*Динамические системы, 2017, том 7(35), №1, 81–93*

УДК 27.31.55, 532.5

# Асимптотика решений в задаче о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости

**Д. А. Закора**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: dmitry.zkr@gmail.com*

**Аннотация.** В работе исследуется задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости. Доказана теорема об асимптотическом поведении решений в изучаемой задаче при внешних нагрузках, близких к почти периодическим. Установлено, в частности, что если внешняя нагрузка — стационарное потенциальное поле, то потенциальная составляющая течения в изучаемой задаче экспоненциально затухает и происходит перераспределение давления.

**Ключевые слова:** релаксирующая жидкость, экспоненциальная устойчивость, асимптотика решения.

# Asymptotics of solutions in the problem on small motions of an ideal relaxing fluid

**D. A. Zakora**

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** In this paper we study the problem on small motions of an ideal relaxing fluid filling a bounded domain. This hydrodynamic system is described by a system of integro differential equations. The kernels of corresponding integral operators are of exponential type. In the case where the external force is close to almost periodic a theorem on the asymptotic behavior of solutions of the problem is proven. In particular, if the external force is a stationary potential field then the potential component of the flows decays exponentially and a pressure redistribution occurs.

**Keywords:** relaxing fluid, exponential stability, asymptotic behavior of solution.

**MSC 2010:** 34K20, 93C23

## Введение

В работе исследуется задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости (см. [14, гл. 11, § 11.6], [21]). Эта задача описывается системой интегро-дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий.

Аналогичные задачи изучались многими авторами. В пионерских работах [8], [9] показано, что решение однородного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, с операторным ядром достаточно общего вида, стремится к нулю с ростом времени, но без оценки скорости убывания. Это утверждение применено к задаче, описывающей движения вязкоупругого тела. Динамика вязкоупругих систем изучалась далее многими авторами. Приведем здесь монографии [20], [11], [17] (см. также указанную в них литературу), а также некоторые работы по экспоненциальной устойчивости в вязкоупругих системах [15], [10], [16], [5]. Работы [6], [18], [19], [4], [3] посвящены вопросам экспоненциальной и полиномиальной устойчивости решений абстрактных гиперболических интегро-дифференциальных уравнений.

Цель настоящей работы — исследование асимптотического поведения решений в задаче о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости при нагрузках вида $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}(t)$, $\mathbf{f}'_k(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, $\sigma_k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $(k = \overline{1, n})$.

Мы будем опираться на теорему, следующую из [1]. Введем необходимые для формулировки теоремы обозначения. Пусть $H$, $H_l$ $(l = \overline{0, m})$ — гильбертовы пространства. Пусть задан самосопряженный и положительно определенный оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$, заданы ограниченные операторы $Q_l \in \mathcal{L}(H, H_l)$ $(l = \overline{0, m})$ и неотрицательные числа $\gamma_l \geq 0$ такие, что $(Q_l^* Q_l u, u)_H \geq \gamma_l \|u\|_H^2$ при всех $u \in H$. Будем считать также, что дан упорядоченный набор положительных чисел $0 < b_1 < \ldots < b_m$.

Определим гильбертово пространство $\mathcal{H} := H \oplus \big( \oplus_{l=0}^{m} H_l \big)$, состоящее из элементов вида $\xi := (u; w)^\tau := \big(u; (u_0; u_1; \ldots; u_m)^\tau\big)^\tau$ (символ $\tau$ означает транспонирование). В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ определим оператор $\mathcal{A}$ по следующей формуле:

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}\big(A^{1/2}, \mathcal{I}\big) \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}\big(A^{1/2}, \mathcal{I}\big) = \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2}\mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q}A^{1/2} & \mathcal{G} \end{pmatrix}, \tag{0.1}$$

$$\mathcal{Q} := \big(Q_0, Q_1, \ldots, Q_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1 I, \ldots, b_m I\big), \quad \mathcal{I} := \operatorname{diag}\big(I, I, \ldots, I\big),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{ \xi = (u; w)^\tau \in \mathcal{H} \big|\ u \in \mathcal{D}(A^{1/2}),\ \ \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \Big\}. \tag{0.2}$$

**Теорема 1.** *Пусть существует $Q_0^{-1} \in \mathcal{L}(H_0, H)$ и $\gamma_q > 0$ при некотором $q \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда оператор $-\mathcal{A}$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой $C_0$-полугруппы $\mathcal{U}(t)$, то есть существуют $\omega > 0$ и $M = M(\omega) \geq 1$ такие, что*

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M e^{-\omega t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty). \tag{0.3}$$

*Замечание.* В теореме 1 можно дать оценку типа полугруппы $\mathcal{U}(t)$, однако здесь она не приводится.

# 1. Малые движения идеальной релаксирующей жидкости

## 1.1. Постановка задачи

Введем в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы начало координат находилось внутри области, а ось $Ox_3$ была направлена против действия силы тяжести. Обозначим через $\mathbf{n}$ внешний единичный нормальный к $\partial\Omega$ вектор. Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей область $\Omega$, описывается следующей системой уравнений, граничных и начальных условий:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t} = -\nabla\Big(\frac{1}{\rho_0(x_3)}\rho(t,x)\Big) + \\ + \sum_{l=1}^{m} \int_0^t e^{-b_l(t-s)} \nabla\big(k_l(x)\rho(s,x)\big)\,ds + a_\infty^{-2}(x_3)\mathbf{f}(t,x) \ \ (\text{в } \Omega), \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} = -\mathrm{div}\big(\delta(x_3)\mathbf{u}(t,x)\big) \ \ (\text{в } \Omega), \qquad \mathbf{u}(t,x)\cdot\mathbf{n} = 0 \ \ (\text{на } \partial\Omega), \qquad (1.2)$$

$$\delta(x_3) := \rho_0(x_3)a_\infty^2(x_3), \qquad \mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}^0(x), \qquad \rho(0,x) = \rho^0(x), \qquad (1.3)$$

где $a_\infty^2(x_3)\mathbf{u}(t,x)$ — поле скоростей жидкости, $\rho(t,x)$ — динамическая плотность жидкости, $\mathbf{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле, $a_\infty(x_3)$ — заданная скорость звука в жидкости, $\rho_0(x_3)$ — заданная стационарная плотность жидкости. Функция $\delta(x_3)$ удовлетворяет неравенствам $0 < \delta_1 \leq \delta(x_3) \leq \delta_2 < +\infty$ и является гладкой. При отсутствии гравитационного поля структурные функции $k_l(x)$ следует считать положительными постоянными. Здесь будем считать, что это гладкие положительные функции. Числа $b_l^{-1}$ имеют смысл времен релаксации в системе, $0 < b_1 < \ldots < b_m$. Кроме того, полагаем, что

$$1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{k_l(x)\rho_0(x_3)}{b_l} > 0 \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \qquad (1.4)$$

## 1.2. Проектирование уравнений движения

Применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства [13]. Введем векторное гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)$ с весом $\delta(x_3)$ со скалярным произведением и нормой

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)} := \int_\Omega \delta(x_3)\mathbf{u}(x)\cdot\overline{\mathbf{v}(x)}\,d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)} = \int_\Omega \delta(x_3)|\mathbf{u}(x)|^2\,d\Omega. \qquad (1.5)$$

Можно проверить, что имеет место разложение (аналог разложения Г. Вейля пространства векторных полей $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (см. [13, гл. 2, § 2, п. 2.1.8])):

$$\mathbf{L}_2(\Omega,\delta) = \mathbf{J}_0(\Omega,\delta) \oplus \mathbf{G}(\Omega,\delta), \qquad (1.6)$$

$$\mathbf{J}_0(\Omega,\delta) := \{\mathbf{v}\in \mathbf{L}_2(\Omega,\delta) \big|\ \mathrm{div}\big(\delta(x_3)\mathbf{v}\big) = 0 \ (\text{в } \Omega),\ \mathbf{v}_n := \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \ (\text{на } \partial\Omega)\},$$

$$\mathbf{G}(\Omega,\delta) := \{\mathbf{v}\in \mathbf{L}_2(\Omega,\delta) \big| \quad \mathbf{v} = \nabla\varphi, \quad \int\limits_{\Omega}\varphi\, d\Omega = 0\}.$$

Здесь операции div$\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_n$ понимаются в смысле теории обобщенных функций (см. [13, гл. 2, § 2, п. 2.1.6]). Введем ортопроекторы $P_0$ и $P_G$ пространства $\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)$ на $\mathbf{J}_0(\Omega,\delta)$ и $\mathbf{G}(\Omega,\delta)$ соответственно. Будем разыскивать поле $\mathbf{u}$ в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\varphi, \quad \text{где} \quad \mathbf{v}\in\mathbf{J}_0(\Omega,\delta), \quad \nabla\varphi\in\mathbf{G}(\Omega,\delta). \tag{1.7}$$

С помощью представления (1.7) преобразуем (1.1)-(1.3) к следующему виду:

$$\frac{\partial \mathbf{v}(t,x)}{\partial t} = P_0 a_\infty^{-2}(x_3)\mathbf{f}(t,x) \ \ (\text{в } \Omega), \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial \nabla\varphi(t,x)}{\partial t} = -\nabla\Big(\frac{1}{\rho_0(x_3)}\rho(t,x)\Big) + \\ + \sum_{l=1}^{m}\int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}\nabla\big(k_l(x)\rho(s,x)\big)\,ds + P_G a_\infty^{-2}(x_3)\mathbf{f}(t,x) \ \ (\text{в } \Omega), \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} = -\mathrm{div}\big(\delta(x_3)\nabla\varphi(t,x)\big) \ \ (\text{в } \Omega), \qquad \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } \partial\Omega), \tag{1.10}$$

$$\mathbf{v}(0,x) = P_0\mathbf{u}^0(x), \quad \nabla\varphi(0,x) = P_G\mathbf{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x). \tag{1.11}$$

Из (1.8), (1.11) найдем вихревую составляющую течения:

$$\mathbf{v}(t,x) = P_0\mathbf{u}^0(x) + \int\limits_0^t P_0 a_\infty^{-2}(x_3)\mathbf{f}(s,x)\,ds.$$

Таким образом, далее будет изучаться система (1.9)-(1.11), содержащая лишь потенциальную составляющую течения и динамическую плотность.

### 1.3. Операторное уравнение и основная теорема

Для перехода к операторной формулировке задачи (1.9)-(1.11) введем ряд операторов и приведем их свойства. Введем гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций суммируемых со своими квадратами по области $\Omega$, а также его подпространство $L_{2,\Omega} := \{f\in L_2(\Omega) |\ (f,1)_{L_2(\Omega)} = 0\}$.

Будем считать далее, что граница $\partial\Omega$ класса $C^2$. Определим оператор

$$B\nabla\varphi := \mathrm{div}\big(\delta\nabla\varphi\big), \quad \mathcal{D}(B) := \Big\{\nabla\varphi\in\mathbf{W}_2^1(\Omega) \big|\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \ (\partial\Omega), \ \int\limits_\Omega \varphi d\Omega = 0\Big\}. \tag{1.12}$$

Тогда $B:\mathcal{D}(B)\subset\mathbf{G}(\Omega,\delta)\to L_{2,\Omega}$, Ker$B = \{0\}$, оператор $B$ замкнут и

$$B^*\rho = -\nabla\rho, \quad \mathcal{D}(B^*) = W_2^1(\Omega)\cap L_{2,\Omega}, \quad \mathrm{Ker}B^* = \{0\}. \tag{1.13}$$

Определим оператор $A := B^*B$. Можно доказать, что оператор $A$ положительно определен в $\mathbf{G}(\Omega,\delta)$. По теореме о полярном представлении [7, гл. 8, § 1] существует унитарный оператор $U : \mathbf{G}(\Omega,\delta) \to L_{2,\Omega}$ такой, что $B = UA^{1/2}$.

Определим ортопроектор $\Pi$ пространства $L_2(\Omega)$ на $L_{2,\Omega}$ и операторы

$$M_0\rho := \Pi\rho_0^{-1}\Pi\rho, \quad M_l\rho := \Pi k_l \Pi\rho \quad (l = \overline{1,m}), \tag{1.14}$$

которые являются ограниченными, самосопряженными и положительно определенными операторами в $L_{2,\Omega}$. Кроме того, $M_l\mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$ $(l = \overline{0,m})$. Из (1.4) следует, что $M_0 - \sum_{l=1}^m b_l^{-1}M_l \gg 0$.

С помощью введенных операторов задачу (1.9)-(1.11) перепишем в виде основной задачи Коши для следующей системы дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах $\mathbf{G}(\Omega,\delta)$ и $L_{2,\Omega}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = B^*M_0\rho(t) - \displaystyle\sum_{l=1}^m \int_0^t e^{-b_l(t-s)}B^*M_l\rho(s)\,ds + P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho(t)}{dt} = -B\nabla\varphi(t), \quad \nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0. \end{cases} \tag{1.15}$$

Определим операторы $Q_0 := [M_0 - \sum_{l=1}^m b_l^{-1}M_l]^{1/2}U$ и $Q_l := [b_l^{-1}M_l]^{1/2}U$ $(l = \overline{1,m})$.

**Определение 1.** Назовем *сильным решением* исходной начально-краевой задачи (1.1)-(1.3) такие $\mathbf{u}$ и $\rho$, для которых $\nabla\varphi$ и $\rho$ являются сильным решением задачи Коши (1.15). В свою очередь *сильным решением* задачи Коши (1.15) назовем такую пару $\nabla\varphi$ и $\rho$, что $\nabla\varphi(t) \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\rho(t) \in \mathcal{D}(B^*)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$, $B^*\rho(t), \nabla\varphi'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{G}(\Omega,\delta))$, $B\nabla\varphi(t), \rho'(t) \in C(\mathbb{R}_+; L_{2,\Omega})$, выполнены начальные условия и уравнения из (1.15) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Основным утверждением работы является следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть* $P_G\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(B)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\mathbf{f}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega,\delta))$. *Тогда задача Коши* (1.15) *имеет единственное сильное решение.*

*Пусть* $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_k(t)$, *где* $\mathbf{g}(t)$, $\mathbf{f}_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega,\delta))$, $\mathbf{f}_0 \in \mathbf{L}_2(\Omega,\delta)$, $\sigma_k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $(k = \overline{1,n})$. *Тогда существуют константы* $\omega > 0$, $M_k \geq 1$ $(k = 1,2)$ *такие, что при всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *выполнено следующее неравенство*

$$\begin{aligned} &\Big\|\nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k \mathbf{M}(i\sigma_k)P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\delta)} + \\ &\qquad + \Big\|\rho(t) + B\Big(\mathbf{M}(0)P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\Omega}} \leq \\ &\leq M_1 e^{-2\omega t}\Big[\|P_G\mathbf{u}^0\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\delta)} + \|\rho^0\|^2_{L_{2,\Omega}} + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{f}_k\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}\Big] + \\ &\qquad + M_2\Big[\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big[\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)} + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{f}_k'(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}\Big]\,ds\Big]^2, \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\mathbf{M}(\lambda) := A^{-1/2}\Big[U^*M_0U + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l-\lambda}U^*M_lU\Big]^{-1}A^{-1/2}. \quad (1.17)$$

*В частности, если* $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}$, $\|\mathbf{f}'_k(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)} \to 0$ $(k=\overline{1,n})$ *при* $t\to+\infty$, *то*

$$\Big\|\nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k \mathbf{M}(i\sigma_k)P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\delta)} + \\ + \Big\|\rho(t) + B\Big(\mathbf{M}(0)P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\Omega}} \to 0, \\ t\to+\infty. \quad (1.18)$$

*Если дополнительно* $\mathbf{f}_k(t) = \mathbf{0}$ $(k=\overline{1,n})$, $a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0 = \nabla p$, $p\in\mathcal{D}(B^*)$, *то*

$$\big\|\nabla\varphi(t)\big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\delta)} + \Big\|\rho(t) - \big[M_0 - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}M_l\big]^{-1}p\Big\|^2_{L_{2,\Omega}} \to 0, \ \ t\to+\infty. \quad (1.19)$$

*Доказательство.* Доказательство теоремы проведем в несколько шагов.

**1.** Предположим, что задача (1.15) имеет сильное решение и сведем ее к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть $\nabla\varphi(t)$, $\rho(t)$ — сильное решение системы (1.15) (см. определение 1). С использованием интегрирования по частям и (1.12)-(1.14) можно проверить, что функции $\nabla\varphi(t)$ и $\rho(t)$ удовлетворяют также следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = A^{1/2}\Big\{U^*\Big[M_0 - \sum_{l=1}^{m}\dfrac{1}{b_l}M_l\Big]\rho(t) + \sum_{l=1}^{m} e^{-b_l t}\dfrac{1}{b_l}U^*M_l\rho^0 + \\ \qquad + \sum_{l=1}^{m} U^*\Big[\dfrac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\displaystyle\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\Big[\dfrac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\dfrac{d\rho(s)}{ds}\,ds\Big\} + P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{d\rho(t)}{dt} = -UA^{1/2}\nabla\varphi(t). \end{cases} \quad (1.20)$$

Введем по $\rho(t)$ следующие функции:

$$u_0(t) := -\Big[M_0 - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\rho(t), \ \ u_l(t) := -\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\Big[\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\frac{d\rho(s)}{ds}\,ds \quad (l=\overline{1,m}). \quad (1.21)$$

Функции $u_0(t)$, $u_l(t)$ $(l=\overline{1,m})$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Из (1.20), (1.21) получим, что они удовлетворяют следующей системе уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases} \dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = -A^{1/2}\Big\{U^*\Big[M_0 - \sum_{l=1}^{m}\dfrac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}u_0(t) - \\ \qquad - \sum_{l=1}^{m} e^{-b_l t}\dfrac{1}{b_l}U^*M_l\rho^0 + \sum_{l=1}^{m}U^*\Big[\dfrac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}u_l(t)\Big\} + P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{du_0(t)}{dt} = -\Big\{-\Big[M_0 - \sum_{l=1}^{m}\dfrac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}UA^{1/2}\nabla\varphi(t)\Big\}, \\ \dfrac{du_l(t)}{dt} = -\Big\{-\Big[\dfrac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}UA^{1/2}\nabla\varphi(t) + b_l u_l(t)\Big\}, \quad l=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad u_0(0) = -\Big[M_0 - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}M_l\Big]^{1/2}\rho^0, \quad u_l(0)=0 \quad (l=\overline{1,m}).$$

С помощью введенных операторов $Q_0 = [M_0 - \sum_{l=1}^{m} b_l^{-1}M_l]^{1/2}U$, $Q_l = [b_l^{-1}M_l]^{1/2}U$ $(l=\overline{1,m})$ систему (1.22) перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d\nabla\varphi(t)}{dt} = -A^{1/2}\Big[Q_0^*u_0(t) - \sum_{l=1}^{m} e^{-b_l t}Q_l^*Q_lU^*\rho^0 + \sum_{l=1}^{m}Q_l^*u_l(t)\Big] + P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}(t), \\ \dfrac{du_0(t)}{dt} = -\Big[-Q_0A^{1/2}\nabla\varphi(t)\Big], \\ \dfrac{du_l(t)}{dt} = -\Big[-Q_lA^{1/2}\nabla\varphi(t) + b_l u_l(t)\Big], \quad l=\overline{1,m}, \end{cases}$$

$$\nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0, \quad u_0(0) = -Q_0U^*\rho^0, \quad u_l(0)=0 \quad (l=\overline{1,m}). \tag{1.23}$$

Систему (1.23) запишем в виде задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \mathbf{G}(\Omega,\delta)\oplus(\oplus_{l=0}^{m}L_{2,\Omega})$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\big(\xi + \xi_{\rho^0}(t)\big) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0)=\xi^0, \tag{1.24}$$

$$\xi(t) := \big(\nabla\varphi(t); w(t)\big)^\tau := \big(\nabla\varphi(t); u_0(t); u_1(t); \dots; u_m(t)\big)^\tau,$$

$$\xi_{\rho^0}(t) := \Big(0; -(Q_0^*)^{-1}\sum_{l=1}^{m} e^{-b_l t}Q_l^*Q_lU^*\rho^0; 0; \dots; 0\Big)^\tau, \tag{1.25}$$

$$\xi^0 := \big(P_G\mathbf{u}^0; -Q_0U^*\rho^0; 0; \dots; 0\big)^\tau, \quad \mathcal{F}(t) := \big(P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}(t); 0; 0; \dots; 0\big)^\tau.$$

Оператор $\mathcal{A}$ определяется по формулам (0.1)-(0.2) и удовлетворяет теореме 1:

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(A^{1/2},\mathcal{I})\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\operatorname{diag}(A^{1/2},\mathcal{I}),$$

$$\mathcal{Q} := \big(Q_0, Q_1, \dots, Q_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1I, \dots, b_mI\big), \quad \mathcal{I} := \operatorname{diag}\big(I, I, \dots, I\big),$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{\xi = (\nabla\varphi; w)^\tau \in \mathcal{H}\,\Big|\; \nabla\varphi\in\mathcal{D}(A^{1/2}), \;\; \mathcal{Q}^*w\in\mathcal{D}(A^{1/2})\Big\}.$$

Осуществим в задаче (1.24) замену искомой функции $\zeta(t) := \xi(t) + \xi_{\rho^0}(t)$, получим следующую задачу Коши

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \xi'_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0 := \big(P_G\mathbf{u}^0; -(Q_0^*)^{-1}U^*M_0\rho^0; 0; \ldots; 0\big)^\tau. \quad (1.26)$$

По теореме 1 оператор $-\mathcal{A}$ является генератором равномерно экспоненциально устойчивой $C_0$-полугруппы $\mathcal{U}(t)$. Из условий на начальные данные следует, что $\nabla\varphi(0) = P_G\mathbf{u}^0 \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A^{1/2})$, $\mathcal{Q}^*w(0) = -U^*M_0\rho^0 = -A^{-1/2}(UA^{1/2})^*M_0\rho^0 = -A^{-1/2}B^*M_0\rho^0 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, то есть $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Из условия на функцию $\mathbf{f}(t)$ следует, что $\xi'_{\rho^0}(t) + \mathcal{F}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Из теоремы о разрешимости абстрактной задачи Коши (см. [2, гл. 1, § 6, п. 2, теорема 6.5], [12, гл. 2, § 1, теорема 1.3]) следует, что задача Коши (1.26) имеет единственное решение $\zeta(t)$ такое, что $\zeta(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\zeta(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\zeta(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Отсюда выводится утверждение о сильной разрешимости.

**2.** Докажем неравенство (1.16) и формулу (1.18).

Пусть $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t}\mathbf{f}_k(t)$, где $\mathbf{g}(t), \mathbf{f}_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_2(\Omega, \delta))$, $\mathbf{f}_0 \in \mathbf{L}_2(\Omega, \delta)$, $\sigma_k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $(k = \overline{1, n})$. Представим функцию $\mathcal{F}(t)$ в (1.24), (1.26) следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathcal{F}(t) = \mathcal{T}(t) + \mathcal{F}_0 + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t), \quad \mathcal{T}(t) := \big(P_G a_\infty^{-2}\mathbf{g}(t); 0; \ldots; 0\big)^\tau \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}), \\ \mathcal{F}_0 := \big(P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0; 0; \ldots; 0\big)^\tau \in \mathcal{H}, \quad \mathcal{F}_k(t) := \big(P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t); 0; \ldots; 0\big)^\tau \in \mathcal{H} \quad (k = \overline{1, n}).\end{gathered} \quad (1.27)$$

Из (0.1) непосредственными вычислениями можно найти резольвенту $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$. Из (1.27) теперь найдем, что

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0 = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0 = \big(0; (Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0; 0; \ldots; 0\big)^\tau, \\ &\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t) = \big(A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t); \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\big)^\tau = \\ &= \big(A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t); \frac{1}{-\lambda}Q_0L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t); \\ &\qquad \frac{1}{b_1-\lambda}Q_1L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t); \ldots; \frac{1}{b_m-\lambda}Q_mL^{-1}(\lambda)A^{-1/2}P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\big)^\tau \\ &\qquad \forall\, \lambda \in i\mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad k = \overline{1, n}, \qquad (1.28) \\ &\qquad L(\lambda) := -\lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}. \qquad (1.29)\end{aligned}$$

Пусть $\nabla\varphi(t)$, $\rho(t)$ сильное решение задачи Коши (1.15). Используя представление $Q_0^*Q_0 = U^*M_0U - \sum_{l=1}^m Q_l^*Q_l = U^*M_0U - \sum_{l=1}^m b_l^{-1}U^*M_lU$, (1.17), (1.27), (1.28), (1.21), (1.24), при $t \in \mathbb{R}_+$ получим

$$\Big\|\nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k \mathbf{M}(i\sigma_k) P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\delta)} +$$
$$+ \Big\|\rho(t) + B\Big(\mathbf{M}(0)P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\Omega}} =$$
$$= \Big\|\nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2}\Big[U^* M_0 U - \sigma_k^2 A^{-1} -$$
$$- \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l - i\sigma_k} U^* M_l U\Big]^{-1} A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\delta)} +$$
$$+ \Big\|\rho(t) + UA^{1/2}\Big(A^{-1/2}\Big[U^* M_0 U - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}U^* M_l U\Big]^{-1} A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2}\Big[U^* M_0 U - \sigma_k^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l - i\sigma_k}U^* M_l U\Big]^{-1} A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\Omega}}.$$

Отсюда, из (0.1), (1.29) (см. формулу для пучка $L(\lambda)$) получим, что

$$\Big\|\nabla\varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k \mathbf{M}(i\sigma_k) P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\delta)} +$$
$$+ \Big\|\rho(t) + B\Big(\mathbf{M}(0)P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathbf{M}(i\sigma_k)P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\Omega}} =$$
$$= \Big\|\nabla\varphi(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\delta)} +$$
$$+ \Big\|\rho(t) + U\Big((Q_0^* Q_0)^{-1} A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-i\sigma_k t}}{-i\sigma_k} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big)\Big\|^2_{L_{2,\Omega}} \le$$
$$\le \Big\|\nabla\varphi(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\delta)} +$$
$$\|UQ_0^{-1}\|^2 \Big\|u_0(t) - (Q_0^*)^{-1} A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-i\sigma_k t}}{-i\sigma_k} Q_0 L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{L_{2,\Omega}} +$$
$$+ \sum_{l=1}^{m}\Big\|u_l(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-i\sigma_k t}}{b_l - i\sigma_k} Q_l L^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_k(t)\Big\|^2_{L_{2,\Omega}} \le$$
$$\le \max\{1, \|UQ_0^{-1}\|^2\}\cdot\Big\|\xi(t) - \mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0 - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|^2_{\mathcal{H}}. \qquad (1.30)$$

Напомним, что по теореме 1 оператор $-\mathcal{A}$ — генератор равномерно экспоненциально устойчивой $C_0$-полугруппы $\mathcal{U}(t)$, удовлетворяющей неравенству (0.3). Будем искать (единственное) решение задачи (1.26) при $\mathcal{F}(t)=\mathcal{T}(t)+\mathcal{F}_0+\sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t)$ в виде $\zeta(t)=\sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)+\eta(t)$. Тогда функция $\eta(t)$ будет решением задачи

$$\begin{gathered}\frac{d\eta}{dt}=-\mathcal{A}\eta+\mathcal{F}_0+\xi'_{\rho^0}(t)+\mathcal{T}(t)-\sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(t),\\ \eta(0)=\zeta^0-\sum_{k=1}^n\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}).\end{gathered}\tag{1.31}$$

Из (1.31) и $\xi(t):=\zeta(t)-\xi_{\rho^0}(t)$ найдем, что

$$\begin{aligned}\xi(t)=\sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)-\xi_{\rho^0}(t)+\mathcal{U}(t)\Big(\zeta^0-\sum_{k=1}^n\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\Big)+\\ +\int_0^t\mathcal{U}(t-s)\Big(\xi'_{\rho^0}(s)+\mathcal{T}(s)-\sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k s}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(s)+\mathcal{F}_0\Big)\,ds.\end{aligned}\tag{1.32}$$

Из формулы [2, гл. 1, § 1, формула (1.10)] для резольвенты оператора $-\mathcal{A}$:

$$\mathcal{R}_\lambda(-\mathcal{A})\mathcal{F}=-\int_0^{+\infty}e^{-\lambda s}\mathcal{U}(s)\mathcal{F}\,ds\quad\forall\,\mathcal{F}\in\mathcal{H},\ \ \lambda>-\omega$$

при $\lambda=0$ следует, что

$$\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0=\mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0=\int_0^{+\infty}\mathcal{U}(s)\mathcal{F}_0\,ds.\tag{1.33}$$

Из (1.32), (1.33), (1.27) и (0.3) найдем, что

$$\begin{aligned}&\Big\|\xi(t)-\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0-\sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|_{\mathcal{H}}^2=\\ &=\Big\|\mathcal{U}(t)\Big(\zeta^0-\sum_{k=1}^n\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(0)\Big)-\xi_{\rho^0}(t)-\int_t^{+\infty}\mathcal{U}(s)\mathcal{F}_0\,ds+\\ &\qquad+\int_0^t\mathcal{U}(t-s)\big(\xi'_{\rho^0}(s)+\mathcal{T}(s)-\sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k s}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}'_k(s)\big)\,ds\Big\|_{\mathcal{H}}^2\le\\ &\le\Big[Me^{-\omega t}\Big(\|\zeta^0\|_{\mathcal{H}}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=1}^n\|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}\Big)+\big\|\xi_{\rho^0}(t)\big\|_{\mathcal{H}}+\\ &\qquad+\frac{M}{\omega}e^{-\omega t}\|\mathbf{f}_0\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}+M\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big[\|\xi'_{\rho^0}(s)\|_{\mathcal{H}}+\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}+\\ &\qquad+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=1}^n\|\mathbf{f}'_k(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}\Big]\,ds\Big]^2.\end{aligned}\tag{1.34}$$

Используя формулы для $\xi_{\rho^0}(t)$ и $\zeta^0$ (см. (1.24), (1.26)), из (1.34) найдем

$$\begin{aligned}
&\Big\|\xi(t)-\mathcal{R}_0(\mathcal{A})\mathcal{F}_0-\sum_{k=1}^{n}e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|^2_{\mathcal{H}}\le\\
&\le\Big[Me^{-\omega t}\big(\|P_G u^0\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\delta)}+\|(Q_0^*)^{-1}U^*M_0\|^2\|\rho^0\|^2_{L_{2,\Omega}}\big)^{1/2}+\\
&\qquad+Me^{-\omega t}\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=1}^{n}\|\mathbf{f}_k(0)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}+\\
&\qquad\quad+Me^{-\omega t}\sum_{l=1}^{m}\frac{b_l}{b_l-\omega}\big\|(Q_0^*)^{-1}Q_l^*Q_lU^*\big\|\big\|\rho^0\big\|_{L_{2,\Omega}}+\frac{M}{\omega}e^{-\omega t}\|\mathbf{f}_0\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}+\\
&\qquad+M\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big[\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=1}^{n}\|\mathbf{f}_k'(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}\Big]\,ds\Big]^2\le\\
&\le Ne^{-2\omega t}\Big[\|P_G u^0\|^2_{\mathbf{G}(\Omega,\delta)}+\|\rho^0\|^2_{L_{2,\Omega}}+\|\mathbf{f}_0\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}+\sum_{k=1}^{n}\|\mathbf{f}_k(0)\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}\Big]+\\
&+(n+4)M^2\Big[\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\Big[\|\mathbf{g}(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}+\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\sum_{k=1}^{n}\|\mathbf{f}_k'(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}\Big]\,ds\Big]^2,
\end{aligned}\tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}
N:=(n+4)M^2\max\Big\{1,\frac{1}{\omega^2},\|(Q_0^*)^{-1}U^*M_0\|^2+\\
+\Big[\sum_{l=1}^{m}\frac{b_l}{b_l-\omega}\|(Q_0^*)^{-1}Q_l^*Q_lU^*\|\Big]^2,\Big[\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|\Big]^2\Big\}.
\end{aligned}\tag{1.36}$$

Из (1.30), (1.35), (1.36) следует (1.16) с константами

$$\begin{aligned}
&M_1=N\max\{1,\|UQ_0^{-1}\|^2\},\\
&M_2=(n+4)M^2\max\{1,\Big[\sup_{\lambda\in i\mathbb{R}}\|\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A})\|\Big]^2\}\cdot\max\{1,\|UQ_0^{-1}\|^2\}.
\end{aligned}$$

**3.** Докажем формулу (1.18). Пусть $\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}\to 0$, $\|\mathbf{f}_k'(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}\to 0$ $(k=\overline{1,n})$ при $t\to+\infty$. Очевидно, достаточно доказать, что интегральное слагаемое в (1.16) стремится к нулю при $t\to+\infty$. Обозначим $h(t):=\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}+\sum_{k=1}^n\|\mathbf{f}_k'(t)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega,\delta)}$. Фиксируем $\varepsilon>0$ и выберем последовательно числа $t_{\varepsilon,1}$ и $t_{\varepsilon,2}$ следующим образом:

$$t_{\varepsilon,1}>0:\ \sup_{t\ge t_{\varepsilon,1}}h(t)<\frac{\varepsilon\omega}{2},\qquad t_{\varepsilon,2}:=\frac{1}{\omega}\ln\Big[\frac{2}{\varepsilon\omega}\big(e^{\omega t_{\varepsilon,1}}-1\big)\sup_{t\ge0}h(t)\Big].$$

Теперь для любого $t \geq t(\varepsilon) := \max\{t_{\varepsilon,1}, t_{\varepsilon,2}\}$ найдем, что

$$\int_0^t e^{-\omega(t-s)} h(s)\, ds = \int_0^{t_{\varepsilon,1}} e^{-\omega(t-s)} h(s)\, ds + \int_{t_{\varepsilon,1}}^t e^{-\omega(t-s)} h(s)\, ds \leq$$
$$\leq \frac{e^{-\omega t}}{\omega}\big(e^{\omega t_{\varepsilon,1}} - 1\big) \sup_{t\geq 0} h(t) + \frac{1}{\omega} \sup_{t \geq t_{\varepsilon,1}} h(t) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**4.** Пусть $\mathbf{f}_k(t) = \mathbf{0}$ $(k = \overline{1,n})$, $a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0 = \nabla p$, $p \in \mathcal{D}(B^*)$. Тогда $P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0 = \nabla p = -B^* p$ и из (1.13)-(1.14), (1.17) найдем, что

$$B\mathbf{M}(0)P_G a_\infty^{-2}\mathbf{f}_0 = -(UA^{1/2})A^{-1/2}\Big[U^* M_0 U - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} U^* M_l U\Big]^{-1} A^{-1/2} B^* p =$$
$$= -\big[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l\big]^{-1} U A^{-1/2} B^* p = -\big[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l\big]^{-1} B A^{-1} B^* p =$$
$$= -\big[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l\big]^{-1} (BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} p =$$
$$= -\big[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l\big]^{-1} (UU^*)\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} p = -\big[M_0 - \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l} M_l\big]^{-1} p.$$

Отсюда и из (1.18) следует (1.19). □

Автор благодарит проф. Н. Д. Копачевского за обсуждение работы.

## Список цитируемых источников


1. *Закора, Д. А.* О стабилизации решений неполных интегродифференциальных уравнений второго порядка // Известия вузов. Математика. — 2016. — №9. — С. 78–83.

   Zakora, D. A. On stabilization of solutions to incomplete second-order integrodifferential equations // Russian Mathematics (Iz VUZ). — 2016. — Vol. 60, №9. — P. 69–73.
2. *Крейн, С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 р.

   Krein, S. G. Linear differential equations in Banach spaces. — Moscow: Nauka, 1967. — 464 p.
3. *Alabau-Boussouria, F., Cannarsa, P.* A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. Partial Differential Equations/Optimal Control — 2009. — Vol. 347. — P. 867–872.
4. *Alabau-Boussouria, F., Cannarsa, P., Sforza, D.* Decay estimates for second order evolution equations with memory // Journal of Functional Analysis — 2008. — Vol. 254. — P. 1342–1372.
5. *Alabau-Boussouria, F., Prüss, J., Zacher, R.* Exponential and polynomial stability of a wave equation for boundary memory damping with singular kernels // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I — 2009. — Vol. 347. — P. 277–282.

6. *Appleby, J. A. D., Fabrizio, M., Lazzari, B.* On exponential asymptotic stability in linear viscoelasticity // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences — 2006. — Vol. 16, №10. — P. 1677–1694.
7. *Birman, M. S., Solomjak, M. Z.* Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space. — Dordrecht-Boston-Lancaster-Tokyo: D. Reidel Publishing Company, 1986. — 302 p.
8. *Dafermos, C. M.* Asymptotic stability in viscoelasticity // Arch. Rational Mech. Anal. — 1970. — №37. — P. 297–308.
9. *Dafermos, C. M.* On abstract Volterra equations with applications to linear viscoelasticity // J. Differential Equations. — 1970. — №7. — P. 554–569.
10. *Fabrizio, M., Lazzari, B.* On the existence and the asymptotic stability of solutions for linearly viscoelastic solids // Arch. Rational Mech. Anal. — 1991. — Vol. 116. — P. 139–152.
11. *Fabrizio, M., Morro, A.* Mathematical problems in linear viscoelasticity. — Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1992. — 203 p.
12. *Goldstein, J. A.* Semigroups of linear operators and applications. — New York: Oxford University Press, 1985. — 245 p.
13. *Kopachevsky, N. D., Krein, S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2001. — 384 p.
14. *Kopachevsky, N. D., Krein, S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2003. — 444 p.
15. *Lagnese, J.* Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation // J. Differential Equations. — 1983. — Vol. 50. — P. 163–182.
16. *Liu, B. W.* The exponential stabilization of the higher-dimensional linear system of thermoviscoelasticity // Quarterly of Applied Mathematics — 1998. — Vol. 77. — P. 355–386.
17. *Liu, Z., Zheng, S.* Semigroups associated with dissipative systems. — Boca Raton-London-New York-Washington: CHAPMAN & HALL/CRC Research Notes in Mathematics Series, Vol. 398, 1999. — 206 p.
18. *Muñoz Rivera, J. E., Naso, M. G.* On the decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation // Asymptotic Analysis — 2006. — Vol. 49. — P. 189–204.
19. *Muñoz Rivera, J. E., Naso, M. G.* Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 326. — P. 691–707.
20. *Renardy, M., Hrusa, W. J., Nohel, J. A.* Mathematical problems in viscoelasticity. — Harlow: Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math., Vol. 35, Longman Scientific & Technical, 1987.
21. *Zakora, D. A.* A symmetric model of ideal rotating relaxing fluid // Journal of Mathematical Sciences. — 2011. — Vol. 174, №4. — P. 515–536.

*Получена 26.01.2017*