Динамические системы, 2017, том 7(35), №1, 53–61

УДК 519.872

Полумарковская модель однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным восстанавливаемым каналом[1]

А. И. Песчанский

Севастопольский государственный университет,
Севастополь, 299053. *E-mail: peschansky_sntu@mail.ru*

Аннотация. Построена модель функционирования ненадежной однолинейной системы обслуживания с потерями, в которой через случайное время после начала обслуживания заявки может произойти отказ канала. При этом заявка теряется и на дообслуживание не возвращается. После завершения ремонтных работ надежностные характеристики канала восстанавливаются, и обслуживание заявок возобновляется. Предполагается, что все случайные величины, описывающие систему, имеют распределения общего вида. С помощью аппарата полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством получены эффективные формулы для определения финальных вероятностей пребывания системы в различных состояниях.

Ключевые слова: ненадежная однолинейная система обслуживания, полумарковский процесс, стационарное распределение вложенной цепи Маркова, финальные вероятности.

Semi-Markov model of a single-server loss queueing system with unreliable restorable channel

A. I. Peschansky

Sevastopol State University, Sevastopol 299053.

Abstract. The model of one-server loss queueing system is built. Server failure can occur in random time after the beginning of customer service. Herewith, the customer lost never arrives to complete its service. After the end of repair all reliability characteristics are renewed, and customer service is resumed. All the random variables describing the queueing system are supposed to have general distributions. By means of apparatus of semi-Markov processes with discrete-continuous phase space, effective formulas for final probabilities of the queueing system sojourn in different states are obtained.

Keywords: unreliable single-server queueing system, Semi-Markov process, stationary distribution of the embedded Markov chain, final probabilities.

MSC 2010: 60K25

[1]Исследование выполнено в рамках базовой части госзадания Министерства образования и науки РФ № 2014/702 (проект № 4000)

Введение

Моделированию систем обслуживания с ненадежными каналами посвящено достаточно большое число работ, в которых исследовались различные постановки, схематизирующие выход каналов из строя. Обзор результатов в этом направлении можно найти, например, в [2], [3], [6]. В построенных моделях, как правило, предполагается, что, либо входящий в систему поток заявок — простейший, либо время обслуживания или время между отказами канала имеют показательное распределение. С точки зрения приложений важно освободиться от такого допущения. В [5] найдены стационарные характеристики ненадежной системы обслуживания $GI/G/1/0$ в предположении, что наработка канала до отказа — случайная величина с общим законом распределения. В данной работе исследуется ненадежная система $GI/G/1/0$, в которой случайной величиной общего вида является время безотказной работы канала при непрерывном обслуживании заявки. При построении модели функционирования системы и нахождении ее финальных вероятностей состояний используется аппарат теории полумарковских процессов с дискретно–непрерывным фазовым пространством состояний [4].

1. Постановка задачи

В одноканальную систему обслуживания поступает рекуррентный поток заявок, в котором времена β между поступлениями заявок имеют функцию распределения $G(t) = P\{\beta \le t\}$. Длительность времени обслуживания заявки — случайная величина α с функцией распределения $F(t) = P\{\alpha \le t\}$. Отказ канала может произойти только во время обслуживания заявки через время γ с момента начала ее обслуживания. Случайная величина γ имеет функцию распределения $\Phi(t) = P\{\gamma \le t\}$. Сразу после отказа канала начинается его восстановление, которое длится случайное время σ с функцией распределения $\Psi(t) = P\{\sigma \le t\}$. В случае отказа канала заявка, находящая на обслуживании теряется и больше на дообслуживание не возвращается. Предполагается, что случайные величины α, β, γ, и σ имеют плотности распределения вероятностей $f(t)$, $g(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$, конечные математические ожидания $E\alpha$, $E\beta$, $E\gamma$, $E\sigma$ и дисперсии соответственно.

Цель работы — построить полумарковскую модель функционирования системы и найти финальные вероятности пребывания системы в различных состояниях.

2. Построение полумарковской модели

Рассмотрим фазовое пространство состояний системы

$$E = \{1,\, 1xu,\, 0y,\, 2y,\, 2z0\}\,.$$

Поясним коды состояний:

1 — начинает обслуживаться поступившая в систему заявка;

$1xu$ — поступившая в систему заявка теряется по причине занятости канала обслуживанием, до конца которого осталось время x, а до отказа канала осталось время u;

$0y$ — канал освобождается после обслуживания заявки, либо после восстановления, до поступления следующей заявки осталось время y;

$2y$ — происходит отказ канала, и начинается его восстановление, до поступления следующей заявки в систему осталось время y;

$2z0$ — поступившая в систему заявка получает отказ в обслуживании по причине восстановления канала, до конца восстановления осталось время z.

Функционирование системы опишем посредством процесса марковского восстановления $\varsigma_n = \{\xi_n,\, \theta_n,\ n \geq 0\}$, где $\xi_n \in E$ — полумарковские состояния системы, θ_n — время пребывания системы в различных состояниях.

Для задания процесса марковского восстановления необходимо определить переходные вероятности вложенной цепи Маркова $\{\,\xi_n,\ \ n \geq 0\}$ и функции распределения случайных величин θ_n. Времена пребывания системы в состояниях определяются выражениями

$$\theta_1 = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma, \theta_{1ux} = \beta \wedge x \wedge u, \theta_{0y} = y, \theta_{2y} = \sigma \wedge\ y, \theta_{2z0} = \beta \wedge z,$$

где $\wedge$ — знак минимума. Граф переходов системы изображен на рис. 1

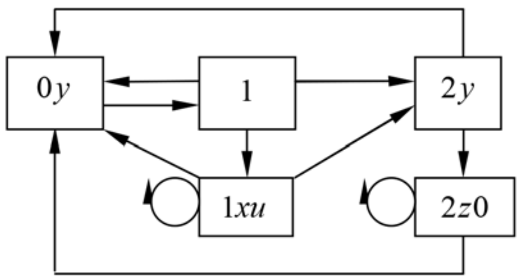

Рис. 1. Граф переходов системы

Опишем события и плотности вероятностей переходов системы. Рассмотрим состояние 1. Если во время обслуживания заявки канал не откажет и при этом $\alpha < \beta$, то система перейдет в состояние $0y$. Плотность вероятности этого перехода

$$p_1^{0y} = P\left\{\alpha \in dt, \alpha < \gamma, \beta - \alpha, \in dy\right\} = \int\limits_0^\infty f(t)\overline{\Phi}(t)g(t+y)dt, y > 0.$$

В случае отказа канала и $\gamma < \beta$ начинается его восстановление, т.е. система переходит в состояние $2y$ с плотностью вероятности перехода

$$p_1^{2y} = P\left\{\gamma \in dt, \gamma < \alpha, \beta - \gamma \in dy\right\} = \int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)g(t+y)dt, y > 0.$$

Если во время обслуживания заявки поступает очередная заявка (т.е. $\beta < \alpha \wedge \gamma$), то она теряется, и система переходит в состояние $1xu$ с плотностью вероятности перехода

$$p_1^{1xu} = P\left\{\beta \in dt, \gamma - \beta \in du, \alpha - \beta \in dx\right\} = \int\limits_0^\infty g(t)\phi(t+u)f(t+x)dt,\ x, u > 0.$$

Аналогично устанавливаются вероятность и плотности вероятностей переходов системы из других состояний:

$$P_{0y}^{1} = 1;\ p_{1xu}^{1x',\,u-x+x'} = g(x-x'),\ x' < x,\ x < u;\ p_{1xu}^{0y} = g(x+y),\ y > 0,\ x < u;$$

$$p_{1xu}^{1,x-u+u',\,u'} = g(u-u'),\ u' < u,\ u < x;\ p_{1xu}^{2y} = g(u+y),\ y > 0,\ u < x;$$

$$p_{2y}^{2z0} = \psi(y+z),\ z > 0;\ p_{2y}^{0y'} = \psi(y-y'),\ y' < y;$$

$$p_{2z0}^{y0} = g(y+z),\ y > 0;\ p_{2z0}^{2z'0} = g(z-z'),\ z' < z.$$

Связанный с процессом марковского восстановления $\varsigma_n = \{\xi_n,\, \theta_n,\, n \geq 0\}$ полумарковский процесс $\xi(t)$ задается соотношением $\xi(t) = \xi_{n(t)}$, $t \geq 0$, где $n(t)$ — считающий процесс:

$$n(t) = \max\left\{n : \tau_n \leq t\right\},\ \tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k.$$

Заметим, что процесс $\xi(t)$ является регенерирующим. Точками регенерации этого процесса являются моменты времени, когда начинается обслуживание поступившей в систему заявки.

3. Финальные вероятности состояний

Разобьем фазовое пространство состояний E на следующие непересекающиеся подмножества состояний: $E_1 = \{1,\, 1xu\}$ — канал занят обслуживанием заявки; $E_2 = \{2y,\, 2z0\}$ — канал восстанавливается; $E_0 = \{0y\}$ — канал свободен и находится в работоспособном состоянии.

Обозначим

$$\Phi(t, x, E_i) = P\left\{\xi(t) \in E_i \,/\, \xi(0) = x\right\},\ x \in E,$$

переходные вероятности полумарковского процесса $\xi(t)$. Предельные значения этих переходных вероятностей определим с помощью соотношений [4]

$$p_i^* = \lim_{t \to \infty} \Phi(t, x, E_i) = \int\limits_{E_i} m(x)\rho(dx) \left(\int\limits_{E} m(x)\rho(dx)\right)^{-1},\ i = \overline{0,2}, \tag{1}$$

где $m(x)$ — среднее время пребывания системы в состоянии $x \in E$, $\rho(\cdot)$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова $\{\xi_n,\, n \geq 0\}$.

Средние времена пребывания в состояниях определяются соотношениями:

$$E\theta_1 = \int\limits_0^\infty \overline{F}(t)\overline{\Phi}(t)\overline{G}(t)dt; E\theta_{1xu} = \int\limits_0^{x\wedge u} \overline{G}(t)dt; E\theta_{2y} = \int\limits_0^y \overline{\Psi}(t)dt;$$

$$E\theta_{2z0} = \int\limits_0^z \overline{G}(t)dt;\ E\theta_{0y} = y.$$

Значение стационарного распределения ρ_1 для состояния 1 и плотностей стационарного распределения $\rho(1xu)$, $\rho(2y)$, $\rho(2z0)$ и $\rho(0y)$ для остальных состояний найдем из системы интегральных уравнений

$$\rho(1xu) = \int\limits_0^\infty g(t)\rho(1, x+t, u+t)dt + \rho_1 \int\limits_0^\infty g(t)\phi(t+u)f(t+x)dt,$$

$$\rho(2y) = \int\limits_0^\infty g(t+y)dt \int\limits_t^\infty \rho(1xt)dx + \rho_1 \int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)g(t+y)dt,$$

$$\rho(2z0) = \int\limits_0^\infty g(t)\rho(2, z+t, 0)dt + \int\limits_0^\infty \psi(t+z)\rho(2t)dt,$$

$$\rho(0y) = \rho_1 \int\limits_0^\infty f(t)\overline{\Phi}(t)g(t+y)dt + \int\limits_0^\infty \psi(t)\rho(2, t+y)dt +$$

$$+ \int\limits_0^\infty g(t+y)\rho(2t0)dt + \int\limits_0^\infty g(t+y)dt \int\limits_t^\infty \rho(1tu)du, \rho_1 = \int\limits_0^\infty \rho(0y)dy.$$

Из первого уравнения системы имеем

$$\rho(1xu) = \rho_1 \int\limits_0^\infty h_g(t)\phi(t+u)f(t+x)dt.$$

Здесь $h_g(x)$ — плотность функций восстановления $H_g(t)$, которая определяет среднее число входящих в систему заявок за время t, и задается соотношением

$$H_g(t) = \sum_{n=1}^\infty G^{*(n)}(t),$$

где $G^{*(n)}(t)$ — n-кратная свертка функции $G(t)$. Подставляя найденное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$\rho(2y) = \rho_1 \int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)v_g(t, y)dt,$$

где $v_g(u,x) = g(u+x) + \int\limits_0^u h_g(u-s)g(s+x)ds$ — плотность распределения вероятностей прямого остаточного времени восстановления β_t [1]. Величина β_t фиксирует время после момента t до ближайшего момента восстановления во входящем в систему потоке заявок. Из остальных уравнений системы в результате некоторых преобразований получаем

$$\rho(2z0) = \rho_1 \int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)dt \int\limits_0^\infty \psi(s+z)h_g(t+s)ds;$$

$$\rho(0y) = \rho_1 \int\limits_0^\infty f(t)\overline{\Phi}(t)v_g(t,y)dt + \rho_1 \int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)dt \int\limits_0^\infty \psi(z)v_g(t+z,y)dz.$$

Стационарная вероятность ρ_1 находится из условия нормировки и равна

$$\rho_1 = \left[2 + \int\limits_0^\infty h_g(t)\overline{\Phi}(t)\overline{F}(t)dt + \int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)dt + \int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)dt \int\limits_0^\infty \overline{\Psi}(s)h_g(s+t)ds\right]^{-1}.$$

Используя выражения для средних времен пребывания системы в состояниях, а также найденное стационарное распределение вложенной цепи Маркова, интегралы в формуле (1) после преобразований принимают вид:

$$\int\limits_{E_1} m(x)\rho(dx) = \rho_1 E\theta_1 + \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \rho(1xu)dxdu \int\limits_0^{x\wedge u} \overline{G}(t)dt = \rho_1 \int\limits_0^\infty \overline{F}(t)\overline{\Phi}(t)\overline{G}(t)dt +$$

$$+\rho_1 \int\limits_0^\infty \overline{G}(t)dt \int\limits_0^\infty h_g(s)\overline{F}(t+s)\overline{\Phi}(t+s)ds = \rho_1 E\left(\alpha \wedge \gamma\right);$$

$$\int\limits_{E_2} m(x)\rho(dx) = \rho_1 \int\limits_0^\infty \rho(2y)dy \int\limits_0^y \overline{\Psi}(t)dt + \rho_1 \int\limits_0^\infty \rho(2z0)dz \int\limits_0^z \overline{G}(t)dt =$$

$$= \rho_1 \int\limits_0^\infty \overline{\Psi}(y)dy \int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)dt \int\limits_y^\infty v_g(t,s)ds + \rho_1 \int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)dt \int\limits_0^\infty \overline{G}(x)dx \int\limits_0^\infty \overline{\Psi}(s+x)h_g(t+s)ds =$$

$$= \rho_1 E\sigma \int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)dt = \rho_1 E\sigma P\left(\alpha > \gamma\right);$$

$$\int\limits_{E_0} m(x)\rho(dx) = \int\limits_0^\infty y\rho(0y)dy = \rho_1 \int\limits_0^\infty f(t)\overline{\Phi}(t)dt \int\limits_0^\infty yv_g(t,y)dy +$$

$$+\rho_1\int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)dt\int\limits_0^\infty \psi(z)dz\int\limits_0^\infty yv_g(t+z,y)dy=\rho_1E\beta\left[1+\int\limits_0^\infty f(t)\overline{\Phi}(t)H_g(t)dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)dt\int\limits_0^\infty \psi(z)H_g(t+z)dz\right]-\rho_1\int\limits_0^\infty \overline{F}(t)\overline{\Phi}(t)dt-\rho_1E\sigma\int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)dt;$$

$$\int\limits_E m(x)\rho(dx)=\rho_1E\beta\overline{N},$$

где

$$\overline{N}=1+\int\limits_0^\infty f(t)\overline{\Phi}(t)H_g(t)dt+\int\limits_0^\infty \phi(t)\overline{F}(t)dt\int\limits_0^\infty \psi(z)H_g(t+z)dz \qquad (2)$$

— среднее число заявок, поступающих в систему за период регенерации, т.е. за время между моментами принятия заявок к обслуживанию.

Таким образом, финальные вероятности пребывания системы в состоянии обслуживания заявки, восстановления и свободном состоянии определяются соответственно формулами

$$p_1^*=\frac{E\left(\alpha\wedge\gamma\right)}{E\beta\overline{N}};\ p_2^*=\frac{E\sigma P\left(\alpha>\gamma\right)}{E\beta\overline{N}};\ p_0^*=1-p_1^*-p_2^*. \qquad (3)$$

4. Частные виды систем обслуживания

Выпишем финальные вероятности пребывания системы в состояниях для некоторых типов входящего потока и времени обслуживания. Пусть для системы обслуживания $M/M/1/0$ время β между поступлениями заявок имеет плотность $g(t)=\lambda e^{-\lambda t}$; время обслуживания заявки α — плотность $f(t)=\mu e^{-\mu t}$; время безотказной работы канала γ — плотность $\phi(t)=\eta e^{-\eta t}$; время восстановления канала σ — плотность $\psi(t)=\nu e^{-\nu t}$. Тогда характеристики (2) и (3) принимают значения

$$\overline{N}=1+\frac{\lambda}{\nu}\frac{\eta+\nu}{\mu+\eta},\ p_0^*=\frac{1}{1+\frac{\lambda}{\nu}\frac{\eta+\nu}{\mu+\nu}},\ p_1^*=\frac{\lambda}{\mu+\eta}p_0^*,\ p_2^*=\frac{\eta}{\nu}\frac{\lambda}{\mu+\eta}p_0^*,$$

которые совпадают с известными [7].

Для системы $E_n/G/1/0$ время β между моментами поступления заявок имеет распределение Эрланга n-го порядка с плотностью $g(t)=\lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$, а все остальные случайные величины — распределения общего вида. Как известно, функция восстановления для такого входящего потока заявок определяется выражением

$$H_g(t)=\frac{1}{n}\left[\lambda t+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\varepsilon^j}{1-\varepsilon^j}\left(1-e^{-\lambda t(1-\varepsilon^j)}\right)\right],\ \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

В этом случае формулы (2) и (3) принимают вид

$$p_1^* = \frac{\lambda E\left(\alpha\wedge\gamma\right)}{n\overline{N}};\; p_2^* = \frac{\lambda E\sigma P\left(\alpha>\gamma\right)}{n\overline{N}},$$

где среднее число $\overline{N}$ заявок поступающих в систему за период регенерации записывается в изображениях Лапласа $L\left[f\right](s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt$:

$$\overline{N} = 1 + \frac{1}{n}[E(\alpha\wedge\gamma) + \lambda E\sigma P(\alpha>\gamma) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\varepsilon^j}{1-\varepsilon^j}\left(1 - L\left[f\overline{\Phi}\right]\left(\lambda(1-\varepsilon^j)\right) - L\left[\phi\overline{F}\right]\left(\lambda(1-\varepsilon^j)\right)L\left[\psi\right]\left(\lambda(1-\varepsilon^j)\right)\right)]. \qquad (4)$$

5. Численный пример

Предположим, что все случайные величины, описывающие систему, имеют распределение Эрланга. Время между моментами поступления заявок — распределение Эрланга 6-го порядка со средним значением 6 минут. Время обслуживания заявки — распределение 2-го порядка со средним значением 10 минут. Время безотказной работы канала с момента начала обслуживания заявки — распределение 3-го порядка с математическим ожиданием 30 минут. Время восстановления канала — распределение 2-го порядка со средним значением 8 минут. Численные расчеты по формулам (3) и (4) в пакете MathCAD приводят к следующим значениям финальных вероятностей: $p_1^* = 0,678$; $p_2^* = 0,065$; $p_0^* = 0,257$.

Если входящий в систему поток заявок — простейший и при этом среднее время между моментами поступления заявок, так же как и остальные случайные величины, описывающие функционирование системы, остаются неизменными, то финальные вероятности состояний равны $p_1^* = 0,573$; $p_2^* = 0,055$; $p_0^* = 0,372$. Следовательно, только изменение закона распределения времени между моментами поступления заявок при сохранении его среднего значения, существенно увеличивает вероятность принятия заявки к обслуживанию.

6. Заключение

С помощью аппарата полумарковских процессов найдены соотношения для вычисления финальных вероятностей пребывания в различных состояниях системы обслуживания $GI/G/1/0$, в которой время безотказной работы канала при непрерывном обслуживании заявки есть случайная величина общего вида. Аналогичная методика может быть применена для нахождения стационарных характеристик ненадежных систем обслуживания с учетом проведения их технического обслуживания или сохранения работоспособности отказавшего канала за счет временного резервирования.

Список цитируемых источников

1. *Байхелььт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.

   Beichelt, F., Franken, P. (1983). Zuverlassigkeit und Instanphaltung. Mathematische Methoden. Berlin: VEB Verlag Technik. (in German)

2. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания: Учебник. — М.: Изд-во РУДН, 1995. — 529 с.

   Bocharov, P. P., Pechinkin, A. V. (1995). Queuing theory: Textbook. Moskow: Publ. House of Peoples Friendship University. (in Russian)

3. *Коваленко А. И., Марянин Б. Д., Смолич В. П.* Система массового обслуживания с ненадежной линией и нетерпеливыми заявками // Таврический вестн. информатики и математики. — 2013. — № 1. — С. 53-60.

   Kovalenko, A. I., Maryanin, B. D., Smolich, B. P. (2013). Queuing system with unreliable line and impatient customers. Taurida Vestnik of Informatics and Mathematics, 1, 53–60. (in Russian)

4. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. — К.: Наук. думка, 1982.

   Korolyuk, V. S., Turbin, A. F. (1982). Markov renewal processes in the problems of system reliability. Kiev: Naukova Dumka. (in Russian)

5. *Песчанский А. И., Коваленко А. И.* Стационарные характеристики однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным прибором // Таврический вестн. информатики и математики. — 2013. — № 1. — С. 69-79.

   Peschansky, A. I., Kovalenko, A. I. (2013). Stationary characteristics of a single-server loss queuing system with unreliable server. Taurida Vestnik of Informatics and Mathematics, 1, 69–79. (in Russian)

6. *Руденко И. В.* Системы массового обслуживания с ненадежными и восстанавливающимися приборами. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.05. —М.: МГУ, 2012.

   Rudenko, I. V. (2012). Queueing systems with unreliable and restorable servers. Moscow: Moscow State University. (in Russian)

7. *Якушев Ю. Ф.* Об одной задаче обслуживания потока вызовов ненадежными приборами // Проблемы передачи информации. — 1969. — Т. V, вып.4. — С.84-88.

   Yakushev, Yu. F. (1969). On a problem of call flow operation by unreliable device. Problems of Information Transmission, 5 (4), 84–88. (in Russian)

Получена 04.10.2016