло-узловых бифуркаций в (2.2) порождают непрерывные по  $D$  ветви приближенных стационарных решений (1.1) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода.

Реализация в системе (2.2) бифуркаций седло-узел с указанными выше свойствами вызвана медленной эволюцией вблизи нуля максимальной точки спектра ветвей стационарных точек  $\pm z^3(D, N)$  на достаточно большом интервале изменения параметра  $D$ . Далее для определенности ограничимся анализом бифуркаций седло-узел, связанных с ветвью стационарных точек  $\pm z^3(D, N)$ . Бифуркации седло-узел указанного типа объединяются в конечные наборы бифуркаций, которые называются далее каскадами седло-узловых бифуркаций.

Рассмотрим один из каскадов, который порождает приближенные решения краевой задачи (1.1) с точками перехода, принадлежащими интервалам  $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3})$  и  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ . Имеет место 2 таких бифуркации с бифуркационными значениями  $D = D_k, k = 1, 2, D_1 > D_2$ . Подчеркнем, что  $D_k = D_k(N), k = 1, 2$ , убывают с ростом  $N$ . Приведем теперь в качестве иллюстрации для случая  $N = 20$  приближенные бифуркационные значения  $D$ , соответствующие им координаты точек и 5 наибольших точек их спектров:

$$D_1 = 0.0221$$

$$(0.0736, 0.0694, 0.362, -0.0461, 0.0519, \dots)$$

$$\{\dots, -1.083 + 1.0974I, -1.083 - 1.0974I, -1.307, -1.164, -0.00657\}$$

$$(0.0761, 0.0702, 0.366, -0.0481, 0.0559 \dots)$$

$$\{\dots, -1.066 + 1.108I, -1.066 - 1.108I, -1.490, -1.121, 0.00128\}$$

$$D_2 = 0.0146$$

$$(0.0734, 0.167, 0.315, -0.065, 0.108, \dots)$$

$$\{\dots, -1.063 + 1.110I, -1.063 - 1.110I, -1.310, -1.198, -0.000113\}$$

$$(0.0735, 0.138, 0.332, -0.0652, 0.096, \dots)$$

$$\{\dots, -1.068 + 1.107I, -1.068 - 1.107I, -1.362, -1.255, 0.00203\}$$

С целью сокращения многоточием обозначены остальные координаты стационарных точек, здесь  $I$  — мнимая единица. Устойчивая и неустойчивая ветви неподвижных точек, родившиеся в результате седло-узловой бифуркации системы (2.2), расходятся медленно с уменьшением параметра  $D$ . Соответственно медленно расходятся и отвечающие им в силу (2.1) непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (1.1).

Приведенным стационарным точкам системы (2.2), где  $N = 20$ ,  $D = 0.05$ , отвечают приближенные решения задачи (1.1) на рис. 3.

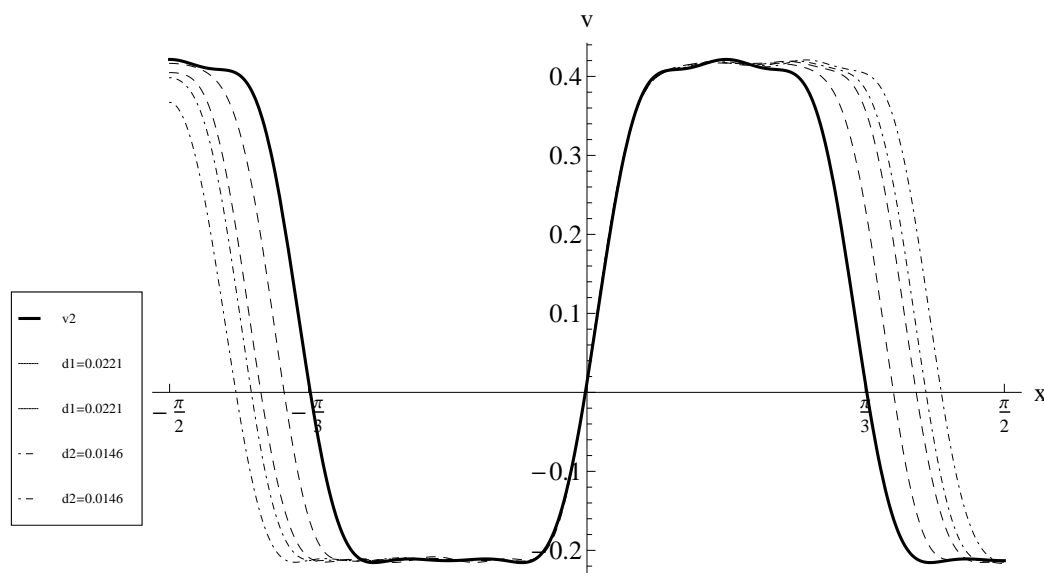


Рис. 3. Приближенные стационарные решения (1.1),  $\Lambda = -1.5$ ,  $\omega = 0.317$ ,  $D = 0.05$

Обозначим  $v_k^s = v_k^s(\varphi, D, N)$ ,  $v_k^u = v_k^u(\varphi, D, N)$ ,  $k = 1, \dots, 4$  непрерывные по  $D$  ветви приближенных решений (1.1), отвечающие соответственно в силу (2.1) устойчивой, неустойчивой непрерывным ветвям стационарных решений системы (2.2), рожденных в результате седло-узловой бифуркации с номером  $k$ . Подчеркнем, что имеет место слабая зависимость указанных функций от  $N$ .

Положим далее  $N = 20$ . Рассмотрим решения  $S_D^t v_3^s$ ,  $S_D^t v_3^u$  уравнения (1.1) с начальными условиями  $v_k^s = v_k^s(\varphi, D, N)$ ,  $v_k^u = v_k^u(\varphi, D, N)$ . Согласно численным расчетам на значительных промежутках изменения времени решения  $S_D^t v_3^s$ ,  $S_D^t v_3^u$  меняются медленно. Приближенные решения  $v_2^s$ ,  $v_2^u$  порождают метаустойчивые структуры [12, 13]. На рис. 4 представлено решение  $S_D^t v_3^s$  уравнения (1.1). Видно, что с течением времени решения  $S_D^t v_3^s$  медленно меняются. Затем за достаточно короткий по сравнению с этапом медленной эволюции промежуток времени  $S_D^t v_3^s$  оказывается вблизи устойчивого стационарного решения.



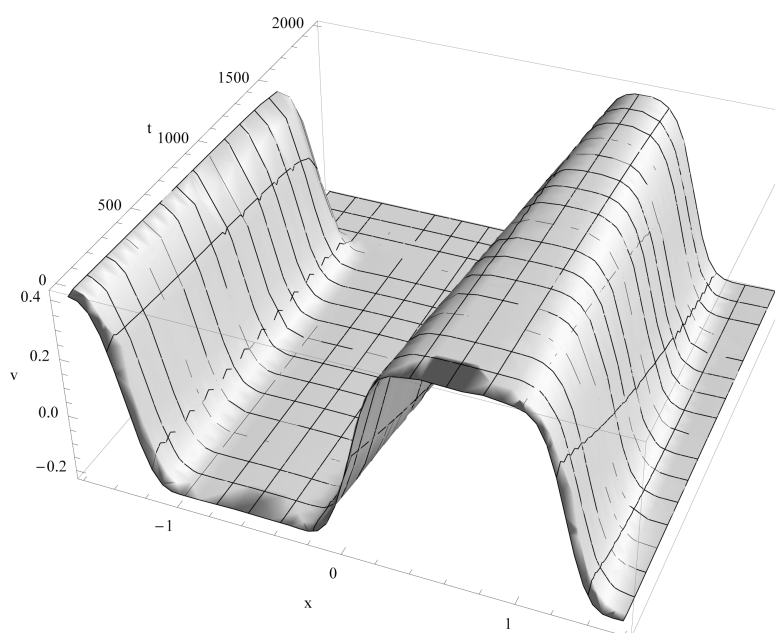


Рис. 4. Метаустойчивая структура (1.1),  $\Lambda = -1.5$ ,  $\omega = 0.317$ ,  $D = 0.005$

На рис. 4 показана метаустойчивая структура (1.1)  $S_D^t v_2^3$  с начальной функцией  $v_k^2$ .

## Заключение

Для параболического уравнения с отражением пространственной переменной на отрезке рассмотрены вопросы о существовании, форме и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений:

1. С помощью метода центральных многообразий доказана теорема о существовании пространственно неоднородного стационарного решения.
2. На основании формализма метода Галеркина исследована динамика изменений неоднородных стационарных решений.
3. Исследована задача о приближенных стационарных решениях уравнения типа переходного слоя с тремя точками перехода. Множество приближенных стационарных решений указанного выше типа правильно отражает характер эволюции метаустойчивых структур с тремя точками перехода при увеличении  $t$  и при средних значениях параметра  $D$ .
4. Численные расчеты с помощью пакета Mathematica показали, что применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

5. При исследовании метастойчивых структур задача о приближенных стационарных решениях является ключевой. Показаны условия возникновения метастойчивых структур.

### Список цитируемых источников

1. *Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей. // Новые принципы оптической обработки информации. — М.: Наука. — 1990. — С. 263-325.  
Akhmanov, S. A., Vorontsov, M. A., Ivanov, V. Yu. Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback: on the way to creation of nonlinear optical analogs of neural networks. In *Novye printsipy opticheskoi obrabotki informatsii* (pp. 263-325), Moscow: Nauka, 1990. (in Russian)
2. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. — М.: Физматлит, 2007. — 485 с.  
Akhromeeva, T. S., Kurdyumov, S. P., Malinetskiĭ, G. G., Samarskiĭ, A. A. Structures and chaos in nonlinear media. Moscow: Fizmatlit, 2007. (in Russian)
3. *Белан Е. П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной. // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — Т.46, №5. — С. 95-111.  
Belan, E. P. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflected spatial argument. *Cybern. Syst. Anal.* 46, No. 5, 772-783 (2010).
4. *Белан Е. П.* Стационарные структуры в параболическом уравнении с преобразованием отражения пространственной переменной. // Динамические системы. — 2010. — Вып. 28. — С. 35-47.  
Belan, E. P. Stationary structures in parabolic equations with inversion transformer spatial argument. *Dinamicheskie Sistemy* 28, 35-47 (2010). (in Russian)
5. *Белан Е. П., Хазова Ю. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с преобразованием отражения пространственной переменной. // Динамические системы. — 2014. — Т. 4(32), №1-2. — 43-57.  
Belan, E. P.; Khazova, Yu. A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dinamicheskie Sistemy* 4(32), No.1-2, 43-57 (2014). (in Russian)
6. *Разгулин А. В.* Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1993. — Т.33, №10. — С. 1499-1508.  
Razgulin, A. V. The stability of self-excited bifurcation oscillations in a nonlinear parabolic problem with transformed argument. *Comput. Math. Math. Physics* 33, No.10, 1323-1330 (1993).
7. *Хазова Ю. А.* Динаміка стаціонарних структур в параболічній задачі з відображенням просторової змінної. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. — 2014. — Вип. 22. — С. 30-40.

- Khazova, Yu. A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. Vestnik Ivovskogo universiteta. Seria prikladnaya matematika i informatika 22, 30–40 (2014). (in Ukraine)
8. *Хазова Ю. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной. // Динамические системы. — 2014. — Т.4(32), No 3–4. — С. 245–257.
- Khazova, Yu. A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of segment. Dinamicheskie Sistemy Vol.4(32), No 3-4, 245–257 (2014). (in Russian)
9. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной. // Таврический вестник информатики и математики. — 2015.— No.3(28). — С. 82–95.
- Khazova, Yu. A. Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki No.3 (28), 82–95 (2015). (in Russian)
10. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной. // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — 2015. — Т.3, № 8–4 (19-4). — С. 314–317.
- Khazova, Yu. A. Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. Aktualniye napravleniya nauchnih issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika 3, 3–16 (2015). (in Russian)
11. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
- Henry, D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1981.
12. *Carr J., Pego R. L.* Metastable Patterns in Solution of  $u_t = \mu^2 u_{xx} - f(u)$ . Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1989. — Vol. XLII. — P. 523–576.
13. *Fusco G., Hale J. K.* Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singular Perturbations. // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 1989. — Vol. 1, no.1. — P. 75–94.
14. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics. // Nonlinear Analysis. Theory. Methods & Applications. — 1998. — Vol.12, No.2. — P. 261-278.

Получена 07.01.2017