Динамические системы, 2017, том 7(35), №1, 63–79

УДК 517.28+517.984.46+517.91

Спектральные задачи сопряжения

К. А. Радомирская
КФУ им. В.И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: radomirskaya@mail.ru*

Аннотация. На базе уже рассмотренного подхода к абстрактным краевым задачам сопряжения разобраны спектральные задачи сопряжения для одной области. Подробно изучен возникший операторный пучок с самосопряженными операторными коэффициентами, действующий в гильбертовом пространстве и зависящий от двух параметров. Рассматривается оба возможных случая, когда один из параметров спектральный, а другой является фиксированным, в зависимости от этого выведены свойства решений.

Ключевые слова: задача сопряжения, гильбертово пространство, формула Грина, спектральные задачи, операторный пучок, спектральный параметр.

Spectral conjugation problems

K. A. Radomirskaya
V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. Spectral conjugation problems for one domain are considered on the basis of the approach already considered to abstract boundary value problems. The resulting operator bundle has been studied in detail. It acts in Hilbert space, it has self-adjoint operator coefficients.

Keywords: conjugation problem, Hilbert space, Green's formula, spectral problems, operator bundle, spectral parameter.
MSC 2010: 34B05, 34B27, 46C07, 47A68

Введение

В одной из предыдущих работ автора [6] был разработан общий подход к изучению смешанных краевых задач сопряжения. С помощью этого подхода разобраны также спектральные задачи сопряжения и получен операторный пучок. В данной статье рассмотрены свойства решений этого пучка в зависимости от фиксированного параметра.

Подробно изучаются спектральные проблемы для смешанных краевых задач в одной области. Установлено, что исходные спектральные проблемы математической физики приводятся к исследованию одного и того же операторного пучка с самосопряженными операторными коэффициентами. Пучок зависит от двух комплексных параметров, один из которых считают фиксированным, а другой — спектральным.

Также рассмотрены свойства решений операторного пучка в двух случаях, когда параметр μ — спектральный, а λ фиксированный и наоборот. Доказаны теоремы о структуре спектра и базисности системы собственных и присоединенных элементов.

1. Спектральные проблемы, порожденные смешанными краевыми задачами и задачами сопряжения

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega =: \Gamma$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,4}$ рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$u - \Delta u = \lambda u =: f \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1} = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \tag{1.1}$$

$$\partial_2 u = \mu\gamma_2 u =: \psi_2 \text{ (на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u =: \psi_3 \text{ (на } \Gamma_3), \tag{1.2}$$

$$\partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u =: \psi_4 \text{ (на } \Gamma_4). \tag{1.3}$$

В задаче (1.1)–(1.3) на Γ_1 задано однородное условие Дирихле, на Γ_2 — условие типа Стефана (или Стеклова), на Γ_3 — условие М.С.Аграновича (см. [9]), или условие, возникающее в задачах дифракции, на Γ_4 — условие типа С.Крейна, появившееся в задачах о нормальных движениях тяжёлой вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. В этой проблеме имеется два параметра λ и μ, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным. В частности, в задачах дифракции спектральным является параметр $\mu \in \mathbb{C}$ (см. [9]). Другой вариант, когда спектральным является $\lambda \in \mathbb{C}$, рассматривается в работах В.И.Горбачук (см. [2]).

Задачу (1.1)–(1.3) будем исследовать с помощью общего подхода, который рассматривался в предыдущей работе (см. [6]). По этой схеме получаем одну первую вспомогательную задачу С.Крейна и три вторых вспомогательных задач С.Крейна.

В силу однородного условия Дирихле на Γ_1, слабое решение задачи (1.1) - (1.3) естественно искать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1)\} \subset \widehat{H}^1(\Omega).$$

Решение $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ будем искать в виде суммы решений четырех задач, т.е.

$$u = \sum_{k=1}^{4} u_k, \ u_k \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{1.4}$$

где u_k — слабые решения таких задач соответственно:

$$\begin{gathered} u_1 - \triangle u_1 = f := \lambda u \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \ \partial_2 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered} u_2 - \triangle u_2 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u_2 = \psi_2 := \mu\gamma_2 u \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} u_3 - \triangle u_3 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_3 = \psi_3 := \lambda\gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered} u_4 - \triangle u_4 = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \ \partial_2 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_4 = \psi_4 := \lambda^{-1}\gamma_4 u \ (\text{на } \Gamma_4). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Чтобы представить решение u в виде (1.4), введем пространство

$$\check{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{1,4}\}$$

(см. [6], п.1) и его подпространство

$$\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \check{H}^1(\Omega) \cap H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{1.9}$$

Для элементов из $\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ имеем формулу Грина

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=2}^{4} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \ \ \forall \, \eta, \ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{1.10}$$

$$\gamma_k \eta \in H^{1/2}(\Gamma_k), \ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{2,4}.$$

Из этой формулы следует, что слабое решение задачи (1.5) определяется тождеством

$$(\eta, u_1)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f\rangle_{L_2(\Omega)} (= \langle \eta, \lambda u\rangle_{L_2(\Omega)}, \ \ \forall \, \eta \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega),$$

и слабое решение имеет вид (см. [6])

$$u_1 = A^{-1} f = \lambda A^{-1} u, \tag{1.11}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega); \ L_2(\Omega))$.

Далее, слабое решение задачи (1.6) определяется тождеством

$$(\eta, u_2)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_2 \eta, \psi_2\rangle_{L_2(\Gamma_2)} = \langle \gamma_2 \eta, \mu \gamma_2 u\rangle_{L_2(\Gamma_2)}, \ \ \forall \, \eta \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Это решение задается формулой

$$\begin{gathered} u_2 = V_2 \psi_2 = \mu V_2 \gamma_2 u, \ V_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2); \ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)), \ V_2 = \gamma_2^*, \\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega) := \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega). \end{gathered} \tag{1.12}$$

Аналогично рассматриваются задачи (1.7) и (1.8), и их решения выражаются формулами

$$\begin{gathered} u_3 = V_3 \psi_3 = \lambda V_3 \gamma_3 u, \ V_3 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3); \ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)), \ V_3 = \gamma_3^*, \\ u_4 = V_4 \psi_4 = \lambda^{-1} V_4 \gamma_4 u, \ V_4 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_4); \ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)), \ V_4 = \gamma_4^*. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Складывая левые и правые части соотношений (1.11), (1.12), (1.13), получаем, что слабое решение u задачи (1.1)–(1.3) должно быть решением следующей спектральной проблемы:

$$u = \lambda (A^{-1} + V_3 \gamma_3) u + \mu V_2 \gamma_2 u + \lambda^{-1} V_4 \gamma_4 u, \ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{1.14}$$

Это уравнение можно привести к более симметричной форме, воспользовавшись тем, что имеют место свойства

$$A^{1/2}V_k = (\gamma_k A^{-1/2})^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k);\ L_2(\Omega)),\ k = \overline{1,3}. \tag{1.15}$$

Действительно, представим элемент $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}),\ \mathcal{R}(A^{1/2}) = L_2(\Omega)$, в виде

$$u = A^{-1/2}v,\ v \in L_2(\Omega), \tag{1.16}$$

подставим это выражение в (1.14) и подействуем на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать в силу (1.15)). Тогда взамен (1.14) возникает спектральная задача

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \mu B_2 - \lambda(A_1^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{1.17}$$

$$B_k := (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = B_k^* \geq 0,\ B_k \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\ \ k = \overline{2,4}, \tag{1.18}$$

для операторного пучка $L(\lambda,\mu)$ с параметрами λ и μ, один из которых можем считать спектральным, другой — заданным фиксированным.

Задача (1.17), (1.18) содержит в себе много известных спектральных проблем, встречающихся в приложениях. Они будут более подробно разобраны в п. 2.

2. Свойства решений при спектральном параметре μ

Рассмотрим подробнее полученную спектральную задачу

$$L(\lambda,\mu)\varphi := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = 0, \quad \varphi \in H,\ \ \lambda,\ \mu \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

$$H = L_2(\Omega),\ \ 0 \leq B_k = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(H),\ k = \overline{2,4},\ 0 < A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(H). \tag{2.2}$$

Операторный пучок $L(\lambda,\mu)$ зависит линейно и от параметра μ, и от λ. Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения.

Рассмотрим случай, когда в пучке $L(\lambda,\mu)$ параметр λ фиксирован, а μ — спектральный.

2.1. Отрицательные значения параметра.

Рассмотрим задачу (2.1) – (2.2) при $\lambda < 0$. Обозначим

$$T(\lambda) = \lambda(A^{-1} + B_3) + \lambda^{-1}B_4. \tag{2.3}$$

Так как $T(\lambda) < 0$, то оператор $I - T(\lambda) \geq I$ равномерно по λ. Значит существует обратный оператор $(I - T(\lambda))^{-1}$, $\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leq 1$.

Пусть P_0 и P_1 — взаимно дополнительные ортопроекторы, отвечающие разложению:

$$H = H_0 \oplus H_1,\ H_0 := \ker B_2,\ H_1 = H \ominus H_0 = \overline{\mathcal{R}(B_2)},$$

а I_0 и I_1 — единичные операторы в H_0 и H_1 соответственно. Тогда $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$:

$$(I - T(\lambda))(\varphi_0 + \varphi_1) = \mu B_2(\varphi_0 + \varphi_1) = \mu B_2\varphi_0 + \mu\widetilde{B_2}\varphi_1 = \widetilde{B_2}\varphi_1, \tag{2.4}$$

где $\widetilde{B_2} = P_1B_2P_1,\ B_2\varphi_0 = 0,\ \varphi_0 = P_0\varphi_0,\ \varphi_1 = P_1\varphi_1,\ B_2 = P_1B_2$.

Применим к обеим частям уравнения ортопроекторы P_0 и P_1:

$$P_0(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = \mu P_0\widetilde{B_2}\varphi_1 = 0, \tag{2.5}$$

$$P_1(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = \mu P_1\widetilde{B_2}\varphi_1 = \mu\widetilde{B_2}\varphi_1. \tag{2.6}$$

Оператор $P_0(I - T(\lambda))P_0 = I_0 - P_0T(\lambda)P_0 \geq I_0$ в H_0, так как

$$(P_0(I - T(\lambda))P_0\varphi_0,\ \varphi_0) = ((I - T(\lambda))P_0\varphi_0,\ \varphi_0) \geq \|\varphi_0\|^2,$$

и существует его обратный. Подействуем оператором $(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}$ слева на обе части уравнения (2.5) и выразим φ_0:

$$\varphi_0 = -(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}(P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1). \tag{2.7}$$

Подставим полученное выражение в (2.6)

$$-P_1(I - T(\lambda))P_0(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}(P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1) + P_1(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = \mu\widetilde{B_2}\varphi_1.$$

Получаем следующее уравнение

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \mu\widetilde{B}_2\varphi_1, \tag{2.8}$$

где

$$T_1(\lambda) = P_1T(\lambda)P_1 + P_1T(\lambda)P_0(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_1T(\lambda)P_1. \tag{2.9}$$

Лемма 1. $\ker(I_1 - T_1(\lambda)) = \{0\}$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = 0,$$

где $T_1(\lambda)$ определен в (2.9). Введём φ_0 по формуле (2.7):

$$\varphi_0 = -(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}(P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1). \tag{2.10}$$

Имеем формулу (2.6) с $\mu = 0$:

$$P_1(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = 0, \tag{2.11}$$

а из уравнения (2.10) получаем:

$$P_0(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = 0, \tag{2.12}$$

т.е. уравнение (2.5).

Система уравнений (2.11), (2.12) или (2.5), (2.6) с $\mu = 0$ равносильна уравнению:

$$(I - T(\lambda))\varphi = 0,\ \ \varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

которое имеет тривиальное решение $\varphi = 0$, так как $I - T(\lambda) \geq 0I$. Поэтому и $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. □

При $\lambda < 0$ оператор $T_1(\lambda) = (T_1(\lambda))^*$, $I_1 - T_1(\lambda) \gg 0$, а значит существует его квадратный корень. Сделаем замену:

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2}\varphi_1 = \psi_1. \tag{2.13}$$

Подставим $\varphi_1 = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\psi_1$ в уравнение (2.8)

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2}\psi_1 = \mu\widetilde{B}_2(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\psi_1.$$

Подействуем слева оператором $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}$ и получим

$$\psi_1 = \mu\widehat{B}_2\psi_1, \tag{2.14}$$

где $\widehat{B}_2 = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\widetilde{B}_2(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} > 0$, $\widehat{B}_2 \in \mathfrak{S}_\infty(H)$.

В итоге, для случая $\lambda < 0$ в пучке (2.1) получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Собственные значения задачи (2.1) при $\lambda < 0$ образуют положительный дискретный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $+\infty$. Собственные элементы, отвечающие собственным значениям μ_k, после проектирования на подпространство H_1, т.е. элементы $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $\varphi_{1k} = P_1\varphi_k$, образуют базис Рисса в H_1, $\varphi_{1k} = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\psi_{1k}$, где $\{\psi_{1k}\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H_1. Если выполнены условия*

$$A^{-1} \in \mathfrak{S}_{p_{A^{-1}}}, \;\; B_3 \in \mathfrak{S}_{p_{B_3}}, \;\; B_4 \in \mathfrak{S}_{p_{B_4}}, \tag{2.15}$$

то элементы φ_{1k} образуют p – базис в H_1 при $p > p_0 = (p_{A^{-1}})^{-1} + (p_{B_3})^{-1} + (p_{B_4})^{-1}$.

Доказательство. Первое утверждение о положительном спектре и базисе Рисса доказано в курсе лекций [3], а также следует из (2.13).

Докажем второе утверждение, что при условиях (2.15) образуется p – базис. Для этого рассмотрим оператор $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}$ и докажем, что

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = I_1 + \widetilde{T}_1, \;\; \widetilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_p.$$

Действительно,

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2} - I_1 = ((I_1 - T_1(\lambda)) - I_1)((I_1 - T_1(\lambda))^{1/2} + I_1)^{-1} = -T_1(\lambda)((I_1 - T_1(\lambda))^{1/2} + I_1))^{-1}.$$

Здесь первый множитель из $\mathfrak{S}_p$, второй — ограничен, значит вся правая часть из $\mathfrak{S}_p$. Получаем:

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2} = I_1 + T_0, \;\; T_0 \in \mathfrak{S}_p.$$

Рассмотрим теперь оператор

$$I = (I_1 - T_1(\lambda))^{1/2}(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = (I_1 + T_0)(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2},$$

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = (I_1 + T_0)^{-1},$$

обратный оператор существует по лемме 1, он также из $\mathfrak{S}_p$. Таким образом

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = I_1 + \widetilde{T}_1, \ \ \widetilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_p,$$

причем того же класса, что и $T_1(\lambda)$. Так как оператор $T_1(\lambda)$ имеет структуру (2.9), а $T(\lambda)$ — (2.3), то

$$p > p_0 = (p_{A^{-1}})^{-1} + (p_{B_3})^{-1} + (p_{B_4})^{-1}.$$

□

2.2. Положительные значения параметра λ

(не совпадают со спектром пучков $I - T(\lambda)$ и $I_0 - P_0T(\lambda)P_0$)

Рассмотрим задачу (2.1) с фиксированным параметром $\lambda > 0$, и пусть λ не принадлежит $\sigma(I - T(\lambda))$ и $\sigma(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)$. Получаем уравнение

$$(I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = \mu B_2\varphi, \tag{2.16}$$

которое снова можно спроектировать на подпространства H_0 и H_1 ($H = H_0 \oplus H_1$). Обозначим

$$T(\lambda) = \lambda(A^{-1} + B_3) + \lambda^{-1}B_4, \ \ T(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H)$$

и проделаем те же преобразования, что и в пп. 2.1:

$$(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)\varphi_0 = P_0T(\lambda)P_1\varphi_1, \tag{2.17}$$

$$\varphi_1 - P_1T(\lambda)(\varphi_0 - \varphi_1) = \mu B_2\varphi_1. \tag{2.18}$$

Оператор $(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}$ существует, так как λ не из $\sigma(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)$. Выразим элемент φ_0 из (2.17), подставим его в (2.18) и получим:

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \mu\widetilde{B_2}\varphi_1, \tag{2.19}$$

где $T_1(\lambda) = P_1T(\lambda)P_1 + P_1T(\lambda)P_0(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_0T(\lambda)P_1$, $\widetilde{B_2} = P_1B_2P_1$ — полный оператор.

Лемма 2. *Существует обратный оператор* $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1}$.

Доказательство. Пусть $(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = 0$. Аналогично доказательству леммы 1 из этого следует, что $(I - T(\lambda))\varphi = 0$.

Так как λ не принадлежит $\sigma(I - T(\lambda))$, то существует $(I - T(\lambda))^{-1}$ и это значит, что $\varphi = 0$. Следовательно $\varphi_0 = P_0\varphi = 0$, $\varphi_1 = P_1\varphi = 0$ и существует $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1}$. □

Рассмотрим задачу на собственные значения ν_k:

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \nu\varphi_1, \quad T_1(\lambda)\varphi_1 = (1-\nu)\varphi_1, \;\; T_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H), \tag{2.20}$$

значит существуют $\widetilde{\nu_k} := 1 - \nu_k$, $\widetilde{\nu_k} \to 0$ $(k \to \infty)$ по теореме Гильберта – Шмидта.

$$\varphi_1 = \sum_k c_k \varphi_{1k} = \sum_k (\varphi_1,\, \varphi_{1k})\varphi_{1k}, \tag{2.21}$$

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_{1k} = \nu_k \varphi_{1k} = (1 - \widetilde{\nu_k})\varphi_{1k}. \tag{2.22}$$

Расположим ν_k в следующем порядке:

$$1 - \widetilde{\nu_1} \le 1 - \widetilde{\nu_2} \le \ldots \le 1 - \widetilde{\nu_\kappa} < 0 < 1 - \widetilde{\nu}_{\kappa+1} \le 1 - \widetilde{\nu}_{\kappa+2} \le \ldots \le \infty.$$

Получаем

$$((I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1,\, \varphi_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \|c_k\|^2 (\varphi_{1k},\, \varphi_{1k}) = \sum_{k=1}^{\kappa_1} (1 - \widetilde{\nu_k})\|c_k\|^2 + \sum_{\kappa_1+1}^{\infty} (1 - \widetilde{\nu_k})\|c_k\|^2. \tag{2.23}$$

Получаем индефинитную метрику и пространство Понтрягина $H = \Pi_\kappa = \Pi_-[\oplus]\Pi_+$. В уравнении (2.23) первое слагаемое принадлежит пространству H_-, второе — H_+.

Теорема 2. *Пусть $\lambda > 0$ и не принадлежит ни $\sigma(I - T(\lambda))$, ни $\sigma(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)$, квадратичная форма оператора $I_1 - T_1(\lambda)$ принимает отрицательные значения на подпространстве Π_- размерности κ_1, а на остальном пространстве Π_+ — положительные.*

Тогда спектр задачи (2.1) вещественный, дискретный и состоит из κ_1 штук отрицательных собственных значений $\mu_1 \ldots \mu_{\kappa_1}$, а остальные — положительные с предельной точкой $+\infty$.

При этом собственные элементы (присоединённых нет) образуют ортонормированный по форме $I_1 - T_1(\lambda)$ базис и базис Рисса. Элементы базиса должны удовлетворять соотношениям:

$$((I_1 - T_1(\lambda))\varphi_{1k},\, \varphi_{1j}) = \pm\delta_{kj}, \tag{2.24}$$

$$(\widetilde{B_2}\varphi_{1k},\, \varphi_{1j}) = \pm\mu_k^{-1}\delta_{kj}, \tag{2.25}$$

знак минус — для $k = \overline{(1, \kappa_1)}$, а плюс — для $k \ge \kappa_1 + 1$.

Доказательство. Представим в (2.19) оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ в виде:

$$I_1 - T_1(\lambda) = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} J_\kappa |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2}, \tag{2.26}$$

где $\kappa > 0$ — ранг индефинитности оператора $I_1 - T_1(\lambda)$, а J_κ — каноническая симметрия.

Представление (2.26) возможно, так как λ не принадлежит $\sigma(I-T(\lambda))$ и $\sigma(I_0-P_0T(\lambda)P_0)$. В этом случае $|I_1-T_1(\lambda)|\gg 0$ и потому существует ограниченный обратный оператор $|I_1-T_1(\lambda)|^{-1/2}$. С учетом представления (2.26) задача (2.19) равносильна задаче

$$J_\kappa v_1=\mu\widetilde{B_2}(\lambda)v_1, \tag{2.27}$$

$$v_1=|I_1-T_1(\lambda)|^{-1/2}\varphi_1,\ \ \widetilde{B_2}(\lambda):=|I_1-T_1(\lambda)|^{-1/2}\widetilde{B_2}|I_1-T_1(\lambda)|^{-1/2}.$$

Перепишем задачу (2.27) с учетом свойств J_κ:

$$J_\kappa\widetilde{B_2}(\lambda)v_1=\delta v_1,\ \ \delta=\mu^{-1}. \tag{2.28}$$

Так как $\widetilde{B_2}(\lambda)>0$ и компактен, то оператор $J_\kappa\widetilde{B_2}(\lambda)$ — компактный и J_κ — положительный, т.е.

$$[J_\kappa\widetilde{B_2}(\lambda)v_1,\ v_1]:=(J_\kappa(J_\kappa\widetilde{B_2}(\lambda))v_1,\ v_1)=(\widetilde{B_2}(\lambda)v_1,\ v_1)>0,\ \ v_1\neq 0.$$

Таким образом оператор $J_\kappa\widetilde{B_2}(\lambda)$ удовлетворяет условиям известной теоремы о свойствах спектра и системы собственных элементов таких J_κ – самосопряжённых, неотрицательных операторов, действующих в пространстве Понтрягина Π_κ с индефинитным скалярным произведением

$$[u_1,\ v_1]:=(J_\kappa u_1,v_1),\ \ \forall u_1,\ v_1\in H_1,$$

см. [7].

Согласно выводам из этой теоремы, задача (2.28) имеет дискретный вещественный спектр $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой в нуле, а собственные элементы $\{v_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, образуют базис Рисса в H_1. При этом первые κ собственных значений задачи (2.28) отрицательны, остальные — положительны. Если потребовать, чтобы для собственных элементов функционал $(J_\kappa v,\ v)=[v,\ v]$ равнялся по модулю единице, то приходим к формулам

$$[v_{1k},v_{1j}]=\pm\delta_{kj},\ \ ((I_1-T_1(\lambda))\varphi_{1k},\varphi_{1j})=\pm\delta_{kj},$$

$$(\widetilde{B_2}\varphi_{1k},\varphi_{1j})=\pm\mu_k^{-1}\delta_{kj},$$

где $-\delta_{kj}$ — для $k=\overline{(1,\kappa_1)}$, $+\delta_{kj}$ — для $k\geq\kappa_1+1$. □

2.3. Случай общего положения

Рассмотрим более общий случай, когда $\mathrm{Im}\lambda\neq 0$, но λ не совпадают с $\sigma(I-T(\lambda))$. Снова перепишем задачу в виде

$$(I-\lambda(A^{-1}+B_3)-\lambda^{-1}B_4)\varphi=\mu B_2\varphi.$$

Обозначим $T(\lambda)=\lambda(A^{-1}+B_3)+\lambda^{-1}B_4,\ \ T(\lambda)\in\mathfrak{S}_\infty(H)$, получаем задачу

$$(I-T(\lambda))\varphi=\mu B_2\varphi. \tag{2.29}$$

Рассмотрим случай, когда $\text{Re}\lambda \leq 0$, а значит λ не принадлежит $\sigma(I - T(\lambda))$. Получаем следующие оценки для вещественной части квадратичной формы:

$$\|(I - T(\lambda))\varphi\| \cdot \|\varphi\| \geq |((I - T(\lambda))\varphi,\ \varphi)| \geq \text{Re}((I - T(\lambda))\varphi,\ \varphi) =$$

$$= (\varphi, \varphi)^2 - \text{Re}\lambda((A^{-1} + B_3)\varphi,\ \varphi) - \frac{\text{Re}\lambda}{|\lambda|^2}(B_4\varphi,\ \varphi) \geq (I + |\text{Re}\lambda|)(\varphi, \varphi) \geq \|\varphi\|^2.$$

Сократим левую и правую части на $\|\varphi\|$ и получим:

$$\|(I - T(\lambda))\varphi\| \geq \|\varphi\|. \tag{2.30}$$

Это означает, что существует $(I - T(\lambda))^{-1}$ и $\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leq 1$ равномерно по λ.

Рассмотрим уравнение (2.29), как и в предыдущих случаях спроектируем его на подпространства H_0 и H_1:

$$(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)\varphi_0 + (I_0 - P_0T(\lambda)P_1)P_1\varphi_1 = 0, \tag{2.31}$$

$$-P_1T(\lambda)P_0\varphi_0 + (I_1 - P_1T(\lambda)P_1)\varphi_1 = \mu\widetilde{B_2}\varphi_1. \tag{2.32}$$

Так как λ не принадлежит $\sigma(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)$, то существует $(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}$. Выразим φ_0 из (2.31):

$$\varphi_0 = (I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_0T(\lambda)P_1\varphi_1$$

и подставим его в (2.32):

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \mu\widetilde{B_2}\varphi_1, \tag{2.33}$$

где $T_1(\lambda) = P_1T(\lambda)P_1 + P_1T(\lambda)P_0(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_0T(\lambda)P_1$, $\widetilde{B_2} = P_1B_2P_1$ — полный.

Лемма 3. *Существует обратный оператор* $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1}$; $T_1(\lambda)^{-1} = I_1 + \widetilde{T}_1$, $\widetilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H)$.

Доказательство. Проводится аналогично доказательству леммы 1. Так как $Im\lambda \neq 0$, $Re\lambda \leq 0$, то существует $(I - T(\lambda))^{-1}$, а значит и $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1}$. □

Теорема 3. *Пусть в задаче (2.1)* $Im\lambda \neq 0$, $Re\lambda \leq 0$, $B_k = B_k^* \geq 0 \in \mathfrak{S}_\infty(H)$, $A = A^* > 0 \in \mathfrak{S}_\infty(H)$. *Пусть также выполнено условие*

$$B_2 \in \mathfrak{S}_p(H). \tag{2.34}$$

Тогда получаем дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *с единственной предельной точкой* $\mu = \infty$. *Сколь бы ни было мало* $\varepsilon > 0$, *все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле*

$$\Lambda_\varepsilon(\lambda) := \{\mu \in \mathbb{C} :\ |\arg\mu| < \varepsilon;\ sign\ Im\mu = -sign\ Im\lambda\}.$$

После проектирования на H_1 *система собственных и присоединённых элементов* $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи (2.1), отвечающая собственным значениям* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$*, является полной в* H_1*.*

Имеется степенная асимптотика собственных значений $\lambda_j(B_2)$

$$\lambda_k(B_2) = c_B^{\beta_0} k^{-\beta_0}(1 + o(1)),\ c_B > 0,\ \beta_0 > 0,\ k \to \infty, \tag{2.35}$$

то для собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи (2.1) справедлива асимптотическая формула*

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(B_2)(1 + o(1)),\ \ k \to \infty. \tag{2.36}$$

Система элементов $\{P_1\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *образует базис Абеля – Лидского в* H_1*.*

Доказательство. Если выполнено условие (2.34), то оператор $\widetilde{B_2} = P_1 B_2 P_1 \in \mathfrak{S}_p(H)$ и мы попадаем в условия первой теоремы Келдыша. Отсюда следуют выводы о спектре, собственных значениях и полноте в $H_1 = \overline{\mathcal{R}(B_2)}$.

Теперь докажем, что для оператора выполнено условие (2.35), тогда собственные значения $\mu_k(\lambda)$ этой задачи имеют асимптотическое поведение (2.36).

Доказательство этого утверждения следует из результата М.В. Келдыша [1], теорема 5.11.1. На самом деле, если выполнено условие (2.35), то для функции распределения

$$N(r;\ B_2) := \sum_{\alpha_k < r} 1$$

характеристических чисел α_k оператора B_2 (т.е. собственных значений невозмущённой задачи $\alpha B_2 u = u$), выполнено условие

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r;\ B_2)}{r^{1/\beta_0}} = const = c_B^{-1} > 0.$$

Поэтому выполнены условия теоремы 5.11.1 из [1] и имеет место асимптотическая формула (2.36).

Докажем последнее утверждение теоремы. Перепишем уравнение (2.33) в виде

$$(I_1 - T_1(\lambda) - \mu\widetilde{B_2})\varphi_1 = 0,\ \ \varphi_1 \in H_1. \tag{2.37}$$

В уравнении (2.37) осуществим замену

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 := \xi_1.$$

Так как по лемме 3 существует ограниченный обратный оператор $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1}$, то взамен (2.37) получаем

$$\widetilde{B_2}(I_1 + \widetilde{T}_1)\xi_1 = \delta\xi_1,\ \ \delta = \mu^{-1},\ \widetilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H).$$

Здесь оператор $\widetilde{B_2}(I_1+\widetilde{T_1})$ — слабое возмущение оператора $\widetilde{B_2}$, собственные значения которого имеют степенную асимптотику (2.36). Отсюда следует, что $\widetilde{B_2}$ принадлежит классу операторов $\mathfrak{S}^{(p)}(H_1) \subset \mathfrak{S}_p(H_1)$ при $p > \beta_0^{-1}$. Поэтому по утверждению 1 с. 292 из [9] получаем, что оператор $\widetilde{B_2}(I_1 + \widetilde{T_1}) \in \mathbb{A}(\alpha,\ H_1)$, т.е. собственные и присоединённые элементы $\{\xi_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$ образуют базис Абеля – Лидского порядка $\alpha > \beta_0^{-1}$. Заметим теперь, что собственные и присоединённые элементы задачи (2.37) связаны соотношениями:

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_{1k} = \zeta_{1,k},\ \ k = 1, 2, ...,$$

где $T_1(\lambda)$ ограничен и ограниченно обратим.

Отсюда следует, что элементы $\varphi_{1,k}$ образуют базис, эквивалентный базису Абеля – Лидского порядка $\alpha > \beta_0^{-1}$, т.е. базису $\{\zeta_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда можно убедиться, что и сами элементы образуют базис Абеля – Лидского порядка $\alpha > \beta_0^{-1}$. В самом деле, если φ — произвольный элемент H_1, то разложим $T_1(\lambda)\varphi$ в ряд по базису Абеля – Лидского $\{\zeta_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$:

$$T_1(\lambda)\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\zeta_{1,k},\ \ c_k = (T_1(\lambda)\varphi,\ \widehat{\zeta}_{1,k}), \tag{2.38}$$

где $\{\widehat{\zeta}_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$ — биортогональный базис к базису $\{\zeta_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$. Применим к обеим частям $T_1(\lambda)^{-1}$ и получим

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi,\ T^*(\lambda)\widehat{\zeta}_{1,k})\varphi_{1k}, \tag{2.39}$$

т.е. разложение в ряд по элементам φ_{1k} произвольного $\varphi \in H_1$.

Таким образом элементы φ_{1k} образуют базис в H_1, и коэффициенты $c_k := (\eta,\ T^*(\lambda)\widehat{\zeta}_{1,k})$ находятся однозначно. В силу ограниченности и ограниченной обратимости $T_1(\lambda)$ характер сходимости в равенствах (2.38), (2.39) один и тот же. Отсюда следует, что если ряд (2.38) сходится по Абелю – Лидскому, то так же сходится и (2.39), т.е. элементы $\{\eta_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$ также образуют базис по Абелю – Лидскому порядка $\alpha > \beta_0^{-1}$. □

3. Свойства решений при спектральном параметре λ

Теперь рассмотрим случай, когда в пучке

$$L(\lambda, \mu)\varphi := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = 0, \quad \varphi \in H,\ \ \lambda,\ \mu \in \mathbb{C}, \tag{3.1}$$

$$0 \le B_k = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\ k = \overline{2, 4},\ 0 < A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(H).$$

параметр μ фиксирован, а λ — спектральный.

3.1. Неположительные значения параметра

Рассмотрим уравнение

$$L(\lambda)\varphi := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = 0,$$

перепишем его в виде

$$(I - \mu B_2)\varphi := \lambda(A^{-1} + B_3)\varphi + \lambda^{-1}B_4\varphi. \tag{3.2}$$

Оператор $I - \mu B_2 \gg 0$, значит существует $(I - \mu B_2)^{1/2}$. Сделаем в (3.2) замену $(I - \mu B_2)^{1/2}\varphi = \psi$:

$$(I - \mu B_2)^{1/2}\psi = \lambda(A^{-1} + B_3)(I - \mu B_2)^{-1/2}\psi + \lambda^{-1}B_4(I - \mu B_2)^{-1/2}\psi. \tag{3.3}$$

Подействуем в (3.3) слева оператором $(I - \mu B_2)^{-1/2}$ и получим следующую симметризацию

$$\psi = \lambda(I - \mu B_2)^{-1/2}(A^{-1} + B_3)(I - \mu B_2)^{-1/2}\psi + \lambda^{-1}(I - \mu B_2)^{-1/2}B_4(I - \mu B_2)^{-1/2}\psi. \tag{3.4}$$

В (3.4) оператор $A^{-1} + B_3 > 0$, $(I - \mu B_2)^{-1/2}$ — самосопряжённый оператор, $B_4 \gg 0$. Таким образом, оператор в первом слагаемом — самосопряжённый, компактный, положительный; оператор во втором слагаемом — самосопряжённый, компактный, неотрицательный. Получаем в точности пучок Крейна.

В дальнейшем нам понадобится следующая промежуточная лемма.

Лемма 4. *Имеет место следующая оценка*

$$\|(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \le 1.$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$\|(I - \mu B_2)\psi\|\|\psi\| \ge ((I - \mu B_2)\psi,\ \psi) \ge \|\psi\|^2.$$

Первое неравенство следует из неравенства Коши – Буняковского. Сократим левую и правую части на $\|\psi\|$ и сделаем замену

$$(I - \mu B_2)\psi = \eta \quad \Rightarrow \quad \psi = (I - \mu B_2)^{-1}\eta.$$

Получаем

$$\|\eta\| \ge \|(I - \mu B_2)^{-1}\eta\|,$$

а значит, $\|(I - \mu B_2)^{-1}\| \le 1$ и $(I - \mu B_2)^{-1/2} \le 1$. □

Из курса лекций [3] следует, что для факторизации пучка (3.4) нам необходимо следующее условие

$$4\|\widetilde{A}\| \cdot \|\widetilde{B}\| < 1,$$

где $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ — операторы пучка.

Используя лемму 4, рассмотрим следующие оценки

$$4\|(I - \mu B_2)^{-1/2}(A^{-1} + B_3)(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \cdot \|(I - \mu B_2)^{-1/2}B_4(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \le 4\|(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \cdot$$
$$\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \cdot \|B_4\| \cdot \|(I - \mu B_2)^{-1/2}\| \le 4\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\|.$$

Пусть $4\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\| < 1$, тогда имеет место факторизация пучка (3.4). Можем сформулировать следующий результат.

Теорема 4. *Пусть для пучка (3.1), в котором*

$$A^{-1}+B_3 = \widetilde{A} = \widetilde{A}^* \in \mathfrak{S}_\infty(H), \quad B_4 = \widetilde{B} = \widetilde{B}^* \in \mathfrak{S}_\infty(H), \quad \ker \widetilde{A} = \{0\}, \quad H = H_1 \oplus H_0, \quad H_0 := \ker B,$$

выполнено условие, достаточное для факторизации $4\|A^{-1}+B_3\| \cdot \|B_4\| < 1$ *тогда:*
1. Пучок (3.1) имеет дискретный вещественный спектр с предельными точками в 0 *и* ∞.
2. Предельной точке $\lambda = 0$ *отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений на отрезке* $(0, r_-) \subset \mathbb{R}$. *Соответствующая система собственных элементов образует базис Рисса в* H_1 *(после проектирования на* $H_1 = H \ominus H_0$*).*
3. Предельной точке $\lambda = \infty$ *отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений на* (r_+, ∞). *Соответствующая система собственных элементов образует базис Рисса в* H.
Пусть $\widetilde{A} \in \mathfrak{S}_{p_{\widetilde{A}}}(H)$, $\widetilde{B} \in \mathfrak{S}_{p_{\widetilde{B}}}(H)$. *Тогда*
4. Система собственных элементов, отвечающая собственным значениям из $(0, r_-)$, *после проектирования на* H_1 *образует* p *– базис в* H_1 *при* $p \geq p_0$, $p_0^{-1} = (p_{\widetilde{A}})^{-1} + (p_{\widetilde{B}})^{-1}$.
5. Соответственно система собственных элементов, отвечающая собственным значениям в промежутке (r_+, ∞), *образует* p *– базис в* H *при тех же* p.

Доказательство. После проектирования на $H_1 = H \ominus H_0$ (см. п. 2.1 – 2.2) мы получаем полный оператор $\widetilde{B_2} = P_1 B_2 P_1$, $\ker \widetilde{B_2} = \{0\}$. Для нашего пучка применимы выводы для пучка Крейна из [3] теорема 3.1.2 и теорема 3.2.1. Отсюда и следуют выводы теоремы. □

3.2. Вещественная часть μ не положительна

Рассмотрим случай, когда параметр λ спектральный, а $\mathrm{Re}\mu \leq 0$. Снова рассмотрим уравнение (3.2)

$$(I - \mu B_2)\varphi := \lambda(A^{-1} + B_3)\varphi + \lambda^{-1} B_4 \varphi. \tag{3.5}$$

Оценим по модулю квадратичную форму $|((I - \mu B_2)\varphi,\ \varphi)|$:

$$\|(I-\mu B_2)\varphi\| \cdot \|\varphi\| \geq |((I-\mu B_2)\varphi,\ \varphi)| \geq \mathrm{Re}((I-\mu B_2)\varphi,\ \varphi) = \|\varphi\|^2 - \mathrm{Re}\mu(B_2\varphi, \varphi) \geq \|\varphi\|^2.$$

Сократим левую и правую части на $\|\varphi\|$ и получим:

$$\|(I - \mu B_2)\varphi\| \geq \|\varphi\|. \tag{3.6}$$

Если $(I - \mu B_2)\varphi = 0$, то $\|\varphi\| = 0$ и $\varphi = 0$. Таким образом, существует обратный оператор $(I - \mu B_2)^{-1}$. Сделаем замену в (3.6):

$$(I - \mu B_2)\varphi = \psi, \quad \varphi = (I - \mu B_2)^{-1}\psi.$$

Получим

$$\|\psi\| \geq \|(I-\mu B_2)^{-1}\psi\|, \ \ \|(I-\mu B_2)^{-1}\| \leq 1.$$

Подействуем в (3.5) слева оператором $(I-\mu B_2)^{-1}$ (так как оператор $I-\mu B_2$ не является самосопряжённым, то не существует оператора $(I-\mu B_2)^{-1/2}$ как в п. 3.1). Получаем

$$\varphi = \lambda(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)\varphi + \lambda^{-1}(I-\mu B_2)^{-1}B_4\varphi. \tag{3.7}$$

Оператор $(I-\mu B_2)^{-1}$ является близким к I. Получаем слабое возмущение оператора B_2 и можем сформулировать следующий вывод.

Теорема 5. *Пусть в задаче (3.5) выполнены условия теоремы 4, $Re\mu \leq 0$. Тогда 1. если выполнены условия*

$$A^{-1}+B_3 \in \mathfrak{S}_p(H); \ \ B_4 \in \mathfrak{S}_p(H), \tag{3.8}$$

то после проектирования собственных элементов на подпространство $H_1 = H \ominus H_0$ задача (3.5) имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$ с единственной предельной точкой $\lambda = \infty$. Сколь бы мало ни было $\varepsilon > 0$, все собственные значения $\lambda_k(\mu)$, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в углах

$$-\varepsilon < \arg\lambda < \varepsilon, \ \ \Pi - \varepsilon < \arg\lambda < \Pi + \varepsilon.$$

Система собственных и присоединённых элементов, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$, является полной в H.

2. Если вместо (3.8) выполнено более сильное асимптотическое условие

$$\lambda_k(B_4) = c_A^{\alpha_0}k^{-\alpha_0}(1+o(1)), \ \ c_A > 0, \ \ \alpha_0 > 0, \ \ k \to \infty, \tag{3.9}$$

то для собственных значений задачи имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_k(\mu) = -\lambda_k^{-1}(A)(1+o(1)), \ \ k \to \infty.$$

Система собственных и присоединённых элементов образует базис Абеля – Лидского порядка $\alpha > \alpha_0$ в пространстве H.

Доказательство. 1. Первое утверждение теоремы о спектре и полноте имеет место по теореме М.В. Келдыша (см. [3]).
2. Если выполнено условие (3.9), то операторы $A^{-1}+B_3$ и B_4 принадлежат классу компактных операторов $\mathfrak{S}^{(p)}$ при $p > \alpha_0^{-1}$. Поэтому для этого случая справедливы выводы из доказательства теоремы 3. Отсюда и следует утверждение об асимптотике и базисе по Абелю – Лидскому. □

4. Заключение

Операторный пучок, полученный при решении спектральной краевой задачи сопряжения (1.1)–(1.3), содержит в себе много известных спектральных проблем, встречающихся в приложениях. В зависимости от фиксированного параметра получаем различные свойства пучка и соответствующие теоремы о структуре спектра.

Список цитируемых источников

1. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

   Gokhberg I.C., Krein M.G. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators. — M.: Nauka, 1965. — 448 p.

2. *Горбачук В.И.* Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений // Функциональные и численные методы математической физики. Ин-т матем. и механики: сб. научн. трудов. — К.: Наукова думка. — 1998. — С. 60–63.

   Gorbachuk V.I. Dissipative boundary value problems for elliptic differential equations (in Russian) // Functional and numerical methods of mathematical physics. Institute of Mathematics and Mechanics: a collection of scientific papers. — K.: Naukova Dumka — 1998. — pp. 60–63.

3. *Копачевский Н.Д.* Спектральная теория операторных пучков // Специальный курс лекций. — 2009. — 128 с.

   Kopachevsky N.D. Spectral theory of operator beam // Special course of lectures — 2009.

4. *Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.* Абстрактные смешанные краевые задачи сопряжения // Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - V"(Ростов-на-Дону). — 2015. — С. 211.

   Kopachevsky N.D., Radomirskaya K.A. Abstract mixed boundary value problems of conjugation (in Russian) // Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis V (Rostov-on-Don). — 2015. — p. 211.

5. *Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.* Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения // XXVI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (Батилиман(Ласпи)). — 2015. — С. 52.

   Kopachevsky N.D., Radomirskaya K.A. Abstract boundary and spectral conjugation problems // XXVI KROMSH. — 2015. — p. 52.

6. *Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения // Современная математика. Фундаментальные направления.— М., РУДН. — 2016. — Т.61— С. 67-102.

   Kopachevsky N.D., Radomirskaya K.A. Abstract boundary and spectral conjugation problems and their applications // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.— M., RUDN. — 2016. — T.61— pp. 67-102.

7. *Понтрягин Л.С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1944. — Т.8, № 6. — С. 243 – 280.

Pontryagin L.S. "Hermitian operators in a space with indefinite metric"// Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. — 1944. — T.8, № 6. — pp. 243–280.

8. *Старков П.А.* Операторный подход к задачам сопряжения // Ученые записки ТНУ им. Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". — 2002. — Т.15(64), № 2. — С. 82-88.

Starkov P.A. Operator approach to the conjugation problems // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. Series "Mathematics. Mechanics. Informatics and Cybernetics.". — 2002. — T.15(64), № 2. — pp. 82-88.

9. *Agranovich M. S., Katsenelenbanm B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized method of eigenoscillations in difraction theory. — Berlin: Wiley–VCN, 1999.

10. *Gohberg I., Goldberg S.* Basic Operator Theory. — Boston: Birkhaser, 1980. — 448 p.

11. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid-Birkhauser Verlag.—Basel–Boston–Berlin. — 2001. — 384 p.

12. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid-Birkhauser Verlag. —Basel–Boston–Berlin. — 2003. — 444 p.

13. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge University Press, 2000.

14. *Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D.* On the modified spectral Stefan problem and its abstract generalizations // Birkhauser Verlag, Basel (Switzerland). — 2009. — T.191.— P. 373–386.

Получена 06.03.2017