

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

Математический журнал

Главный редактор: д-р физ.-мат. наук О. В. Анашкин, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь.

Заместитель главного редактора: д-р физ.-мат. наук О. В. Починка, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород.

Редакционная коллегия:

Е. П. Белан, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

А. Т. Барабанов, д-р техн. наук, Севастопольский государственный ун-т, Севастополь;

В. З. Гринес, д-р физ.-мат. наук, Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики» (нижегородский филиал), Нижний Новгород;

Г. В. Демиденко, д-р физ.-мат. наук, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;

А. Л. Зуев, д-р физ.-мат. наук, Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany;

Н. Д. Копачевский, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

В. А. Лукьяненко, канд. физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

М. А. Муратов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

И. В. Орлов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь;

Г. С. Осипенко, д-р физ.-мат. наук, Севастопольский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, Севастополь;

В. Н. Тхай, д-р физ.-мат. наук, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Москва;

А. Ф. Хрусталеv, д-р физ.-мат. наук, Севастопольский государственный ун-т, Севастополь;

В. Н. Чехов, д-р физ.-мат. наук, КФУ им. В. И. Вернадского, Симферополь.

Том 7(35), №1, 1-100.

Печатается по решению Научно-технического Совета КФУ протокол №7 от 14.09.2017.

ISSN 0203–3755

Адрес редакционной коллегии: Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, к. 203В, пр-т Вернадского, 4, Симферополь 295007, Россия. Тел. +7 978 7715582. E-mail: dynsys2011@yandex.ru

© Крымский федеральный ун-т, 2017

Свидетельство о регистрации средства массовой информации — ПИ №ФС77-61810, выдано 18.05.15
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых
коммуникаций.

УДК 531.36+531.384

Об устойчивости стационарных движений механических систем с неизвестными первыми интегралами¹

А. В. Карапетян, А. С. Кулешов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Москва 119991. E-mail: avkarapetyan@yandex.ru, kuleshov@mech.math.msu.su

Аннотация. В работе обсуждаются вопросы устойчивости стационарных движений консервативных и диссипативных механических систем с первыми интегралами. Рассматриваются системы определенного вида, для изучения устойчивости которых не требуется знания явных выражений первых интегралов кроме, быть может, одного. Общие результаты иллюстрируются на примере задачи о качении динамически симметричного тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости и на примере задачи о качении круглого диска по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Ключевые слова: механические системы, первые интегралы, устойчивость.

Stability of stationary motions of mechanical systems with unknown first integrals

A. V. Karapetyan, A. S. Kuleshov

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991.

Abstract. Application of the Routh-Salvadori theorem and its generalizations for investigation of stability of stationary motions of mechanical systems with first integrals $U_0 = c_0, U_1 = c_1, \dots, U_k = c_k$ is reduced to study the type of stationary value of U_0 (here U_0 can be also a nonincreasing along system trajectories function) for fixed values of U_1, \dots, U_k . This method does not take into account equations of motion of the considered system however it is supposed that all first integrals are known explicitly. On the other hand it is possible to distinguish the systems for which the stability analysis does not require the explicit form of all first integrals $U_1 = c_1, \dots, U_k = c_k$, except $U_0 = c_0$. In this paper we discuss problems of stability of stationary motions for such systems. General results are illustrated by the problem of motion of a rotationally symmetric rigid body on a perfectly rough plane and by the problem of motion of a round disk on a perfectly rough plane.

Keywords: mechanical systems; first integrals; stability.

MSC 2010: 70K20; 70E50; 70E18

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 16-01-00338.

1. Постановка задачи и общие результаты

Применение теоремы Рауса-Сальвадори и её модификаций [7, 10, 11, 12] для исследования устойчивости стационарных движений систем, допускающих первые интегралы, связано с изучением характера стационарного значения одного из них (или невозрастающей вдоль траекторий системы функции) при фиксированных значениях других интегралов. Эффективный метод такого исследования приведен, например, в работе [5], и предполагает, что все используемые первые интегралы известны в явном виде. Уравнения движения рассматриваемой системы в этом методе не используются. С другой стороны, руководствуясь идеями И. М. Миндлина и Г. К. Пожарицкого [4], можно [1] указать системы определенного вида, для изучения устойчивости которых не требуется знания явных выражений первых интегралов кроме, быть может, одного.

Пусть уравнения движения какой-либо системы можно представить в виде (значок T означает транспонирование):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{\Gamma}^T \frac{\partial W}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{q}}. \quad (1.1)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)^T, \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)^T, \quad W = W(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{p}),$$

$$2K = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad \forall \dot{\mathbf{q}} \neq 0, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{G}^T = -\mathbf{G}.$$

Матрица $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ размера $(m \times m)$ и скалярная функция $W(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ предполагаются два раза, а матрица $\mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p})$ размера $(m \times m)$ и матрица $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ размера $(k \times m)$ – один раз непрерывно дифференцируемыми по входящим в них переменным.

В частности, уравнения вида (1.1) могут описывать движение механических систем с псевдоциклическими координатами (при этом \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{q}}$ – позиционные координаты и скорости соответственно, \mathbf{p} – импульсы или квазискорости квазициклических координат).

Очевидно, уравнения (1.1) допускают обобщённый интеграл энергии

$$U_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}) = K + W = c_0. \quad (1.2)$$

Кроме того, если матрица $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – нулевая, то уравнения (1.1) совпадают с уравнениями движения консервативных механических систем с циклическими координатами, записанными в переменных Рауса [10], и допускают k циклических интегралов

$$U_1 = p_1 = c_1, \dots, U_k = p_k = c_k. \quad (1.3)$$

При этом стационарным значениям интеграла (1.2) при фиксированных значениях интегралов (1.3) отвечают стационарные движения вида

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^0, \quad \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}^0, \quad (1.4)$$

причем постоянные \mathbf{p}^0 произвольны, а постоянные \mathbf{q}^0 определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (1.5)$$

Стационарные движения (1.4) образуют семейство S_0 размерности, не меньшей числа циклических координат. Для таких ($\mathbf{\Gamma} = 0$) систем теорема Рауса может быть сформулирована следующим образом [10, 11].

Теорема 1. *Если функция W (обычно называемая измененной потенциальной энергией) имеет строгий минимум в точке $(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$ при фиксированных значениях интегралов (1.3), то соответствующее стационарное движение (1.4) устойчиво.*

Отметим, что условия Теоремы 1 заведомо выполнены, если все собственные значения матрицы $(\partial^2 W / \partial \mathbf{q}^2)$ положительны в точке $(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$.

В общем случае, при $\mathbf{\Gamma} \neq 0$ система (1.1) также допускает стационарные движения вида (1.4), однако при этом постоянные \mathbf{q}^0 и \mathbf{p}^0 определяются из уравнений

$$\frac{DW}{D\mathbf{q}} = 0 \quad \left(\frac{D}{D\mathbf{q}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right), \quad (1.6)$$

которые, вообще говоря, не совпадают с уравнениями (1.5). Очевидно, как и в случае $\mathbf{\Gamma} = 0$, стационарные движения (1.4) образуют семейство размерности, не меньшей числа псевдоциклических координат, поскольку m уравнений (1.6) служат для определения $k + m$ неизвестных $\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0$; будем обозначать его по-прежнему через S_0 .

Достаточные условия устойчивости таких стационарных движений даёт [1].

Теорема 2. *Если все собственные значения матрицы*

$$\left(\frac{D^2 W}{D\mathbf{q}^2} \right) \quad (1.7)$$

положительны в точке $(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$ и в некоторой окрестности этой точки справедливы соотношения

$$\frac{D\gamma_{\alpha i}}{Dq_j} = \frac{D\gamma_{\alpha j}}{Dq_i}, \quad (i, j = 1, \dots, m; \alpha = 1, \dots, k) \quad (1.8)$$

где $\gamma_{\alpha i} = \gamma_{\alpha i}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – элементы матрицы $\mathbf{\Gamma}$, $\alpha = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, m$, то стационарное движение (1.4) системы (1.1) устойчиво.

Доказательство. Для доказательства Теоремы 2 заметим, что при выполнении условий (1.8) система $k \times m$ уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{\Gamma} \quad (1.9)$$

относительно k неизвестных функций $\mathbf{p}(\mathbf{q})$ вполне интегрируема в окрестности точки $(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$. Следовательно, в окрестности этой точки существует семейство решений системы (1.9) вида

$$\mathbf{p} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{c}), \quad (1.10)$$

зависящее от k произвольных постоянных $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)^T$, причём соотношения (1.10) разрешимы относительно этих постоянных. Это означает, что кроме интеграла (1.2) система (1.1) допускает k первых интеграла вида

$$U_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c_1, \dots, U_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c_k \quad (1.11)$$

причем по определению этих интегралов имеем

$$U_i(\mathbf{q}, \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{c})) \equiv c_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Далее, если все собственные значения матрицы (1.7), симметричной при условиях (1.8), положительны в точке $(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$, то функция $W(\mathbf{q}, \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{c}))$ имеет строгий минимум при $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0$, $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}^0 \equiv \mathbf{U}(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$, $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_k)$. Отсюда следует, что функция $W(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ и интеграл (1.2) (так как $K > 0 \forall \dot{\mathbf{q}} \neq 0$) имеют строгий минимум при фиксированных значениях интегралов (1.11) на невозмущенном движении, и последнее, согласно теореме Рауса [10, 11, 12], является устойчивым. \square

Очевидно, что как в случае $\mathbf{\Gamma} = 0$ так и в случае $\mathbf{\Gamma} \neq 0$ справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если*

$$\left(\frac{D^2 W}{D\mathbf{q}^2} \right) < 0$$

в точке $(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$, то стационарное движение (1.4) неустойчиво.

Замечание 1. Применение Теоремы 2 для исследования устойчивости стационарных движений (1.4) системы вида (1.1) связано с исследованием собственных значений матрицы (1.7) и требует знания лишь функции $W(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ и матрицы $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$; явные выражения интегралов (1.11) (а также матриц $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p})$) при этом не требуются. Отметим также, что условия стационарности интеграла (1.2) при фиксированных значениях интегралов (1.11) имеют вид (1.6) и также не требуют знания явного вида интегралов (1.11). Более того, уравнения (1.6) определяют установившиеся решения (1.4) системы (1.1) и в случае отсутствия этих интегралов (т.е. при невыполнении условий (1.8)).

Замечание 2. Условия (1.8) заведомо выполнены, если $\mathbf{\Gamma} = 0$ (при этом интегралы (1.11) можно выписать в явном виде (1.3)) или если при $\mathbf{\Gamma} \neq 0$ мы имеем $\dim \mathbf{q} = 1$ (в этом случае интегралы (1.11), вообще говоря, в явном виде выписать невозможно).

Замечание 3. При фиксированных значениях постоянных \mathbf{p}^0 как уравнения (1.5) так и уравнения (1.6) (относительно \mathbf{q}) могут иметь не только решение \mathbf{q}^0 , но и, вообще говоря, решения $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dots$, которые также зависят от постоянных \mathbf{p} , т.е. стационарные движения $\mathbf{q}^1(\mathbf{p}), \mathbf{q}^2(\mathbf{p}), \dots$ образуют семейства S_1, S_2, \dots . Таким образом, множество S всех стационарных движений рассматриваемой системы представляет собой объединение семейств S_0, S_1, S_2, \dots .

Если на рассматриваемую систему действуют (помимо потенциальных) диссипативные силы $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, отвечающие позиционным координатам \mathbf{q} , то уравнения движения системы примут вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{\Gamma}^T \frac{\partial W}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{Q}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{q}}. \quad (1.12)$$

При этом, согласно определению диссипативных сил

$$\frac{d}{dt} (K + W) = (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}) \leq 0; \quad \mathbf{Q}(\mathbf{q}, 0) \equiv 0$$

и вместо интеграла (1.2) система (1.12) допускает невозрастающую вдоль всех движений системы функцию

$$U_0 \equiv K + W \leq c_0.$$

Очевидно, Теоремы 1 и 2 сохраняют справедливость и по отношению к стационарным движениям (1.4) системы (1.12), причем постоянные $(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$ в (1.4) по-прежнему удовлетворяют либо уравнениям (1.5) при $\mathbf{\Gamma} = 0$, либо уравнениям (1.6) при $\mathbf{\Gamma} \neq 0$. Кроме того, если диссипативные силы обладают полной по отношению к обобщенным скоростям позиционных координат диссипацией, т.е. если

$$(\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}) \neq 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}} \neq 0, \quad (1.13)$$

то справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. *Если стационарное движение (1.4) системы (1.12) при $\mathbf{\Gamma} = 0$ доставляет функции W строгий минимум и изолировано при фиксированных значениях интегралов (1.5), то оно устойчиво, причем при условии (1.13) всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ стремится к одному из стационарных движений вида (1.4), принадлежащих семейству S_0 ; в частности, если постоянные интегралов (1.3) не возмущаются, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Теорема 5. *Если стационарное движение (1.4) системы (1.12) при $\mathbf{\Gamma} = 0$ не доставляет функции W даже нестрогого минимума и изолировано при постоянных значениях интегралов (1.3), то при условии (1.13) оно неустойчиво.*

Отметим, что первое условие Теоремы 4 [Теоремы 5] заведомо выполнено, если все собственные значения матрицы $(\partial^2 W / \partial \mathbf{q}^2)$ в точке $(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$ положительны [среди собственных значений матрицы $(\partial^2 W / \partial \mathbf{q}^2)$ в точке $(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$ имеются отрицательные].

Теорема 6. *Если все собственные значения матрицы (1.7) положительны в точке $(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$ и в некоторой окрестности этой точки выполняются соотношения (1.8), то стационарное движение (1.4) системы (1.12) устойчиво, причем при условии (1.13) всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически при $t \rightarrow +\infty$ стремится к одному из стационарных движений вида (1.4), принадлежащих семейству S_0 ; в частности, если переменные \mathbf{p} не возмущаются, невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Теорема 7. *Если среди собственных значений матрицы (1.7) в точке $(\mathbf{q}^0, \mathbf{p}^0)$ есть отрицательные и в некоторой окрестности этой точки выполняются соотношения (1.8), то при условии (1.13) стационарное движение (1.4) системы (1.12) неустойчиво.*

Доказательства Теорем 4–7 следуют из результатов работ [1, 7, 12]. Применим теперь сформулированные выше теоремы для исследования устойчивости стационарных движений тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

2. Стационарные движения тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости

Рассмотрим задачу о качении без скольжения тяжелого твердого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости, предполагая, что центр тяжести тела G лежит на его оси симметрии $G\zeta$. Пусть M – точка касания тела с плоскостью.

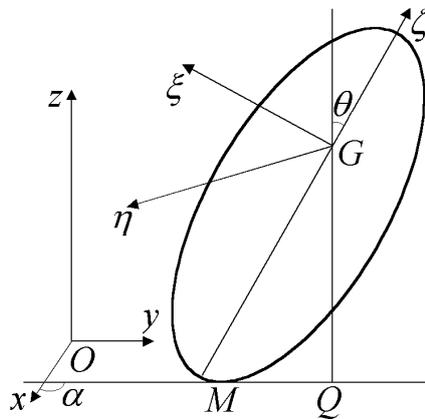


Рис. 1.

Введем неподвижную систему координат $Oxyz$: точка O принадлежит опорной плоскости Oxy , и ось Oz направлена вертикально вверх. Обозначим через θ угол между осью симметрии тела и вертикалью, через β – угол между меридианом $M\zeta$ тела и какой-либо фиксированной меридианной плоскостью, а через α – угол между горизонтальной касательной MQ меридиана $M\zeta$ и осью Ox . Положение тела будет вполне определено углами α , β и θ и координатами x и y точки M .

Введём также систему координат $G\xi\eta\zeta$, подвижную как в теле, так и в абсолютном пространстве, следующим образом: ось $G\zeta$ является осью симметрии тела, ось $G\xi$ все время лежит в плоскости вертикального меридиана $M\zeta$, а ось $G\eta$ перпендикулярна этой плоскости (Рис. 1). Пусть векторы скорости центра масс G , угловой скорости ω тела и угловой скорости Ω трехгранника $G\xi\eta\zeta$ задаются в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компонентами $v_\xi, v_\eta, v_\zeta; \omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ и $\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$ соответственно. Тогда для компоненты ω_η справедливо очевидное соотношение:

$$\omega_\eta = -\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}.$$

Пусть m – масса тела, A_1 – его момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 – момент инерции относительно оси симметрии.

Заметим, что расстояние GQ от центра тяжести до плоскости Oxy будет функцией угла θ , т.е. $GQ = f(\theta)$ [6]. Координаты ξ, η, ζ точки M касания тела и плоскости в системе координат $G\xi\eta\zeta$ также будут функциями только угла θ , причём $\eta = 0$ и

$$\xi = -f(\theta) \sin \theta - f'(\theta) \cos \theta, \quad \zeta = -f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta, \quad (2.1)$$

где $()'$ обозначает производную функции $f(\theta)$ по θ [6]. Таким образом, с помощью функции $f(\theta)$ мы можем полностью охарактеризовать форму движущегося тела. Так как ось $G\zeta$ неподвижна в теле, то $\Omega_\xi = \omega_\xi, \Omega_\eta = \omega_\eta = -\dot{\theta}$. Плоскость $G\xi\zeta$ будет всё время вертикальной, поэтому $\Omega_\zeta = \Omega_\xi \operatorname{ctg} \theta$. Поскольку скольжения нет, то

$$v_\xi - \dot{\theta}\zeta = 0, \quad v_\eta + \omega_\zeta\xi - \omega_\xi\zeta = 0, \quad v_\zeta + \dot{\theta}\xi = 0$$

а для трех неизвестных функций времени θ, ω_ξ и ω_ζ мы имеем замкнутую систему уравнений [6]

$$\begin{aligned} (A_1 + m\xi^2 + m\zeta^2) \ddot{\theta} &= -mgf'(\theta) - (A_3\omega_\zeta - A_1\omega_\xi \operatorname{ctg} \theta) \omega_\xi + \\ &+ m\omega_\xi (\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi) (\omega_\xi\zeta - \omega_\zeta\xi) - m\dot{\theta}^2 (\xi\xi' + \zeta\zeta'), \\ \dot{\omega}_\xi &= \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{A_3m\zeta (\xi + \zeta')}{\Delta} \right) \omega_\xi\dot{\theta} + \frac{A_3 (A_3 + m\xi^2 + m\xi'\zeta)}{\Delta} \omega_\zeta\dot{\theta}, \\ \dot{\omega}_\zeta &= \frac{A_1m\xi (\xi + \zeta')}{\Delta} \omega_\xi\dot{\theta} + \frac{m\xi (A_3\zeta - A_1\xi')}{\Delta} \omega_\zeta\dot{\theta}, \\ \Delta &= A_1A_3 + A_1m\xi^2 + A_3m\zeta^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если обозначить

$$\omega_\xi = p_1, \quad \omega_\zeta = p_2, \quad K = \frac{1}{2} (A_1 + m\xi^2 + m\zeta^2) \dot{\theta}^2,$$

$$W = \frac{A_1}{2} p_1^2 + \frac{A_3}{2} p_2^2 + \frac{m}{2} (p_1 \zeta - p_2 \xi)^2 + mgf,$$

$$\Gamma_1 = \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{A_3 m \zeta (\xi + \zeta')}{\Delta} \right) p_1 + \frac{A_3 (A_3 + m\xi^2 + m\xi' \zeta)}{\Delta} p_2,$$

$$\Gamma_2 = \frac{A_1 m \xi (\xi + \zeta')}{\Delta} p_1 + \frac{m \xi (A_3 \zeta - A_1 \xi')}{\Delta} p_2,$$

то система уравнений (2.2) может быть переписана в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial K}{\partial \theta} - \frac{\partial W}{\partial \theta} - \Gamma_1 \frac{\partial W}{\partial p_1} - \Gamma_2 \frac{\partial W}{\partial p_2},$$

$$\dot{p}_1 = \Gamma_1 \dot{\theta}, \quad \dot{p}_2 = \Gamma_2 \dot{\theta}.$$

Таким образом, система уравнений (2.2), описывающая движение тяжелого твердого динамически симметричного тела по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, приводится к виду (1.1). Поскольку в данном случае число позиционных координат равно единице и $\Gamma_1 \neq 0$, $\Gamma_2 \neq 0$, то для системы (2.2) справедлива Теорема 2. Стационарные движения тела вида (1.4)

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad p_1 = p_1^0, \quad p_2 = p_2^0 \quad (2.3)$$

определяются из уравнения

$$\frac{DW}{D\theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} + \Gamma_1 \frac{\partial W}{\partial p_1} + \Gamma_2 \frac{\partial W}{\partial p_2} = 0 \quad (2.4)$$

или, в явном виде,

$$mgf' + Dp_1 p_2 - C \operatorname{ctg} \theta p_1^2 = 0,$$

$$C = A_1 - \frac{m\zeta}{\cos \theta} f, \quad D = A_3 - \frac{m\xi}{\sin \theta} f.$$

и образуют двумерное семейство. Анализ знака выражения

$$\frac{D^2 W}{D\theta^2}$$

на стационарном движении (2.3) дает достаточное условие устойчивости этого движения по отношению к переменным θ , $\dot{\theta}$, p_1 и p_2 в виде неравенства

$$mgf'' + (Dp_2 - 2Cp_1 \operatorname{ctg} \theta) \Gamma_1 - C' \operatorname{ctg} \theta p_1^2 + \frac{C}{\sin^2 \theta} p_1^2 + D' p_1 p_2 + Dp_1 \Gamma_2 > 0. \quad (2.5)$$

Можно показать [1], что при строгом нарушении неравенства (2.5) стационарное движение (2.3) неустойчиво.

В соответствии с Теоремой 5 все результаты исследуемой задачи о стационарных движениях динамически симметричного тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости сохраняются при действии диссипативной силы $Q(\theta, \dot{\theta})$, отвечающей позиционной координате θ . Если, кроме того, диссипативная сила удовлетворяет условию

$$Q(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} < 0, \quad \forall \dot{\theta} \neq 0$$

то стационарное движение (2.3) при условии (2.5) становится асимптотически устойчивым по отношению к переменным

$$\dot{\theta}, \quad P = mgf' + Dp_1p_2 - C \operatorname{ctg} \theta p_1^2.$$

3. Стационарные движения диска на абсолютно шероховатой плоскости

Рассмотрим частный случай предыдущего примера, когда динамически симметричное тело, движущееся по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости, представляет собой круглый диск [2, 3, 8, 9]. Пусть m – масса диска, a – его радиус, $A_1 = kma^2$ и $A_3 = 2kma^2$ – экваториальный и осевой моменты инерции. В случае однородного диска постоянная $k = 1/4$, а в случае обруча $k = 1/2$. Тогда $GQ = a \sin \theta$ и в соответствии с формулами (2.1) имеем:

$$\xi = -a, \quad \zeta = 0.$$

Система уравнений (2.2) принимает вид

$$(k+1)a\ddot{\theta} = -g \cos \theta + k a \omega_\xi^2 \operatorname{ctg} \theta - (2k+1)a \omega_\xi \omega_\zeta, \tag{3.1}$$

$$\dot{\omega}_\xi = \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \omega_\xi + 2\omega_\zeta \right) \dot{\theta}, \quad \dot{\omega}_\zeta = \frac{\omega_\xi}{(2k+1)} \dot{\theta}.$$

Если снова обозначить $\omega_\xi = p_1$ и $\omega_\zeta = p_2$, то стационарные движения диска вида (2.3) определяются из уравнения

$$k a p_1^2 \operatorname{ctg} \theta - (2k+1) a p_1 p_2 - g \cos \theta = 0. \tag{3.2}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае система уравнений (3.1) может быть разрешена относительно $\omega_\xi = p_1$ и $\omega_\zeta = p_2$. Соответствующее решение имеет вид:

$$p_1 = \sin \theta \left(c_1 F \left(\alpha+1, \beta+1, 2; \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - c_2 F \left(\alpha+1, \beta+1, 2; \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) =$$

$$= \sin \theta (c_1 v_1 - c_2 v_2), \tag{3.3}$$

$$p_2 = c_1 F \left(\alpha, \beta, 1; \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + c_2 F \left(\alpha, \beta, 1; \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) = c_1 u_1 + c_2 u_2.$$

Здесь c_1 и c_2 – произвольные постоянные, а $F(\alpha, \beta, 1; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, параметры α и β которой являются корнями квадратного уравнения

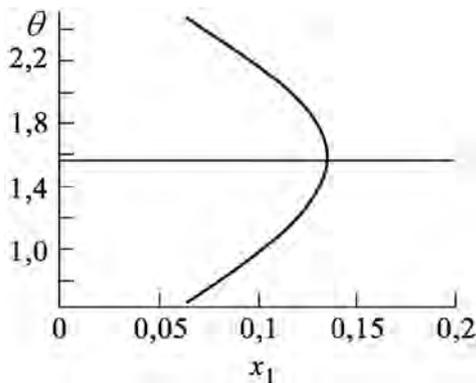
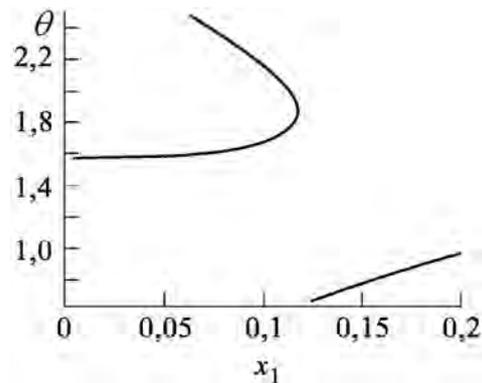
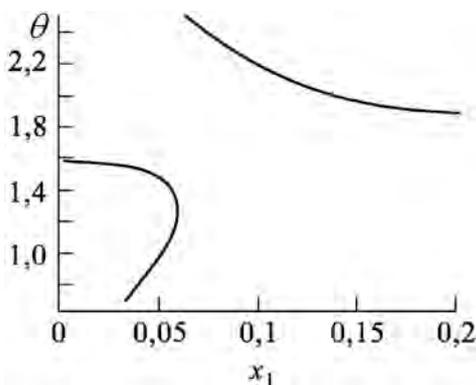
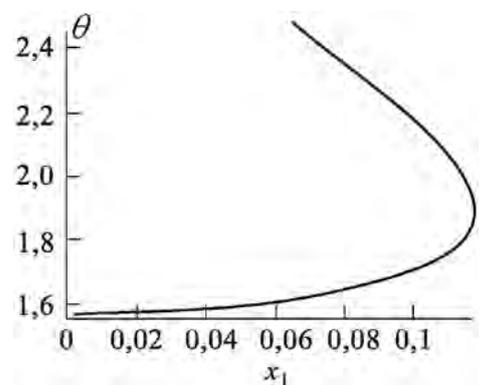
$$s^2 - s + \frac{2}{2k+1} = 0.$$

Подставляя выражения (3.3) для p_1 и p_2 в уравнение (3.2) и вводя безразмерные постоянные $x_i = c_i \sqrt{a/g}$, $i = 1, 2$, приведем уравнение (3.2) к безразмерному виду

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} x_i x_j - \cos \theta = 0, \quad (3.4)$$

$$a_{ij} = a_{ji} = \left((k+1/2) \left((-1)^i u_j v_i + (-1)^j u_i v_j \right) + (-1)^{i+j} k v_i v_j \cos \theta \right) \sin \theta.$$

В пространстве переменных x_1 , x_2 и θ уравнение (3.4) задает некоторую поверхность. Ниже, на Рис. 2-5 представлены сечения этой поверхности плоскостями $x_2 = l x_1$, где l принимает различные значения. Значение параметра k было принято равным $1/4$, что соответствует случаю однородного диска. Отметим, что сечения, аналогичные приведённым на Рис. 2-5, были построены в работе [9].

Рис. 2. $x_2 = x_1$.Рис. 3. $x_2 = 0.5x_1$.Рис. 4. $x_2 = 2x_1$.Рис. 5. $x_2 = 0$.

Легко видеть, что при каждом фиксированном θ уравнение (3.4) задает некоторую кривую второго порядка. Анализ инвариантов этой кривой показывает, что при $\theta \neq \pi/2$ она представляет собой гиперболу, а при $\theta = \pi/2$ – пару пересекающихся прямых. Эти прямые определяются уравнениями $x_1 = x_2$ и $x_1 = -x_2$ и соответствуют двум однопараметрическим подсемействам стационарных движений диска вида

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} = 0, p_2 = 2u_*c_1 = \Omega, p_1 = 0; u_* = F\left(\alpha, \beta, 1; \frac{1}{2}\right) \quad (3.5)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} = 0, p_1 = 2v_*c_1 = \omega, p_2 = 0; v_* = F\left(\alpha + 1, \beta + 1, 2; \frac{1}{2}\right). \quad (3.6)$$

Эти подсемейства отвечают соответственно равномерному качению вертикально расположенного диска вдоль прямой (3.5) и равномерному верчению диска вокруг вертикально расположенного диаметра (3.6). Стационарное движение (3.5) устойчиво [неустойчиво] при

$$\Omega^2 > \Omega_0^2 = \frac{g}{2a(2k+1)} \quad [\Omega^2 < \Omega_0^2],$$

а стационарное движение (3.6) устойчиво [неустойчиво] при

$$\omega^2 > \omega_0^2 = \frac{g}{a(k+1)} \quad [\omega^2 < \omega_0^2]$$

(подробнее см. [8, 9]).

Условие устойчивости (2.5) стационарных движений диска записывается в безразмерной форме следующим образом:

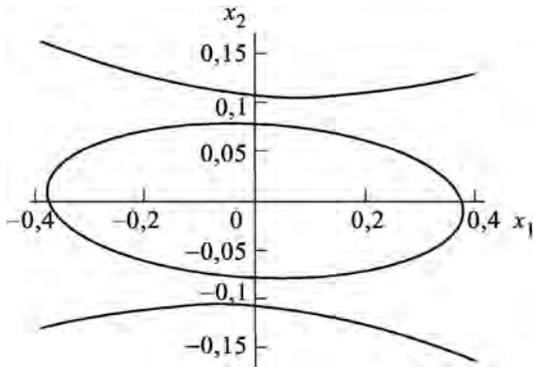
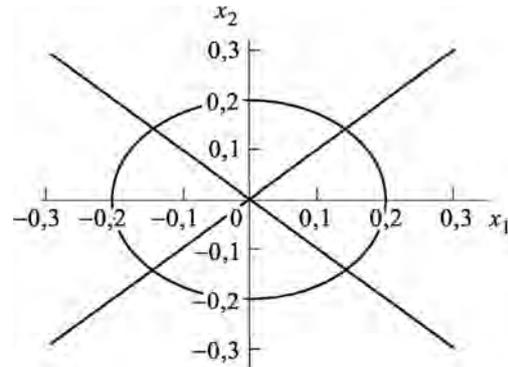
$$\sum_{i,j=1}^2 b_{ij}x_ix_j - \sin\theta \geq 0, \quad (3.7)$$

$$b_{ij} = b_{ji} = 2(2k+1)u_iu_j + (3k+1/2)\left((-1)^i u_jv_i + (-1)^j u_iv_j\right)\cos\theta + \\ + (-1)^{i+j}\left((k+1)\sin^2\theta + 3k\cos^2\theta\right)v_iv_j.$$

При каждом фиксированном θ границей области устойчивости также будет некоторая кривая второго порядка. Анализ ее инвариантов показывает, что при всех $k > 1/\sqrt{3} - 1/2$ данная кривая представляет собой эллипс с центром в точке $x_1 = 0, x_2 = 0$. Вне соответствующего эллипса будет область устойчивости стационарных движений(2.3), а внутри – область неустойчивости.

Таким образом, можно указать на следующую геометрическую интерпретацию условий существования и устойчивости стационарных движений диска [2, 3]. Те стационарные движения, которые на плоскости x_1 и x_2 соответствуют точкам гиперболы, лежащим вне эллипса, очевидно, являются устойчивыми (Рис. 6-7). Если

для некоторого значения угла $\theta = \theta_0$ соответствующие эллипс и гипербола не пересекаются, то все стационарные движения диска, существующие для данного θ_0 являются устойчивыми, независимо от того, какие значения принимают величины x_1 и x_2 (Рис. 6-7).

Рис. 6. Гипербола и эллипс при $\theta = \pi/3$.Рис. 7. Гипербола и эллипс при $\theta = \pi/2$.

Условия существования (3.4) и устойчивости (3.7) стационарных движений (2.3) диска детально анализировались в работах [2, 3]. В частности, в указанных работах [2, 3] было показано, что стационарные движения (2.3) диска являются устойчивыми (независимо от значений переменных x_1 и x_2) при всех θ , удовлетворяющих условию

$$\cos^2 \theta > \cos^2 \theta_* = \frac{2(2k+1) \left[4k+3 - \sqrt{6(2k+1)(k+1)} \right]}{(2k+3)^2 + 3(2k+1)^2}.$$

В частности, для однородного диска ($k = 1/4$) имеем

$$\cos^2 \theta > \frac{25 - 9\sqrt{5}}{38} \approx 0.102, \quad \theta_* \approx 1.2457$$

Для обруча ($k = 1/2$) имеем

$$\cos^2 \theta > \frac{5 - 3\sqrt{2}}{7} \approx 0.108, \quad \theta_* \approx 1.2356.$$

При других значениях θ стационарные движения (2.3) диска будут устойчивы, если величина x_1 превосходит по модулю некоторое критическое значение, явный вид которого здесь не приводится вследствие его громоздкости. Результаты, полученные в работах [2, 3], полностью согласуются с приведёнными в работах [8, 9] и в настоящей работе бифуркационными диаграммами.

Список цитируемых источников

1. *Карпетян, А. В.* Об устойчивости стационарных движений систем некоторого вида // Изв. АН СССР. МТТ. — 1983, №2. — С. 45–52.
Karapetyan, A. V. (1983). Stability of steady motions of systems of a certain type. Mechanics of Solids. 18, 41–47.
2. *Кулешов, А. С.* О стационарных движениях диска на абсолютно шероховатой плоскости // ПММ. — 1999. — Т. 63, Вып. 5. — С. 797–800.
Kuleshov, A. S. (1999). The steady motions of a disc on an absolutely rough plane. J. Appl. Math. Mech. 63, 751–753.
3. *Кулешов, А. С.* О стационарных качениях диска на шероховатой плоскости // ПММ. — 2001. — Т. 65, Вып. 1. — С. 173–175.
Kuleshov, A. S. (2001). The steady rolling of a disc on a rough plane // J. Appl. Math. Mech. 65, 171–173.
4. *Миндлин, И. М., Пожарицкий, Г. К.* Об устойчивости стационарных движений тяжёлого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. — 1965. — Т. 29, вып. 4. — С. 742–745.
Mindlin, I. M., Pozharitskii, G. K. On the stability of steady motions of a heavy body of revolution on an absolutely rough horizontal plane // J. Appl. Math. Mech. — 1965, Vol. 29. — P. 879–883.
5. *Рубановский, В. Н., Степанов, С. Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. — 1969. — Т. 33, Вып. 5. — С. 904–912.
Rubanovskii, V. N., Stepanov, S. Ja. On the Routh theorem and the Chetaev method for constructing the Liapunov function from the integrals of the equations of motion // J. Appl. Math. Mech. — 1969, Vol. 33. — P. 882–890.
6. *Чаплыгин, С. А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. — 1897. — Т. 9, Вып. 1. — С. 10–16.
Chaplygin, S. A. On a motion of a heavy body of revolution on a horizontal plane // Regul. Chaotic Dyn. — 2002. — Vol. 7. — P. 119–130.
7. *Karapetyan, A. V.* The Routh theorem and its extensions // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Qualitative Theory of Differential Equations. Vol. 53. Eds. B. Sz-Nagy, L. Hatvani. — Amsterdam: North-Holland, 1990. — P. 271–290.
8. *Karapetyan, A. V., Kuleshov, A. S.* Steady motions of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn. — 2002. — Vol. 7. — P. 81–117.
9. *O'Reilly, O. M.* The dynamics of rolling disks and sliding disks // Nonlinear Dyn. — 1996. — Vol. 10. — P. 287–305.
10. *Routh, E. J.* A treatise on the stability of a given state of motion. — London: MacMillan and Co, 1877.
11. *Salvadori, L.* Un osservazione su di un criterio di stabilita del Routh // Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. — 1953. — Vol. 20. — P. 269–272.

12. *Salvadori, L.* Sulla stabilita del movimento // *Matematiche.* — 1969. — Vol. 24. — P. 218–239.

Получена 05.03.2017

УДК 517.958

О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд¹

Н. Д. Копачевский

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. E-mail: kopachevsky@crimea.edu

Аннотация. В данной работе изучается проблема малых движений двух вязкоупругих несжимаемых жидкостей модели Олдройта, заполняющих неподвижный сосуд. С помощью применения операторного подхода получена задача Коши для дифференциально-операторного уравнения в некотором гильбертовом пространстве, доказана теорема о корректной разрешимости проблемы на произвольном промежутке времени. Выведено уравнение для нормальных колебаний гидросистемы (обобщённый операторный пучок С. Г. Крейна).

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, гидродинамическая система, ортопроектор, операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши.

Small motions of two viscoelastic fluids in stationary containers

N. D. Kopachevsky

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In the paper, we consider a problem on small motions of two viscoelastic fluids in a stationary container. One of models of such fluids is Oldroid's model. It is described, for example, in the book by F. R. Eirich Rheology. Theory and Applications. N.-Y.: AP, 1956. It should be noted that the present paper based on the previous N. D. Kopachevsky works together with T. Ya. Azizov, L. D. Orlova, S. G. Krein. Namely, problem on small movements of one viscoelastic fluid for generalized Oldroid's model and small motions of a viscoelastic fluid in an open container were investigated in these papers.

The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to develop new approach and to prove the theorem on correct solvability for initial-boundary-value problem generated by a problem of small motions of two viscoelastic fluids in a stationary container.

This paper is organized as follows. In section 1 we describe a model of viscoelastic fluid. In section 2 we formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance. In section 3, we choose the functional spaces generated by the problem. For applying of method of orthogonal projection we need to get orthogonal projectors on corresponding spaces. The laws of action of this projectors we receive in section 4. In section 5 we make transition

¹Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (16-11-10125 "Операторные уравнения в функциональных пространствах и приложения к нелинейному анализу", выполняемого в Воронежском госуниверситете.)

to operator equation by using orthogonal projectors derived in section 4. Further, we solve some auxiliary problems and obtain the Cauchy problem for the system of integro-differential equation in some Hilbert space. In section 6 we make transition to a system of differential equations. This system can be rewrite as operator differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operator of this problem are studied in section 7. The existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial-boundary-value problem based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in section 7 we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem. This means that external forces are equal to zero and dependence by time for the unknown function has the form $e^{-\lambda t}$. Here we obtain the spectral problem for operator pencil. But its investigation will be the object of another paper.

Keywords: viscoelastic fluid, hydrodynamic system, orthogonal projector, operator differential equation, Cauchy problem

MSC 2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

1. Введение

1.1. О модели вязкоупругой жидкости

В данной работе изучается проблема малых движений вязкоупругих несжимаемых жидкостей модели Олдройта (см., например, [8]). В этой модели связь между тензором вязких напряжений и удвоенным тензором скоростей деформаций в вязкоупругой жидкости описывается не простейшим законом Гука, а линейным дифференциальным соотношением, где фигурируют производные первого порядка по времени как у тензора вязких напряжений, так и у тензора скоростей деформаций.

Некоторые исследователи (см., например, [5, 12, 13], а также [7, 11]) рассматривают так называемую обобщённую модель Олдройта, когда упомянутая выше связь описывается линейным дифференциальным соотношением порядка $m \geq 1$. Тогда при естественном условии, что если в начальный момент времени тензор скорости деформации и его производные по времени вплоть до порядка $m - 1$ равны нулю, то эти же условия выполнены и для тензора вязких напряжений, получается связь между этими тензорами в любой момент времени с помощью интегрального оператора Вольтерра. Этот переход от дифференциальной связи к интегральной описан, например, в [11, с.316-318].

Пусть $\mathbf{u}(t, x) = \sum_{k=1}^3 u_k(t, x) \mathbf{e}_k$ — поле скоростей в вязкоупругой жидкости, $\tau_{kl}(\mathbf{u}) := \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$, ($k, l = 1, 2, 3$) — удвоенный тензор скоростей деформаций, а σ'_{kl} — тензор вязких напряжений. Тогда связь между ними описывается соотношением

$$\sigma' = \mu I_0(t) \tau, \quad (1.1)$$

где $\mu > 0$ — коэффициент динамической вязкой жидкости, а

$$I_0(t) \tau := \tau(t) + \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^t e^{-\beta_j(t-s)} \tau(s) ds, \quad (1.2)$$

где α_j и β_j — положительные константы, характеризующие вязкоупругую жидкость. Если $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, m$, то отсюда получаем модель обычной вязкой несжимаемой жидкости, а из (1.1) — закон Гука. Отметим ещё следующий факт: интегральный оператор Вольтерра из (1.1) является обратимым интегральным оператором второго рода, причём обратный оператор также является интегральным оператором Вольтерра.

1.2. Об истории вопроса и содержании данной работы

Одними из первых работ, связанных с применением методов функционального анализа к исследованию проблемы малых движений и нормальных колебаний вязкоупругой жидкости в частично заполненном сосуде, являются работы А. И. Милославского (см. [5, 12, 13]). В них для обобщённой модели Олдройта ($m > 1$) применён операторный подход, развивающий построения, проведенные ранее С. Г. Крейнсом и его учениками применительно к задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. Исследования А. И. Милославского отражены, в частности, в главе 8 монографии [11]. Случай полного заполнения полости вязкоупругой жидкостью рассмотрен в [7], а также в параграфе 7.1 из [11].

В данной работе изучается проблема малых движений системы из двух вязкоупругих несмешивающихся жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. Для простоты взята модель Олдройта ($m = 1$), хотя все построения можно провести и для обобщённой модели Олдройта ($m > 1$) по той же схеме. Аналогичный подход можно применить и к случаю, когда сосуд заполнен не двумя, а системой из произвольного числа несмешивающихся вязкоупругих жидкостей обобщённой модели Олдройта.

Изложение в данной работе проведено по следующей схеме. После введения в параграфе 2 даётся постановка начально-краевой задачи о малых движениях системы из двух несмешивающихся вязкоупругих жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд и находящихся в однородном гравитационном поле, действующем вертикально вниз. Для классического решения задачи выведен закон баланса полной энергии. Это позволяет в параграфе 3 осуществить выбор функциональных гильбертовых пространств, в которых естественно изучать поставленную проблему. Далее в параграфе 4 приводится вывод формул для ортопроекторов, непосредственно связанных с указанными пространствами. После этого в параграфе 5 осуществлён операторный подход к исследуемой задаче, позволяющий привести проблему к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения в некотором гильбертовом пространстве. Затем в параграфе 6 осуществлён переход к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в ортогональной сумме гильбертовых пространств. После подробного изучения свойств операторной матрицы, отвечающей возникшей системе уравнений (факторизация, аккретивность, замыкание) в параграфе 7 доказываются теоремы о сильной разрешимости полученной задачи Коши на конечном интервале времени. На этой основе доказана также теорема о существовании обобщённого решения исходной

начально-краевой задачи. Наконец, для проблемы нормальных колебаний гидросистемы получено уравнение (операторный пучок), обобщающее соответствующие уравнения как для проблемы с двумя обычными вязкими жидкостями (пучок С. Г. Крейна), так и для задачи о колебаниях одной вязкой жидкости.

2. Постановка задачи. Закон баланса полной энергии

2.1. Классическая постановка задачи

Будем считать, что две вязкоупругие жидкости модели Олдройта заполняют произвольный сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и в состоянии равновесия под действием гравитационного поля занимают области Ω_1 и Ω_2 соответственно с горизонтальной границей раздела Γ . Обозначим через S_1 и S_2 те части границы $\partial\Omega$, которые примыкают к первой и второй жидкостям соответственно.

Введём декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы ось Ox_3 была направлена вверх, т.е. против действия однородного гравитационного поля, а начало координат O находилось на Γ . Тогда ускорение гравитационного поля $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$, $g > 0$, а в состоянии покоя поля давлений в жидкостях выражаются по законам

$$P_{0,k}(x_3) = p_0 - \rho_k g x_3, \quad k = 1, 2, \quad (2.1)$$

где ρ_k — плотности жидкостей, а p_0 — давление на границе раздела Γ , т.е. при $x_3 = 0$.

Рассмотрим малые движения системы из двух жидкостей, близкие к состоянию покоя. Пусть $\mathbf{u}_k(t, x)$ — поля малых скоростей, а $p_k(t, x)$ — отклонения полей давлений от их равновесных значений (см.(2.1)). Для простоты рассматриваем вязкоупругие жидкости модели Олдройта, когда в (1.1) $m = 1$. Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x)$, $x \in \Omega$.

Тогда линеаризованные уравнения движения жидкостей имеют следующий вид (см., например, [11, с.318, 342-343]):

$$\rho_k \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} = -\nabla p_k + \mu_k \Delta \mathbf{v}_k + \rho_k \mathbf{f}_k(t, x), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v}_k(t, x) = \mathbf{u}_k(t, x) + \alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \mathbf{u}_k(s, x) ds =: I_{0,k}(t) \mathbf{u}_k, \quad k = 1, 2, \quad (2.3)$$

где $\mu_k > 0$ — динамические вязкости жидкостей, $\alpha_k \geq 0$, $\beta_k > 0$ — коэффициенты, характеризующие свойства вязкоупругости жидкостей модели Олдройта, $\mathbf{f}_k(t, x) := \mathbf{f}(t, x)|_{x \in \Omega_k}$, а Δ — трёхмерный оператор Лапласа.

Для вязких жидкостей, как известно, на твёрдых стенках S_k сосуда должны выполняться условия прилипания, т.е.

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{0} \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \quad (2.4)$$

а на границе раздела Γ — условие непрерывности полей скоростей:

$$\mathbf{u}_1(t, x) = \mathbf{u}_2(t, x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.5)$$

Будем описывать малые перемещения границы раздела между жидкостями с помощью функции вертикального отклонения

$$x_3 = \zeta(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \quad (2.6)$$

Тогда на Γ должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} =: \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} =: \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_3, \quad (2.7)$$

а символом $\gamma_{n,k}$ обозначена операция взятия нормального следа на Γ , т.е. следа нормальной компоненты поля скорости. Заметим ещё, что из условия сохранения объёма каждой из жидкостей имеем интегральную связь

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \quad (2.8)$$

Сформулируем теперь динамические условия на Γ . Они состоят в том, что на движущейся границе раздела векторное поле напряжений при переходе от одной жидкости к другой изменяется непрерывно. Линеаризация этого условия и его снос на Γ приводят к следующим соотношениям: на Γ касательные напряжения (т.е. вдоль Γ) изменяются непрерывно, а нормальное напряжение (т.е. вдоль оси Ox_3) компенсируется гравитационным скачком давлений. Имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 \tau_{j3}(\mathbf{v}_1) &= \mu_2 \tau_{j3}(\mathbf{v}_2), \quad \mathbf{v}_k = I_{0,k}(t) \mathbf{u}_k, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2; \\ [-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)] &- [-p_2 + \mu_2 \tau_{33}(\mathbf{v}_2)] = -g(\rho_1 - \rho_2) \zeta \quad (\text{на } \Gamma). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Наконец, для искомым функций $\mathbf{u}_k(t, x)$, $p_k(t, x)$, $k = 1, 2$, и $\zeta(t, x_1, x_2)$ необходимо ещё задать начальные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k(0, x) &= \mathbf{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad \mathbf{u}_1^0(x) \equiv \mathbf{u}_2^0(x), \quad x \in \Gamma, \\ \zeta(0, x) &= \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2. Закон баланса полной энергии

Будем считать, что задача (2.2)-(2.10) имеет классическое решение, и выведем закон баланса полной энергии гидросистемы. Предварительно выпишем формулы Грина для векторных полей скоростей в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно. Для дважды непрерывно дифференцируемых полей они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_1 E_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{u}_1) &:= \frac{1}{2} \mu_1 \int_{\Omega_1} \left(\sum_{j,l=1}^3 \tau_{jl}(\boldsymbol{\eta}_1) \overline{\tau_{jl}(\mathbf{u}_1)} \right) d\Omega_1 = \\ &= \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \overline{(-\mu_1 \Delta \mathbf{u}_1 + \nabla p_1)} d\Omega_1 + \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^3 \eta_{1,j} \overline{(\mu_1 \tau_{j,3}(\mathbf{u}_1) - p_1 \delta_{j3})} d\Gamma, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_1 &= \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{0} \quad (\text{на } S_1), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 E_2(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{u}_2) &:= \frac{1}{2} \mu_2 \int_{\Omega_2} \left(\sum_{j,l=1}^3 \tau_{jl}(\boldsymbol{\eta}_2) \overline{\tau_{jl}(\mathbf{u}_2)} \right) d\Omega_2 = \\
&= \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\eta}_2 \cdot \overline{(-\mu_2 \Delta \mathbf{u}_2 + \nabla p_2)} d\Omega_2 + \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^3 \eta_{2,j} \overline{(\mu_2 \tau_{j,3}(\mathbf{u}_2) - p_2 \delta_{j3})} d\Gamma, \\
\operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_2 = \operatorname{div} \mathbf{u}_2 &= 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{u}_2 \equiv \mathbf{0} \quad (\text{на } S_2).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

(В этих формулах учтено, что направление внешней нормали на Γ для области Ω_1 будет $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_3$, а для Ω_2 — соответственно $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 = -\mathbf{e}_3$.)

Умножим обе части (2.2) слева на \mathbf{u}_k , проинтегрируем по Ω_k и сложим результаты; будем иметь (для вещественнозначных полей):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} d\Omega_k &= - \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \nabla p_k d\Omega_k + \sum_{k=1}^2 \mu_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot (\Delta \mathbf{v}_k) d\Omega_k + \\
&+ \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{f}_k d\Omega_k.
\end{aligned}$$

Используя формулы Грина (2.11), (2.12), а также граничные условия задачи (2.2)-(2.10), отсюда получаем соотношение

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} |\mathbf{u}_k|^2 d\Omega_k \right\} &= - \sum_{k=1}^2 \mu_k E_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{f}_k d\Omega_k + \\
&+ \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^3 u_{k,j} (\mu_1 \tau_{j3}(\mathbf{u}_1) - \mu_2 \tau_{j3}(\mathbf{u}_2) - (p_1 - p_2) \delta_{j3}) d\Gamma.
\end{aligned}$$

Учитывая ещё соотношения (2.8) и (2.9), окончательно приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} |\mathbf{u}_k|^2 d\Omega_k + g(\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma \right\} &= - \sum_{k=1}^2 \mu_k E_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) + \\
&+ \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{f}_k d\Omega_k.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Это тождество есть закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Здесь в фигурных скобках стоит удвоенная полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия гидросистемы, а справа — мощность диссипативных вязкоупругих сил и мощность дополнительных внешних сил, действующих на систему. После интегрирования (2.13) по t в пределах от 0 до t получаем закон баланса полной энергии в интегральной форме, т.е. на произвольном отрезке времени $(0, t)$.

3. Выбор функциональных пространств

3.1. Предварительные соображения

Будем исследовать задачу (2.2)-(2.10) методами теории операторов, действующих в гильбертовых пространствах (см. [3, 10, 11]). Тожество (2.13) показывает, что поля скоростей в данной задаче следует считать элементами векторного пространства пар функций

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega), \quad (3.1)$$

со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega)} := \sum_{k=1}^2 \rho_k (\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)_{\mathbf{L}_2(\Omega_k)} := \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \overline{\mathbf{v}_k} d\Omega_k.$$

Точнее говоря, следует выбирать (см. [3]) лишь элементы

$$\mathbf{u}_k \in \mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k) := \{\mathbf{u}_k \in \mathbf{L}_2(\Omega_k) : \operatorname{div} \mathbf{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \gamma_{n,k} \mathbf{u}_k := \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k = 0 \quad (\text{на } S_k)\},$$

где \mathbf{n}_k — внешняя нормаль к $\partial\Omega_k$. Такие поля отвечают конечной кинетической энергии системы.

Заметим, что пространство $\mathbf{L}_2(\Omega_k)$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)_{\mathbf{L}_2(\Omega_k)} := \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_k \cdot \overline{\mathbf{v}_k} d\Omega_k$$

имеет ортогональное разложение (см. [3])

$$\mathbf{L}_2(\Omega_k) = \mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_k), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_k) := \{\mathbf{w}_k = \nabla \varphi_k \in \mathbf{L}_2(\Omega_k) : \varphi_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma)\}, \quad (3.3)$$

причём

$$\mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k) = \mathbf{J}_0(\Omega_k) \oplus \mathbf{G}_{h,S_k}(\Omega_k), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{J}_0(\Omega_k) = \{\mathbf{v}_k \in \mathbf{L}_2(\Omega_k) : \operatorname{div} \mathbf{v}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \gamma_{n,k} \mathbf{v}_k = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega_k)\}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}_{h,S_k}(\Omega_k) = \\ & = \left\{ \mathbf{w}_k = \nabla \Phi_k \in \mathbf{L}_2(\Omega_k) : \Delta \Phi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \int_{\Gamma} \Phi_k d\Gamma = 0 \right\}. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Будем далее обозначать подпространство пар из $\mathbf{L}_2(\Omega)$, у которых компоненты являются элементами из $\mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, через $\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$, т.е.

$$\mathbf{J}_{0,S}(\Omega) := \{ \{ \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2 \} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \mathbf{u}_k \in \mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k), \quad k = 1, 2 \}. \quad (3.7)$$

Тогда в силу (3.2)-(3.6) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2(\Omega) &= \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \\ \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) &= \mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_0(\Omega_2) \oplus \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2), \\ \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega) &= \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Далее, с конечной потенциальной энергией системы связано пространство $L_2(\Gamma)$ скалярных функций, заданных на Γ , с квадратом нормы

$$\|\zeta\|_{L_2(\Gamma)}^2 := \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma.$$

Точнее говоря, ввиду условия (2.8) далее будем считать, что вертикальные отклонения границы раздела жидкостей

$$\zeta \in L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\},$$

где 1_{Γ} — функция, тождественно равная 1 на Γ .

Введём ещё пространства векторных полей с конечной скоростью диссипации энергии в жидкости:

$$\mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k) := \{ \mathbf{u}_k \in \mathbf{H}^1(\Omega_k) : \operatorname{div} \mathbf{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \quad (\text{на } S_k) \}.$$

Здесь скалярное произведение определяется по формуле (см. (2.11), (2.12))

$$(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)_{\mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)} := E_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k), \quad (3.9)$$

а на множестве пар (3.1) — по формуле

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^2 \mu_k E_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k),$$

$$\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega) := \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0,S_2}^1(\Omega_2).$$

Отметим, что $\mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)$ плотно вложено в $\mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ и имеет место неравенство Корна:

$$\|\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)}^2 \geq \tilde{c}_k \|\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_k)}^2 \geq c_k \|\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k)}^2, \quad c_k > 0, \quad \forall \mathbf{u}_k \in \mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k),$$

а метрика, порождённая скалярным произведением (3.9), эквивалентна стандартной метрике пространства $\mathbf{H}^1(\Omega_k)$. Отсюда следует, что $(\mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k); \mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$ —

гильбертова пара пространств. Обозначим через $A_k : \mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k) \rightarrow (\mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k))^*$ оператор этой гильбертовой пары. Тогда будем иметь соотношения

$$(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)_{\mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)} = (A_k^{1/2} \mathbf{u}_k, A_k^{1/2} \mathbf{v}_k)_{\mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} = \langle \mathbf{u}_k, A_k \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k)}, \quad \forall \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k \in \mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k). \quad (3.10)$$

Здесь косыми скобками обозначено значение функционала, стоящего на втором месте, на элементе, стоящем на первом месте.

Таким образом, возникают оснащённые гильбертовы пространства

$$\mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k) \hookrightarrow \mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k) \hookrightarrow (\mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k))^*, \quad k = 1, 2, \quad (3.11)$$

причём вложения, обозначаемые символом \hookrightarrow , компактные.

Введём, наконец, пространство $\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)$ пар векторных полей (3.1) со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^2 \mu_k (\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)_{\mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^2 \mu_k E_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k). \quad (3.12)$$

Из приведенных построений очевидно, что

$$(\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega); \mathbf{J}_{0,S}(\Omega))$$

— гильбертова пара пространств, причём оператор A этой пары имеет вид

$$A = (\mu_1 A_1; \mu_2 A_2), \quad (3.13)$$

а формулы (3.10), (3.12) порождают соотношения

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)} &= (A^{1/2} \mathbf{u}, A^{1/2} \mathbf{v})_{\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)} = \sum_{k=1}^2 \mu_k E_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = \\ &= \sum_{k=1}^2 \mu_k (A_k^{1/2} \mathbf{u}_k, A_k^{1/2} \mathbf{v}_k)_{\mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} = \langle \mathbf{u}, A \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)} = \\ &= \sum_{k=1}^2 \langle \mathbf{u}_k, \mu_k A_k \mathbf{v}_k \rangle_{\mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k)}, \quad \forall \mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\}, \quad \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\} \in \mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.2. Выбор функциональных пространств, порождённых задачами

Кинематическое условие (2.7) показывает, что в данной задаче элементы \mathbf{u}_k , составляющие пару (3.1), не могут быть произвольными: для них нормальные компоненты на Γ должны совпадать, т.е.

$$\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 = \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma).$$

Совокупность таких пар $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\} \in \mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$ образует подпространство, которое обозначим через $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, т.е.

$$\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) := \{\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\} \in \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) : \gamma_{n,1}\mathbf{u}_1 = \gamma_{n,2}\mathbf{u}_2 \text{ (на } \Gamma)\}. \quad (3.15)$$

Далее, условие (2.5) показывает также, что на Γ всё векторное поле для пары $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\} \in \mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)$ изменяется непрерывно, т.е.

$$\gamma_1\mathbf{u}_1 = \gamma_2\mathbf{u}_2 \text{ (на } \Gamma),$$

где γ_k — операция(оператор) взятия полного следа векторного поля \mathbf{u}_k из области Ω_k на границу Γ .

Такие пары векторных полей образуют подпространство в пространстве $\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)$, которое обозначим через $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$, т.е.

$$\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) := \{\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\} \in \mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega) : \gamma_1\mathbf{u}_1 = \gamma_2\mathbf{u}_2 \text{ (на } \Gamma)\}. \quad (3.16)$$

Это подпространство плотно вложено в $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ и потому

$$(\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega); \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)) \quad (3.17)$$

— гильбертова пара пространств.

Обозначим через \tilde{A} оператор гильбертовой пары (3.17). Очевидно, он является сужением оператора A из (3.13) с $\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)$ на $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, и для него в силу (3.14) выполнены тождества

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} &= (\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}, \tilde{A}^{1/2}\mathbf{v})_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \\ &= \sum_{k=1}^2 \mu_k E_k(\mathbf{u}_k; \mathbf{v}_k) = \langle \mathbf{u}, \tilde{A}\mathbf{v} \rangle_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Отметим ещё, что оснащения (3.11) порождают оснащение

$$\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \hookrightarrow (\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega))^*, \quad (3.19)$$

из которого следует, что

$$\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \hookrightarrow (\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega))^*. \quad (3.20)$$

Будем далее считать, что область Ω , составленная из двух областей Ω_1 и Ω_2 , имеет липшицеву границу. При этом $\partial\Omega_1 = S_1 \cup \Gamma$, $\partial\Omega_2 = S_2 \cup \Gamma$, где S_k — липшицевы куски $\partial\Omega_k$, имеющие также липшицевы границы ∂S_k : $\partial S_1 = \partial S_2 = \partial\Gamma$. Такие предположения позволяют использовать обобщённые формулы Грина для оператора Лапласа в случае как скалярных полей, заданных в Ω_k , так и в случае векторных полей скоростей (см. [2]).

4. Вывод формул для ортопроекторов

4.1. Первая формула

Получим сначала закон действия ортопроектора

$$P_0 := P_{0,S,\Gamma} : \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \quad (4.1)$$

(см. (3.7), (3.8), (3.15)). Для этого выясним, каково ортогональное дополнение в $\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$ к подпространству $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Учтём структуру (3.8) подпространства $\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$ и заметим, что для элементов из $\mathbf{J}_0(\Omega_1)$ и $\mathbf{J}_0(\Omega_2)$ нормальные компоненты полей равны нулю на всей границе. Отсюда получаем, что $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ имеет структуру

$$\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) = \mathbf{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_0(\Omega_2) \oplus \mathbf{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} = \left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla \varphi_1; \frac{1}{\rho_2} \nabla \varphi_2 \right\} : \Delta \varphi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \right. \\ \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_3, \right. \\ \left. \int_{\Gamma} \varphi_k d\Gamma = 0 \right\} \subset \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть $\mathbf{u} = \left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla \varphi_1; \frac{1}{\rho_2} \nabla \varphi_2 \right\} \in \mathbf{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)$, а $\mathbf{v} = \{\nabla \psi_1; \nabla \psi_2\}$ ортогональна \mathbf{u} в $\mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$. Тогда

$$\rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla \psi_1 \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} \nabla \varphi_1 \right) d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} \nabla \psi_2 \cdot \left(\frac{1}{\rho_2} \nabla \varphi_2 \right) d\Omega_2 = 0. \quad (4.3)$$

Воспользуемся теперь обобщёнными формулами Грина для оператора Лапласа и скалярных полей (см. [2]). В рассматриваемом случае для липшицевых областей Ω_1 и Ω_2 они имеют следующий вид:

$$\int_{\Omega_1} \nabla \psi_1 \cdot \overline{\nabla \varphi_1} d\Omega_1 = \langle \psi_1, (-\Delta \varphi_1) \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_1 \psi_1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad (4.4)$$

$$\int_{\Omega_2} \nabla \psi_2 \cdot \overline{\nabla \varphi_2} d\Omega_2 = \langle \psi_2, (-\Delta \varphi_2) \rangle_{L_2(\Omega_2)} - \langle \gamma_2 \psi_2, \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \forall \psi_k, \varphi_k \in H_{\Gamma}^1(\Omega_k), \quad \gamma_k \psi_k := \psi_k|_{\Gamma} \in H_{\Gamma}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \in \tilde{H}_{\Gamma}^{-1/2} := (H_{\Gamma}^{1/2})^*, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_3, \quad \Delta \varphi_k \in (H_{\Gamma}^1(\Omega_k))^*, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поясним смысл обозначений в (4.4)-(4.6). Прежде всего, слева в этих формулах стоит скалярное произведение функций из $H^1_\Gamma(\Omega_k)$:

$$(\psi_k, \varphi_k)_{H^1_\Gamma(\Omega_k)} := \int_{\Omega_k} \nabla \psi_k \cdot \overline{\nabla \varphi_k} d\Omega_k, \quad \int_\Gamma \varphi_k d\Gamma = \int_\Gamma \psi_k d\Gamma = 0. \quad (4.7)$$

Соответствующая норма эквивалентна стандартной норме $H^1(\Omega_k)$, а $H^1_\Gamma(\Omega_k)$ — подпространство пространства $H^1(\Omega_k)$ коразмерности 1. Далее, γ_k — операторы следа скалярных функций, заданных в Ω_k , на границе $\Gamma \subset \partial\Omega_k$. Согласно теореме Гальярдо (см. [9]), следы $\gamma_k \psi_k \in H^{1/2}(\Gamma)$ и удовлетворяют условиям нормировки (4.7). Как известно, см. [1, 14], множество $H^{1/2}_\Gamma$ плотно в $L_{2,\Gamma}$ и имеет место оснащение

$$H^{1/2}_\Gamma \hookrightarrow L_{2,\Gamma} \hookrightarrow \tilde{H}^{-1/2}_\Gamma := \left(H^{1/2}_\Gamma \right)^*.$$

Здесь символом $\tilde{}$ обозначен класс функций из $H^{1/2}_\Gamma$, продолжимых нулём на всю границу $\partial\Omega_k$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_k)$ (см. [1, 6]). В частности, в формулах Грина (4.4), (4.5) производные по нормали $\partial\varphi_k/\partial n \in \tilde{H}^{-1/2}_\Gamma$, так как в силу постановки задачи (см. (3.6), (4.2)) должны быть выполнены условия Неймана $\partial\varphi_k/\partial n_k = 0$ (на S_k).

Отметим ещё, что имеется также оснащение

$$H^1_\Gamma(\Omega_k) \hookrightarrow L_2(\Omega_k) \hookrightarrow \left(H^1_\Gamma \right)^*,$$

и потому $\Delta\varphi_k \in \left(H^1_\Gamma \right)^*$, а косыми скобками в (4.4), (4.5) обозначены значения функционалов, стоящих на втором месте, на элементе, стоящем на первом месте.

Возвращаясь к тождеству (4.3) и используя (4.4), (4.5), будем иметь соотношение (с учётом свойств (4.2) для φ_k)

$$\int_{\Omega_1} \nabla \psi_1 \cdot \overline{\nabla \varphi_1} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \nabla \psi_2 \cdot \overline{\nabla \varphi_2} d\Omega_2 = 0 = \left\langle \rho_1 \gamma_1 \psi_1 - \rho_2 \gamma_2 \psi_2, \overline{\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}} \right\rangle_{L_2(\Gamma)}.$$

Отсюда в силу свойства $\left\langle 1_\Gamma, \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right\rangle_{L_2,\Gamma} = 0$ получаем, что

$$\rho_1 \gamma_1 \psi_1 - \rho_2 \gamma_2 \psi_2 = \text{const} = 0 \quad (\text{на } \Gamma),$$

где использовано также свойство нормировки (4.7) для ψ_k , $k = 1, 2$.

Итогом проведенных рассуждений является следующее утверждение.

Лемма 1. *Элементы из $(\mathbf{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega))^\perp$ образуют множество*

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega))^\perp = \left\{ \{ \nabla \psi_1; \nabla \psi_2 \} : \Delta \psi_k = 0 \quad (\text{в } (\Omega_k)), \frac{\partial \psi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), k = 1, 2, \right. \\ \left. \psi := \rho_1 \gamma_1 \psi_1 = \rho_2 \gamma_2 \psi_2 \in H^{1/2}_\Gamma \right\}. \quad \square \end{aligned} \quad (4.8)$$

Опираясь на представление (4.8), получим закон действия ортопроектора P_0 из (4.1). Для любого $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\} \in \mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$ должно быть

$$P_0\mathbf{u} = P_0\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\} - \{\nabla\psi_1; \nabla\psi_2\} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega),$$

и потому

$$\gamma_{n,1}(P_0\mathbf{u})_1 = \gamma_{n,2}(P_0\mathbf{u})_2 \Rightarrow \gamma_{n,1}\mathbf{u}_1 - \frac{\partial\psi_1}{\partial n}|_\Gamma = \gamma_{n,2}\mathbf{u}_2 - \frac{\partial\psi_2}{\partial n}|_\Gamma, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_3.$$

Значит, для ψ_1 и ψ_2 должно выполняться условие

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n} - \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = \gamma_{n,1}\mathbf{u}_1 - \gamma_{n,2}\mathbf{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma).$$

Таким образом, для определения пары функций $\{\psi_1; \psi_2\}$ возникает следующая задача сопряжения:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_k &= 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \\ \psi &:= \rho_1\psi_1 = \rho_2\psi_2, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n} - \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = \gamma_{n,1}\mathbf{u}_1 - \gamma_{n,2}\mathbf{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Найдём решение задачи (4.9), опираясь на свойства решений задач Неймана в областях Ω_k :

$$\Delta\psi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = \zeta_k \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta_k d\Gamma = 0.$$

Используя известные результаты разрешимости таких задач в областях Ω_k с липшицевыми границами, разбитыми на липшицевы куски (см. [1, 6, 14]), сформулируем итоговые утверждения, основанные на формулах Грина (4.4), (4.5).

1. Слабое решение $\psi_k|_{\Omega_k} \in H_\Gamma^1(\Omega_k)$ существует и единственно тогда и только тогда, когда $\psi_k|_\Gamma \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. В этом случае

$$\psi_1 = V_1\zeta_1, \quad \psi_2 = -V_2\zeta_2, \quad V_k \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^1(\Omega_k)), \quad (4.10)$$

при этом

$$\gamma_1\psi_1 = \gamma_1V_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n} =: C_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n}, \quad C_1 \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2}), \quad (4.11)$$

и аналогично

$$\gamma_2\psi_2 = -\gamma_2V_2\frac{\partial\psi_2}{\partial n} =: -C_2\frac{\partial\psi_2}{\partial n}, \quad C_2 \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2}). \quad (4.12)$$

2. Операторы C_k (их называют операторами Стеклова) обладают свойствами положительности:

$$\langle C_k \frac{\partial\psi_k}{\partial n_k}, \frac{\partial\psi_k}{\partial n} \rangle_{L_{2,\Gamma}} = \int_{\Omega_k} |\nabla\psi_k|^2 d\Omega_k, \quad \mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{e}_3, \quad k = 1, 2.$$

Они отображают $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$ на $H_\Gamma^{1/2}$ и потому существуют обратные операторы

$$C_k^{-1} \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}),$$

которые также обладают свойством положительности.

Учитывая эти свойства, вернёмся к задаче (4.9) и будем считать, в силу уравнений и краевых условий этой задачи, что имеются связи (4.11), (4.12), а тогда

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial n} = C_1^{-1} \gamma_1 \psi_1 = \rho_1^{-1} C_1^{-1} \psi, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial n} = -C_2^{-1} \gamma_2 \psi_2 = \rho_2^{-1} C_2^{-1} \psi.$$

Подставляя эти соотношения во второе условие на Γ из (4.9), приходим к уравнению для нахождения функции ψ :

$$(\rho_1^{-1} C_1^{-1} + \rho_2^{-1} C_2^{-1}) \psi = \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 - \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2. \quad (4.13)$$

Из свойств положительности операторов C_1^{-1} и C_2^{-1} следует, что оператор $\rho_1^{-1} C_1^{-1} + \rho_2^{-1} C_2^{-1}$ также положителен и отображает $H_\Gamma^{1/2}$ на $\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}$. Поэтому существует обратный оператор

$$(\rho_1^{-1} C_1^{-1} + \rho_2^{-1} C_2^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{H}_\Gamma^{-1/2}; H_\Gamma^{1/2}).$$

Далее, ввиду ортогональных разложений (3.2)-(3.6) и описаний подпространств $\mathbf{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ приходим к выводу, что для любого поля $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\} \in \mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$ имеют место свойства

$$\gamma_{n,k} \mathbf{u}_k \in \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}, \quad k = 1, 2,$$

и потому правая часть в (4.13) есть элемент этого пространства. Следовательно, уравнение (4.13) однозначно разрешимо и

$$\psi = (\rho_1^{-1} C_1^{-1} + \rho_2^{-1} C_2^{-1})^{-1} (\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 - \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2) \in H_\Gamma^{1/2}.$$

Зная значение ψ , теперь решаем задачи Зарембы

$$\Delta \psi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \quad \gamma_k \psi_k = \rho_k^{-1} \psi \quad (\text{на } \Gamma).$$

Так как $\psi \in H_\Gamma^{1/2}$, то каждая из этих задач имеет единственное решение из $H_\Gamma^1(\Omega_k)$, и тогда можно считать, что

$$\begin{aligned} \nabla \psi_k &= \rho_k^{-1} G_k (\gamma_k \psi_k) = \rho_k^{-1} G_k \psi, \\ G_k &\in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \mathbf{G}_{h,S_k}(\Omega_k)), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Проведенные рассуждения приводят к следующему выводу.

Лемма 2. Ортопроектор $P_{0,S,\Gamma} : \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ действует по следующему закону: для любого $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\} \in \mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$

$$\begin{aligned} P_{0,S,\Gamma} \mathbf{u} &= \mathbf{u} - \left\{ \rho_1^{-1} G_1 (\rho_1^{-1} C_1^{-1} + \rho_2^{-1} C_2^{-1})^{-1} (\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 - \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2); \right. \\ &\quad \left. \rho_2^{-1} G_2 (\rho_1^{-1} C_1^{-1} + \rho_2^{-1} C_2^{-1})^{-1} (\gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 - \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2) \right\}. \quad \square \end{aligned} \quad (4.15)$$

(Если $\mathbf{u} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}$, то, очевидно, $P_{0,S,\Gamma}\mathbf{u} = \mathbf{u}$, как это и следует из (4.15).)

Замечание 1. Имеет место тождество

$$(\rho_1^{-1}C_1^{-1} + \rho_2^{-1}C_2^{-1})^{-1} = \rho_2 C_2 (\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1} \rho_1 C_1. \quad \square$$

Замечание 2. Так как для G_k выполнены свойства (4.14), то

$$\nabla\psi := \{\nabla\psi_1; \nabla\psi_2\} =: G\psi : H_\Gamma^{1/2} \rightarrow \mathbf{G}_{h,S}(\Omega) \subset \mathbf{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{G}_{h,S_2}(\Omega_2). \quad \square$$

4.2. Вторая формула

Получим теперь закон действия ортопроектора

$$P_1 := P_{0,S,\Gamma}^1 : \mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) \quad (4.16)$$

(см. (3.12), (3.16)). Рассуждения проведём по тому же плану, который был реализован в п.4.1 для скалярных полей (потенциалов скоростей), однако теперь для векторных полей из $\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)$.

Найдём сначала ортогональное дополнение

$$\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega) \ominus \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega).$$

Для этого понадобится обобщённая формула Грина

$$\begin{aligned} \mu_k E_k(\boldsymbol{\eta}_k, \mathbf{u}_k) &= \langle \boldsymbol{\eta}_k, \overline{[-\mu_k P_{0,S_k} \Delta \mathbf{u}_k + \nabla \tilde{p}_k]} \rangle_{L_2(\Omega_k)} - \\ &- \{ \langle \gamma_k \eta_{k,1}, \mu_k \tau_{13}(\mathbf{u}_k) \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle \gamma_k \eta_{k,2}, \mu_k \tau_{23}(\mathbf{u}_k) \rangle_{L_2(\Gamma)} - \\ &+ \langle \gamma_k \eta_{k,3}, [-\tilde{p}_k + \mu_k \tau_{33}(\mathbf{u}_k)] \rangle_{L_2(\Gamma)} \} (-1)^{k-1}, \quad \forall \boldsymbol{\eta}_k, \mathbf{u}_k \in \mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k) \end{aligned} \quad (4.17)$$

(см. [2]). (Здесь учтено, что на Γ имеем $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{e}_3$.) В (4.17) слева стоит скалярное произведение в $\mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)$ (см. (3.9)); далее, в первом слагаемом справа P_{0,S_k} — ортопроектор на $\mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, а выражение

$$-\mu_k P_{0,S_k}(\Omega_k) \Delta \mathbf{u}_k + \nabla \tilde{p}_k \in (\mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k))^*$$

(после замыкания на гладких функциях $\mathbf{u}_k \in \mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k) \cap \mathbf{H}^2(\Omega_k)$),

$$\nabla \tilde{p}_k \in \mathbf{G}_{h,S_k}(\Omega_k), \quad \mu_k \tau_{j3}(\mathbf{u}_k) \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad j = 1, 2, \quad -\tilde{p}_k + \mu_k \tau_{33}(\mathbf{u}_k) \in H_\Gamma^{-1/2}.$$

Предположим теперь, что $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$, а $\mathbf{u} \in \mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)$ и ортогонален $\boldsymbol{\eta}$. Тогда, опираясь на (3.18) и (4.17), будем иметь тождество

$$\begin{aligned} \mu_1 E_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{u}_1) + \mu_2 E_2(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{u}_2) &= \sum_{k=1}^2 \langle \boldsymbol{\eta}_k, [-\mu_k P_{0,S_k} \Delta \mathbf{u}_k + \nabla \tilde{p}_k] \rangle_{L_2(\Omega_k)} - \\ &- \langle \gamma_1 \eta_{1,1}, [\mu_1 \tau_{13}(\mathbf{u}_1) - \mu_2 \tau_{13}(\mathbf{u}_2)] \rangle_{L_2(\Gamma)} - \langle \gamma_1 \eta_{1,2}, [\mu_1 \tau_{23}(\mathbf{u}_1) - \mu_2 \tau_{23}(\mathbf{u}_2)] \rangle_{L_2(\Gamma)} - \\ &- \langle \gamma_1 \eta_{1,3}, [(-\tilde{p}_1 + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{u}_1)) - (-\tilde{p}_2 + \mu_2 \tau_{33}(\mathbf{u}_2))] \rangle_{L_2(\Gamma)} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь обычными приёмами вариационного исчисления, приходим к следующему выводу.

Лемма 3. Ортогональное дополнение $(\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega))^\perp$ к подпространству $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ в пространстве $\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)$ состоит из слабых решений $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2) \in \mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)$ краевых задач

$$\begin{aligned} -\mu_1 P_{0,S_1} \Delta \mathbf{v}_1 + \nabla \tilde{p}_1 &= \mathbf{0}, & \operatorname{div} \mathbf{v}_1 &= 0 & (\text{в } \Omega_1), & \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} & (\text{на } S_1), \\ -\mu_2 P_{0,S_2} \Delta \mathbf{v}_2 + \nabla \tilde{p}_2 &= \mathbf{0}, & \operatorname{div} \mathbf{v}_2 &= 0 & (\text{в } \Omega_2), & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0} & (\text{на } S_2), \\ \mu_1 \tau_{j3}(\mathbf{v}_1) - \mu_2 \tau_{j3}(\mathbf{v}_2) &= 0 & (\text{на } \Gamma), & j &= 1, 2, \\ [(-\tilde{p}_1 + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)) - (-\tilde{p}_2 + \mu_2 \tau_{33}(\mathbf{v}_2))] &= 0 & (\text{на } \Gamma). & \square \end{aligned} \quad (4.18)$$

Опираясь на (4.18), выведем формулу действия ортопроектора P_1 из (4.16). Если \mathbf{u} — любой элемент из $\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)$, то должно быть

$$P_1 \mathbf{u} = P_1 \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\} = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\} - \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}, \quad (4.19)$$

где $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ — решение задачи (4.18) с дополнительным условием на Γ , которое сейчас получим. Именно, должно выполняться свойство

$$\gamma_1(P_1 \mathbf{u})_1 = \gamma_2(P_1 \mathbf{u})_2 \quad (\text{на } \Gamma),$$

откуда с учётом (4.19) получаем, что

$$\gamma_1 \mathbf{v}_1 - \gamma_2 \mathbf{v}_2 = \gamma_1 \mathbf{u}_1 - \gamma_2 \mathbf{u}_2 =: \boldsymbol{\varphi} \in \tilde{\mathbf{H}}_\Gamma^{1/2} := \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)(\dot{+})\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)(\dot{+})\tilde{H}_\Gamma^{1/2}. \quad (4.20)$$

Таким образом, для нахождения $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ возникает векторная задача Стеклова (4.18), (4.20).

Переходя к её решению, будем считать, что на Γ задано векторное поле

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi} &:= \{-\tilde{p}_1 \delta_{j3} + \mu_1 \tau_{j3}(\mathbf{u}_1)\}_{j=1}^3 = \{-\tilde{p}_2 \delta_{j3} + \mu_2 \tau_{j3}(\mathbf{u}_2)\}_{j=1}^3 \in \mathbf{H}_\Gamma^{-1/2} := \\ &:= (\tilde{H}^{1/2}(\Gamma))^*(\dot{+})(\tilde{H}^{1/2}(\Gamma))^*(\dot{+})(\tilde{H}_\Gamma^{1/2})^*. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Тогда из (4.18) возникает две независимые задачи (их называют вторыми вспомогательными задачами С.Г. Крейна) в областях Ω_1 и Ω_2 :

$$\begin{aligned} -\mu_k P_{0,S_k} \Delta \mathbf{v}_k + \nabla \tilde{p}_k &= \mathbf{0}, & \operatorname{div} \mathbf{v}_k &= 0 & (\text{в } \Omega_k), & \mathbf{v}_k &= \mathbf{0} & (\text{на } S_k), \\ -\tilde{p}_k \delta_{j3} + \mu_k \tau_{j3}(\mathbf{v}_k) &= (\boldsymbol{\psi})_j =: \psi_j, & j &= 1, 2, 3, & k &= 1, 2. \end{aligned}$$

Для существования слабого решения этих задач необходимо и достаточно (в областях Ω_k с липшицевыми $\partial\Omega_k$), чтобы выполнялось условие (4.21). Эти решения, с использованием формул Грина (4.17), определяются из следующих тождеств:

$$\mu_1 E_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) = \langle \gamma_1 \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\psi} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \boldsymbol{\eta}_1 \in \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1), \quad (4.22)$$

$$\mu_2 E_2(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_2) = -\langle \gamma_2 \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\psi} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbf{J}_{0,S_2}^1(\Omega_2), \quad (4.23)$$

$$\mathbf{L}_2(\Gamma) := L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma}.$$

Каждая из задач (4.22), (4.23) имеет единственное слабое решение, и тогда можно считать, что

$$\mu_1 \mathbf{v}_1 = V_1 \boldsymbol{\psi}, \quad \mu_2 \mathbf{v}_2 = -V_2 \boldsymbol{\psi}, \quad V_k \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_\Gamma^{-1/2}; \mathbf{J}_{0,S_k}^1(\Omega_k)), \quad k = 1, 2. \quad (4.24)$$

Введём ещё операторы Стеклова

$$C_k := \gamma_k V_k, \quad k = 1, 2, \quad C_k \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_\Gamma^{-1/2}; \tilde{\mathbf{H}}_\Gamma^{1/2}), \quad (4.25)$$

переводящие (векторные) данные Неймана в (векторные) данные Дирихле. Тогда из (4.24), (4.25) и (4.20) получаем связь

$$(\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2) \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}. \quad (4.26)$$

Здесь снова, как и в п.4.1, операторы C_k из (4.25) обладают свойствами положительности:

$$\langle C_k \boldsymbol{\psi}_k, \boldsymbol{\psi}_k \rangle_{L_2(\Gamma)} = E_k(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k),$$

при этом C_k отображает $\mathbf{H}_\Gamma^{-1/2}$ на $\tilde{\mathbf{H}}_\Gamma^{1/2}$. Поэтому существует ограниченный оператор

$$C_k^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{H}}_\Gamma^{-1/2}; \mathbf{H}_\Gamma^{1/2}).$$

Отсюда следует, что существует ограниченный обратный положительный оператор

$$(\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{H}}_\Gamma^{-1/2}; \mathbf{H}_\Gamma^{1/2}),$$

поэтому уравнение (4.26) однозначно разрешимо и

$$\boldsymbol{\psi} = (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} \boldsymbol{\varphi}.$$

Тогда в силу (4.24) и (4.20) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mu_1^{-1} V_1 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 \mathbf{u}_1 - \gamma_2 \mathbf{u}_2), \\ \mathbf{v}_2 &= -\mu_2^{-1} V_2 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 \mathbf{u}_1 - \gamma_2 \mathbf{u}_2). \end{aligned}$$

Итогом проведенных рассуждений является следующее утверждение.

Лемма 4. *Ортопроектор P_1 действует по закону*

$$P_1 \mathbf{u} = \mathbf{u} - \{ \mu_1^{-1} V_1 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 \mathbf{u}_1 - \gamma_2 \mathbf{u}_2); -\mu_2^{-1} V_2 (\mu_1^{-1} C_1 + \mu_2^{-1} C_2)^{-1} (\gamma_1 \mathbf{u}_1 - \gamma_2 \mathbf{u}_2) \},$$

где V_k и C_k — операторы, определённые в (4.24), (4.25). □

(Если $\mathbf{u} = \{ \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2 \} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, то, очевидно, $P_1 \mathbf{u} = \mathbf{u}$.)

5. Применение операторного подхода. Переход к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения

5.1. Вспомогательные краевые задачи

Перепишем исходную задачу (2.2)-(2.10) в виде пар соотношений для искомым объектов; тогда уравнения (2.2) принимают вид

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}; \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} \right\} = - \left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla p_1; \frac{1}{\rho_2} \nabla p_2 \right\} + \{ \nu_1 \Delta \mathbf{v}_1; \nu_2 \Delta \mathbf{v}_2 \} + \{ \mathbf{f}_1; \mathbf{f}_2 \}, \quad (5.1)$$

$$\nu_k = \mu_k / \rho_k, \quad \mathbf{f}_k = \mathbf{f}|_{\Omega_k}, \quad k = 1, 2.$$

Дальнейшая цель состоит в том, чтобы перейти от (5.1) к уравнению в гильбертовом пространстве $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Для этого применим сначала слева ортопроекторы P_{0,S_k} на подпространства $\mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, на первую и вторую составляющие. Будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2 \} = - \left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla \tilde{p}_1; \frac{1}{\rho_2} \nabla \tilde{p}_2 \right\} + \{ \nu_1 P_{0,S_1} \Delta \mathbf{v}_1; \nu_2 P_{0,S_2} \Delta \mathbf{v}_2 \} + \{ \tilde{\mathbf{f}}_1; \tilde{\mathbf{f}}_2 \}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{v}_k = I_{0,k}(t) \mathbf{u}_k, \quad \tilde{\mathbf{f}}_k = P_{0,S_k} \mathbf{f}_k, \quad k = 1, 2.$$

Это соотношение — связь между элементами в $\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$.

Теперь применим ещё слева в (5.2) ортопроектор

$$P_0 = P_{0,S,\Gamma} : \mathbf{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0,S_2}(\Omega_2) = \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega).$$

Это даёт соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2 \} = -P_0 \left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla \tilde{p}_1; \frac{1}{\rho_2} \nabla \tilde{p}_2 \right\} + P_0 \{ \nu_1 P_{0,S_1} \Delta \mathbf{v}_1; \nu_2 P_{0,S_2} \Delta \mathbf{v}_2 \} + P_0 \{ \tilde{\mathbf{f}}_1; \tilde{\mathbf{f}}_2 \}. \quad (5.3)$$

Отметим ещё одно обстоятельство. Так как в (5.3) $\nabla \tilde{p}_k \in \mathbf{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ (см.(3.6)), то $\int_{\Gamma} \tilde{p}_k d\Gamma = 0$, $k = 1, 2$. Используя ещё соотношения

$$\int_{\Gamma} \tau_{33}(\mathbf{u}_k) d\Gamma = 0, \quad k = 1, 2,$$

см. [3, с.115], получаем, что в граничном условии (2.9) на Γ можно $p_k|_{\Gamma}$ заменить на $\tilde{p}_k|_{\Gamma} = \gamma_k \tilde{p}_k$, $k = 1, 2$.

Учитывая эти факты, представим решение исходной начально-краевой задачи в виде суммы пар векторных полей. Именно, будем считать, что

$$P_0 \left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla \tilde{p}_1; \frac{1}{\rho_2} \nabla \tilde{p}_2 \right\} = \left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla p_{11}; \frac{1}{\rho_2} \nabla p_{12} \right\} + \left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla p_{21}; \frac{1}{\rho_2} \nabla p_{22} \right\},$$

и потребуем, чтобы наборы

$$\{ \mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2 \}, \quad \left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla p_{11}; \frac{1}{\rho_2} \nabla p_{12} \right\}$$

были решениями первой вспомогательной задачи

$$\begin{aligned}
 -P_0\{\nu_1 P_{0,S_1} \Delta \mathbf{v}_1; \nu_2 P_{0,S_2} \Delta \mathbf{v}_2\} + \left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla p_{11}; \frac{1}{\rho_2} \nabla p_{12} \right\} &= \{\mathbf{F}_1; \mathbf{F}_2\} := \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\} - \left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla p_{21}; \frac{1}{\rho_2} \nabla p_{22} \right\} + P_0\{\tilde{\mathbf{f}}_1; \tilde{\mathbf{f}}_2\}, \\
 \mathbf{u}_k &= \mathbf{0} \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2; \\
 \{-\tilde{p}_1 \delta_{j3} + \mu_1 \tau_{j3}(\mathbf{v}_1)\}_{j=1}^3 - \{-\tilde{p}_2 \delta_{j3} + \mu_2 \tau_{j3}(\mathbf{v}_2)\}_{j=1}^3 &= \mathbf{0} \quad (\text{на } \Gamma),
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

а набор $\left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla p_{21}; \frac{1}{\rho_2} \nabla p_{22} \right\}$ — решением второй вспомогательной задачи для потенциалов (задачи Стеклова):

$$\begin{aligned}
 \Delta p_{2k} &= 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial p_{2k}}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \\
 \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_{21}}{\partial n} &= \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_{22}}{\partial n}, \quad p_{21} - p_{22} = g(\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Рассмотрим сначала задачу (5.5). Введём функции φ_k , $k = 1, 2$, которые являются решениями вспомогательной задачи

$$\begin{aligned}
 \Delta \varphi_k &= 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \int_{\Gamma} \varphi_k d\Gamma = 0, \quad k = 1, 2, \\
 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}, \quad \rho_1 \gamma_1 \varphi_1 - \rho_2 \gamma_2 \varphi_2 = (\rho_1 - \rho_2)\zeta \quad (\text{на } \Gamma).
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Обозначим

$$\psi := \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad \int_{\Gamma} \psi d\Gamma = 0.$$

Тогда, как и в (4.9)-(4.12), будем иметь

$$\gamma_1 \varphi_1 = C_1 \psi, \quad \gamma_2 \varphi_2 = -C_2 \psi,$$

и последнее условие на Γ приводит к связи

$$(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2) \psi = (\rho_1 - \rho_2) \zeta.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2 \in \mathcal{L}(\tilde{H}_{\Gamma}^{-1/2}; H_{\Gamma}^{1/2})$$

является положительным оператором и действует на $H_{\Gamma}^{1/2}$, получаем:

$$\psi = (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1} \zeta,$$

и потому

$$\varphi_1 = (\rho_1 - \rho_2) V_1 (\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1} \zeta, \quad \varphi_2 = -(\rho_1 - \rho_2) V_2 (\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1} \zeta. \tag{5.7}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 5. *Задача (5.6) имеет (единственное) слабое решение тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\zeta \in H_\Gamma^{1/2}.$$

Это решение даётся формулами (5.7). \square

Опираясь на эту лемму, введём оператор G по закону

$$G\zeta := \{\nabla\varphi_1; \nabla\varphi_2\} \in \mathbf{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega), \quad G \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \mathbf{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)) \quad (5.8)$$

(определение $\mathbf{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)$ см. в (4.2)), а также общий оператор нормального следа

$$\hat{\gamma}_n \mathbf{u} := \gamma_{n,1} \mathbf{u}_1 = \gamma_{n,2} \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2\} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega). \quad (5.9)$$

Лемма 6. *Имеет место соотношение*

$$G^* = (\rho_1 - \rho_2) \hat{\gamma}_n, \quad \hat{\gamma}_n \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega); \tilde{H}_\Gamma^{-1/2}). \quad (5.10)$$

Доказательство. Пусть $\zeta \in H_\Gamma^{1/2}$, $\boldsymbol{\eta} = \{\boldsymbol{\eta}_1; \boldsymbol{\eta}_2\} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Тогда

$$\begin{aligned} (G\zeta, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\Omega)} &= \rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla\varphi_1 \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}}_1 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} \nabla\varphi_2 \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}}_2 d\Omega_2 = \\ &= \dots = \rho_1 \langle \gamma_1 \varphi_1, \gamma_{n,1} \boldsymbol{\eta}_1 \rangle_{L_2(\Gamma)} - \rho_2 \langle \gamma_2 \varphi_2, \gamma_{n,2} \boldsymbol{\eta}_2 \rangle_{L_2(\Gamma)} = \\ &= |\gamma_{n,1} \boldsymbol{\eta}_1 = \gamma_{n,2} \boldsymbol{\eta}_2 = \hat{\gamma}_n \boldsymbol{\eta}| = \langle \rho_1 \gamma_1 \varphi_1 - \rho_2 \gamma_2 \varphi_2, \hat{\gamma}_n \boldsymbol{\eta} \rangle_{L_2(\Gamma)} = \\ &= \text{(см. последнее условие (5.6))} = \langle (\rho_1 - \rho_2) \zeta, \hat{\gamma}_n \boldsymbol{\eta} \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \zeta, (\rho_1 - \rho_2) \hat{\gamma}_n \boldsymbol{\eta} \rangle_{L_2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Отсюда и следует утверждение леммы. \square

С помощью оператора G из (5.8), функций φ_1 и φ_2 из (5.6) и из (5.5) получаем, что в задаче (5.5)

$$\begin{aligned} p_{21}|_{\Omega_1} &= g\rho_1\varphi_1, \quad p_{22}|_{\Omega_2} = g\rho_2\varphi_2, \\ \left\{ \frac{1}{\rho_1} \nabla p_{21}; \frac{1}{\rho_2} \nabla p_{22} \right\} &= gG\zeta. \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.2. Переход к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения

Опираясь на полученные в п. 5.1 выводы, рассмотрим теперь вспомогательную задачу (5.4). Предварительно воспользуемся тождествами, следующими из (4.17). Имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 E_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) + \mu_2 E_2(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_2) &= \langle \boldsymbol{\eta}_1, P_{0,S_1}(-\mu_1 \Delta \mathbf{v}_1) + \nabla \tilde{p}_1 \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \\ &+ \langle \boldsymbol{\eta}_2, P_{0,S_2}(-\mu_2 \Delta \mathbf{v}_2) + \nabla \tilde{p}_2 \rangle_{L_2(\Omega_2)} + \langle \gamma_1 \boldsymbol{\eta}_{1,1}, [\mu_1 \tau_{13}(\mathbf{v}_1) - \mu_2 \tau_{13}(\mathbf{v}_2)] \rangle_{L_2(\Gamma)} + \\ &+ \langle \gamma_1 \boldsymbol{\eta}_{1,2}, [\mu_1 \tau_{23}(\mathbf{v}_1) - \mu_2 \tau_{23}(\mathbf{v}_2)] \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle \gamma_1 \boldsymbol{\eta}_{1,3}, [(-\tilde{p}_1 + \mu_1 \tau_{33}(\mathbf{v}_1)) - (-\tilde{p}_2 + \mu_2 \tau_{33}(\mathbf{v}_2))] \rangle_{L_2(\Gamma)}, \\ \forall \boldsymbol{\eta} &= \{\boldsymbol{\eta}_1; \boldsymbol{\eta}_2\} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega), \quad \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\} \in \mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Так как $\boldsymbol{\eta} = P_0\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) \subset \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, $P_0 : \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ — ортопроектор (см. (4.15)), то (5.12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \mu_1 E_1(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{v}_1) + \mu_2 E_2(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{v}_2) = (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v})_{\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)} = \\ & = \langle \boldsymbol{\eta}, P_0\{P_{0,S_k}(-\nu_k \Delta \mathbf{v}_k) + \nabla \tilde{p}_k\}_{k=1}^2 \rangle_{\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)} + \\ & + \sum_{j=1}^3 \langle \gamma_1 \eta_{1,j}, [(-\tilde{p}_1 \delta_{j3} + \mu_1 \tau_{j3}(\mathbf{v}_1)) - (-\tilde{p}_2 \delta_{j3} + \mu_2 \tau_{j3}(\mathbf{v}_2))] \rangle_{L_2(\Gamma)}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

приспособленном к формулировке обобщённого решения вспомогательной задачи (5.4).

Определение 1. Назовём обобщённым решением задачи (5.4) такую функцию

$$\mathbf{v}(t) = \{\mathbf{v}_1(t); \mathbf{v}_2(t)\} = \{I_{0,1}(t)\mathbf{u}_1(t); I_{0,2}(t)\mathbf{u}_2(t)\}$$

переменной t со значениями в $\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$, для которой выполнено тождество, следующее из (5.13):

$$(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}(t))_{\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)} = (\boldsymbol{\eta}, -\frac{d\mathbf{u}}{dt} - gG\zeta + \mathbf{p}(t))_{\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega). \quad (5.14)$$

Здесь использовано обозначение (5.8) и последняя формула (5.11), а производные $\partial/\partial t$ заменены на d/dt (для функций переменной t со значениями в гильбертовом пространстве) и

$$\mathbf{p}(t) := P_0\{\mathbf{f}_1; \mathbf{f}_2\}. \quad \square \quad (5.15)$$

Перейдём от (5.14) к интегро-дифференциальному уравнению в пространстве $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Так как

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}(t))_{\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)} &= (P_1\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}(t))_{\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)} = (\boldsymbol{\eta}, P_1\mathbf{v}(t))_{\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)} = \\ &= (\tilde{A}^{1/2}\boldsymbol{\eta}, \tilde{A}^{1/2}P_1\mathbf{v}(t))_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где \tilde{A} — оператор гильбертовой пары $(\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega); \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, см. (3.16)-(3.20), $P_1 : \mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$ — ортопроектор, то тождество (5.14) с учётом (5.16) равносильно соотношению

$$\tilde{A}P_1\mathbf{v}(t) = -\frac{d\mathbf{u}}{dt} - gG\zeta + \mathbf{p}(t),$$

если правая часть — функция t со значениями в $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Теорема 1. *Исходная начально-краевая задача (2.2)-(2.10) о малых движениях двух вязкоупругих жидкостей равносильна (после отделения тривиальных соотношений) задаче Коши*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\tilde{A}P_1(I_0(t)\mathbf{u}) - gG\zeta + \mathbf{p}(t), \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \hat{\gamma}_n \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

для системы двух уравнений, из которых первое является интегро-дифференциальным уравнением первого порядка,

$$\mathbf{v}(t) = I_0(t)\mathbf{u}(t) = \{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^2 + \{\alpha_k \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\mathbf{u}_k(s)ds\}_{k=1}^2, \quad (5.18)$$

а второе — дифференциальным уравнением первого порядка.

Решение $\mathbf{u}(t) = \{\mathbf{u}_1(t); \mathbf{u}_2(t)\}$, $\zeta(t)$ является функцией t со значениями в $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ и $L_{2,\Gamma}$ соответственно. \square

Замечание 3. Если жидкости невязкоупругие, то $\alpha_k = 0$ ($k = 1, 2$) и $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{u}(t)$. Эта задача разобрана в параграфе 8.6 из [11, с.133-140]. \square

6. Преобразование задачи к стандартному виду

6.1. Переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Приведём задачу (5.17) к более симметричному виду, воспользовавшись формулой (5.10). Осуществим в (5.17) замену искомой функции по формуле

$$\eta = (g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2})\zeta. \quad (6.1)$$

Тогда приходим к задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\tilde{A}P_1(I_0(t)\mathbf{u}) - (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G\eta + \mathbf{p}(t) \\ \frac{d\eta}{dt} &= (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G^*\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \eta(0) = \eta^0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Дальнейшее рассмотрение связано с выделением в задаче (6.2) операторной матрицы, отвечающей системе вязкоупругих жидкостей, изучению свойств этой матрицы, её расширению (путём замыкания) до максимального аккретивного оператора. Параллельно будет осуществлён переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введём в (6.2) новую искомую функцию

$$\mathbf{w}(t) := \{\alpha_k^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)}\mathbf{u}_k(s)ds\}_{k=1}^2 \in \mathbf{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) \oplus \mathbf{J}_{0,S_2}^1(\Omega_2) = \mathbf{J}_{0,S}(\Omega), \quad (6.3)$$

см. (5.18), а также операторы

$$\alpha^{1/2} := \{\alpha_k^{1/2}\}_{k=1}^2, \quad \beta := \{\beta_k\}_{k=1}^2, \quad (6.4)$$

действующие в $\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$. Тогда

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \{\alpha_k^{1/2} \mathbf{u}_k - \beta_k [\alpha_k^{1/2} \int_0^t e^{-\beta_k(t-s)} \mathbf{u}_k(s) ds]\}_{k=1}^2 = \alpha^{1/2} \mathbf{u} - \beta \mathbf{w}. \quad (6.5)$$

С учётом (6.3)-(6.5) задачу (6.2) можно переписать в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\tilde{A}(\mathbf{u} + P_1 \alpha^{1/2} \mathbf{w}) - (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} G \eta + \mathbf{p}(t), \\ \frac{d\mathbf{w}}{dt} &= \alpha^{1/2} \mathbf{u} - \beta \mathbf{w}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{0}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} G^* \mathbf{u}, \quad \eta(0) = \eta^0, \quad \mathbf{p}(t) := P_0 \{P_{0,S_1} \mathbf{f}_1; P_{0,S_2} \mathbf{f}_2\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Коротко эту задачу можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\tilde{A}z + p(t), \quad z(0) = z^0, \\ \tilde{A} &= \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}P_1\alpha^{1/2} & (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G \\ -\alpha^{1/2}P_1 & \beta & 0 \\ -(g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}G^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \\ \eta \end{pmatrix}, \quad p(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.2. Дополнительная симметризация

Осуществим в (6.6) ещё одну замену

$$\mathbf{w} = A^{-1/2} \boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{J}_{0,S}(\Omega).$$

Тогда из второй строчки (6.6) имеем соотношение

$$\frac{d}{dt}(A^{-1/2} \boldsymbol{\psi}) = \alpha^{1/2} P_1 \mathbf{u} - \beta A^{-1/2} \boldsymbol{\psi}, \quad (6.7)$$

и если $\mathbf{u}(t)$ — непрерывная по t функция со значениями в $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)$, а $\boldsymbol{\psi}(t)$ — со значениями в $\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$, то правая часть в (6.7) непрерывна по t со значениями в $\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$. Поэтому к обеим частям в (6.7) можно применить оператор $A^{1/2}$. В итоге взамен (6.6) возникает задача Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -(\tilde{A}\mathbf{u} + \tilde{A}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\boldsymbol{\psi}) - bG\eta + \mathbf{p}(t), \\ \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} &= A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\mathbf{u} - A^{1/2}\beta A^{-1/2}\boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \boldsymbol{\psi}(0) = \mathbf{0}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= bG^*\mathbf{u}, \quad \eta(0) = (g(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}\zeta^0, \quad b := (g/(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} > 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Эта система снова коротко переписывается в виде

$$\frac{dy}{dt} = -\mathcal{A}y + p(t), \quad y(0) = y^0, \quad y = (\mathbf{u}; \boldsymbol{\psi}; \eta)^\tau, \quad (6.9)$$

где операторная матрица

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & bG \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1 & A^{1/2}\beta A^{-1/2} & 0 \\ -bG^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

задана на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\tilde{A}) \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}(G) \quad (6.11)$$

и действует в пространстве $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$. Здесь

$$\mathcal{D}_2 := \{\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) : P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\tilde{A})\}. \quad (6.12)$$

Замечание 4. Оператор $P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}$ переводит пространство $\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$ в $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) = \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) \supset \mathcal{D}(\tilde{A})$, причём $\mathcal{D}(\tilde{A})$ плотно в $\mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2})$. \square

Изучим теперь общие свойства оператора \mathcal{A} из (6.10), (6.11).

Лемма 7. *Операторная матрица \mathcal{A} допускает факторизацию в виде произведения трёх матриц с симметричным окаймлением средней матрицы:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} & b\tilde{A}^{-1/2}G \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2} & A^{1/2}\beta A^{-1/2} & 0 \\ -bG^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \quad \square \quad (6.13)$$

Лемма 8. *Операторы*

$$\tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2} : \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega), \quad A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\tilde{A}^{-1/2} : \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \rightarrow \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \quad (6.14)$$

ограничены и взаимно сопряжены.

Доказательство. Ограниченность этих операторов проверяется непосредственно. Например, для оператора $\tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}$ имеем свойства

$$\begin{aligned} A^{-1/2} &\in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S}(\Omega); \mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)), \quad \alpha^{1/2} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)), \\ P_1 &\in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega); \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)) \quad (\text{см. лемму 4.3}), \\ \tilde{A}^{1/2} &\in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega); \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)), \end{aligned}$$

и потому имеет место первое свойство ограниченности в (6.14). Второе свойство из (6.14) проверяется аналогично.

Проверим теперь свойство взаимной сопряжённости этих операторов. Для любых $\mathbf{u} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{A}^{1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} &= (P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} \boldsymbol{\psi}, \tilde{A}^{-1/2} \mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)} = \\ &= (\alpha^{1/2} A^{-1/2} \boldsymbol{\psi}, P_1 \tilde{A}^{-1/2} \mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)} = (A^{-1/2} \boldsymbol{\psi}, \alpha^{1/2} P_1 \tilde{A}^{-1/2} \mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)} = \\ &= (\boldsymbol{\psi}, A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 \tilde{A}^{-1/2} \mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Здесь при выводе были использованы свойства (3.14) и (3.18) для операторов A и \tilde{A} , а также свойство самосопряжённости оператора $\alpha^{1/2}$ в $\mathbf{J}_{0,S}^1(\Omega)$, которое проверяется непосредственно. \square

Замечание 5. Из определения оператора β (см. (6.4)) и структуры оператора A (см. (3.13)) следует, что

$$A^{1/2} \beta A^{-1/2} = \beta. \quad \square$$

Лемма 9. *Справедливо соотношение*

$$\tilde{A}^{-1/2} G = (G^* \tilde{A}^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(G)}, \quad (6.15)$$

причём замыкание по непрерывности оператора $\tilde{A}^{-1/2} G$ совпадает с $(G^* \tilde{A}^{-1/2})^*$.

Доказательство. Убедимся сначала, что оператор $G^* \tilde{A}^{-1/2} : \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \rightarrow L_{2,\Gamma}$ ограничен и даже компактен. Действительно, $\tilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega); \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega))$, а оператор $G^* = (\rho_1 - \rho_2) \hat{\gamma}_n$, согласно определению $\hat{\gamma}_n$ (см. (5.9)) и теореме Гальярдо [9], ограничено действует из $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ на $\tilde{H}_\Gamma^{1/2} \subset H_\Gamma^{1/2} \hookrightarrow L_{2,\Gamma}$.

Пусть теперь $\eta \in \mathcal{D}(G)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$. Тогда

$$(\tilde{A}^{-1/2} G \eta, \mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (G \eta, \tilde{A}^{-1/2} \mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = (\eta, G^* \tilde{A}^{-1/2} \mathbf{u})_{L_{2,\Gamma}}.$$

Отсюда и следует (6.15), и из плотности $\mathcal{D}(G) \equiv H_\Gamma^{1/2}$ (см. (5.8)) в $L_{2,\Gamma}$ получаем, что оператор $\tilde{A}^{-1/2} G$ ограничен (и даже компактен) на плотном множестве и поэтому допускает расширение путём замыкания до оператора $\tilde{A}^{-1/2} G = (G^* \tilde{A}^{-1/2})^*$. \square

7. Теоремы о корректной разрешимости

7.1. Свойства основной операторной матрицы

Опираясь на приведенные выше свойства коэффициентов операторной матрицы \mathcal{A} (см. (6.10)-(6.13) и леммы 7-9), установим общие свойства этой матрицы.

Лемма 10. *Операторная матрица (6.10) является аккретивной в пространстве $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma} =: \mathcal{H}$, т.е.*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}.$$

Доказательство. В силу факторизации (6.13) достаточно убедиться, что средний множитель

$$\mathcal{J}_0 := \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} & b \tilde{A}^{-1/2} G \\ -A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 \tilde{A}^{-1/2} & \beta & 0 \\ -b G^* \tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

обладает свойством аккретивности на множестве

$$\mathcal{D}(\mathcal{J}_0) := \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \mathcal{D}(G).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathcal{J}_0 y, y)_{\mathcal{H}} &= \operatorname{Re} \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (\tilde{A}^{-1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + \right. \\ &+ b(\tilde{A}^{-1/2} G \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} - (A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 \tilde{A}^{-1/2} \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi})_{\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)} + (\beta \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi})_{\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)} - \\ &\left. - b(G^* \tilde{A}^{-1/2} \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})_{L_{2,\Gamma}} \right\} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)}^2 + (\beta \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi})_{\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)} \geq 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь при выводе были использованы свойства взаимной сопряжённости операторов из леммы 8 (второе и четвёртое слагаемые справа), а также утверждение леммы 9 (третье и шестое слагаемые). \square

Введём операторную матрицу

$$\mathcal{J}_a := \mathcal{J}_0 + a \operatorname{diag}(0; 0; I), \quad a > 0. \quad (7.2)$$

Тогда для \mathcal{J}_a из (7.1) имеем

$$\operatorname{Re}(\mathcal{J}_a y, y)_{\mathcal{H}} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)}^2 + (\beta \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi})_{\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)} + a \|\boldsymbol{\eta}\|_{L_{2,\Gamma}}^2 \geq c \|y\|_{\mathcal{H}}^2, \quad c > 0, \quad (7.3)$$

так как β — положительно определённый оператор (см. (6.4), $\beta_k > 0$, $k = 1, 2$).

Из (7.2), (7.3) следует, что операторная матрица \mathcal{A} из (6.13) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \operatorname{diag}(\tilde{A}^{1/2}; I; I) \mathcal{J}_a \operatorname{diag}(\tilde{A}^{1/2}; I; I) - a \operatorname{diag}(0; 0; I) = \\ &=: \mathcal{A}_a - a \operatorname{diag}(0; 0; I). \end{aligned} \quad (7.4)$$

При этом оператор \mathcal{A}_a представлен в виде произведения трёх сомножителей, каждый из которых имеет ограниченный обратный. Поэтому \mathcal{A}_a допускает расширение путём замыкания среднего сомножителя, и в итоге возникает максимальный равномерно аккретивный оператор.

Лемма 11. *Замыкание $\bar{\mathcal{A}}_a$ оператора \mathcal{A}_a представляется в виде*

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}_a &= \operatorname{diag}(\tilde{A}^{1/2}; I; I) \bar{\mathcal{J}}_a \operatorname{diag}(\tilde{A}^{1/2}; I; I), \\ \bar{\mathcal{J}}_a &= \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} & b(G^* \tilde{A}^{-1/2})^* \\ -A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 \tilde{A}^{-1/2} & \beta & 0 \\ -b G^* \tilde{A}^{-1/2} & 0 & a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\bar{\mathcal{J}}_a$ — равномерно аккретивный оператор, для которого выполнено свойство (7.3) (с заменой $\mathcal{J}_a \rightarrow \bar{\mathcal{J}}_a$).

При этом

$$\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \left\{ y = (\mathbf{u}; \boldsymbol{\psi}; \eta)^\tau : \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}), \tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} + \tilde{A}^{-1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\boldsymbol{\psi} + b(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*\eta \in \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) \right\}, \quad \mathcal{R}(\bar{\mathcal{A}}_a) = \mathcal{H}, \quad (7.5)$$

и оператор $\bar{\mathcal{A}}_a$ действует на $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a)$ по закону

$$\bar{\mathcal{A}}_a y = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} + \tilde{A}^{1/2}\alpha^{1/2}P_1A^{-1/2}\boldsymbol{\psi} + b(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*\eta) \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\mathbf{u} + \beta\boldsymbol{\psi} \\ -bG^*\mathbf{u} + a\eta \end{pmatrix}. \quad \square \quad (7.6)$$

7.2. Теорема о разрешимости задачи Коши

Вернёмся к задаче (6.9)-(6.13) и перепишем её с учётом (7.4) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -(\mathcal{A}_a - a\mathcal{P}_3)y + p(t), \quad y(0) = y^0 = (\mathbf{u}^0; \mathbf{0}; \eta^0)^\tau, \\ y &= (\mathbf{u}; \boldsymbol{\psi}; \eta)^\tau, \quad \mathcal{P}_3 := \text{diag}(0; 0; I). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Рассмотрим также аналогичную задачу с замкнутым максимальным аккретивным оператором:

$$\frac{dy}{dt} = -(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3)y + p(t), \quad y(0) = y^0. \quad (7.8)$$

Теорема 2. Пусть в исходной начально-краевой задаче (2.2)-(2.10) выполнены условия

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^0 &= \{\mathbf{u}_1^0; \mathbf{u}_2^0\} \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) = \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega), \quad \zeta^0 = H_\Gamma^{1/2}, \\ \mathbf{f}_k(t, x) &\in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega_k)), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Тогда задача Коши (7.8) имеет единственное сильное решение $y(t)$ на отрезке $[0, T]$, т.е. $y(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a))$, $dy/dt \in C([0, T]; \mathcal{H})$, выполнено уравнение (7.8) при любом $t \in [0, T]$ и начальное условие $y(0) = y^0$.

Доказательство. Так как согласно лемме 11 оператор $\bar{\mathcal{A}}_a$ является максимальным равномерно аккретивным оператором, а $\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{I}_3$ — максимальным аккретивным оператором, то оператор $-(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{I}_3)$ является генератором сжимающей полугруппы, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega) \oplus \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$. Поэтому для разрешимости задачи (7.8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия (см. [4, с.166]):

$$\begin{aligned} y^0 &= (\mathbf{u}^0; \boldsymbol{\psi}^0; \eta^0)^\tau \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a - a\mathcal{P}_3) = \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}_a), \\ p(t) &= (\mathbf{p}(t); \mathbf{0}; 0)^\tau \in C^1([0, T]; \mathcal{H}). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Проверим, что условия (7.9) являются достаточными для выполнения соотношений (7.10). В самом деле, если выполнены условия (7.9) для $\mathbf{f}_k(t, x)$, то $P_{0,S_k} \mathbf{f}_k \in C^1([0, T]; \mathbf{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$, $k = 1, 2$, а потому $P_0\{P_{0,S_1} \mathbf{f}_1; P_{0,S_2} \mathbf{f}_2\} = \mathbf{p}(t) \in C^1([0, T]; \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$ (см. (5.15)). Поэтому $p(t) = (\mathbf{p}(t); \mathbf{0}; 0)^\tau \in C^1([0, T]; \mathcal{H})$, т.е. последнее условие (7.10) выполнено.

Далее, если выполнены условия (7.9) для \mathbf{u}^0 и ζ^0 , то при $\varphi^0 = \mathbf{0}$ имеем свойство

$$\tilde{A}^{1/2} \mathbf{u}^0 + \mathbf{0} + b\tilde{A}^{-1/2} G \eta^0 \in \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}) \quad (7.11)$$

(см. (7.5)), так как по лемме 9 $(G^* \tilde{A}^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(G)} = \tilde{A}^{-1/2} G$, $\mathcal{D}(G) = H_\Gamma^{1/2}$ (см. (5.8)) и $\eta^0 = (g(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} \zeta^0 \in H_\Gamma^{1/2}$ (см. (6.1)).

Таким образом при выполнении условий (7.9) имеют место условия (7.10). Значит, задача (7.8) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$. \square

Теорема 3. *При выполнении условий (7.9) задача (7.7) также имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$.*

Доказательство. Если выполнены условия (7.9), то по теореме 2 задача (7.8) имеет сильное решение на отрезке $[0, T]$. Это означает, согласно закону (7.6) для оператора \tilde{A}_a , что имеют место три уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2} \mathbf{u} + \tilde{A}^{1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} \boldsymbol{\psi} + b(G^* \tilde{A}^{-1/2})^* \eta) + \mathbf{p}(t), \\ \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} &= A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 \mathbf{u} - \beta \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \boldsymbol{\psi}(0) = \mathbf{0}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= bG^* \mathbf{u}, \quad \eta(0) = (g(\rho_1 - \rho_2))^{1/2} \zeta^0, \end{aligned}$$

где все слагаемые являются функциями $t \in [0, T]$ со значениями в $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, $\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)$ и $L_{2,\Gamma}$ соответственно. \square

При исследовании задачи Коши (6.8)-(6.12) возможен ещё один подход, связанный с факторизацией операторной матрицы (6.10) по Шуру-Фробениусу.

Лемма 12. *Операторная матрица \mathcal{A} из (6.10) допускает факторизацию вида*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{A} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} & bG \\ -A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 & A^{1/2} \beta A^{-1/2} & 0 \\ -bG^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q \tilde{A}^{-1/2} & I & 0 \\ -bQ_1 \tilde{A}^{-1/2} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & \beta + QQ^* & bQQ_1^+ \\ 0 & bQ_1 Q^* & b^2 Q_1 Q_1^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{-1/2} Q^* & b\tilde{A}^{-1/2} Q_1^+ \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} Q^* &:= \tilde{A}^{1/2} P_1 \alpha^{1/2} A^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S}(\Omega); \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)), \\ Q_1 &:= G^* \tilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega); \tilde{H}_\Gamma^{1/2} \subset H_\Gamma^{1/2}), \\ Q &= A^{1/2} \alpha^{1/2} P_1 \tilde{A}^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega); \mathbf{J}_{0,S}(\Omega)), \\ Q_1^+ &= \tilde{A}^{-1/2} G \in \mathcal{L}(H_\Gamma^{1/2}; \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Замыкание $\bar{\mathcal{A}}$ операторной матрицы \mathcal{A} представляется в виде

$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -Q\tilde{A}^{-1/2} & I & 0 \\ -bQ_1\tilde{A}^{-1/2} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & \beta + QQ^* & \beta QQ_1^* \\ 0 & bQ_1Q^* & b^2Q_1Q_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \tilde{A}^{-1/2}Q^* & b\tilde{A}^{-1/2}Q_1^* \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

$$Q_1^* := \bar{Q}_1^+ \quad (\text{см. (6.15)}),$$

и этот оператор действует на области определения

$$\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}) = \{y = (\mathbf{u}; \boldsymbol{\psi}; \eta)^\tau : \mathbf{u} + \tilde{A}^{-1/2}Q^*\boldsymbol{\psi} + b\tilde{A}^{-1/2}Q_1^*\eta \in \mathcal{D}(\tilde{A})\},$$

совпадающей, очевидно, с (7.5), по закону (сравни с (7.6))

$$\bar{\mathcal{A}}y = \begin{pmatrix} \tilde{A}(\mathbf{u} + \tilde{A}^{-1/2}Q^*\boldsymbol{\psi} + b\tilde{A}^{-1/2}Q_1^*\eta) \\ -A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\mathbf{u} + \beta\boldsymbol{\psi} \\ -bG^*\mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad y \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}).$$

Доказательство. Факторизация (7.12),(7.13) проверяется непосредственно. Далее, по лемме 8 получаем, что операторы Q и Q^* взаимно сопряжены, а из леммы 9 имеем связи

$$Q_1^+ = Q_1^*|_{\mathcal{D}(G)}, \quad \bar{Q}_1^+ = Q_1^*. \quad \square$$

Замечание 6. Из леммы 12 следует, что крайние сомножители в (7.14) обратимы и равны сумме единичного и компактного оператора, а средний множитель — квазидиагональный самосопряжённый неотрицательный оператор, так как

$$\begin{pmatrix} \beta + QQ^* & \beta QQ_1^* \\ bQ_1Q^* & b^2Q_1Q_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \eta \end{pmatrix} = \quad (7.15)$$

$$= (\beta\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi})_{J_{0,S}(\Omega)} + \|Q^*\boldsymbol{\psi} + bQ_1^*\eta\|_{J_{0,S,\Gamma}(\Omega)}^2 \geq 0. \quad \square$$

Рассмотрим теперь, как и выше, задачу Коши с замкнутым оператором из (7.14):

$$\frac{dy}{dt} = -(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)y + p(t), \quad y(0) = y^0, \quad (7.16)$$

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Q\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \\ bQ_1^*\tilde{A}^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad (7.17)$$

$$\mathcal{A}_0 := \text{diag}(\tilde{A}; A_{00}),$$

где A_{00} — матричный ограниченный неотрицательный оператор из (7.15).

Теорема 4. Пусть в задаче Коши (7.16) выполнены первые два условия (7.9), а условия для $\mathbf{f}_k(t, x)$ заменены менее ограничительными:

$$\mathbf{f}_k(t, x) \in C^\delta([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega_k)), \quad k = 1, 2, \quad 0 < \delta \leq 1. \quad (7.18)$$

Тогда задача (7.16) имеет единственное сильное решение $y(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Доказательство. Осуществим в задаче (7.16) замену искомой функции:

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)y(t) =: w(t). \quad (7.19)$$

Тогда для $w(t)$ возникает задача Коши

$$\frac{dw}{dt} = -(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0w + p(t), \quad w(0) = w^0, \quad (7.20)$$

где учтено, что

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)^{-1} = (\mathcal{J} - \mathcal{F}_2), \quad (\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)p(t) = p(t).$$

В задаче (7.20) оператор $-\mathcal{A}_0$ является самосопряжённым неотрицательным оператором и потому — генератором аналитической полугруппы операторов, действующих в пространстве \mathcal{H} . Так операторы \mathcal{F}_k из (7.17) — компактные, то оператор

$$-(\mathcal{J} + \mathcal{F}_2)(\mathcal{J} - \mathcal{F}_1)\mathcal{A}_0$$

также является генератором полугруппы, аналитической в секторе, содержащем положительную полуось. Значит, уравнение (7.20) является абстрактным параболическим, и для его сильной разрешимости требуется выполнение условий

$$\begin{aligned} w(0) &\in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(\tilde{A}) \oplus \mathbf{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}, \\ p(t) &\in C^\delta([0, T]; \mathcal{H}), \quad 0 < \delta \leq 1. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Однако при выполнении первых двух условий (7.9), как и при доказательстве теоремы 2, можно проверить (см. (7.11)), что $w(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Далее, при выполнении условий (7.18) аналогично убеждаемся, что для $p(t)$ выполнено условие (7.21). Значит, задача Коши (7.20) имеет на отрезке $[0, T]$ единственное сильное решение

$$w(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}) \cap C([0, T]; \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)).$$

Отсюда, возвращаясь от (7.20) к задаче Коши (7.16) путём обратной замены (7.19), приходим к выводу, что задача (7.16) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0, T]$. \square

7.3. О существовании обобщённого решения исходной начально-краевой задачи

Напомним (теорема 1), что исходная начально-краевая задача равносильна (после отделения тривиальных соотношений) задаче Коши (5.17).

Определение 2. Будем говорить, что исходная начально-краевая задача (2.2)-(2.10) имеет обобщённое решение $\{\mathbf{u}(t); \zeta(t)\}$ на отрезке $[0, T]$, если выполнены следующие условия:

1. $\mathbf{u}(t) \in C^1([0, T]; \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$;

2. $\mathbf{v}(t) = I_0(t)\mathbf{u}(t)$ (см. (5.18)) обладает свойством $P_1\mathbf{v}(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(\tilde{A}))$;
3. $\zeta(t) \in C^1([0, T]; H_\Gamma^{1/2})$;
4. для любого $t \in [0, T]$ выполнена система уравнений (5.17), где все слагаемые в первом уравнении — элементы из $C([0, T]; \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, а во втором — элементы из $C([0, T]; H_\Gamma^{1/2})$;
5. выполнены начальные условия (5.17). □

Теоремы 2 либо 4 позволяет доказать существование обобщённого решения исследуемой начально-краевой задачи.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теорем 2 либо 4. Тогда задача (2.2)-(2.10) имеет единственное обобщённое решение на отрезке $[0, T]$ (в смысле определения 2).

Доказательство. Если условия теоремы 2 либо 4 выполнены, то каждая из задач (7.8) либо (7.16) имеет сильное решение на отрезке $[0, T]$. В частности, для задачи (7.8) получаем, что справедлива система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} + Q^*\psi + bQ_1^*\eta) + p(t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= Q\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} - \beta\psi, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \psi(0) = \mathbf{0}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= bQ_1\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}, \quad \eta(0) = (g(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}\zeta^0. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Здесь в первом уравнении все слагаемые — элементы из $C([0, T]; \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, во втором — из $C([0, T]; \mathbf{J}_{0,S}(\Omega))$, а в третьем — из $C([0, T]; \tilde{H}_\Gamma^{1/2})$, $\tilde{H}_\Gamma^{1/2} \subset H_\Gamma^{1/2}$. Поясним утверждения о последних двух свойствах.

Из второго уравнения имеем $\varphi(t) := Q\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} = A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\mathbf{u} = A^{1/2}\alpha^{1/2}\mathbf{u}$ для $\mathbf{u} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}^1(\Omega) = \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2})$, причём $\varphi(t) \in C([0, T]; \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$. Отсюда в силу свойств $\alpha^{1/2}$ и $A^{1/2}$ (см. (6.4), (3.13)) получаем, что $\mathbf{u}(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2}))$. Тогда $Q_1\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} = G^*\mathbf{u} = (\rho_1 - \rho_2)\hat{\gamma}_n\mathbf{u}$, и потому эта функция — элемент из $C([0, T]; \tilde{H}_\Gamma^{1/2})$, $\tilde{H}_\Gamma^{1/2} \subset H_\Gamma^{1/2}$.

Из третьего уравнения (7.22) имеем

$$\begin{aligned} \eta(t) &= (g(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}\zeta(t) = \eta^0 + b \int_0^t Q_1\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}(s)ds = \\ &= (g(\rho_1 - \rho_2))^{1/2}\zeta^0 + b \int_0^t G^*\mathbf{u}(s)ds = \\ &= g(\rho_1 - \rho_2)^{1/2}[\zeta^0 + \int_0^t \hat{\gamma}_n\mathbf{u}(s)ds] \in C^1([0, T]; \tilde{H}_\Gamma^{1/2}). \end{aligned}$$

Тогда (лемма 9)

$$bQ_1^*\eta(t) = bQ_1^+\eta(t) = g\tilde{A}^{-1/2}G\zeta(t) = g\tilde{A}^{-1/2}\left(G\zeta^0 + \int_0^t G\hat{\gamma}_n\mathbf{u}(s)ds\right) \in C([0, T]; \mathcal{D}(\tilde{A}^{1/2})),$$

и потому в (7.22)

$$\tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} + Q^*\boldsymbol{\psi} + bQ_1^*\eta) = \tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} + Q^*\boldsymbol{\psi}) + bG\zeta.$$

Далее, из второго уравнения (7.22) получаем

$$\boldsymbol{\psi}(t) = A^{1/2}\mathbf{w}(t) = \int_0^t e^{-\beta(t-s)}Q\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}(s)ds = \int_0^t e^{-\beta(t-s)}A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\mathbf{u}(s)ds,$$

и потому

$$Q^*\boldsymbol{\psi} = \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha^{1/2}A^{-1/2}\int_0^t e^{-\beta(t-s)}A^{1/2}\alpha^{1/2}P_1\mathbf{u}(s)ds = \tilde{A}^{1/2}\int_0^t P_1\alpha e^{-\beta(t-s)}P_1\mathbf{u}(s)ds.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} + Q^*\boldsymbol{\psi} = \tilde{A}^{1/2}\left(\mathbf{u}(t) + \int_0^t P_1\alpha e^{-\beta(t-s)}P_1\mathbf{u}(s)ds\right) = \tilde{A}^{1/2}P_1I_0(t)\mathbf{u}(t).$$

Таким образом, при выполнении условий теоремы задача Коши для системы уравнений (7.22) преобразована в задачу Коши (5.17):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\tilde{A}P_1(I_0(t)\mathbf{u}) - gG\zeta + p(t), \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \hat{\gamma}_n\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \end{aligned}$$

т.е., согласно определению 2, исходная задача (2.2)-(2.10) имеет обобщённое решение $\{\mathbf{u}(t); \zeta(t)\}$ на отрезке $[0, T]$. \square

7.4. К задаче о нормальных колебаниях гидросистемы

Рассмотрим теперь постановку задачи о малых нормальных движениях исследуемой гидросистемы, т.е. о таких решениях однородной задачи (7.22), которые зависят от t по закону

$$(\mathbf{u}(t); \boldsymbol{\psi}(t); \eta(t))^\tau = (\mathbf{u}; \boldsymbol{\psi}; \eta)^\tau e^{-\lambda t},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексный декремент затухания, а $(\mathbf{u}; \boldsymbol{\psi}; \eta)^\tau$ — амплитудный элемент.

Тогда для отыскания амплитудных элементов возникает спектральная задача

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} + Q^*\boldsymbol{\psi} + bQ_1^*\eta) &= \lambda\mathbf{u}, \\ -Q\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} + \beta\boldsymbol{\psi} &= \lambda\boldsymbol{\psi}, \\ -bQ_1\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} &= \lambda\eta. \end{aligned} \quad (7.23)$$

В случае $\lambda = 0$ приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{1/2}(\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} + Q^*\boldsymbol{\psi} + bQ_1^*\eta) &= \mathbf{0}, \\ \beta\boldsymbol{\psi} = Q\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}, \quad bQ_1\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Из первой связи с учётом второй и третьей получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}, \tilde{A}^{1/2}\mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + (Q^*\beta^{-1}Q\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}, \tilde{A}^{1/2}\mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} + \\ + (bQ_1^*\eta, \tilde{A}^{1/2}\mathbf{u})_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)} = \|\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)}^2 + \\ + \|\beta^{-1/2}Q\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)}^2 + (\eta, bQ_1\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u})_{L_2,\Gamma} = \\ = \|\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)}^2 + \|\beta^{-1/2}Q\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathbf{J}_{0,S}(\Omega)}^2 = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, а потому и $\boldsymbol{\psi} = \beta^{-1}Q\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Далее, из (7.24) имеем

$$\tilde{A}^{1/2}Q_1^*\eta = \tilde{A}^{1/2}(G^*\tilde{A}^{-1/2})^*\eta = (G^*)^*\eta =: \bar{G}\eta = G\eta = 0,$$

так как G — ограниченный оператор из $H_\Gamma^{1/2}$ на $\mathbf{G}_{h,S,\Gamma}(\Omega)$ (см. (5.8)). Отсюда и из леммы 5 (см. также (5.6)) получаем, что $\eta = 0$. Таким образом, задача (7.24) имеет лишь тривиальное решение, т.е. $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (7.23).

Опираясь на этот факт, преобразуем при $\lambda \neq 0$ задачу (7.23) к спектральной проблеме для одного искомого элемента, исключив $\boldsymbol{\psi}$ и η (при условии $\lambda \bar{\epsilon}\sigma(\beta)$). Имеем

$$\boldsymbol{\psi} = (\beta - \lambda I)^{-1}Q\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}, \quad \eta = -\lambda^{-1}bQ_1\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u},$$

и тогда \mathbf{u} является собственным элементом задачи

$$\mathbf{u} + \tilde{A}^{-1/2}Q^*(\beta - \lambda I)^{-1}Q\tilde{A}^{-1/2}\mathbf{u} = \lambda\tilde{A}^{-1}\mathbf{u} + b^2\lambda^{-1}\tilde{A}^{-1/2}Q_1^*Q_1\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u}.$$

Осуществляя ещё здесь замену

$$\tilde{A}^{1/2}\mathbf{u} =: \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega),$$

приходим к спектральной проблеме

$$L(\lambda)\boldsymbol{\varphi} := (I + Q^*(\beta - \lambda I)^{-1}Q - \lambda\tilde{A}^{-1} - b^2\lambda^{-1}Q_1^*Q_1)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (7.25)$$

в пространстве $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$ для операторного пучка $L(\lambda)$.

В этом пучке

$$Q^*(\beta - \lambda I)^{-1}Q = \tilde{A}^{1/2}P_1\alpha(\beta - \lambda I)^{-1}P_1\tilde{A}^{-1/2}$$

— оператор-функция, принимающая ограниченные значения из $\mathcal{L}(\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega))$, \tilde{A}^{-1}

— положительный компактный оператор, действующий в $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$, а

$$Q_1^*Q_1 = \tilde{A}^{-1/2}(\bar{G}G^*)\tilde{A}^{-1/2}$$

— неотрицательный компактный оператор, действующий в $\mathbf{J}_{0,S,\Gamma}(\Omega)$.

Исследование спектральной проблемы (7.25) будет проведено в другой работе.

Список цитируемых источников

1. *Агранович, М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей. // *Успехи матем. наук.* — 2002. — Т. 57, Вып. 5(347). — С. 3–78.
Agranovich, M. S. (2002). Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in smooth and non-smooth domains. *Russian Mathematical Surveys*, 57:5(347), 3–78.
2. *Копачевский, Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые её приложения. — Симферополь: ООО "ФОРМА", 2016. — 280 с.
Kopachevsky, N. D. (2016). Abstract Green's Formula and Applications. Simferopol: ООО "FORMA".
3. *Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуи Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
Kopachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo Zuy Kan (1989). Operator methods in linear hydrodynamic. Evolutional and Spectral problems. Moscow: Nauka.
4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
Krein S. G. (1967). Linear differential equations in a Banach space. Moscow: Nauka.
5. *Милославский, А. И.* Спектральный анализ малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом контейнере / Институт математики НАН Украины. — Киев, 1989. — Деп. рукопись №1221.
Miloslavskii, A. I. (1989). Spectral Analysis of Small Oscillations of Visco-elastic fluid in the open container / Institute of mathematics NAS of Ukraine. — Kiev. — Preprint №1221.
6. *Agranovich, M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary. // *Russian Journal of Mathematical Physics* — 2008. — Vol. 15., No.2. — P. 146–155.
7. *Azizov, T. Ya., Kopachevskii, N. D., Orlova, L. D.* Evolution and Spectral Problems Related to Small Motions of Viscoelastic Fluid // *Proceedings of the St.-Petersburg Math. Society*, Vol. VI. AMS Translations (2) —2000. — Vol. 199. — P. 1–24.
8. *Eirich, F. R.* Rheology. Theory and Applications. — New York: Academic Press, 1956. — 761p.

9. *Galiardo, E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova — 1957. — Vol. 27. — P. 284–305.
10. *Kopachevsky, Nikolay D., Krein, Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. — Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.128) — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2001. — 384 p.
11. *Kopachevsky, Nikolay D., Krein, Selim G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics.. — Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol.146) — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 2003. — 444 p.
12. *Miloslavskii, A. I.* Stability of a viscoelastic isotropic medium // Soviet Physics Doklady. — 1988. — Vol. 33 — P. 300.
13. *Miloslavskii, A. I.* Stability of certain classes of evolution equations // Siberian Mathematical Journal. — 1985. — Vol. 26, No.5. — P. 723–735.
14. *Rychkov, V. S.* On Restrictions and Extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin Spaces with Respect to Lipschitz Domains. // Journal of the London Mathematical Society — 1999. — Vol. 60, No.1. — P. 237–257.

Получена 06.04.2017

УДК 519.872

Полумарковская модель однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным восстанавливаемым каналом¹

А. И. Песчанский

Севастопольский государственный университет,
Севастополь, 299053. *E-mail: peschansky_sntu@mail.ru*

Аннотация. Построена модель функционирования ненадежной однолинейной системы обслуживания с потерями, в которой через случайное время после начала обслуживания заявки может произойти отказ канала. При этом заявка теряется и на дообслуживание не возвращается. После завершения ремонтных работ надежность характеристики канала восстанавливаются, и обслуживание заявок возобновляется. Предполагается, что все случайные величины, описывающие систему, имеют распределения общего вида. С помощью аппарата полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством получены эффективные формулы для определения финальных вероятностей пребывания системы в различных состояниях.

Ключевые слова: ненадежная однолинейная система обслуживания, полумарковский процесс, стационарное распределение вложенной цепи Маркова, финальные вероятности.

Semi-Markov model of a single-server loss queueing system with unreliable restorable channel

A. I. Peschansky

Sevastopol State University, Sevastopol 299053.

Abstract. The model of one-server loss queueing system is built. Server failure can occur in random time after the beginning of customer service. Herewith, the customer lost never arrives to complete its service. After the end of repair all reliability characteristics are renewed, and customer service is resumed. All the random variables describing the queueing system are supposed to have general distributions. By means of apparatus of semi-Markov processes with discrete-continuous phase space, effective formulas for final probabilities of the queueing system sojourn in different states are obtained.

Keywords: unreliable single-server queueing system, Semi-Markov process, stationary distribution of the embedded Markov chain, final probabilities.

MSC 2010: 60K25

¹Исследование выполнено в рамках базовой части госзадания Министерства образования и науки РФ № 2014/702 (проект № 4000)

Введение

Моделированию систем обслуживания с ненадежными каналами посвящено достаточно большое число работ, в которых исследовались различные постановки, схематизирующие выход каналов из строя. Обзор результатов в этом направлении можно найти, например, в [2], [3], [6]. В построенных моделях, как правило, предполагается, что, либо входящий в систему поток заявок — простейший, либо время обслуживания или время между отказами канала имеют показательное распределение. С точки зрения приложений важно освободиться от такого допущения. В [5] найдены стационарные характеристики ненадежной системы обслуживания $GI/G/1/0$ в предположении, что наработка канала до отказа — случайная величина с общим законом распределения. В данной работе исследуется ненадежная система $GI/G/1/0$, в которой случайной величиной общего вида является время безотказной работы канала при непрерывном обслуживании заявки. При построении модели функционирования системы и нахождении ее финальных вероятностей состояний используется аппарат теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [4].

1. Постановка задачи

В одноканальную систему обслуживания поступает рекуррентный поток заявок, в котором времена β между поступлениями заявок имеют функцию распределения $G(t) = P\{\beta \leq t\}$. Длительность времени обслуживания заявки — случайная величина α с функцией распределения $F(t) = P\{\alpha \leq t\}$. Отказ канала может произойти только во время обслуживания заявки через время γ с момента начала ее обслуживания. Случайная величина γ имеет функцию распределения $\Phi(t) = P\{\gamma \leq t\}$. Сразу после отказа канала начинается его восстановление, которое длится случайное время σ с функцией распределения $\Psi(t) = P\{\sigma \leq t\}$. В случае отказа канала заявка, находящаяся на обслуживании теряется и больше на дообслуживание не возвращается. Предполагается, что случайные величины α , β , γ , и σ имеют плотности распределения вероятностей $f(t)$, $g(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$, конечные математические ожидания $E\alpha$, $E\beta$, $E\gamma$, $E\sigma$ и дисперсии соответственно.

Цель работы — построить полумарковскую модель функционирования системы и найти финальные вероятности пребывания системы в различных состояниях.

2. Построение полумарковской модели

Рассмотрим фазовое пространство состояний системы

$$E = \{1, 1xu, 0y, 2y, 2z0\}.$$

Поясним коды состояний:

1 — начинает обслуживаться поступившая в систему заявка;

$1xu$ — поступившая в систему заявка теряется по причине занятости канала обслуживанием, до конца которого осталось время x , а до отказа канала осталось время u ;

$0y$ — канал освобождается после обслуживания заявки, либо после восстановления, до поступления следующей заявки осталось время y ;

$2y$ — происходит отказ канала, и начинается его восстановление, до поступления следующей заявки в систему осталось время y ;

$2z0$ — поступившая в систему заявка получает отказ в обслуживании по причине восстановления канала, до конца восстановления осталось время z .

Функционирование системы опишем посредством процесса марковского восстановления $\zeta_n = \{\xi_n, \theta_n, n \geq 0\}$, где $\xi_n \in E$ — полумарковские состояния системы, θ_n — время пребывания системы в различных состояниях.

Для задания процесса марковского восстановления необходимо определить переходные вероятности вложенной цепи Маркова $\{\xi_n, n \geq 0\}$ и функции распределения случайных величин θ_n . Времена пребывания системы в состояниях определяются выражениями

$$\theta_1 = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma, \theta_{1ux} = \beta \wedge x \wedge u, \theta_{0y} = y, \theta_{2y} = \sigma \wedge y, \theta_{2z0} = \beta \wedge z,$$

где \wedge — знак минимума. Граф переходов системы изображен на рис. 1

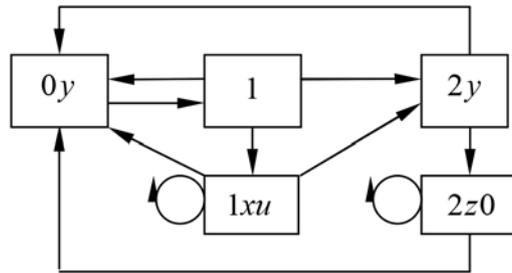


Рис. 1. Граф переходов системы

Опишем события и плотности вероятностей переходов системы. Рассмотрим состояние 1. Если во время обслуживания заявки канал не откажет и при этом $\alpha < \beta$, то система перейдет в состояние $0y$. Плотность вероятности этого перехода

$$p_1^{0y} = P \{ \alpha \in dt, \alpha < \gamma, \beta - \alpha \in dy \} = \int_0^\infty f(t) \bar{\Phi}(t) g(t+y) dt, y > 0.$$

В случае отказа канала и $\gamma < \beta$ начинается его восстановление, т.е. система переходит в состояние $2y$ с плотностью вероятности перехода

$$p_1^{2y} = P \{ \gamma \in dt, \gamma < \alpha, \beta - \gamma \in dy \} = \int_0^\infty \phi(t) \bar{F}(t) g(t+y) dt, y > 0.$$

Если во время обслуживания заявки поступает очередная заявка (т.е. $\beta < \alpha \wedge \gamma$), то она теряется, и система переходит в состояние $1xu$ с плотностью вероятности перехода

$$p_1^{1xu} = P \{ \beta \in dt, \gamma - \beta \in du, \alpha - \beta \in dx \} = \int_0^\infty g(t)\phi(t+u)f(t+x)dt, \quad x, u > 0.$$

Аналогично устанавливаются вероятность и плотности вероятностей переходов системы из других состояний:

$$\begin{aligned} P_{0y}^1 &= 1; p_{1xu}^{1x', u-x+x'} = g(x-x'), \quad x' < x, \quad x < u; p_{1xu}^{0y} = g(x+y), \quad y > 0, \quad x < u; \\ p_{1xu}^{1, x-u+u', u'} &= g(u-u'), \quad u' < u, \quad u < x; p_{1xu}^{2y} = g(u+y), \quad y > 0, \quad u < x; \\ p_{2y}^{2z0} &= \psi(y+z), \quad z > 0; p_{2y}^{0y'} = \psi(y-y'), \quad y' < y; \\ p_{2z0}^{y0} &= g(y+z), \quad y > 0; p_{2z0}^{2z'0} = g(z-z'), \quad z' < z. \end{aligned}$$

Связанный с процессом марковского восстановления $\varsigma_n = \{ \xi_n, \theta_n, n \geq 0 \}$ полумарковский процесс $\xi(t)$ задается соотношением $\xi(t) = \xi_{n(t)}, t \geq 0$, где $n(t)$ — считающий процесс:

$$n(t) = \max \{ n : \tau_n \leq t \}, \quad \tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k.$$

Заметим, что процесс $\xi(t)$ является регенерирующим. Точками регенерации этого процесса являются моменты времени, когда начинается обслуживание поступившей в систему заявки.

3. Финальные вероятности состояний

Разобьем фазовое пространство состояний E на следующие непересекающиеся подмножества состояний: $E_1 = \{1, 1xu\}$ — канал занят обслуживанием заявки; $E_2 = \{2y, 2z0\}$ — канал восстанавливается; $E_0 = \{0y\}$ — канал свободен и находится в работоспособном состоянии.

Обозначим

$$\Phi(t, x, E_i) = P \{ \xi(t) \in E_i / \xi(0) = x \}, \quad x \in E,$$

переходные вероятности полумарковского процесса $\xi(t)$. Предельные значения этих переходных вероятностей определим с помощью соотношений [4]

$$p_i^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x, E_i) = \int_{E_i} m(x)\rho(dx) \left(\int_E m(x)\rho(dx) \right)^{-1}, \quad i = \overline{0, 2}, \quad (1)$$

где $m(x)$ — среднее время пребывания системы в состоянии $x \in E$, $\rho(\cdot)$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова $\{ \xi_n, n \geq 0 \}$.

Средние времена пребывания в состояниях определяются соотношениями:

$$E\theta_1 = \int_0^{\infty} \bar{F}(t)\bar{\Phi}(t)\bar{G}(t)dt; E\theta_{1xu} = \int_0^{x\wedge u} \bar{G}(t)dt; E\theta_{2y} = \int_0^y \bar{\Psi}(t)dt;$$

$$E\theta_{2z0} = \int_0^z \bar{G}(t)dt; E\theta_{0y} = y.$$

Значение стационарного распределения ρ_1 для состояния 1 и плотностей стационарного распределения $\rho(1xu)$, $\rho(2y)$, $\rho(2z0)$ и $\rho(0y)$ для остальных состояний найдем из системы интегральных уравнений

$$\rho(1xu) = \int_0^{\infty} g(t)\rho(1, x+t, u+t)dt + \rho_1 \int_0^{\infty} g(t)\phi(t+u)f(t+x)dt,$$

$$\rho(2y) = \int_0^{\infty} g(t+y)dt \int_t^{\infty} \rho(1xt)dx + \rho_1 \int_0^{\infty} \phi(t)\bar{F}(t)g(t+y)dt,$$

$$\rho(2z0) = \int_0^{\infty} g(t)\rho(2, z+t, 0)dt + \int_0^{\infty} \psi(t+z)\rho(2t)dt,$$

$$\rho(0y) = \rho_1 \int_0^{\infty} f(t)\bar{\Phi}(t)g(t+y)dt + \int_0^{\infty} \psi(t)\rho(2, t+y)dt +$$

$$+ \int_0^{\infty} g(t+y)\rho(2t0)dt + \int_0^{\infty} g(t+y)dt \int_t^{\infty} \rho(1tu)du, \rho_1 = \int_0^{\infty} \rho(0y)dy.$$

Из первого уравнения системы имеем

$$\rho(1xu) = \rho_1 \int_0^{\infty} h_g(t)\phi(t+u)f(t+x)dt.$$

Здесь $h_g(x)$ — плотность функций восстановления $H_g(t)$, которая определяет среднее число входящих в систему заявок за время t , и задается соотношением

$$H_g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*(n)}(t),$$

где $G^{*(n)}(t)$ — n -кратная свертка функции $G(t)$. Подставляя найденное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$\rho(2y) = \rho_1 \int_0^{\infty} \phi(t)\bar{F}(t)v_g(t, y)dt,$$

где $v_g(u, x) = g(u+x) + \int_0^u h_g(u-s)g(s+x)ds$ — плотность распределения вероятностей прямого остаточного времени восстановления β_t [1]. Величина β_t фиксирует время после момента t до ближайшего момента восстановления во входящем в систему потоке заявок. Из остальных уравнений системы в результате некоторых преобразований получаем

$$\rho(2z0) = \rho_1 \int_0^\infty \phi(t)\bar{F}(t)dt \int_0^\infty \psi(s+z)h_g(t+s)ds;$$

$$\rho(0y) = \rho_1 \int_0^\infty f(t)\bar{\Phi}(t)v_g(t,y)dt + \rho_1 \int_0^\infty \phi(t)\bar{F}(t)dt \int_0^\infty \psi(z)v_g(t+z,y)dz.$$

Стационарная вероятность ρ_1 находится из условия нормировки и равна

$$\rho_1 = \left[2 + \int_0^\infty h_g(t)\bar{\Phi}(t)\bar{F}(t)dt + \int_0^\infty \phi(t)\bar{F}(t)dt + \int_0^\infty \phi(t)\bar{F}(t)dt \int_0^\infty \bar{\Psi}(s)h_g(s+t)ds \right]^{-1}.$$

Используя выражения для средних времен пребывания системы в состояниях, а также найденное стационарное распределение вложенной цепи Маркова, интегралы в формуле (1) после преобразований принимают вид:

$$\begin{aligned} \int_{E_1} m(x)\rho(dx) &= \rho_1 E\theta_1 + \int_0^\infty \int_0^\infty \rho(1xu)dxdu \int_0^{x\wedge u} \bar{G}(t)dt = \rho_1 \int_0^\infty \bar{F}(t)\bar{\Phi}(t)\bar{G}(t)dt + \\ &+ \rho_1 \int_0^\infty \bar{G}(t)dt \int_0^\infty h_g(s)\bar{F}(t+s)\bar{\Phi}(t+s)ds = \rho_1 E(\alpha \wedge \gamma); \\ \int_{E_2} m(x)\rho(dx) &= \rho_1 \int_0^\infty \rho(2y)dy \int_0^y \bar{\Psi}(t)dt + \rho_1 \int_0^\infty \rho(2z0)dz \int_0^z \bar{G}(t)dt = \\ &= \rho_1 \int_0^\infty \bar{\Psi}(y)dy \int_0^\infty \phi(t)\bar{F}(t)dt \int_y^\infty v_g(t,s)ds + \rho_1 \int_0^\infty \phi(t)\bar{F}(t)dt \int_0^\infty \bar{G}(x)dx \int_0^\infty \bar{\Psi}(s+x)h_g(t+s)ds = \\ &= \rho_1 E\sigma \int_0^\infty \phi(t)\bar{F}(t)dt = \rho_1 E\sigma P(\alpha > \gamma); \\ \int_{E_0} m(x)\rho(dx) &= \int_0^\infty y\rho(0y)dy = \rho_1 \int_0^\infty f(t)\bar{\Phi}(t)dt \int_0^\infty yv_g(t,y)dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho_1 \int_0^\infty \phi(t) \bar{F}(t) dt \int_0^\infty \psi(z) dz \int_0^\infty y v_g(t+z, y) dy = \rho_1 E \beta \left[1 + \int_0^\infty f(t) \bar{\Phi}(t) H_g(t) dt + \right. \\
 & \left. + \int_0^\infty \phi(t) \bar{F}(t) dt \int_0^\infty \psi(z) H_g(t+z) dz \right] - \rho_1 \int_0^\infty \bar{F}(t) \bar{\Phi}(t) dt - \rho_1 E \sigma \int_0^\infty \phi(t) \bar{F}(t) dt; \\
 & \int_E m(x) \rho(dx) = \rho_1 E \beta \bar{N},
 \end{aligned}$$

где

$$\bar{N} = 1 + \int_0^\infty f(t) \bar{\Phi}(t) H_g(t) dt + \int_0^\infty \phi(t) \bar{F}(t) dt \int_0^\infty \psi(z) H_g(t+z) dz \quad (2)$$

— среднее число заявок, поступающих в систему за период регенерации, т.е. за время между моментами принятия заявок к обслуживанию.

Таким образом, финальные вероятности пребывания системы в состоянии обслуживания заявки, восстановления и свободном состоянии определяются соответственно формулами

$$p_1^* = \frac{E(\alpha \wedge \gamma)}{E\beta\bar{N}}; p_2^* = \frac{E\sigma P(\alpha > \gamma)}{E\beta\bar{N}}; p_0^* = 1 - p_1^* - p_2^*. \quad (3)$$

4. Частные виды систем обслуживания

Выпишем финальные вероятности пребывания системы в состояниях для некоторых типов входящего потока и времени обслуживания. Пусть для системы обслуживания $M/M/1/0$ время β между поступлениями заявок имеет плотность $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; время обслуживания заявки α — плотность $f(t) = \mu e^{-\mu t}$; время безотказной работы канала γ — плотность $\phi(t) = \eta e^{-\eta t}$; время восстановления канала σ — плотность $\psi(t) = \nu e^{-\nu t}$. Тогда характеристики (2) и (3) принимают значения

$$\bar{N} = 1 + \frac{\lambda \eta + \nu}{\nu \mu + \eta}, p_0^* = \frac{1}{1 + \frac{\lambda \eta + \nu}{\nu \mu + \eta}}, p_1^* = \frac{\lambda}{\mu + \eta} p_0^*, p_2^* = \frac{\eta}{\nu \mu + \eta} p_0^*,$$

которые совпадают с известными [7].

Для системы $E_n/G/1/0$ время β между моментами поступления заявок имеет распределение Эрланга n -го порядка с плотностью $g(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$, а все остальные случайные величины — распределения общего вида. Как известно, функция восстановления для такого входящего потока заявок определяется выражением

$$H_g(t) = \frac{1}{n} \left[\lambda t + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varepsilon^j}{1 - \varepsilon^j} \left(1 - e^{-\lambda t(1 - \varepsilon^j)} \right) \right], \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

В этом случае формулы (2) и (3) принимают вид

$$p_1^* = \frac{\lambda E(\alpha \wedge \gamma)}{n\bar{N}}; p_2^* = \frac{\lambda E\sigma P(\alpha > \gamma)}{n\bar{N}},$$

где среднее число \bar{N} заявок поступающих в систему за период регенерации записывается в изображениях Лапласа $L[f](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$:

$$\begin{aligned} \bar{N} = 1 + \frac{1}{n} [E(\alpha \wedge \gamma) + \lambda E\sigma P(\alpha > \gamma) + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varepsilon^j}{1 - \varepsilon^j} (1 - L[f\bar{\Phi}](\lambda(1 - \varepsilon^j)) - L[\phi\bar{F}](\lambda(1 - \varepsilon^j))L[\psi](\lambda(1 - \varepsilon^j)))] \end{aligned} \quad (4)$$

5. Численный пример

Предположим, что все случайные величины, описывающие систему, имеют распределение Эрланга. Время между моментами поступления заявок — распределение Эрланга 6-го порядка со средним значением 6 минут. Время обслуживания заявки — распределение 2-го порядка со средним значением 10 минут. Время безотказной работы канала с момента начала обслуживания заявки — распределение 3-го порядка с математическим ожиданием 30 минут. Время восстановления канала — распределение 2-го порядка со средним значением 8 минут. Численные расчеты по формулам (3) и (4) в пакете MathCAD приводят к следующим значениям финальных вероятностей: $p_1^* = 0,678$; $p_2^* = 0,065$; $p_0^* = 0,257$.

Если входящий в систему поток заявок — простейший и при этом среднее время между моментами поступления заявок, так же как и остальные случайные величины, описывающие функционирование системы, остаются неизменными, то финальные вероятности состояний равны $p_1^* = 0,573$; $p_2^* = 0,055$; $p_0^* = 0,372$. Следовательно, только изменение закона распределения времени между моментами поступления заявок при сохранении его среднего значения, существенно увеличивает вероятность принятия заявки к обслуживанию.

6. Заключение

С помощью аппарата полумарковских процессов найдены соотношения для вычисления финальных вероятностей пребывания в различных состояниях системы обслуживания $GI/G/1/0$, в которой время безотказной работы канала при непрерывном обслуживании заявки есть случайная величина общего вида. Аналогичная методика может быть применена для нахождения стационарных характеристик ненадежных систем обслуживания с учетом проведения их технического обслуживания или сохранения работоспособности отказавшего канала за счет временного резервирования.

Список цитируемых источников

1. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.
Beichelt, F., Franken, P. (1983). Zuverlässigkeit und Instandhaltung. Mathematische Methoden. Berlin: VEB Verlag Technik. (in German)
2. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания: Учебник. — М.: Изд-во РУДН, 1995. — 529 с.
Bocharov, P. P., Pechinkin, A. V. (1995). Queuing theory: Textbook. Moscow: Publ. House of Peoples Friendship University. (in Russian)
3. *Коваленко А. И., Марьянин Б. Д., Смолич В. П.* Система массового обслуживания с ненадежной линией и нетерпеливыми заявками // Таврический вестн. информатики и математики. — 2013. — № 1. — С. 53-60.
Kovalenko, A. I., Maryanin, B. D., Smolich, V. P. (2013). Queuing system with unreliable line and impatient customers. Taurida Vestnik of Informatics and Mathematics, 1, 53–60. (in Russian)
4. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. — К.: Наук. думка, 1982.
Korolyuk, V. S., Turbin, A. F. (1982). Markov renewal processes in the problems of system reliability. Kiev: Naukova Dumka. (in Russian)
5. *Песчанский А. И., Коваленко А. И.* Стационарные характеристики однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным прибором // Таврический вестн. информатики и математики. — 2013. — № 1. — С. 69-79.
Peschansky, A. I., Kovalenko, A. I. (2013). Stationary characteristics of a single-server loss queuing system with unreliable server. Taurida Vestnik of Informatics and Mathematics, 1, 69–79. (in Russian)
6. *Руденко И. В.* Системы массового обслуживания с ненадежными и восстанавливаемыми приборами. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.05. — М.: МГУ, 2012.
Rudenko, I. V. (2012). Queueing systems with unreliable and restorable servers. Moscow: Moscow State University. (in Russian)
7. *Якушев Ю. Ф.* Об одной задаче обслуживания потока вызовов ненадежными приборами // Проблемы передачи информации. — 1969. — Т. V, вып.4. — С.84-88.
Yakushev, Yu. F. (1969). On a problem of call flow operation by unreliable device. Problems of Information Transmission, 5 (4), 84–88. (in Russian)

Получена 04.10.2016

УДК 517.28+517.984.46+517.91

Спектральные задачи сопряжения

К. А. Радомирская

КФУ им. В.И. Вернадского,
Симферополь 295007. E-mail: radomirskaya@mail.ru

Аннотация. На базе уже рассмотренного подхода к абстрактным краевым задачам сопряжения разобраны спектральные задачи сопряжения для одной области. Подробно изучен возникший операторный пучок с самосопряженными операторными коэффициентами, действующий в гильбертовом пространстве и зависящий от двух параметров. Рассматривается оба возможных случая, когда один из параметров спектральный, а другой является фиксированным, в зависимости от этого выведены свойства решений.

Ключевые слова: задача сопряжения, гильбертово пространство, формула Грина, спектральные задачи, операторный пучок, спектральный параметр.

Spectral conjugation problems

К. А. Radomirskaya

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. Spectral conjugation problems for one domain are considered on the basis of the approach already considered to abstract boundary value problems. The resulting operator bundle has been studied in detail. It acts in Hilbert space, it has self-adjoint operator coefficients.

Keywords: conjugation problem, Hilbert space, Green's formula, spectral problems, operator bundle, spectral parameter.

MSC 2010: 34B05, 34B27, 46C07, 47A68

Введение

В одной из предыдущих работ автора [6] был разработан общий подход к изучению смешанных краевых задач сопряжения. С помощью этого подхода разобраны также спектральные задачи сопряжения и получен операторный пучок. В данной статье рассмотрены свойства решений этого пучка в зависимости от фиксированного параметра.

Подробно изучаются спектральные проблемы для смешанных краевых задач в одной области. Установлено, что исходные спектральные проблемы математической физики приводятся к исследованию одного и того же операторного пучка с самосопряженными операторными коэффициентами. Пучок зависит от двух комплексных параметров, один из которых считают фиксированным, а другой — спектральным.

Также рассмотрены свойства решений операторного пучка в двух случаях, когда параметр μ — спектральный, а λ фиксированный и наоборот. Доказаны теоремы о структуре спектра и базисности системы собственных и присоединенных элементов.

1. Спектральные проблемы, порожденные смешанными краевыми задачами и задачами сопряжения

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega =: \Gamma$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1, 4}$ рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$u - \Delta u = \lambda u =: f \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1} = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad (1.1)$$

$$\partial_2 u = \mu \gamma_2 u =: \psi_2 \text{ (на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u = \lambda \gamma_3 u =: \psi_3 \text{ (на } \Gamma_3), \quad (1.2)$$

$$\partial_4 u = \lambda^{-1} \gamma_4 u =: \psi_4 \text{ (на } \Gamma_4). \quad (1.3)$$

В задаче (1.1)–(1.3) на Γ_1 задано однородное условие Дирихле, на Γ_2 — условие типа Стефана (или Стеклова), на Γ_3 — условие М.С.Аграновича (см. [9]), или условие, возникающее в задачах дифракции, на Γ_4 — условие типа С.Крейна, появившееся в задачах о нормальных движениях тяжёлой вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. В этой проблеме имеется два параметра λ и μ , один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным. В частности, в задачах дифракции спектральным является параметр $\mu \in \mathbb{C}$ (см. [9]). Другой вариант, когда спектральным является $\lambda \in \mathbb{C}$, рассматривается в работах В.И.Горбачук (см. [2]).

Задачу (1.1)–(1.3) будем исследовать с помощью общего подхода, который рассматривался в предыдущей работе (см. [6]). По этой схеме получаем одну первую вспомогательную задачу С.Крейна и три вторых вспомогательных задач С.Крейна.

В силу однородного условия Дирихле на Γ_1 , слабое решение задачи (1.1) - (1.3) естественно искать в пространстве

$$H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1)\} \subset \widehat{H}^1(\Omega).$$

Решение $u \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$ будем искать в виде суммы решений четырех задач, т.е.

$$u = \sum_{k=1}^4 u_k, \quad u_k \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega), \quad (1.4)$$

где u_k — слабые решения таких задач соответственно:

$$u_1 - \Delta u_1 = f := \lambda u \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \quad (1.5)$$

$$\partial_3 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \quad \partial_4 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_4);$$

$$u_2 - \Delta u_2 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u_2 = \psi_2 := \mu \gamma_2 u \text{ (на } \Gamma_2), \quad (1.6)$$

$$\partial_3 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \quad \partial_4 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_4);$$

$$u_3 - \Delta u_3 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \quad (1.7)$$

$$\partial_3 u_3 = \psi_3 := \lambda \gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3), \quad \partial_4 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_4);$$

$$\begin{aligned} u_4 - \Delta u_4 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \quad \partial_4 u_4 = \psi_4 := \lambda^{-1} \gamma_4 u \text{ (на } \Gamma_4). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Чтобы представить решение u в виде (1.4), введем пространство

$$\check{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_k} \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), k = \overline{1,4}\}$$

(см. [6], п.1) и его подпространство

$$\check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega) := \check{H}^1(\Omega) \cap H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega). \quad (1.9)$$

Для элементов из $\check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega)$ имеем формулу Грина

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=2}^4 \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \eta, u \in \check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega), \quad (1.10)$$

$$\gamma_k \eta \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u = (\partial u / \partial n)_{\Gamma_k} \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{2,4}.$$

Из этой формулы следует, что слабое решение задачи (1.5) определяется тождеством

$$(\eta, u_1)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f \rangle_{L_2(\Omega)} (= \langle \eta, \lambda u \rangle_{L_2(\Omega)}), \quad \forall \eta \in \check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega),$$

и слабое решение имеет вид (см. [6])

$$u_1 = A^{-1} f = \lambda A^{-1} u, \quad (1.11)$$

где A — оператор гильбертовой пары $(\check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega); L_2(\Omega))$.

Далее, слабое решение задачи (1.6) определяется тождеством

$$(\eta, u_2)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_2 \eta, \psi_2 \rangle_{L_2(\Gamma_2)} = \langle \gamma_2 \eta, \mu \gamma_2 u \rangle_{L_2(\Gamma_2)}, \quad \forall \eta \in \check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega).$$

Это решение задается формулой

$$\begin{aligned} u_2 = V_2 \psi_2 = \mu V_2 \gamma_2 u, \quad V_2 \in \mathcal{L}(\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2); \check{H}_{0,\Gamma_1,h}^1(\Omega)), \quad V_2 = \gamma_2^*, \\ \check{H}_{0,\Gamma_1,h}^1(\Omega) := \check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega) \cap H_h^1(\Omega). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Аналогично рассматриваются задачи (1.7) и (1.8), и их решения выражаются формулами

$$\begin{aligned} u_3 = V_3 \psi_3 = \lambda V_3 \gamma_3 u, \quad V_3 \in \mathcal{L}(\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3); \check{H}_{0,\Gamma_1,h}^1(\Omega)), \quad V_3 = \gamma_3^*, \\ u_4 = V_4 \psi_4 = \lambda^{-1} V_4 \gamma_4 u, \quad V_4 \in \mathcal{L}(\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_4); \check{H}_{0,\Gamma_1,h}^1(\Omega)), \quad V_4 = \gamma_4^*. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Складывая левые и правые части соотношений (1.11), (1.12), (1.13), получаем, что слабое решение u задачи (1.1)–(1.3) должно быть решением следующей спектральной проблемы:

$$u = \lambda(A^{-1} + V_3 \gamma_3)u + \mu V_2 \gamma_2 u + \lambda^{-1} V_4 \gamma_4 u, \quad u \in \check{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega). \quad (1.14)$$

Это уравнение можно привести к более симметричной форме, воспользовавшись тем, что имеют место свойства

$$A^{1/2}V_k = (\gamma_k A^{-1/2})^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k); L_2(\Omega)), \quad k = \overline{1, 3}. \quad (1.15)$$

Действительно, представим элемент $u \in H_{0, \Gamma_1}^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\mathcal{R}(A^{1/2}) = L_2(\Omega)$, в виде

$$u = A^{-1/2}v, \quad v \in L_2(\Omega), \quad (1.16)$$

подставим это выражение в (1.14) и подействуем на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать в силу (1.15)). Тогда взамен (1.14) возникает спектральная задача

$$L(\lambda, \mu)v := (I - \mu B_2 - \lambda(A_1^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \quad (1.17)$$

$$B_k := (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = B_k^* \geq 0, \quad B_k \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \quad k = \overline{2, 4}, \quad (1.18)$$

для операторного пучка $L(\lambda, \mu)$ с параметрами λ и μ , один из которых можем считать спектральным, другой — заданным фиксированным.

Задача (1.17), (1.18) содержит в себе много известных спектральных проблем, встречающихся в приложениях. Они будут более подробно разобраны в п. 2.

2. Свойства решений при спектральном параметре μ

Рассмотрим подробнее полученную спектральную задачу

$$L(\lambda, \mu)\varphi := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = 0, \quad \varphi \in H, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

$$H = L_2(\Omega), \quad 0 \leq B_k = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(H), \quad k = \overline{2, 4}, \quad 0 < A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(H). \quad (2.2)$$

Операторный пучок $L(\lambda, \mu)$ зависит линейно и от параметра μ , и от λ . Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения.

Рассмотрим случай, когда в пучке $L(\lambda, \mu)$ параметр λ фиксирован, а μ — спектральный.

2.1. Отрицательные значения параметра.

Рассмотрим задачу (2.1) – (2.2) при $\lambda < 0$. Обозначим

$$T(\lambda) = \lambda(A^{-1} + B_3) + \lambda^{-1}B_4. \quad (2.3)$$

Так как $T(\lambda) < 0$, то оператор $I - T(\lambda) \geq I$ равномерно по λ . Значит существует обратный оператор $(I - T(\lambda))^{-1}$, $\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leq 1$.

Пусть P_0 и P_1 — взаимно дополнительные ортопроекторы, отвечающие разложению:

$$H = H_0 \oplus H_1, \quad H_0 := \ker B_2, \quad H_1 = H \ominus H_0 = \overline{\mathcal{R}(B_2)},$$

а I_0 и I_1 — единичные операторы в H_0 и H_1 соответственно. Тогда $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$:

$$(I - T(\lambda))(\varphi_0 + \varphi_1) = \mu B_2(\varphi_0 + \varphi_1) = \mu B_2\varphi_0 + \mu \widetilde{B}_2\varphi_1 = \widetilde{B}_2\varphi_1, \quad (2.4)$$

где $\widetilde{B}_2 = P_1 B_2 P_1$, $B_2\varphi_0 = 0$, $\varphi_0 = P_0\varphi_0$, $\varphi_1 = P_1\varphi_1$, $B_2 = P_1 B_2$.

Применим к обеим частям уравнения ортопроекторы P_0 и P_1 :

$$P_0(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = \mu P_0\widetilde{B}_2\varphi_1 = 0, \quad (2.5)$$

$$P_1(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = \mu P_1\widetilde{B}_2\varphi_1 = \mu \widetilde{B}_2\varphi_1. \quad (2.6)$$

Оператор $P_0(I - T(\lambda))P_0 = I_0 - P_0T(\lambda)P_0 \geq I_0$ в H_0 , так как

$$(P_0(I - T(\lambda))P_0\varphi_0, \varphi_0) = ((I - T(\lambda))P_0\varphi_0, \varphi_0) \geq \|\varphi_0\|^2,$$

и существует его обратный. Подействуем оператором $(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}$ слева на обе части уравнения (2.5) и выразим φ_0 :

$$\varphi_0 = -(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}(P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1). \quad (2.7)$$

Подставим полученное выражение в (2.6)

$$-P_1(I - T(\lambda))P_0(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}(P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1) + P_1(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = \mu \widetilde{B}_2\varphi_1.$$

Получаем следующее уравнение

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \mu \widetilde{B}_2\varphi_1, \quad (2.8)$$

где

$$T_1(\lambda) = P_1T(\lambda)P_1 + P_1T(\lambda)P_0(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_1T(\lambda)P_1. \quad (2.9)$$

Лемма 1. $\ker(I_1 - T_1(\lambda)) = \{0\}$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = 0,$$

где $T_1(\lambda)$ определен в (2.9). Введём φ_0 по формуле (2.7):

$$\varphi_0 = -(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}(P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1). \quad (2.10)$$

Имеем формулу (2.6) с $\mu = 0$:

$$P_1(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = 0, \quad (2.11)$$

а из уравнения (2.10) получаем:

$$P_0(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = 0, \quad (2.12)$$

т.е. уравнение (2.5).

Система уравнений (2.11), (2.12) или (2.5), (2.6) с $\mu = 0$ равносильна уравнению:

$$(I - T(\lambda))\varphi = 0, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

которое имеет тривиальное решение $\varphi = 0$, так как $I - T(\lambda) \geq 0I$. Поэтому и $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. \square

При $\lambda < 0$ оператор $T_1(\lambda) = (T_1(\lambda))^*$, $I_1 - T_1(\lambda) \gg 0$, а значит существует его квадратный корень. Сделаем замену:

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2}\varphi_1 = \psi_1. \quad (2.13)$$

Подставим $\varphi_1 = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\psi_1$ в уравнение (2.8)

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2}\psi_1 = \mu\tilde{B}_2(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\psi_1.$$

Подействуем слева оператором $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}$ и получим

$$\psi_1 = \mu\hat{B}_2\psi_1, \quad (2.14)$$

где $\hat{B}_2 = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\tilde{B}_2(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} > 0$, $\hat{B}_2 \in \mathfrak{S}_\infty(H)$.

В итоге, для случая $\lambda < 0$ в пучке (2.1) получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Собственные значения задачи (2.1) при $\lambda < 0$ образуют положительный дискретный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $+\infty$. Собственные элементы, отвечающие собственным значениям μ_k , после проектирования на подпространство H_1 , т.е. элементы $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $\varphi_{1k} = P_1\varphi_k$, образуют базис Рисса в H_1 , $\varphi_{1k} = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\psi_{1k}$, где $\{\psi_{1k}\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H_1 . Если выполнены условия*

$$A^{-1} \in \mathfrak{S}_{p_{A^{-1}}}, \quad B_3 \in \mathfrak{S}_{p_{B_3}}, \quad B_4 \in \mathfrak{S}_{p_{B_4}}, \quad (2.15)$$

то элементы φ_{1k} образуют p -базис в H_1 при $p > p_0 = (p_{A^{-1}})^{-1} + (p_{B_3})^{-1} + (p_{B_4})^{-1}$.

Доказательство. Первое утверждение о положительном спектре и базисе Рисса доказано в курсе лекций [3], а также следует из (2.13).

Докажем второе утверждение, что при условиях (2.15) образуется p -базис. Для этого рассмотрим оператор $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}$ и докажем, что

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = I_1 + \tilde{T}_1, \quad \tilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_p.$$

Действительно,

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2} - I_1 = ((I_1 - T_1(\lambda)) - I_1)((I_1 - T_1(\lambda))^{1/2} + I_1)^{-1} = -T_1(\lambda)((I_1 - T_1(\lambda))^{1/2} + I_1)^{-1}.$$

Здесь первый множитель из \mathfrak{S}_p , второй — ограничен, значит вся правая часть из \mathfrak{S}_p . Получаем:

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2} = I_1 + T_0, \quad T_0 \in \mathfrak{S}_p.$$

Рассмотрим теперь оператор

$$I = (I_1 - T_1(\lambda))^{1/2}(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = (I_1 + T_0)(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2},$$

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = (I_1 + T_0)^{-1},$$

обратный оператор существует по лемме 1, он также из \mathfrak{S}_p . Таким образом

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = I_1 + \tilde{T}_1, \quad \tilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_p,$$

причем того же класса, что и $T_1(\lambda)$. Так как оператор $T_1(\lambda)$ имеет структуру (2.9), а $T(\lambda)$ — (2.3), то

$$p > p_0 = (p_{A^{-1}})^{-1} + (p_{B_3})^{-1} + (p_{B_4})^{-1}.$$

□

2.2. Положительные значения параметра λ

(не совпадают со спектром пучков $I - T(\lambda)$ и $I_0 - P_0T(\lambda)P_0$)

Рассмотрим задачу (2.1) с фиксированным параметром $\lambda > 0$, и пусть λ не принадлежит $\sigma(I - T(\lambda))$ и $\sigma(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)$. Получаем уравнение

$$(I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = \mu B_2\varphi, \quad (2.16)$$

которое снова можно спроектировать на подпространства H_0 и H_1 ($H = H_0 \oplus H_1$). Обозначим

$$T(\lambda) = \lambda(A^{-1} + B_3) + \lambda^{-1}B_4, \quad T(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H)$$

и проделаем те же преобразования, что и в пп. 2.1:

$$(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)\varphi_0 = P_0T(\lambda)P_1\varphi_1, \quad (2.17)$$

$$\varphi_1 - P_1T(\lambda)(\varphi_0 - \varphi_1) = \mu B_2\varphi_1. \quad (2.18)$$

Оператор $(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}$ существует, так как λ не из $\sigma(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)$. Выразим элемент φ_0 из (2.17), подставим его в (2.18) и получим:

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \mu \widetilde{B}_2\varphi_1, \quad (2.19)$$

где $T_1(\lambda) = P_1T(\lambda)P_1 + P_1T(\lambda)P_0(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_0T(\lambda)P_1$, $\widetilde{B}_2 = P_1B_2P_1$ — полный оператор.

Лемма 2. *Существует обратный оператор $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = 0$. Аналогично доказательству леммы 1 из этого следует, что $(I - T(\lambda))\varphi = 0$.

Так как λ не принадлежит $\sigma(I - T(\lambda))$, то существует $(I - T(\lambda))^{-1}$ и это значит, что $\varphi = 0$. Следовательно $\varphi_0 = P_0\varphi = 0$, $\varphi_1 = P_1\varphi = 0$ и существует $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1}$. □

Рассмотрим задачу на собственные значения ν_k :

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \nu\varphi_1, \quad T_1(\lambda)\varphi_1 = (1 - \nu)\varphi_1, \quad T_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H), \quad (2.20)$$

значит существуют $\tilde{\nu}_k := 1 - \nu_k$, $\tilde{\nu}_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) по теореме Гильберта – Шмидта.

$$\varphi_1 = \sum_k c_k \varphi_{1k} = \sum_k (\varphi_1, \varphi_{1k}) \varphi_{1k}, \quad (2.21)$$

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_{1k} = \nu_k \varphi_{1k} = (1 - \tilde{\nu}_k)\varphi_{1k}. \quad (2.22)$$

Расположим ν_k в следующем порядке:

$$1 - \tilde{\nu}_1 \leq 1 - \tilde{\nu}_2 \leq \dots \leq 1 - \tilde{\nu}_\kappa < 0 < 1 - \tilde{\nu}_{\kappa+1} \leq 1 - \tilde{\nu}_{\kappa+2} \leq \dots \leq \infty.$$

Получаем

$$((I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \|c_k\|^2 (\varphi_{1k}, \varphi_{1k}) = \sum_{k=1}^{\kappa_1} (1 - \tilde{\nu}_k) \|c_k\|^2 + \sum_{\kappa_1+1}^{\infty} (1 - \tilde{\nu}_k) \|c_k\|^2. \quad (2.23)$$

Получаем индефинитную метрику и пространство Понтрягина $H = \Pi_\kappa = \Pi_- \oplus \Pi_+$. В уравнении (2.23) первое слагаемое принадлежит пространству H_- , второе — H_+ .

Теорема 2. Пусть $\lambda > 0$ и не принадлежит ни $\sigma(I - T(\lambda))$, ни $\sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)$, квадратичная форма оператора $I_1 - T_1(\lambda)$ принимает отрицательные значения на подпространстве Π_- размерности κ_1 , а на остальном пространстве Π_+ — положительные.

Тогда спектр задачи (2.1) вещественный, дискретный и состоит из κ_1 штук отрицательных собственных значений $\mu_1 \dots \mu_{\kappa_1}$, а остальные — положительные с предельной точкой $+\infty$.

При этом собственные элементы (присоединённых нет) образуют ортонормированный по форме $I_1 - T_1(\lambda)$ базис и базис Рисса. Элементы базиса должны удовлетворять соотношениям:

$$((I_1 - T_1(\lambda))\varphi_{1k}, \varphi_{1j}) = \pm \delta_{kj}, \quad (2.24)$$

$$(\widetilde{B}_2 \varphi_{1k}, \varphi_{1j}) = \pm \mu_k^{-1} \delta_{kj}, \quad (2.25)$$

знак минус — для $k = \overline{(1, \kappa_1)}$, а плюс — для $k \geq \kappa_1 + 1$.

Доказательство. Представим в (2.19) оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ в виде:

$$I_1 - T_1(\lambda) = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} J_\kappa |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2}, \quad (2.26)$$

где $\kappa > 0$ — ранг индефинитности оператора $I_1 - T_1(\lambda)$, а J_κ — каноническая симметрия.

Представление (2.26) возможно, так как λ не принадлежит $\sigma(I - T(\lambda))$ и $\sigma(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)$. В этом случае $|I_1 - T_1(\lambda)| \gg 0$ и потому существует ограниченный обратный оператор $|I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2}$. С учетом представления (2.26) задача (2.19) равносильна задаче

$$J_\kappa v_1 = \mu \widetilde{B}_2(\lambda) v_1, \quad (2.27)$$

$$v_1 = |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2} \varphi_1, \quad \widetilde{B}_2(\lambda) := |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2} \widetilde{B}_2 |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2}.$$

Перепишем задачу (2.27) с учетом свойств J_κ :

$$J_\kappa \widetilde{B}_2(\lambda) v_1 = \delta v_1, \quad \delta = \mu^{-1}. \quad (2.28)$$

Так как $\widetilde{B}_2(\lambda) > 0$ и компактен, то оператор $J_\kappa \widetilde{B}_2(\lambda)$ — компактный и J_κ — положительный, т.е.

$$[J_\kappa \widetilde{B}_2(\lambda) v_1, v_1] := (J_\kappa (J_\kappa \widetilde{B}_2(\lambda)) v_1, v_1) = (\widetilde{B}_2(\lambda) v_1, v_1) > 0, \quad v_1 \neq 0.$$

Таким образом оператор $J_\kappa \widetilde{B}_2(\lambda)$ удовлетворяет условиям известной теоремы о свойствах спектра и системы собственных элементов таких J_κ — самосопряжённых, неотрицательных операторов, действующих в пространстве Понтрягина P_κ с индефинитным скалярным произведением

$$[u_1, v_1] := (J_\kappa u_1, v_1), \quad \forall u_1, v_1 \in H_1,$$

см. [7].

Согласно выводам из этой теоремы, задача (2.28) имеет дискретный вещественный спектр $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой в нуле, а собственные элементы $\{v_{1k}\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$, образуют базис Рисса в H_1 . При этом первые κ собственных значений задачи (2.28) отрицательны, остальные — положительны. Если потребовать, чтобы для собственных элементов функционал $(J_\kappa v, v) = [v, v]$ равнялся по модулю единице, то приходим к формулам

$$[v_{1k}, v_{1j}] = \pm \delta_{kj}, \quad ((I_1 - T_1(\lambda)) \varphi_{1k}, \varphi_{1j}) = \pm \delta_{kj},$$

$$(\widetilde{B}_2 \varphi_{1k}, \varphi_{1j}) = \pm \mu_k^{-1} \delta_{kj},$$

где $-\delta_{kj}$ — для $k = \overline{(1, \kappa_1)}$, $+\delta_{kj}$ — для $k \geq \kappa_1 + 1$. □

2.3. Случай общего положения

Рассмотрим более общий случай, когда $\text{Im} \lambda \neq 0$, но λ не совпадают с $\sigma(I - T(\lambda))$. Снова перепишем задачу в виде

$$(I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1} B_4) \varphi = \mu B_2 \varphi.$$

Обозначим $T(\lambda) = \lambda(A^{-1} + B_3) + \lambda^{-1} B_4$, $T(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H)$, получаем задачу

$$(I - T(\lambda)) \varphi = \mu B_2 \varphi. \quad (2.29)$$

Рассмотрим случай, когда $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, а значит λ не принадлежит $\sigma(I - T(\lambda))$. Получаем следующие оценки для вещественной части квадратичной формы:

$$\begin{aligned} \|(I - T(\lambda))\varphi\| \cdot \|\varphi\| &\geq |((I - T(\lambda))\varphi, \varphi)| \geq \operatorname{Re}((I - T(\lambda))\varphi, \varphi) = \\ &= (\varphi, \varphi)^2 - \operatorname{Re}\lambda((A^{-1} + B_3)\varphi, \varphi) - \frac{\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2}(B_4\varphi, \varphi) \geq (I + |\operatorname{Re}\lambda|)(\varphi, \varphi) \geq \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Сократим левую и правую части на $\|\varphi\|$ и получим:

$$\|(I - T(\lambda))\varphi\| \geq \|\varphi\|. \quad (2.30)$$

Это означает, что существует $(I - T(\lambda))^{-1}$ и $\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leq 1$ равномерно по λ .

Рассмотрим уравнение (2.29), как и в предыдущих случаях спроектируем его на подпространства H_0 и H_1 :

$$(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)\varphi_0 + (I_0 - P_0T(\lambda)P_1)P_1\varphi_1 = 0, \quad (2.31)$$

$$-P_1T(\lambda)P_0\varphi_0 + (I_1 - P_1T(\lambda)P_1)\varphi_1 = \mu\widetilde{B}_2\varphi_1. \quad (2.32)$$

Так как λ не принадлежит $\sigma(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)$, то существует $(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}$. Выразим φ_0 из (2.31):

$$\varphi_0 = (I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_0T(\lambda)P_1\varphi_1$$

и подставим его в (2.32):

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \mu\widetilde{B}_2\varphi_1, \quad (2.33)$$

где $T_1(\lambda) = P_1T(\lambda)P_1 + P_1T(\lambda)P_0(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_0T(\lambda)P_1$, $\widetilde{B}_2 = P_1B_2P_1 -$ полный.

Лемма 3. Существует обратный оператор $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1}$; $T_1(\lambda)^{-1} = I_1 + \widetilde{T}_1$, $\widetilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H)$.

Доказательство. Проводится аналогично доказательству леммы 1. Так как $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, то существует $(I - T(\lambda))^{-1}$, а значит и $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1}$. \square

Теорема 3. Пусть в задаче (2.1) $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, $B_k = B_k^* \geq 0 \in \mathfrak{S}_\infty(H)$, $A = A^* > 0 \in \mathfrak{S}_\infty(H)$. Пусть также выполнено условие

$$B_2 \in \mathfrak{S}_p(H). \quad (2.34)$$

Тогда получаем дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ с единственной предельной точкой $\mu = \infty$. Сколь бы ни было мало $\varepsilon > 0$, все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле

$$\Lambda_\varepsilon(\lambda) := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon; \operatorname{sign} \operatorname{Im}\mu = -\operatorname{sign} \operatorname{Im}\lambda\}.$$

После проектирования на H_1 система собственных и присоединённых элементов $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (2.1), отвечающая собственным значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, является полной в H_1 .

Имеется степенная асимптотика собственных значений $\lambda_j(B_2)$

$$\lambda_k(B_2) = c_B^{\beta_0} k^{-\beta_0} (1 + o(1)), \quad c_B > 0, \quad \beta_0 > 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (2.35)$$

то для собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (2.1) справедлива асимптотическая формула

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(B_2)(1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.36)$$

Система элементов $\{P_1\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис Абеля – Лидского в H_1 .

Доказательство. Если выполнено условие (2.34), то оператор $\widetilde{B}_2 = P_1 B_2 P_1 \in \mathfrak{S}_p(H)$ и мы попадаем в условия первой теоремы Келдыша. Отсюда следуют выводы о спектре, собственных значениях и полноте в $H_1 = \overline{\mathcal{R}(B_2)}$.

Теперь докажем, что для оператора выполнено условие (2.35), тогда собственные значения $\mu_k(\lambda)$ этой задачи имеют асимптотическое поведение (2.36).

Доказательство этого утверждения следует из результата М.В. Келдыша [1], теорема 5.11.1. На самом деле, если выполнено условие (2.35), то для функции распределения

$$N(r; B_2) := \sum_{\alpha_k < r} 1$$

характеристических чисел α_k оператора B_2 (т.е. собственных значений невозмущённой задачи $\alpha B_2 u = u$), выполнено условие

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r; B_2)}{r^{1/\beta_0}} = \text{const} = c_B^{-1} > 0.$$

Поэтому выполнены условия теоремы 5.11.1 из [1] и имеет место асимптотическая формула (2.36).

Докажем последнее утверждение теоремы. Перепишем уравнение (2.33) в виде

$$(I_1 - T_1(\lambda) - \mu \widetilde{B}_2)\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 \in H_1. \quad (2.37)$$

В уравнении (2.37) осуществим замену

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 := \xi_1.$$

Так как по лемме 3 существует ограниченный обратный оператор $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1}$, то взамен (2.37) получаем

$$\widetilde{B}_2(I_1 + \widetilde{T}_1)\xi_1 = \delta \xi_1, \quad \delta = \mu^{-1}, \quad \widetilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_{\infty}(H).$$

Здесь оператор $\widetilde{B}_2(I_1 + \widetilde{T}_1)$ — слабое возмущение оператора \widetilde{B}_2 , собственные значения которого имеют степенную асимптотику (2.36). Отсюда следует, что \widetilde{B}_2 принадлежит классу операторов $\mathfrak{S}^{(p)}(H_1) \subset \mathfrak{S}_p(H_1)$ при $p > \beta_0^{-1}$. Поэтому по утверждению 1 с. 292 из [9] получаем, что оператор $\widetilde{B}_2(I_1 + \widetilde{T}_1) \in \mathbb{A}(\alpha, H_1)$, т.е. собственные и присоединённые элементы $\{\xi_{1,k}\}_{k=1}^\infty$ образуют базис Абеля – Лидского порядка $\alpha > \beta_0^{-1}$. Заметим теперь, что собственные и присоединённые элементы задачи (2.37) связаны соотношениями:

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_{1k} = \zeta_{1,k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $T_1(\lambda)$ ограничен и ограниченно обратим.

Отсюда следует, что элементы $\varphi_{1,k}$ образуют базис, эквивалентный базису Абеля – Лидского порядка $\alpha > \beta_0^{-1}$, т.е. базису $\{\zeta_{1,k}\}_{k=1}^\infty$. Тогда можно убедиться, что и сами элементы образуют базис Абеля – Лидского порядка $\alpha > \beta_0^{-1}$. В самом деле, если φ — произвольный элемент H_1 , то разложим $T_1(\lambda)\varphi$ в ряд по базису Абеля – Лидского $\{\zeta_{1,k}\}_{k=1}^\infty$:

$$T_1(\lambda)\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta_{1,k}, \quad c_k = (T_1(\lambda)\varphi, \widehat{\zeta}_{1,k}), \quad (2.38)$$

где $\{\widehat{\zeta}_{1,k}\}_{k=1}^\infty$ — биортогональный базис к базису $\{\zeta_{1,k}\}_{k=1}^\infty$. Применим к обеим частям $T_1(\lambda)^{-1}$ и получим

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, T_1^*(\lambda)\widehat{\zeta}_{1,k})\varphi_{1k}, \quad (2.39)$$

т.е. разложение в ряд по элементам φ_{1k} произвольного $\varphi \in H_1$.

Таким образом элементы φ_{1k} образуют базис в H_1 , и коэффициенты $c_k := (\varphi, T_1^*(\lambda)\widehat{\zeta}_{1,k})$ находятся однозначно. В силу ограниченности и ограниченной обратимости $T_1(\lambda)$ характер сходимости в равенствах (2.38), (2.39) один и тот же. Отсюда следует, что если ряд (2.38) сходится по Абелю – Лидскому, то так же сходится и (2.39), т.е. элементы $\{\eta_{1,k}\}_{k=1}^\infty$ также образуют базис по Абелю – Лидскому порядка $\alpha > \beta_0^{-1}$. \square

3. Свойства решений при спектральном параметре λ

Теперь рассмотрим случай, когда в пучке

$$L(\lambda, \mu)\varphi := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = 0, \quad \varphi \in H, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad (3.1)$$

$$0 \leq B_k = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \quad k = \overline{2, 4}, \quad 0 < A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(H).$$

параметр μ фиксирован, а λ — спектральный.

3.1. Неположительные значения параметра

Рассмотрим уравнение

$$L(\lambda)\varphi := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = 0,$$

перепишем его в виде

$$(I - \mu B_2)\varphi := \lambda(A^{-1} + B_3)\varphi + \lambda^{-1}B_4\varphi. \quad (3.2)$$

Оператор $I - \mu B_2 \gg 0$, значит существует $(I - \mu B_2)^{1/2}$. Сделаем в (3.2) замену $(I - \mu B_2)^{1/2}\varphi = \psi$:

$$(I - \mu B_2)^{1/2}\psi = \lambda(A^{-1} + B_3)(I - \mu B_2)^{-1/2}\psi + \lambda^{-1}B_4(I - \mu B_2)^{-1/2}\psi. \quad (3.3)$$

Подействуем в (3.3) слева оператором $(I - \mu B_2)^{-1/2}$ и получим следующую симметризацию

$$\psi = \lambda(I - \mu B_2)^{-1/2}(A^{-1} + B_3)(I - \mu B_2)^{-1/2}\psi + \lambda^{-1}(I - \mu B_2)^{-1/2}B_4(I - \mu B_2)^{-1/2}\psi. \quad (3.4)$$

В (3.4) оператор $A^{-1} + B_3 > 0$, $(I - \mu B_2)^{-1/2}$ — самосопряжённый оператор, $B_4 \gg 0$. Таким образом, оператор в первом слагаемом — самосопряжённый, компактный, положительный; оператор во втором слагаемом — самосопряжённый, компактный, неотрицательный. Получаем в точности пучок Крейна.

В дальнейшем нам понадобится следующая промежуточная лемма.

Лемма 4. *Имеет место следующая оценка*

$$\|(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \leq 1.$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$\|(I - \mu B_2)\psi\| \|\psi\| \geq ((I - \mu B_2)\psi, \psi) \geq \|\psi\|^2.$$

Первое неравенство следует из неравенства Коши – Буняковского. Сократим левую и правую части на $\|\psi\|$ и сделаем замену

$$(I - \mu B_2)\psi = \eta \quad \Rightarrow \quad \psi = (I - \mu B_2)^{-1}\eta.$$

Получаем

$$\|\eta\| \geq \|(I - \mu B_2)^{-1}\eta\|,$$

а значит, $\|(I - \mu B_2)^{-1}\| \leq 1$ и $(I - \mu B_2)^{-1/2} \leq 1$. \square

Из курса лекций [3] следует, что для факторизации пучка (3.4) нам необходимо следующее условие

$$4\|\tilde{A}\| \cdot \|\tilde{B}\| < 1,$$

где \tilde{A} и \tilde{B} — операторы пучка.

Используя лемму 4, рассмотрим следующие оценки

$$4\|(I - \mu B_2)^{-1/2}(A^{-1} + B_3)(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \cdot \|(I - \mu B_2)^{-1/2}B_4(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \leq 4\|(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \cdot \|A^{-1} + B_3\| \cdot \|(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \cdot \|B_4\| \cdot \|(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \leq 4\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\|.$$

Пусть $4\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\| < 1$, тогда имеет место факторизация пучка (3.4). Можем сформулировать следующий результат.

Теорема 4. Пусть для пучка (3.1), в котором

$$A^{-1} + B_3 = \tilde{A} = \tilde{A}^* \in \mathfrak{S}_\infty(H), \quad B_4 = \tilde{B} = \tilde{B}^* \in \mathfrak{S}_\infty(H), \quad \ker \tilde{A} = \{0\}, \quad H = H_1 \oplus H_0, \quad H_0 := \ker B,$$

выполнено условие, достаточное для факторизации $4\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\| < 1$ тогда:

1. Пучок (3.1) имеет дискретный вещественный спектр с предельными точками в 0 и ∞ .

2. Предельной точке $\lambda = 0$ отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений на отрезке $(0, r_-) \subset \mathbb{R}$. Соответствующая система собственных элементов образует базис Рисса в H_1 (после проектирования на $H_1 = H \ominus H_0$).

3. Предельной точке $\lambda = \infty$ отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений на (r_+, ∞) . Соответствующая система собственных элементов образует базис Рисса в H .

Пусть $\tilde{A} \in \mathfrak{S}_{p_{\tilde{A}}}(H)$, $\tilde{B} \in \mathfrak{S}_{p_{\tilde{B}}}(H)$. Тогда

4. Система собственных элементов, отвечающая собственным значениям из $(0, r_-)$, после проектирования на H_1 образует p -базис в H_1 при $p \geq p_0$, $p_0^{-1} = (p_{\tilde{A}})^{-1} + (p_{\tilde{B}})^{-1}$.

5. Соответственно система собственных элементов, отвечающая собственным значениям в промежутке (r_+, ∞) , образует p -базис в H при тех же p .

Доказательство. После проектирования на $H_1 = H \ominus H_0$ (см. п. 2.1 – 2.2) мы получаем полный оператор $\tilde{B}_2 = P_1 B_2 P_1$, $\ker \tilde{B}_2 = \{0\}$. Для нашего пучка применимы выводы для пучка Крейна из [3] теорема 3.1.2 и теорема 3.2.1. Отсюда и следуют выводы теоремы. \square

3.2. Вещественная часть μ не положительна

Рассмотрим случай, когда параметр λ спектральный, а $\operatorname{Re} \mu \leq 0$. Снова рассмотрим уравнение (3.2)

$$(I - \mu B_2)\varphi := \lambda(A^{-1} + B_3)\varphi + \lambda^{-1}B_4\varphi. \quad (3.5)$$

Оценим по модулю квадратичную форму $|((I - \mu B_2)\varphi, \varphi)|$:

$$\|(I - \mu B_2)\varphi\| \cdot \|\varphi\| \geq |((I - \mu B_2)\varphi, \varphi)| \geq \operatorname{Re}((I - \mu B_2)\varphi, \varphi) = \|\varphi\|^2 - \operatorname{Re} \mu (B_2\varphi, \varphi) \geq \|\varphi\|^2.$$

Сократим левую и правую части на $\|\varphi\|$ и получим:

$$\|(I - \mu B_2)\varphi\| \geq \|\varphi\|. \quad (3.6)$$

Если $(I - \mu B_2)\varphi = 0$, то $\|\varphi\| = 0$ и $\varphi = 0$. Таким образом, существует обратный оператор $(I - \mu B_2)^{-1}$. Сделаем замену в (3.6):

$$(I - \mu B_2)\varphi = \psi, \quad \varphi = (I - \mu B_2)^{-1}\psi.$$

Получим

$$\|\psi\| \geq \|(I - \mu B_2)^{-1}\psi\|, \quad \|(I - \mu B_2)^{-1}\| \leq 1.$$

Подействуем в (3.5) слева оператором $(I - \mu B_2)^{-1}$ (так как оператор $I - \mu B_2$ не является самосопряжённым, то не существует оператора $(I - \mu B_2)^{-1/2}$ как в п. 3.1). Получаем

$$\varphi = \lambda(I - \mu B_2)^{-1}(A^{-1} + B_3)\varphi + \lambda^{-1}(I - \mu B_2)^{-1}B_4\varphi. \quad (3.7)$$

Оператор $(I - \mu B_2)^{-1}$ является близким к I . Получаем слабое возмущение оператора B_2 и можем сформулировать следующий вывод.

Теорема 5. Пусть в задаче (3.5) выполнены условия теоремы 4, $\operatorname{Re} \mu \leq 0$. Тогда 1. если выполнены условия

$$A^{-1} + B_3 \in \mathfrak{S}_p(H); \quad B_4 \in \mathfrak{S}_p(H), \quad (3.8)$$

то после проектирования собственных элементов на подпространство $H_1 = H \ominus H_0$ задача (3.5) имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$ с единственной предельной точкой $\lambda = \infty$. Сколь бы мало ни было $\varepsilon > 0$, все собственные значения $\lambda_k(\mu)$, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в углах

$$-\varepsilon < \arg \lambda < \varepsilon, \quad \Pi - \varepsilon < \arg \lambda < \Pi + \varepsilon.$$

Система собственных и присоединённых элементов, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$, является полной в H .

2. Если вместо (3.8) выполнено более сильное асимптотическое условие

$$\lambda_k(B_4) = c_A^{\alpha_0} k^{-\alpha_0} (1 + o(1)), \quad c_A > 0, \quad \alpha_0 > 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.9)$$

то для собственных значений задачи имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_k(\mu) = -\lambda_k^{-1}(A)(1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty.$$

Система собственных и присоединённых элементов образует базис Абеля – Лидского порядка $\alpha > \alpha_0$ в пространстве H .

Доказательство. 1. Первое утверждение теоремы о спектре и полноте имеет место по теореме М.В. Келдыша (см. [3]).

2. Если выполнено условие (3.9), то операторы $A^{-1} + B_3$ и B_4 принадлежат классу компактных операторов $\mathfrak{S}^{(p)}$ при $p > \alpha_0^{-1}$. Поэтому для этого случая справедливы выводы из доказательства теоремы 3. Отсюда и следует утверждение об асимптотике и базисе по Абелю – Лидскому. \square

4. Заключение

Операторный пучок, полученный при решении спектральной краевой задачи сопряжения (1.1)–(1.3), содержит в себе много известных спектральных проблем, встречающихся в приложениях. В зависимости от фиксированного параметра получаем различные свойства пучка и соответствующие теоремы о структуре спектра.

Список цитируемых источников

1. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов. — М.: Наука, 1965. — 448 с.
Gokhberg I.C., Krein M.G. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators. — М.: Наука, 1965. — 448 p.
2. *Горбачук В.И.* Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений // Функциональные и численные методы математической физики. Ин-т матем. и механики: сб. научн. трудов. — К.: Наукова думка. — 1998. — С. 60–63.
Gorbachuk V.I. Dissipative boundary value problems for elliptic differential equations (in Russian) // Functional and numerical methods of mathematical physics. Institute of Mathematics and Mechanics: a collection of scientific papers. — К.: Naukova Dumka — 1998. — pp. 60–63.
3. *Копачевский Н.Д.* Спектральная теория операторных пучков // Специальный курс лекций. — 2009. — 128 с.
Kopachevsky N.D. Spectral theory of operator beam // Special course of lectures — 2009.
4. *Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.* Абстрактные смешанные краевые задачи сопряжения // Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - V"(Ростов-на-Дону). — 2015. — С. 211.
Kopachevsky N.D., Radomirskaya K.A. Abstract mixed boundary value problems of conjugation (in Russian) // Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis V (Rostov-on-Don). — 2015. — p. 211.
5. *Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.* Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения // XXVI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (Батилиман(Ласпи)). — 2015. — С. 52.
Kopachevsky N.D., Radomirskaya K.A. Abstract boundary and spectral conjugation problems // XXVI KROMSH. — 2015. — p. 52.
6. *Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения // Современная математика. Фундаментальные направления.— М., РУДН. — 2016. — Т.61— С. 67-102.
Kopachevsky N.D., Radomirskaya K.A. Abstract boundary and spectral conjugation problems and their applications // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.— М., RUDN. — 2016. — Т.61— pp. 67-102.

7. *Понтрягин Л.С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1944. — Т.8, № 6. — С. 243 – 280.
Pontryagin L.S. "Hermitian operators in a space with indefinite metric"// Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. — 1944. — Т.8, № 6. — pp. 243–280.
8. *Старков П.А.* Операторный подход к задачам сопряжения // Ученые записки ТНУ им. Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". — 2002. — Т.15(64), № 2. — С. 82-88.
Starkov P.A. Operator approach to the conjugation problems // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. Series "Mathematics. Mechanics. Informatics and Cybernetics.". — 2002. — Т.15(64), № 2. — pp. 82-88.
9. *Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory. — Berlin: Wiley–VCN, 1999.
10. *Gohberg I., Goldberg S.* Basic Operator Theory. — Boston: Birkhauser, 1980. — 448 p.
11. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid-Birkhauser Verlag.—Basel–Boston–Berlin. — 2001. — 384 p.
12. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid-Birkhauser Verlag. —Basel–Boston–Berlin. — 2003. — 444 p.
13. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge University Press, 2000.
14. *Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D.* On the modified spectral Stefan problem and its abstract generalizations // Birkhauser Verlag, Basel (Switzerland). — 2009. — Т.191.— P. 373–386.

Получена 06.03.2017

УДК 27.31.55, 532.5

Асимптотика решений в задаче о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости

Д. А. Загора

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. E-mail: dmitry.zkr@gmail.com

Аннотация. В работе исследуется задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости. Доказана теорема об асимптотическом поведении решений в изучаемой задаче при внешних нагрузках, близких к почти периодическим. Установлено, в частности, что если внешняя нагрузка — стационарное потенциальное поле, то потенциальная составляющая течения в изучаемой задаче экспоненциально затухает и происходит перераспределение давления.

Ключевые слова: релаксирующая жидкость, экспоненциальная устойчивость, асимптотика решения.

Asymptotics of solutions in the problem on small motions of an ideal relaxing fluid

D. A. Zakora

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In this paper we study the problem on small motions of an ideal relaxing fluid filling a bounded domain. This hydrodynamic system is described by a system of integro differential equations. The kernels of corresponding integral operators are of exponential type. In the case where the external force is close to almost periodic a theorem on the asymptotic behavior of solutions of the problem is proven. In particular, if the external force is a stationary potential field then the potential component of the flows decays exponentially and a pressure redistribution occurs.

Keywords: relaxing fluid, exponential stability, asymptotic behavior of solution.

MSC 2010: 34K20, 93C23

Введение

В работе исследуется задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости (см. [14, гл. 11, § 11.6], [21]). Эта задача описывается системой интегро-дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий.

Аналогичные задачи изучались многими авторами. В пионерских работах [8], [9] показано, что решение однородного интегро-дифференциального уравнения

второго порядка, с операторным ядром достаточно общего вида, стремится к нулю с ростом времени, но без оценки скорости убывания. Это утверждение применено к задаче, описывающей движения вязкоупругого тела. Динамика вязкоупругих систем изучалась далее многими авторами. Приведем здесь монографии [20], [11], [17] (см. также указанную в них литературу), а также некоторые работы по экспоненциальной устойчивости в вязкоупругих системах [15], [10], [16], [5]. Работы [6], [18], [19], [4], [3] посвящены вопросам экспоненциальной и полиномиальной устойчивости решений абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений.

Цель настоящей работы — исследование асимптотического поведения решений в задаче о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости при нагрузках вида $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}(t)$, $\mathbf{f}'_k(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, $\sigma_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($k = \overline{1, n}$).

Мы будем опираться на теорему, следующую из [1]. Введем необходимые для формулировки теоремы обозначения. Пусть H , H_l ($l = \overline{0, m}$) — гильбертовы пространства. Пусть задан самосопряженный и положительно определенный оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$, заданы ограниченные операторы $Q_l \in \mathcal{L}(H, H_l)$ ($l = \overline{0, m}$) и неотрицательные числа $\gamma_l \geq 0$ такие, что $(Q_l^* Q_l u, u)_H \geq \gamma_l \|u\|_H^2$ при всех $u \in H$. Будем считать также, что дан упорядоченный набор положительных чисел $0 < b_1 < \dots < b_m$.

Определим гильбертово пространство $\mathcal{H} := H \oplus (\oplus_{l=0}^m H_l)$, состоящее из элементов вида $\xi := (u; w)^\tau := (u; (u_0; u_1; \dots; u_m)^\tau)^\tau$ (символ τ означает транспонирование). В гильбертовом пространстве \mathcal{H} определим оператор \mathcal{A} по следующей формуле:

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} A^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \quad (0.1)$$

$$\mathcal{Q} := (Q_0, Q_1, \dots, Q_m)^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I), \quad \mathcal{I} := \text{diag}(I, I, \dots, I),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (u; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid u \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}. \quad (0.2)$$

Теорема 1. Пусть существует $Q_0^{-1} \in \mathcal{L}(H_0, H)$ и $\gamma_q > 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, m\}$. Тогда оператор $-\mathcal{A}$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0 -полугруппы $\mathcal{U}(t)$, то есть существуют $\omega > 0$ и $M = M(\omega) \geq 1$ такие, что

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M e^{-\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty). \quad (0.3)$$

Замечание. В теореме 1 можно дать оценку типа полугруппы $\mathcal{U}(t)$, однако здесь она не приводится.

1. Малые движения идеальной релаксирующей жидкости

1.1. Постановка задачи

Введем в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы начало координат находилось внутри области, а ось Ox_3 была направлена против действия силы тяжести. Обозначим через \mathbf{n} внешний единичный нормальный к $\partial\Omega$ вектор. Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей область Ω , описывается следующей системой уравнений, граничных и начальных условий:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t, x)}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho_0(x_3)} \rho(t, x) \right) + \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \nabla (k_l(x) \rho(s, x)) ds + a_\infty^{-2}(x_3) \mathbf{f}(t, x) \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = -\operatorname{div}(\delta(x_3) \mathbf{u}(t, x)) \quad (\text{в } \Omega), \quad \mathbf{u}(t, x) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega), \quad (1.2)$$

$$\delta(x_3) := \rho_0(x_3) a_\infty^2(x_3), \quad \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0, x) = \rho^0(x), \quad (1.3)$$

где $a_\infty^2(x_3) \mathbf{u}(t, x)$ — поле скоростей жидкости, $\rho(t, x)$ — динамическая плотность жидкости, $\mathbf{f}(t, x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле, $a_\infty(x_3)$ — заданная скорость звука в жидкости, $\rho_0(x_3)$ — заданная стационарная плотность жидкости. Функция $\delta(x_3)$ удовлетворяет неравенствам $0 < \delta_1 \leq \delta(x_3) \leq \delta_2 < +\infty$ и является гладкой. При отсутствии гравитационного поля структурные функции $k_l(x)$ следует считать положительными постоянными. Здесь будем считать, что это гладкие положительные функции. Числа b_l^{-1} имеют смысл времен релаксации в системе, $0 < b_1 < \dots < b_m$. Кроме того, полагаем, что

$$1 - \sum_{l=1}^m \frac{k_l(x) \rho_0(x_3)}{b_l} > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (1.4)$$

1.2. Проектирование уравнений движения

Применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства [13]. Введем векторное гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)$ с весом $\delta(x_3)$ со скалярным произведением и нормой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} := \int_{\Omega} \delta(x_3) \mathbf{u}(x) \cdot \overline{\mathbf{v}(x)} d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)}^2 = \int_{\Omega} \delta(x_3) |\mathbf{u}(x)|^2 d\Omega. \quad (1.5)$$

Можно проверить, что имеет место разложение (аналог разложения Г. Вейля пространства векторных полей $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (см. [13, гл. 2, § 2, п. 2.1.8]):

$$\mathbf{L}_2(\Omega, \delta) = \mathbf{J}_0(\Omega, \delta) \oplus \mathbf{G}(\Omega, \delta), \quad (1.6)$$

$$\mathbf{J}_0(\Omega, \delta) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \delta) \mid \operatorname{div}(\delta(x_3)\mathbf{v}) = 0 \text{ (в } \Omega), \mathbf{v}_n := \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega)\},$$

$$\mathbf{G}(\Omega, \delta) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega, \delta) \mid \mathbf{v} = \nabla\varphi, \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0\}.$$

Здесь операции $\operatorname{div}\mathbf{v}$ и \mathbf{v}_n понимаются в смысле теории обобщенных функций (см. [13, гл. 2, § 2, п. 2.1.6]). Введем ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)$ на $\mathbf{J}_0(\Omega, \delta)$ и $\mathbf{G}(\Omega, \delta)$ соответственно. Будем разыскивать поле \mathbf{u} в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\varphi, \quad \text{где } \mathbf{v} \in \mathbf{J}_0(\Omega, \delta), \quad \nabla\varphi \in \mathbf{G}(\Omega, \delta). \quad (1.7)$$

С помощью представления (1.7) преобразуем (1.1)-(1.3) к следующему виду:

$$\frac{\partial\mathbf{v}(t, x)}{\partial t} = P_0 a_{\infty}^{-2}(x_3)\mathbf{f}(t, x) \text{ (в } \Omega), \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\nabla\varphi(t, x)}{\partial t} = & -\nabla\left(\frac{1}{\rho_0(x_3)}\rho(t, x)\right) + \\ & + \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \nabla(k_l(x)\rho(s, x)) ds + P_G a_{\infty}^{-2}(x_3)\mathbf{f}(t, x) \text{ (в } \Omega), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial\rho(t, x)}{\partial t} = -\operatorname{div}(\delta(x_3)\nabla\varphi(t, x)) \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega), \quad (1.10)$$

$$\mathbf{v}(0, x) = P_0\mathbf{u}^0(x), \quad \nabla\varphi(0, x) = P_G\mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0, x) = \rho^0(x). \quad (1.11)$$

Из (1.8), (1.11) найдем вихревую составляющую течения:

$$\mathbf{v}(t, x) = P_0\mathbf{u}^0(x) + \int_0^t P_0 a_{\infty}^{-2}(x_3)\mathbf{f}(s, x) ds.$$

Таким образом, далее будет изучаться система (1.9)-(1.11), содержащая лишь потенциальную составляющую течения и динамическую плотность.

1.3. Операторное уравнение и основная теорема

Для перехода к операторной формулировке задачи (1.9)-(1.11) введем ряд операторов и приведем их свойства. Введем гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций суммируемых со своими квадратами по области Ω , а также его подпространство $L_{2,\Omega} := \{f \in L_2(\Omega) \mid (f, 1)_{L_2(\Omega)} = 0\}$.

Будем считать далее, что граница $\partial\Omega$ класса C^2 . Определим оператор

$$B\nabla\varphi := \operatorname{div}(\delta\nabla\varphi), \quad \mathcal{D}(B) := \{\nabla\varphi \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) \mid \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ (} \partial\Omega), \int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0\}. \quad (1.12)$$

Тогда $B : \mathcal{D}(B) \subset \mathbf{G}(\Omega, \delta) \rightarrow L_{2,\Omega}$, $\operatorname{Ker}B = \{0\}$, оператор B замкнут и

$$B^*\rho = -\nabla\rho, \quad \mathcal{D}(B^*) = W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\Omega}, \quad \operatorname{Ker}B^* = \{0\}. \quad (1.13)$$

Определим оператор $A := B^*B$. Можно доказать, что оператор A положительно определен в $\mathbf{G}(\Omega, \delta)$. По теореме о полярном представлении [7, гл. 8, § 1] существует унитарный оператор $U : \mathbf{G}(\Omega, \delta) \rightarrow L_{2,\Omega}$ такой, что $B = UA^{1/2}$.

Определим ортопроектор Π пространства $L_2(\Omega)$ на $L_{2,\Omega}$ и операторы

$$M_0\rho := \Pi\rho_0^{-1}\Pi\rho, \quad M_l\rho := \Pi k_l\Pi\rho \quad (l = \overline{1, m}), \quad (1.14)$$

которые являются ограниченными, самосопряженными и положительно определенными операторами в $L_{2,\Omega}$. Кроме того, $M_l\mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$ ($l = \overline{0, m}$). Из (1.4) следует, что $M_0 - \sum_{l=1}^m b_l^{-1}M_l \gg 0$.

С помощью введенных операторов задачу (1.9)-(1.11) перепишем в виде основной задачи Коши для следующей системы дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах $\mathbf{G}(\Omega, \delta)$ и $L_{2,\Omega}$:

$$\begin{cases} \frac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = B^*M_0\rho(t) - \sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)}B^*M_l\rho(s) ds + P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho(t)}{dt} = -B\nabla\varphi(t), \quad \nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Определим операторы $Q_0 := [M_0 - \sum_{l=1}^m b_l^{-1}M_l]^{1/2}U$ и $Q_l := [b_l^{-1}M_l]^{1/2}U$ ($l = \overline{1, m}$).

Определение 1. Назовем *сильным решением* исходной начально-краевой задачи (1.1)-(1.3) такие \mathbf{u} и ρ , для которых $\nabla\varphi$ и ρ являются сильным решением задачи Коши (1.15). В свою очередь *сильным решением* задачи Коши (1.15) назовем такую пару $\nabla\varphi$ и ρ , что $\nabla\varphi(t) \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\rho(t) \in \mathcal{D}(B^*)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $B^*\rho(t), \nabla\varphi'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{G}(\Omega, \delta))$, $B\nabla\varphi(t), \rho'(t) \in C(\mathbb{R}_+; L_{2,\Omega})$, выполнены начальные условия и уравнения из (1.15) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Основным утверждением работы является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $P_G\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(B)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{f}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \delta))$. Тогда задача Коши (1.15) имеет единственное сильное решение.

Пусть $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}(t), \mathbf{f}_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \delta))$, $\mathbf{f}_0 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \delta)$, $\sigma_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($k = \overline{1, n}$). Тогда существуют константы $\omega > 0$, $M_k \geq 1$ ($k = 1, 2$) такие, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено следующее неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k \mathbf{M}(i\sigma_k) P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \delta)}^2 + \\ & + \left\| \rho(t) + B \left(\mathbf{M}(0) P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathbf{M}(i\sigma_k) P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right) \right\|_{L_{2,\Omega}}^2 \leq \\ & \leq M_1 e^{-2\omega t} \left[\|P_G\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{G}(\Omega, \delta)}^2 + \|\rho^0\|_{L_{2,\Omega}}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{f}_k\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)}^2 \right] + \\ & + M_2 \left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left[\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} \right] ds \right]^2, \quad (1.16) \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}(\lambda) := A^{-1/2} \left[U^* M_0 U + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - \lambda} U^* M_l U \right]^{-1} A^{-1/2}. \quad (1.17)$$

В частности, если $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)}$, $\|\mathbf{f}'_k(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} \rightarrow 0$ ($k = \overline{1, n}$) при $t \rightarrow +\infty$, то

$$\begin{aligned} & \left\| \nabla \varphi(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k \mathbf{M}(i\sigma_k) P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \delta)}^2 + \\ & + \left\| \rho(t) + B \left(\mathbf{M}(0) P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathbf{M}(i\sigma_k) P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right) \right\|_{L_2, \Omega}^2 \rightarrow 0, \\ & t \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Если дополнительно $\mathbf{f}_k(t) = \mathbf{0}$ ($k = \overline{1, n}$), $a_\infty^{-2} \mathbf{f}_0 = \nabla p$, $p \in \mathcal{D}(B^*)$, то

$$\left\| \nabla \varphi(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \delta)}^2 + \left\| \rho(t) - \left[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} p \right\|_{L_2, \Omega}^2 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (1.19)$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в несколько шагов.

1. Предположим, что задача (1.15) имеет сильное решение и сведем ее к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть $\nabla \varphi(t)$, $\rho(t)$ — сильное решение системы (1.15) (см. определение 1). С использованием интегрирования по частям и (1.12)-(1.14) можно проверить, что функции $\nabla \varphi(t)$ и $\rho(t)$ удовлетворяют также следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{d\nabla \varphi(t)}{dt} = A^{1/2} \left\{ U^* \left[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right] \rho(t) + \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} \frac{1}{b_l} U^* M_l \rho^0 + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^m U^* \left[\frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \left[\frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} \frac{d\rho(s)}{ds} ds \right\} + P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}(t), \\ \frac{d\rho(t)}{dt} = -U A^{1/2} \nabla \varphi(t). \end{cases} \quad (1.20)$$

Введем по $\rho(t)$ следующие функции:

$$u_0(t) := - \left[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} \rho(t), \quad u_l(t) := - \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \left[\frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} \frac{d\rho(s)}{ds} ds \quad (l = \overline{1, m}). \quad (1.21)$$

Функции $u_0(t)$, $u_l(t)$ ($l = \overline{1, m}$) непрерывно дифференцируемы на \mathbb{R}_+ . Из (1.20), (1.21) получим, что они удовлетворяют следующей системе уравнений и началь-

НЫХ УСЛОВИЙ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = -A^{1/2} \left\{ U^* \left[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} u_0(t) - \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} \frac{1}{b_l} U^* M_l \rho^0 + \sum_{l=1}^m U^* \left[\frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} u_l(t) \right\} + P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}(t), \\ \frac{du_0(t)}{dt} = - \left\{ - \left[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} U A^{1/2} \nabla\varphi(t) \right\}, \\ \frac{du_l(t)}{dt} = - \left\{ - \left[\frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} U A^{1/2} \nabla\varphi(t) + b_l u_l(t) \right\}, \quad l = \overline{1, m}, \end{array} \right. \quad (1.22)$$

$$\nabla\varphi(0) = P_G \mathbf{u}^0, \quad u_0(0) = - \left[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{1/2} \rho^0, \quad u_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, m}).$$

С помощью введенных операторов $Q_0 = [M_0 - \sum_{l=1}^m b_l^{-1} M_l]^{1/2} U$, $Q_l = [b_l^{-1} M_l]^{1/2} U$ ($l = \overline{1, m}$) систему (1.22) перепишем следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = -A^{1/2} \left[Q_0^* u_0(t) - \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} Q_l^* Q_l U^* \rho^0 + \sum_{l=1}^m Q_l^* u_l(t) \right] + P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}(t), \\ \frac{du_0(t)}{dt} = - \left[- Q_0 A^{1/2} \nabla\varphi(t) \right], \\ \frac{du_l(t)}{dt} = - \left[- Q_l A^{1/2} \nabla\varphi(t) + b_l u_l(t) \right], \quad l = \overline{1, m}, \end{array} \right. \quad (1.23)$$

$$\nabla\varphi(0) = P_G \mathbf{u}^0, \quad u_0(0) = -Q_0 U^* \rho^0, \quad u_l(0) = 0 \quad (l = \overline{1, m}).$$

Систему (1.23) запишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathbf{G}(\Omega, \delta) \oplus (\oplus_{l=0}^m L_{2,\Omega})$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}(\xi + \xi_{\rho^0}(t)) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad (1.24)$$

$$\xi(t) := (\nabla\varphi(t); w(t))^\tau := (\nabla\varphi(t); u_0(t); u_1(t); \dots; u_m(t))^\tau,$$

$$\xi_{\rho^0}(t) := (0; -(Q_0^*)^{-1} \sum_{l=1}^m e^{-b_l t} Q_l^* Q_l U^* \rho^0; 0; \dots; 0)^\tau, \quad (1.25)$$

$$\xi^0 := (P_G \mathbf{u}^0; -Q_0 U^* \rho^0; 0; \dots; 0)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := (P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}(t); 0; 0; \dots; 0)^\tau.$$

Оператор \mathcal{A} определяется по формулам (0.1)-(0.2) и удовлетворяет теореме 1:

$$\mathcal{A} = \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \text{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}),$$

$$\mathcal{Q} := (Q_0, Q_1, \dots, Q_m)^\tau, \quad \mathcal{G} := \text{diag}(0, b_1 I, \dots, b_m I), \quad \mathcal{I} := \text{diag}(I, I, \dots, I),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \xi = (\nabla\varphi; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \nabla\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}.$$

Осуществим в задаче (1.24) замену искомой функции $\zeta(t) := \xi(t) + \xi_{\rho^0}(t)$, получим следующую задачу Коши

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \xi'_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0 := (P_G \mathbf{u}^0; -(Q_0^*)^{-1} U^* M_0 \rho^0; 0; \dots; 0)^\tau. \quad (1.26)$$

По теореме 1 оператор $-\mathcal{A}$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой C_0 -полугруппы $\mathcal{U}(t)$. Из условий на начальные данные следует, что $\nabla\varphi(0) = P_G \mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\mathcal{Q}^* w(0) = -U^* M_0 \rho^0 = -A^{-1/2}(U A^{1/2})^* M_0 \rho^0 = -A^{-1/2} B^* M_0 \rho^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, то есть $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Из условия на функцию $\mathbf{f}(t)$ следует, что $\xi'_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Из теоремы о разрешимости абстрактной задачи Коши (см. [2, гл. 1, § 6, п. 2, теорема 6.5], [12, гл. 2, § 1, теорема 1.3]) следует, что задача Коши (1.26) имеет единственное решение $\zeta(t)$ такое, что $\zeta(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\zeta(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\zeta(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Отсюда выводится утверждение о сильной разрешимости.

2. Докажем неравенство (1.16) и формулу (1.18).

Пусть $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}(t), \mathbf{f}_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \delta))$, $\mathbf{f}_0 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \delta)$, $\sigma_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($k = \overline{1, n}$). Представим функцию $\mathcal{F}(t)$ в (1.24), (1.26) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= \mathcal{T}(t) + \mathcal{F}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t), \quad \mathcal{T}(t) := (P_G a_\infty^{-2} \mathbf{g}(t); 0; \dots; 0)^\tau \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}), \\ \mathcal{F}_0 &:= (P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_0; 0; \dots; 0)^\tau \in \mathcal{H}, \quad \mathcal{F}_k(t) := (P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t); 0; \dots; 0)^\tau \in \mathcal{H} \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Из (0.1) непосредственными вычислениями можно найти резольвенту $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})$ оператора \mathcal{A} . Из (1.27) теперь найдем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0 &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0 = (0; (Q_0^*)^{-1} A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_0; 0; \dots; 0)^\tau, \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) &= (A^{-1/2} L^{-1}(\lambda) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t); \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q} L^{-1}(\lambda) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t))^\tau = \\ &= (A^{-1/2} L^{-1}(\lambda) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t); \frac{1}{-\lambda} Q_0 L^{-1}(\lambda) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t); \\ &\quad \frac{1}{b_1 - \lambda} Q_1 L^{-1}(\lambda) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t); \dots; \frac{1}{b_m - \lambda} Q_m L^{-1}(\lambda) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t))^\tau \\ &\quad \forall \lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$L(\lambda) := -\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^* \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \mathcal{Q}. \quad (1.29)$$

Пусть $\nabla\varphi(t)$, $\rho(t)$ сильное решение задачи Коши (1.15). Используя представление $Q_0^* Q_0 = U^* M_0 U - \sum_{l=1}^m Q_l^* Q_l = U^* M_0 U - \sum_{l=1}^m b_l^{-1} U^* M_l U$, (1.17), (1.27), (1.28),

(1.21), (1.24), при $t \in \mathbb{R}_+$ получим

$$\begin{aligned}
 & \left\| \nabla \varphi(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k \mathbf{M}(i\sigma_k) P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \delta)}^2 + \\
 & \quad + \left\| \rho(t) + B \left(\mathbf{M}(0) P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathbf{M}(i\sigma_k) P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right) \right\|_{L_2, \Omega}^2 = \\
 & = \left\| \nabla \varphi(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} \left[U^* M_0 U - \sigma_k^2 A^{-1} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - i\sigma_k} U^* M_l U \right]^{-1} A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \delta)}^2 + \\
 & + \left\| \rho(t) + U A^{1/2} \left(A^{-1/2} \left[U^* M_0 U - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} U^* M_l U \right]^{-1} A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_0 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} \left[U^* M_0 U - \sigma_k^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l - i\sigma_k} U^* M_l U \right]^{-1} A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right) \right\|_{L_2, \Omega}^2.
 \end{aligned}$$

Отсюда, из (0.1), (1.29) (см. формулу для пучка $L(\lambda)$) получим, что

$$\begin{aligned}
 & \left\| \nabla \varphi(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k \mathbf{M}(i\sigma_k) P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \delta)}^2 + \\
 & \quad + \left\| \rho(t) + B \left(\mathbf{M}(0) P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathbf{M}(i\sigma_k) P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right) \right\|_{L_2, \Omega}^2 = \\
 & = \left\| \nabla \varphi(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \delta)}^2 + \\
 & \quad + \left\| \rho(t) + U \left((Q_0^* Q_0)^{-1} A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{-i\sigma_k} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right) \right\|_{L_2, \Omega}^2 \leq \\
 & \leq \left\| \nabla \varphi(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{\mathbf{G}(\Omega, \delta)}^2 + \\
 & \left\| U Q_0^{-1} \right\|^2 \left\| u_0(t) - (Q_0^*)^{-1} A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_0 - \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{-i\sigma_k} Q_0 L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_2, \Omega}^2 + \\
 & \quad + \sum_{l=1}^m \left\| u_l(t) - \sum_{k=1}^n \frac{e^{-i\sigma_k t}}{b_l - i\sigma_k} Q_l L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2} \mathbf{f}_k(t) \right\|_{L_2, \Omega}^2 \leq \\
 & \leq \max\{1, \|U Q_0^{-1}\|^2\} \cdot \left\| \xi(t) - \mathcal{R}_0(\mathcal{A}) \mathcal{F}_0 - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

Напомним, что по теореме 1 оператор $-\mathcal{A}$ — генератор равномерно экспоненциально устойчивой C_0 -полугруппы $\mathcal{U}(t)$, удовлетворяющей нера-

венству (0.3). Будем искать (единственное) решение задачи (1.26) при $\mathcal{F}(t) = \mathcal{T}(t) + \mathcal{F}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t)$ в виде $\zeta(t) = \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) + \eta(t)$. Тогда функция $\eta(t)$ будет решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= -\mathcal{A}\eta + \mathcal{F}_0 + \xi'_{\rho^0}(t) + \mathcal{T}(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}'_k(t), \\ \eta(0) &= \zeta^0 - \sum_{k=1}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Из (1.31) и $\xi(t) := \zeta(t) - \xi_{\rho^0}(t)$ найдем, что

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) - \xi_{\rho^0}(t) + \mathcal{U}(t) \left(\zeta^0 - \sum_{k=1}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(0) \right) + \\ &+ \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \left(\xi'_{\rho^0}(s) + \mathcal{T}(s) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k s} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}'_k(s) + \mathcal{F}_0 \right) ds. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Из формулы [2, гл. 1, § 1, формула (1.10)] для резольвенты оператора $-\mathcal{A}$:

$$\mathcal{R}_\lambda(-\mathcal{A})\mathcal{F} = - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \mathcal{U}(s) \mathcal{F} ds \quad \forall \mathcal{F} \in \mathcal{H}, \quad \lambda > -\omega$$

при $\lambda = 0$ следует, что

$$\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0 = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0 = \int_0^{+\infty} \mathcal{U}(s) \mathcal{F}_0 ds. \quad (1.33)$$

Из (1.32), (1.33), (1.27) и (0.3) найдем, что

$$\begin{aligned} &\left\| \xi(t) - \mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0 - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \\ &= \left\| \mathcal{U}(t) \left(\zeta^0 - \sum_{k=1}^n \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(0) \right) - \xi_{\rho^0}(t) - \int_t^{+\infty} \mathcal{U}(s) \mathcal{F}_0 ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \left(\xi'_{\rho^0}(s) + \mathcal{T}(s) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k s} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}'_k(s) \right) ds \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \\ &\leq \left[M e^{-\omega t} \left(\|\zeta^0\|_{\mathcal{H}} + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=1}^n \|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} \right) + \|\xi_{\rho^0}(t)\|_{\mathcal{H}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M}{\omega} e^{-\omega t} \|\mathbf{f}_0\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} + M \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left[\|\xi'_{\rho^0}(s)\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=1}^n \|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} \right] ds \right]^2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Используя формулы для $\xi_{\rho^0}(t)$ и ζ^0 (см. (1.24), (1.26)), из (1.34) найдем

$$\begin{aligned} & \left\| \xi(t) - \mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0 - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \\ & \leq \left[M e^{-\omega t} \left(\|P_G u^0\|_{\mathbf{G}(\Omega, \delta)}^2 + \|(Q_0^*)^{-1} U^* M_0\|^2 \|\rho^0\|_{L_2, \Omega}^2 \right)^{1/2} + \right. \\ & \quad + M e^{-\omega t} \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=1}^n \|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} + \\ & \quad + M e^{-\omega t} \sum_{l=1}^m \frac{b_l}{b_l - \omega} \|(Q_0^*)^{-1} Q_l^* Q_l U^*\| \|\rho^0\|_{L_2, \Omega} + \frac{M}{\omega} e^{-\omega t} \|\mathbf{f}_0\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} + \\ & \quad \left. + M \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left[\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=1}^n \|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} \right] ds \right]^2 \leq \\ & \leq N e^{-2\omega t} \left[\|P_G u^0\|_{\mathbf{G}(\Omega, \delta)}^2 + \|\rho^0\|_{L_2, \Omega}^2 + \|\mathbf{f}_0\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)}^2 + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)}^2 \right] + \\ & + (n+4)M^2 \left[\int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left[\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} + \sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sum_{k=1}^n \|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} \right] ds \right]^2, \end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned} N := (n+4)M^2 \max \left\{ 1, \frac{1}{\omega^2}, \|(Q_0^*)^{-1} U^* M_0\|^2 + \right. \\ \left. + \left[\sum_{l=1}^m \frac{b_l}{b_l - \omega} \|(Q_0^*)^{-1} Q_l^* Q_l U^*\| \right]^2, \left[\sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\| \right]^2 \right\}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Из (1.30), (1.35), (1.36) следует (1.16) с константами

$$\begin{aligned} M_1 &= N \max\{1, \|UQ_0^{-1}\|^2\}, \\ M_2 &= (n+4)M^2 \max\{1, \left[\sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\| \right]^2\} \cdot \max\{1, \|UQ_0^{-1}\|^2\}. \end{aligned}$$

3. Докажем формулу (1.18). Пусть $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} \rightarrow 0$, $\|\mathbf{f}'_k(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} \rightarrow 0$ ($k = \overline{1, n}$) при $t \rightarrow +\infty$. Очевидно, достаточно доказать, что интегральное слагаемое в (1.16) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Обозначим $h(t) := \|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)} + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{f}'_k(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \delta)}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем последовательно числа $t_{\varepsilon, 1}$ и $t_{\varepsilon, 2}$ следующим образом:

$$t_{\varepsilon, 1} > 0 : \sup_{t \geq t_{\varepsilon, 1}} h(t) < \frac{\varepsilon \omega}{2}, \quad t_{\varepsilon, 2} := \frac{1}{\omega} \ln \left[\frac{2}{\varepsilon \omega} (e^{\omega t_{\varepsilon, 1}} - 1) \sup_{t \geq 0} h(t) \right].$$

Теперь для любого $t \geq t(\varepsilon) := \max\{t_{\varepsilon,1}, t_{\varepsilon,2}\}$ найдем, что

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\omega(t-s)} h(s) ds &= \int_0^{t_{\varepsilon,1}} e^{-\omega(t-s)} h(s) ds + \int_{t_{\varepsilon,1}}^t e^{-\omega(t-s)} h(s) ds \leq \\ &\leq \frac{e^{-\omega t}}{\omega} (e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1) \sup_{t \geq 0} h(t) + \frac{1}{\omega} \sup_{t \geq t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

4. Пусть $\mathbf{f}_k(t) = \mathbf{0}$ ($k = \overline{1, n}$), $a_{\infty}^{-2} \mathbf{f}_0 = \nabla p$, $p \in \mathcal{D}(B^*)$. Тогда $P_G a_{\infty}^{-2} \mathbf{f}_0 = \nabla p = -B^* p$ и из (1.13)-(1.14), (1.17) найдем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{M}(0) P_G a_{\infty}^{-2} \mathbf{f}_0 &= -(UA^{1/2}) A^{-1/2} \left[U^* M_0 U - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} U^* M_l U \right]^{-1} A^{-1/2} B^* p = \\ &= - \left[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} U A^{-1/2} B^* p = - \left[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} B A^{-1} B^* p = \\ &= - \left[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} (B A^{-1/2}) (B A^{-1/2})^* \Big|_{\mathcal{D}(B^*)} p = \\ &= - \left[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} (U U^*) \Big|_{\mathcal{D}(B^*)} p = - \left[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l \right]^{-1} p. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.18) следует (1.19). □

Автор благодарит проф. Н. Д. Копачевского за обсуждение работы.

Список цитируемых источников

1. *Загора, Д. А.* О стабилизации решений неполных интегродифференциальных уравнений второго порядка // Известия вузов. Математика. — 2016. — №9. — С. 78–83.
Zakora, D. A. On stabilization of solutions to incomplete second-order integrodifferential equations // Russian Mathematics (Iz VUZ). — 2016. — Vol. 60, №9. — P. 69–73.
2. *Крейн, С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 p.
Krein, S. G. Linear differential equations in Banach spaces. — Moscow: Nauka, 1967. — 464 p.
3. *Alabau-Boussouria, F., Cannarsa, P.* A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. Partial Differential Equations/Optimal Control — 2009. — Vol. 347. — P. 867–872.
4. *Alabau-Boussouria, F., Cannarsa, P., Sforza, D.* Decay estimates for second order evolution equations with memory // Journal of Functional Analysis — 2008. — Vol. 254. — P. 1342–1372.
5. *Alabau-Boussouria, F., Prüss, J., Zacher, R.* Exponential and polynomial stability of a wave equation for boundary memory damping with singular kernels // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I — 2009. — Vol. 347. — P. 277–282.

6. *Appleby, J. A. D., Fabrizio, M., Lazzari, B.* On exponential asymptotic stability in linear viscoelasticity // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* — 2006. — Vol. 16, №10. — P. 1677–1694.
7. *Birman, M. S., Solomjak, M. Z.* Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space. — Dordrecht-Boston-Lancaster-Tokyo: D. Reidel Publishing Company, 1986. — 302 p.
8. *Dafermos, C. M.* Asymptotic stability in viscoelasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1970. — №37. — P. 297–308.
9. *Dafermos, C. M.* On abstract Volterra equations with applications to linear viscoelasticity // *J. Differential Equations.* — 1970. — №7. — P. 554–569.
10. *Fabrizio, M., Lazzari, B.* On the existence and the asymptotic stability of solutions for linearly viscoelastic solids // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1991. — Vol. 116. — P. 139–152.
11. *Fabrizio, M., Morro, A.* Mathematical problems in linear viscoelasticity. — Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1992. — 203 p.
12. *Goldstein, J. A.* Semigroups of linear operators and applications. — New York: Oxford University Press, 1985. — 245 p.
13. *Kopachevsky, N. D., Krein, S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2001. — 384 p.
14. *Kopachevsky, N. D., Krein, S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2003. — 444 p.
15. *Lagnese, J.* Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation // *J. Differential Equations.* — 1983. — Vol. 50. — P. 163–182.
16. *Liu, B. W.* The exponential stabilization of the higher-dimensional linear system of thermoviscoelasticity // *Quarterly of Applied Mathematics* — 1998. — Vol. 77. — P. 355–386.
17. *Liu, Z., Zheng, S.* Semigroups associated with dissipative systems. — Boca Raton-London-New York-Washington: CHAPMAN & HALL/CRC Research Notes in Mathematics Series, Vol. 398, 1999. — 206 p.
18. *Muñoz Rivera, J. E., Naso, M. G.* On the decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation // *Asymptotic Analysis* — 2006. — Vol. 49. — P. 189–204.
19. *Muñoz Rivera, J. E., Naso, M. G.* Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory // *J. Math. Anal. Appl.* — 2007. — Vol. 326. — P. 691–707.
20. *Renardy, M., Hrusa, W. J., Nohel, J. A.* Mathematical problems in viscoelasticity. — Harlow: Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math., Vol. 35, Longman Scientific & Technical, 1987.
21. *Zakora, D. A.* A symmetric model of ideal rotating relaxing fluid // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2011. — Vol. 174, №4. — P. 515–536.

Получена 26.01.2017

РЕФЕРАТЫ

УДК 531.36+531.384

А. В. КАРАПЕТЯН, А. С. КУЛЕШОВ. **Об устойчивости стационарных движений механических систем с неизвестными первыми интегралами** (русский) // *Динамические системы*, 2017. — Том 7(35), №1. — С. 3–16.

В работе обсуждаются вопросы устойчивости стационарных движений консервативных и диссипативных механических систем с первыми интегралами. Рассматриваются системы определенного вида, для изучения устойчивости которых не требуется знания явных выражений первых интегралов кроме, быть может, одного. Общие результаты иллюстрируются на примере задачи о качении динамически симметричного тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости и на примере задачи о качении круглого диска по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Ключевые слова: механические системы, первые интегралы, устойчивость.

Ил. 7. Библиогр. 12 назв.

УДК 517.958

Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ. **О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд** (русский) // *Динамические системы*, 2017. — Том 7(35), №1. — С. 17–51.

В данной работе изучается проблема малых движений двух вязкоупругих несжимаемых жидкостей модели Олдройта, заполняющих неподвижный сосуд. С помощью применения операторного подхода получена задача Коши для дифференциально-операторного уравнения в некотором гильбертовом пространстве, доказана теорема о корректной разрешимости проблемы на произвольном промежутке времени. Выведено уравнение для нормальных колебаний гидросистемы (обобщенный операторный пучок С. Г. Крейна).

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, гидродинамическая система, ортопроектор, операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши.

Библиогр. 14 назв.

УДК 519.872

А. И. ПЕСЧАНСКИЙ. **Полумарковская модель однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным восстанавливаемым каналом** (русский) // *Динамические системы*, 2017. — Том 7(35), №1. — С. 53–61.

Построена модель функционирования ненадежной однолинейной системы обслуживания с потерями, в которой через случайное время после начала обслуживания заявки может произойти отказ канала. При этом заявка теряется и на дообслуживание не возвращается. После завершения ремонтных работ надежность характеристики канала восстанавливаются, и обслуживание заявок возобновляется. Предполагается, что все случайные величины, описывающие систему, имеют распределения общего вида. С помощью аппарата полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством получены эффективные формулы для определения финальных вероятностей пребывания системы в различных состояниях.

Ключевые слова: ненадежная однолинейная система обслуживания, полумарковский процесс, стационарное распределение вложенной цепи Маркова, финальные вероятности.

Ил. 1. Библиогр. 7 назв.

УДК 517.28+517.984.46+517.91

К. А. РАДОМИРСКАЯ. **Спектральные задачи сопряжения** (русский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №1. — С. 63–79.

На базе уже рассмотренного подхода к абстрактным краевым задачам сопряжения разобраны спектральные задачи сопряжения для одной области. Подробно изучен возникший операторный пучок с самосопряженными операторными коэффициентами, действующий в гильбертовом пространстве и зависящий от двух параметров. Рассматриваются оба возможных случая, когда один из параметров спектральный, а другой является фиксированным, в зависимости от этого выведены свойства решений.

Ключевые слова: задача сопряжения, гильбертово пространство, формула Грина, спектральные задачи, операторный пучок, спектральный параметр.

Библиогр. 14 назв.

УДК 27.31.55, 532.5

Д. А. ЗАКОРА. **Асимптотика решений в задаче о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости** (русский) // Динамические системы, 2017. — Том 7(35), №1. — С. 81–93.

В работе исследуется задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости. Доказана теорема об асимптотическом поведении решений в изучаемой задаче при внешних нагрузках, близких к почти периодическим. Установлено, в частности, что если внешняя нагрузка — стационарное потенциальное поле, то потенциальная составляющая течения в изучаемой задаче экспоненциально затухает и происходит перераспределение давления.

Ключевые слова: релаксирующая жидкость, экспоненциальная устойчивость, асимптотика решения.

Библиогр. 21 назв.

ABSTRACTS

MSC 2010: 70K20; 70E50; 70E18

A. V. KARAPETYAN, A. S. KULESHOV. **Stability of stationary motions of mechanical systems with unknown first integrals** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.1, 3–16 (2017).

Application of the Routh-Salvadori theorem and its generalizations for investigation of stability of stationary motions of mechanical systems with first integrals $U_0 = c_0, U_1 = c_1, \dots, U_k = c_k$ is reduced to study the type of stationary value of U_0 (here U_0 can be also a nonincreasing along system trajectories function) for fixed values of U_1, \dots, U_k . This method does not take into account equations of motion of the considered system however it is supposed that all first integrals are known explicitly. On the other hand it is possible to distinguish the systems for which the stability analysis does not require the explicit form of all first integrals $U_1 = c_1, \dots, U_k = c_k$, except $U_0 = c_0$. In this paper we discuss problems of stability of stationary motions for such systems. General results are illustrated by the problem of motion of a rotationally symmetric rigid body on a perfectly rough plane and by the problem of motion of a round disk on a perfectly rough plane.

Keywords: mechanical systems; first integrals; stability.

Fig. 7. Ref. 12.

MSC 2010: 76D05, 35Q30, 39A14, 39B42

N. D. KOPACHEVSKY. **Small motions of two viscoelastic fluids in stationary containers** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.1, 17–51 (2017).

The aim of this paper is to use an operator approach of mentioned works, to develop new approach and to prove the theorem on correct solvability for initial-boundary-value problem generated by a problem of small motions of two viscoelastic fluids in a stationary container.

This paper is organized as follows. In section 1 we describe a model of viscoelastic fluid. In section 2 we formulate mathematical statement of the problem: linearized equations of movements, stickiness condition, kinematic and dynamic conditions. Further, in this section we receive the law of full energy balance. In section 3, we choose the functional spaces generated by the problem. For applying of method of orthogonal projection we need to get orthogonal projectors on corresponding spaces. The laws of action of this projectors we receive in section 4. In section 5 we make transition to operator equation by using orthogonal projectors derived in section 4. Further, we solve some auxiliary problems and obtain the Cauchy problem for the system of integro-differential equation in some Hilbert space. In section 6 we make transition to a system of differential equations. This system can be rewrite as operator differential equation in the sum of Hilbert spaces. Properties of main operator of this problem are studied in section 7. The existence and uniqueness theorems for final operator differential equation as for original initial-boundary-value problem based on factorization, closure and accretivity property of operator matrix. Finally, in section 7 we consider the spectral problem on normal oscillations corresponding to the evolution problem. This means that external forces are equal to zero and dependence by time for the unknown function has the form $e^{-\lambda t}$. Here we obtain the spectral problem for operator pencil. But its investigation will be the object of another paper.

Keywords: viscoelastic fluid, hydrodynamic system, orthogonal projector, operator differential equation, Cauchy problem

Ref. 14.

MSC 2010: 60K25

A. I. PESCHANSKY. **Semi-Markov model of a single-server loss queueing system with unreliable restorable channel** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.1, 53–61 (2017).

The model of one-server loss queueing system is built. Server failure can occur in random time after the beginning of customer service. Herewith, the customer lost never arrives to complete its service. After the end of repair all reliability characteristics are renewed, and customer service is resumed. All the random variables describing the queueing system are supposed to have general distributions. By means of apparatus of semi-Markov processes with discrete-continuous phase space, effective formulas for final probabilities of the queueing system sojourn in different states are obtained.

Keywords: unreliable single-server queueing system, Semi-Markov process, stationary distribution of the embedded Markov chain, final probabilities.

Fig. 1. Ref. 7.

MSC 2010: 34B05, 34B27, 46C07, 47A68

K. A. RADOMIRSKAYA. **Spectral conjugation problems** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.1, 63–79 (2017).

Spectral conjugation problems for one domain are considered on the basis of the approach already considered to abstract boundary value problems. The resulting operator bundle has been studied in detail. It acts in Hilbert space, it has self-adjoint operator coefficients.

Keywords: conjugation problem, Hilbert space, Green's formula, spectral problems, operator bundle, spectral parameter.

Ref. 14.

MSC 2010: 34K20, 93C23

D. A. ZAKORA. **Asymptotics of solutions in the problem on small motions of an ideal relaxing fluid** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **7(35)**, no.1, 81–93 (2017).

In this paper we study the problem on small motions of an ideal relaxing fluid filling a bounded domain. This hydrodynamic system is described by a system of integro differential equations. The kernels of corresponding integral operators are of exponential type. In the case where the external force is close to almost periodic a theorem on the asymptotic behavior of solutions of the problem is proven. In particular, if the external force is a stationary potential field then the potential component of the flows decays exponentially and a pressure redistribution occurs.

Keywords: relaxing fluid, exponential stability, asymptotic behavior of solution.

Ref. 21.

Dinamicheskie sistemy (Dynamical Systems)

Volume 7(35) no.1

2017

Table of Contents

A. V. KARAPETYAN, A. S. KULESHOV. Stability of stationary motions of mechanical systems with unknown first integrals	3
N. D. KOPACHEVSKY. Small motions of two viscoelastic fluids in stationary containers	17
A. I. PESCHANSKY. Semi-Markov model of a single-server loss queueing system with unreliable restorable channel	53
K. A. RADOMIRSKAYA. Spectral conjugation problems	63
D. A. ZAKORA. Asymptotics of solutions in the problem on small motions of an ideal relaxing fluid	81

Подписано в печать 14.09.2017. Формат 60x84/8.
Усл. печ. л. 10,93. Тираж 50 экз. Заказ № НП/140. Бесплатно.
Дата выхода в свет 08.02.2018.
Отпечатано в управлении редакционно-издательской
деятельности КФУ имени В. И. Вернадского
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7.