Динамические системы, 2017, том 7(35), №1, 3–16

УДК 531.36+531.384

Об устойчивости стационарных движений механических систем с неизвестными первыми интегралами[1]

А. В. Карапетян, А. С. Кулешов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Москва 119991. *E-mail: avkarapetyan@yandex.ru, kuleshov@mech.math.msu.su*

Аннотация. В работе обсуждаются вопросы устойчивости стационарных движений консервативных и диссипативных механических систем с первыми интегралами. Рассматриваются системы определенного вида, для изучения устойчивости которых не требуется знания явных выражений первых интегралов кроме, быть может, одного. Общие результаты иллюстрируются на примере задачи о качении динамически симметричного тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости и на примере задачи о качении круглого диска по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

Ключевые слова: механические системы, первые интегралы, устойчивость.

Stability of stationary motions of mechanical systems with unknown first integrals

A. V. Karapetyan, A. S. Kuleshov

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991.

Abstract. Application of the Routh-Salvadori theorem and its generalizations for investigation of stability of stationary motions of mechanical systems with first integrals $U_0 = c_0$, $U_1 = c_1$, $\dots$ $U_k = c_k$ is reduced to study the type of stationary value of U_0 (here U_0 can be also a nonincreasing along system trajectories function) for fixed values of U_1, $\dots$, U_k. This method does not take into account equations of motion of the considered system however it is supposed that all first integrals are known explicitly. On the other hand it is possible to distinguish the systems for which the stability analysis does not require the explicit form of all first integrals $U_1 = c_1$, $\dots$ $U_k = c_k$, except $U_0 = c_0$. In this paper we discuss problems of stability of stationary motions for such systems. General results are illustrated by the problem of motion of a rotationally symmetric rigid body on a perfectly rough plane and by the problem of motion of a round disk on a perfectly rough plane.

Keywords: mechanical systems; first integrals; stability.

MSC 2010: 70K20; 70E50; 70E18

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 16-01-00338.

1. Постановка задачи и общие результаты

Применение теоремы Рауса-Сальвадори и её модификаций [7, 10, 11, 12] для исследования устойчивости стационарных движений систем, допускающих первые интегралы, связано с изучением характера стационарного значения одного из них (или невозрастающей вдоль траекторий системы функции) при фиксированных значениях других интегралов. Эффективный метод такого исследования приведен, например, в работе [5], и предполагает, что все используемые первые интегралы известны в явном виде. Уравнения движения рассматриваемой системы в этом методе не используются. С другой стороны, руководствуясь идеями И. М. Миндлина и Г. К. Пожарицкого [4], можно [1] указать системы определенного вида, для изучения устойчивости которых не требуется знания явных выражений первых интегралов кроме, быть может, одного.

Пусть уравнения движения какой-либо системы можно представить в виде (значок $\mathtt{T}$ означает транспонирование):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) = \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\Gamma}^{\mathtt{T}}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{p}}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{q}}. \tag{1.1}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_m)^{\mathtt{T}}, \quad \boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_k)^{\mathtt{T}}, \quad W = W(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \quad \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}),$$

$$2K = \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathtt{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{q}}, \quad \forall \dot{\boldsymbol{q}} \neq 0, \quad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{p}), \quad \boldsymbol{G}^{\mathtt{T}} = -\boldsymbol{G}.$$

Матрица $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ размера $(m \times m)$ и скалярная функция $W(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ предполагаются два раза, а матрица $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{p})$ размера $(m \times m)$ и матрица $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ размера $(k \times m)$ – один раз непрерывно дифференцируемыми по входящим в них переменным.

В частности, уравнения вида (1.1) могут описывать движение механических систем с псевдоциклическими координатами (при этом $\boldsymbol{q}$ и $\dot{\boldsymbol{q}}$ – позиционные координаты и скорости соответственно, $\boldsymbol{p}$ – импульсы или квазискорости квазициклических координат).

Очевидно, уравнения (1.1) допускают обобщённый интеграл энергии

$$U_0(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{p}) = K + W = c_0. \tag{1.2}$$

Кроме того, если матрица $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ – нулевая, то уравнения (1.1) совпадают с уравнениями движения консервативных механических систем с циклическими координатами, записанными в переменных Рауса [10], и допускают k циклических интегралов

$$U_1 = p_1 = c_1, \ \ldots, \ U_k = p_k = c_k. \tag{1.3}$$

При этом стационарным значениям интеграла (1.2) при фиксированных значениях интегралов (1.3) отвечают стационарные движения вида

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^0, \quad \dot{\boldsymbol{q}} = 0, \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^0, \tag{1.4}$$

причем постоянные $\boldsymbol{p}^0$ произвольны, а постоянные $\boldsymbol{q}^0$ определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{q}} = 0. \tag{1.5}$$

Стационарные движения (1.4) образуют семейство S_0 размерности, не меньшей числа циклических координат. Для таких ($\mathbf{\Gamma} = 0$) систем теорема Рауса может быть сформулирована следующим образом [10, 11].

Теорема 1. *Если функция W (обычно называемая измененной потенциальной энергией) имеет строгий минимум в точке $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$ при фиксированных значениях интегралов* (1.3)*, то соответствующее стационарное движение* (1.4) *устойчиво.*

Отметим, что условия Теоремы 1 заведомо выполнены, если все собственные значения матрицы $(\partial^2 W/\partial \boldsymbol{q}^2)$ положительны в точке $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$.

В общем случае, при $\mathbf{\Gamma} \neq 0$ система (1.1) также допускает стационарные движения вида (1.4), однако при этом постоянные $\boldsymbol{q}^0$ и $\boldsymbol{p}^0$ определяются из уравнений

$$\frac{DW}{D\boldsymbol{q}} = 0 \quad \left(\frac{D}{D\boldsymbol{q}} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} + \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{T}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\right), \tag{1.6}$$

которые, вообще говоря, не совпадают с уравнениями (1.5). Очевидно, как и в случае $\mathbf{\Gamma} = 0$, стационарные движения (1.4) образуют семейство размерности, не меньшей числа псевдоциклических координат, поскольку m уравнений (1.6) служат для определения $k+m$ неизвестных $\boldsymbol{q}^0$, $\boldsymbol{p}^0$; будем обозначать его по-прежнему через S_0.

Достаточные условия устойчивости таких стационарных движений даёт [1].

Теорема 2. *Если все собственные значения матрицы*

$$\left(\frac{D^2 W}{D\boldsymbol{q}^2}\right) \tag{1.7}$$

положительны в точке $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$ и в некоторой окрестности этой точки справедливы соотношения

$$\frac{D\gamma_{\alpha i}}{Dq_j} = \frac{D\gamma_{\alpha j}}{Dq_i}, \quad (i,\, j = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots, k) \tag{1.8}$$

где $\gamma_{\alpha i} = \gamma_{\alpha i}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ – элементы матрицы $\mathbf{\Gamma}$, $\alpha = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, m$, то стационарное движение (1.4) *системы* (1.1) *устойчиво.*

Доказательство. Для доказательства Теоремы 2 заметим, что при выполнении условий (1.8) система $k \times m$ уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{q}} = \mathbf{\Gamma} \tag{1.9}$$

относительно k неизвестных функций $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q})$ вполне интегрируема в окрестности точки $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$. Следовательно, в окрестности этой точки существует семейство решений системы (1.9) вида

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{c}), \tag{1.10}$$

зависящее от k произвольных постоянных $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_k)^{\mathrm{T}}$, причём соотношения (1.10) разрешимы относительно этих постоянных. Это означает, что кроме интеграла (1.2) система (1.1) допускает k первых интеграла вида

$$U_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = c_1, \ \ldots, \ U_k(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = c_k \tag{1.11}$$

причем по определению этих интегралов имеем

$$U_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{c})) \equiv c_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Далее, если все собственные значения матрицы (1.7), симметричной при условиях (1.8), положительны в точке $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$, то функция $W(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{c}))$ имеет строгий минимум при $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^0$, $\boldsymbol{c} \equiv \boldsymbol{c}^0 \equiv \boldsymbol{U}(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$, $\boldsymbol{U} = (U_1, \ldots U_k)$. Отсюда следует, что функция $W(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ и интеграл (1.2) (так как $K > 0 \ \forall \dot{\boldsymbol{q}} \neq 0$) имеют строгий минимум при фиксированных значениях интегралов (1.11) на невозмущенном движении, и последнее, согласно теореме Рауса [10, 11, 12], является устойчивым. □

Очевидно, что как в случае $\boldsymbol{\Gamma} = 0$ так и в случае $\boldsymbol{\Gamma} \neq 0$ справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если*

$$\left(\frac{D^2 W}{D\boldsymbol{q}^2}\right) < 0$$

в точке $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$*, то стационарное движение* (1.4) *неустойчиво.*

Замечание 1. Применение Теоремы 2 для исследования устойчивости стационарных движений (1.4) системы вида (1.1) связано с исследованием собственных значений матрицы (1.7) и требует знания лишь функции $W(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ и матрицы $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$; явные выражения интегралов (1.11) (а также матриц $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ и $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{p})$) при этом не требуются. Отметим также, что условия стационарности интеграла (1.2) при фиксированных значениях интегралов (1.11) имеют вид (1.6) и также не требуют знания явного вида интегралов (1.11). Более того, уравнения (1.6) определяют установившиеся решения (1.4) системы (1.1) и в случае отсутствия этих интегралов (т.е. при невыполнении условий (1.8)).

Замечание 2. Условия (1.8) заведомо выполнены, если $\boldsymbol{\Gamma} = 0$ (при этом интегралы (1.11) можно выписать в явном виде (1.3)) или если при $\boldsymbol{\Gamma} \neq 0$ мы имеем $\dim \boldsymbol{q} = 1$ (в этом случае интегралы (1.11), вообще говоря, в явном виде выписать невозможно).

Замечание 3. При фиксированных значениях постоянных $\boldsymbol{p}^0$ как уравнения (1.5) так и уравнения (1.6) (относительно $\boldsymbol{q}$) могут иметь не только решение $\boldsymbol{q}^0$, но и, вообще говоря, решения $\boldsymbol{q}^1$, $\boldsymbol{q}^2$, ..., которые также зависят от постоянных $\boldsymbol{p}$, т.е. стационарные движения $\boldsymbol{q}^1(\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{p})$, ... образуют семейства S_1, S_2, ... Таким образом, множество S всех стационарных движений рассматриваемой системы представляет собой объединение семейств S_0, S_1, S_2, ...

Если на рассматриваемую систему действуют (помимо потенциальных) диссипативные силы $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$, отвечающие позиционным координатам $\boldsymbol{q}$, то уравнения движения системы примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) = \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{q}} - \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{p}} + \boldsymbol{Q}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{q}}. \tag{1.12}$$

При этом, согласно определению диссипативных сил

$$\frac{d}{dt}(K + W) = (\boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}) \le 0; \quad \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, 0) \equiv 0$$

и вместо интеграла (1.2) система (1.12) допускает невозрастающую вдоль всех движений системы функцию

$$U_0 \equiv K + W \le c_0.$$

Очевидно, Теоремы 1 и 2 сохраняют справедливость и по отношению к стационарным движениям (1.4) системы (1.12), причем постоянные $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$ в (1.4) по-прежнему удовлетворяют либо уравнениям (1.5) при $\boldsymbol{\Gamma} = 0$, либо уравнениям (1.6) при $\boldsymbol{\Gamma} \ne 0$. Кроме того, если диссипативные силы обладают полной по отношению к обобщенным скоростям позиционных координат диссипацией, т.е. если

$$(\boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}) \ne 0 \; \forall \, \dot{\boldsymbol{q}} \ne 0, \tag{1.13}$$

то справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. *Если стационарное движение* (1.4) *системы* (1.12) *при* $\boldsymbol{\Gamma} = 0$ *доставляет функции* W *строгий минимум и изолировано при фиксированных значениях интегралов* (1.5)*, то оно устойчиво, причем при условии* (1.13) *всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически при* $t \to +\infty$ *стремится к одному из стационарных движений вида* (1.4)*, принадлежащих семейству* S_0*; в частности, если постоянные интегралов* (1.3) *не возмущаются, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Теорема 5. *Если стационарное движение* (1.4) *системы* (1.12) *при* $\boldsymbol{\Gamma} = 0$ *не доставляет функции* W *даже нестрогого минимума и изолировано при постоянных значениях интегралов* (1.3)*, то при условии* (1.13) *оно неустойчиво.*

Отметим, что первое условие Теоремы 4 [Теоремы 5] заведомо выполнено, если все собственные значения матрицы $(\partial^2 W/\partial \boldsymbol{q}^2)$ в точке $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$ положительны [среди собственных значений матрицы $(\partial^2 W/\partial \boldsymbol{q}^2)$ в точке $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$ имеются отрицательные].

Теорема 6. *Если все собственные значения матрицы* (1.7) *положительны в точке* $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$ *и в некоторой окрестности этой точки выполняются соотношения* (1.8)*, то стационарное движение* (1.4) *системы* (1.12) *устойчиво, причем при условии* (1.13) *всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически при* $t \to +\infty$ *стремится к одному из стационарных движений вида* (1.4)*, принадлежащих семейству* S_0*; в частности, если переменные* $\boldsymbol{p}$ *не возмущаются, невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Теорема 7. *Если среди собственных значений матрицы* (1.7) *в точке* $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0)$ *есть отрицательные и в некоторой окрестности этой точки выполняются соотношения* (1.8)*, то при условии* (1.13) *стационарное движение* (1.4) *системы* (1.12) *неустойчиво.*

Доказательства Теорем 4–7 следуют из результатов работ [1, 7, 12]. Применим теперь сформулированные выше теоремы для исследования устойчивости стационарных движений тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости.

2. Стационарные движения тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости

Рассмотрим задачу о качении без скольжения тяжелого твердого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости, предполагая, что центр тяжести тела G лежит на его оси симметрии $G\zeta$. Пусть M – точка касания тела с плоскостью.

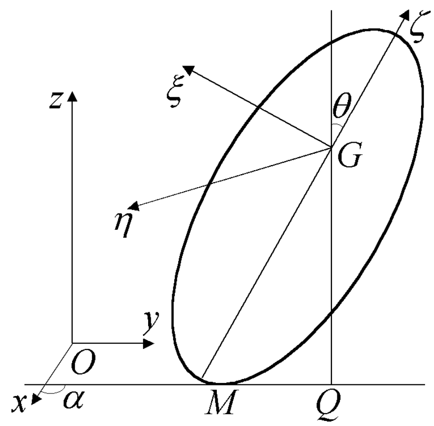

Рис. 1.

Введем неподвижную систему координат $Oxyz$: точка O принадлежит опорной плоскости Oxy, и ось Oz направлена вертикально вверх. Обозначим через θ угол между осью симметрии тела и вертикалью, через β – угол между меридианом $M\zeta$ тела и какой-либо фиксированной меридианной плоскостью, а через α – угол между горизонтальной касательной MQ меридиана $M\zeta$ и осью Ox. Положение тела будет вполне определено углами α, β и θ и координатами x и y точки M.

Введём также систему координат $G\xi\eta\zeta$, подвижную как в теле, так и в абсолютном пространстве, следующим образом: ось $G\zeta$ является осью симметрии тела, ось $G\xi$ все время лежит в плоскости вертикального меридиана $M\zeta$, а ось $G\eta$ перпендикулярна этой плоскости (Рис. 1). Пусть векторы скорости центра масс G, угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела и угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ трехгранника $G\xi\eta\zeta$ задаются в системе координат $G\xi\eta\zeta$ компонентами v_ξ, v_η, v_ζ; ω_ξ, ω_η, ω_ζ и Ω_ξ, Ω_η, Ω_ζ соответственно. Тогда для компоненты ω_η справедливо очевидное соотношение:

$$\omega_\eta = -\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}.$$

Пусть m – масса тела, A_1 – его момент инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, а A_3 – момент инерции относительно оси симметрии.

Заметим, что расстояние GQ от центра тяжести до плоскости Oxy будет функцией угла θ, т.е. $GQ = f(\theta)$ [6]. Координаты ξ, η, ζ точки M касания тела и плоскости в системе координат $G\xi\eta\zeta$ также будут функциями только угла θ, причём $\eta = 0$ и

$$\xi = -f(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta, \quad \zeta = -f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta, \tag{2.1}$$

где $()'$ обозначает производную функции $f(\theta)$ по θ [6]. Таким образом, с помощью функции $f(\theta)$ мы можем полностью охарактеризовать форму движущегося тела. Так как ось $G\zeta$ неподвижна в теле, то $\Omega_\xi = \omega_\xi$, $\Omega_\eta = \omega_\eta = -\dot{\theta}$. Плоскость $G\xi\zeta$ будет всё время вертикальной, поэтому $\Omega_\zeta = \Omega_\xi \operatorname{ctg}\theta$. Поскольку скольжения нет, то

$$v_\xi - \dot{\theta}\zeta = 0, \quad v_\eta + \omega_\zeta\xi - \omega_\xi\zeta = 0, \quad v_\zeta + \dot{\theta}\xi = 0$$

а для трех неизвестных функций времени θ, ω_ξ и ω_ζ мы имеем замкнутую систему уравнений [6]

$$\begin{gathered}
(A_1 + m\xi^2 + m\zeta^2)\,\ddot{\theta} = -mgf'(\theta) - (A_3\omega_\zeta - A_1\omega_\xi \operatorname{ctg}\theta)\,\omega_\xi + \\
+m\omega_\xi\,(\zeta\operatorname{ctg}\theta + \xi)\,(\omega_\xi\zeta - \omega_\zeta\xi) - m\dot{\theta}^2\,(\xi\xi' + \zeta\zeta')\,, \\
\dot{\omega}_\xi = \left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{A_3 m\zeta\,(\xi+\zeta')}{\Delta}\right)\omega_\xi\dot{\theta} + \frac{A_3\,(A_3 + m\xi^2 + m\xi'\zeta)}{\Delta}\omega_\zeta\dot{\theta}, \\
\dot{\omega}_\zeta = \frac{A_1 m\xi\,(\xi+\zeta')}{\Delta}\omega_\xi\dot{\theta} + \frac{m\xi\,(A_3\zeta - A_1\xi')}{\Delta}\omega_\zeta\dot{\theta}, \\
\Delta = A_1A_3 + A_1m\xi^2 + A_3m\zeta^2.
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Если обозначить

$$\omega_\xi = p_1, \quad \omega_\zeta = p_2, \quad K = \frac{1}{2}\left(A_1 + m\xi^2 + m\zeta^2\right)\dot{\theta}^2,$$

$$W = \frac{A_1}{2}p_1^2 + \frac{A_3}{2}p_2^2 + \frac{m}{2}\left(p_1\zeta - p_2\xi\right)^2 + mgf,$$

$$\Gamma_1 = \left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{A_3 m\zeta\left(\xi + \zeta'\right)}{\Delta}\right)p_1 + \frac{A_3\left(A_3 + m\xi^2 + m\xi'\zeta\right)}{\Delta}p_2,$$

$$\Gamma_2 = \frac{A_1 m\xi\left(\xi + \zeta'\right)}{\Delta}p_1 + \frac{m\xi\left(A_3\zeta - A_1\xi'\right)}{\Delta}p_2,$$

то система уравнений (2.2) может быть переписана в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial K}{\partial\theta} - \frac{\partial W}{\partial\theta} - \Gamma_1\frac{\partial W}{\partial p_1} - \Gamma_2\frac{\partial W}{\partial p_2},$$

$$\dot{p}_1 = \Gamma_1\dot{\theta}, \quad \dot{p}_2 = \Gamma_2\dot{\theta}.$$

Таким образом, система уравнений (2.2), описывающая движение тяжелого твердого динамически симметричного тела по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, приводится к виду (1.1). Поскольку в данному случае число позиционных координат равно единице и $\Gamma_1 \neq 0$, $\Gamma_2 \neq 0$, то для системы (2.2) справедлива Теорема 2. Стационарные движения тела вида (1.4)

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad p_1 = p_1^0, \quad p_2 = p_2^0 \tag{2.3}$$

определяются из уравнения

$$\frac{DW}{D\theta} = \frac{\partial W}{\partial\theta} + \Gamma_1\frac{\partial W}{\partial p_1} + \Gamma_2\frac{\partial W}{\partial p_2} = 0 \tag{2.4}$$

или, в явном виде,

$$mgf' + Dp_1p_2 - C\operatorname{ctg}\theta p_1^2 = 0,$$

$$C = A_1 - \frac{m\zeta}{\cos\theta}f, \quad D = A_3 - \frac{m\xi}{\sin\theta}f.$$

и образуют двумерное семейство. Анализ знака выражения

$$\frac{D^2W}{D\theta^2}$$

на стационарном движении (2.3) дает достаточное условие устойчивости этого движения по отношению к переменным θ, $\dot{\theta}$, p_1 и p_2 в виде неравенства

$$mgf'' + \left(Dp_2 - 2Cp_1\operatorname{ctg}\theta\right)\Gamma_1 - C'\operatorname{ctg}\theta p_1^2 + \frac{C}{\sin^2\theta}p_1^2 + D'p_1p_2 + Dp_1\Gamma_2 > 0. \tag{2.5}$$

Можно показать [1], что при строгом нарушении неравенства (2.5) стационарное движение (2.3) неустойчиво.

В соответствии с Теоремой 5 все результаты исследуемой задачи о стационарных движениях динамически симметричного тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости сохраняются при действии диссипативной силы $Q\left(\theta, \dot{\theta}\right)$, отвечающей позиционной координате θ. Если, кроме того, диссипативная сила удовлетворяет условию

$$Q\left(\theta, \dot{\theta}\right)\dot{\theta} < 0, \ \forall\, \dot{\theta} \neq 0$$

то стационарное движение (2.3) при условии (2.5) становится асимптотически устойчивым по отношению к переменным

$$\dot{\theta}, \quad P = m\mathrm{g}f' + Dp_1p_2 - C\operatorname{ctg}\theta p_1^2.$$

3. Стационарные движения диска на абсолютно шероховатой плоскости

Рассмотрим частный случай предыдущего примера, когда динамически симметричное тело, движущееся по неподвижной абсолютно шероховатой плоскости, представляет собой круглый диск [2, 3, 8, 9]. Пусть m – масса диска, a – его радиус, $A_1 = kma^2$ и $A_3 = 2kma^2$ – экваториальный и осевой моменты инерции. В случае однородного диска постоянная $k = 1/4$, а в случае обруча $k = 1/2$. Тогда $GQ = a\sin\theta$ и в соответствии с формулами (2.1) имеем:

$$\xi = -a, \quad \zeta = 0.$$

Система уравнений (2.2) принимает вид

$$\begin{gathered}(k+1)\,a\ddot{\theta} = -\mathrm{g}\cos\theta + ka\omega_\xi^2\operatorname{ctg}\theta - (2k+1)\,a\omega_\xi\omega_\zeta,\\ \dot{\omega}_\xi = \left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\omega_\xi + 2\omega_\zeta\right)\dot{\theta}, \quad \dot{\omega}_\zeta = \frac{\omega_\xi}{(2k+1)}\dot{\theta}.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Если снова обозначить $\omega_\xi = p_1$ и $\omega_\zeta = p_2$, то стационарные движения диска вида (2.3) определяются из уравнения

$$kap_1^2\operatorname{ctg}\theta - (2k+1)\,ap_1p_2 - \mathrm{g}\cos\theta = 0. \tag{3.2}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае система уравнений (3.1) может быть разрешена относительно $\omega_\xi = p_1$ и $\omega_\zeta = p_2$. Соответствующее решение имеет вид:

$$\begin{gathered}p_1 = \sin\theta\left(\mathrm{c}_1F\left(\alpha{+}1, \beta{+}1, 2; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) - \mathrm{c}_2F\left(\alpha{+}1, \beta{+}1, 2; \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right) =\\ = \sin\theta\,(\mathrm{c}_1v_1 - \mathrm{c}_2v_2)\,,\\ p_2 = \mathrm{c}_1F\left(\alpha, \beta, 1; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \mathrm{c}_2F\left(\alpha, \beta, 1; \cos^2\frac{\theta}{2}\right) = \mathrm{c}_1u_1 + \mathrm{c}_2u_2.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь c_1 и c_2 – произвольные постоянные, а $F(\alpha, \beta, 1; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, параметры α и β которой являются корнями квадратного уравнения

$$s^2 - s + \frac{2}{2k+1} = 0.$$

Подставляя выражения (3.3) для p_1 и p_2 в уравнение (3.2) и вводя безразмерные постоянные $x_i = c_i\sqrt{a/g}$, $i = 1, 2$, приведем уравнение (3.2) к безразмерному виду

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j - \cos\theta = 0, \tag{3.4}$$

$$a_{ij} = a_{ji} = \Big((k + 1/2)\Big((-1)^i u_j v_i + (-1)^j u_i v_j\Big) + (-1)^{i+j} k v_i v_j \cos\theta\Big)\sin\theta.$$

В пространстве переменных x_1, x_2 и θ уравнение (3.4) задает некоторую поверхность. Ниже, на Рис. 2-5 представлены сечения этой поверхности плоскостями $x_2 = l x_1$, где l принимает различные значения. Значение параметра k было принято равным $1/4$, что соответствует случаю однородного диска. Отметим, что сечения, аналогичные приведённым на Рис. 2-5, были построены в работе [9].

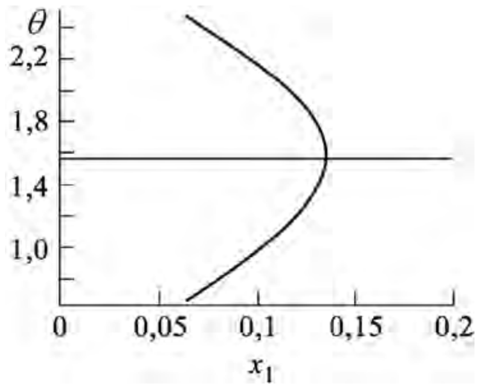

Рис. 2. $x_2 = x_1$.

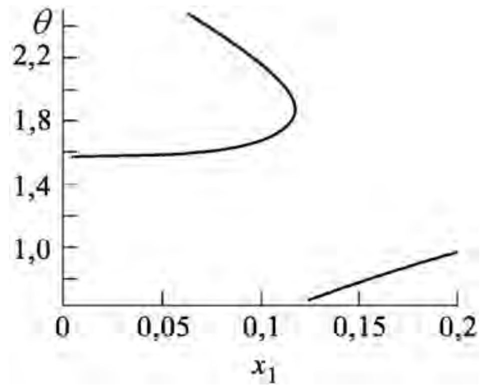

Рис. 3. $x_2 = 0.5x_1$.

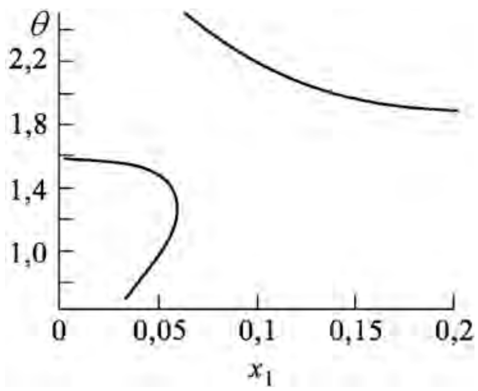

Рис. 4. $x_2 = 2x_1$.

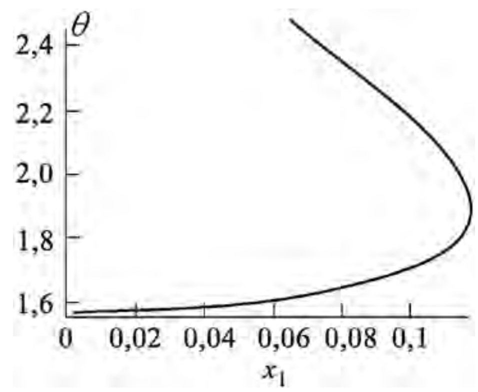

Рис. 5. $x_2 = 0$.

Легко видеть, что при каждом фиксированном θ уравнение (3.4) задает некоторую кривую второго порядка. Анализ инвариантов этой кривой показывает, что при $\theta \neq \pi/2$ она представляет собой гиперболу, а при $\theta = \pi/2$ – пару пересекающихся прямых. Эти прямые определяются уравнениями $x_1 = x_2$ и $x_1 = -x_2$ и соответствуют двум однопараметрическим подсемействам стационарных движений диска вида

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \dot{\theta} = 0,\ p_2 = 2u_* \mathrm{c}_1 = \Omega,\ p_1 = 0;\ u_* = F\left(\alpha, \beta, 1; \frac{1}{2}\right) \tag{3.5}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \dot{\theta} = 0,\ p_1 = 2v_* \mathrm{c}_1 = \omega,\ p_2 = 0;\ v_* = F\left(\alpha+1, \beta+1, 2; \frac{1}{2}\right). \tag{3.6}$$

Эти подсемейства отвечают соответственно равномерному качению вертикально расположенного диска вдоль прямой (3.5) и равномерному верчению диска вокруг вертикально расположенного диаметра (3.6). Стационарное движение (3.5) устойчиво [неустойчиво] при

$$\Omega^2 > \Omega_0^2 = \frac{\mathrm{g}}{2a\,(2k+1)} \quad \left[\Omega^2 < \Omega_0^2\right],$$

а стационарное движение (3.6) устойчиво [неустойчиво] при

$$\omega^2 > \omega_0^2 = \frac{\mathrm{g}}{a\,(k+1)} \quad \left[\omega^2 < \omega_0^2\right]$$

(подробнее см. [8, 9]).

Условие устойчивости (2.5) стационарных движений диска записывается в безразмерной форме следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{2} b_{i\,j} x_i x_j - \sin\theta \geq 0, \tag{3.7}$$

$$b_{i\,j} = b_{j\,i} = 2\,(2k+1)\,u_i u_j + (3k+1/2)\left((-1)^i\,u_j v_i + (-1)^j\,u_i v_j\right)\cos\theta +$$

$$+\,(-1)^{i+j}\left((k+1)\sin^2\theta + 3k\cos^2\theta\right)v_i v_j.$$

При каждом фиксированном θ границей области устойчивости также будет некоторая кривая второго порядка. Анализ ее инвариантов показывает, что при всех $k > 1/\sqrt{3} - 1/2$ данная кривая представляет собой эллипс с центром в точке $x_1 = 0,\ x_2 = 0$. Вне соответствующего эллипса будет область устойчивости стационарных движений(2.3), а внутри – область неустойчивости.

Таким образом, можно указать на следующую геометрическую интерпретацию условий существования и устойчивости стационарных движений диска [2, 3]. Те стационарные движения, которые на плоскости x_1 и x_2 соответствуют точкам гиперболы, лежащим вне эллипса, очевидно, являются устойчивыми (Рис. 6-7). Если для некоторого значения угла $\theta = \theta_0$ соответствующие эллипс и гипербола не пересекаются, то все стационарные движения диска, существующие для данного θ_0 являются устойчивыми, независимо от того, какие значения принимают величины x_1 и x_2 (Рис. 6-7).

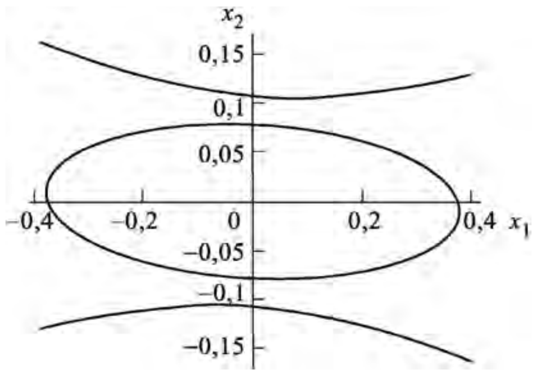

Рис. 6. Гипербола и эллипс при $\theta = \pi/3$.

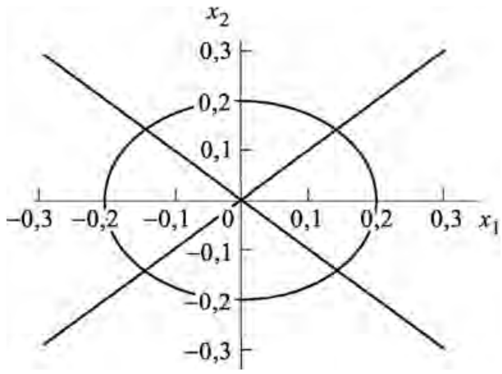

Рис. 7. Гипербола и эллипс при $\theta = \pi/2$.

Условия существования (3.4) и устойчивости (3.7) стационарных движений (2.3) диска детально анализировались в работах [2, 3]. В частности, в указанных работах [2, 3] было показано, что стационарные движения (2.3) диска являются устойчивыми (независимо от значений переменных x_1 и x_2) при всех θ, удовлетворяющих условию

$$\cos^2\theta > \cos^2\theta_* = \frac{2\,(2k+1)\left[4k+3-\sqrt{6\,(2k+1)\,(k+1)}\right]}{(2k+3)^2+3\,(2k+1)^2}.$$

В частности, для однородного диска ($k = 1/4$) имеем

$$\cos^2\theta > \frac{25-9\sqrt{5}}{38} \approx 0.102, \quad \theta_* \approx 1.2457$$

Для обруча ($k = 1/2$) имеем

$$\cos^2\theta > \frac{5-3\sqrt{2}}{7} \approx 0.108, \quad \theta_* \approx 1.2356.$$

При других значениях θ стационарные движения (2.3) диска будут устойчивы, если величина x_1 превосходит по модулю некоторое критическое значение, явный вид которого здесь не приводится вследствие его громоздкости. Результаты, полученные в работах [2, 3], полностью согласуются с приведёнными в работах [8, 9] и в настоящей работе бифуркационными диаграммами.

Список цитируемых источников

1. *Карапетян, А. В.* Об устойчивости стационарных движений систем некоторого вида // Изв. АН СССР. МТТ. — 1983, №2. — С. 45–52.

   Karapetyan, A. V. (1983). Stability of steady motions of systems of a certain type. Mechanics of Solids. 18, 41–47.

2. *Кулешов, А. С.* О стационарных движениях диска на абсолютно шероховатой плоскости // ПММ. — 1999. — Т. 63, Вып. 5. — С. 797–800.

   Kuleshov, A. S. (1999). The steady motions of a disc on an absolutely rough plane. J. Appl. Math. Mech. 63, 751–753.

3. *Кулешов, А. С.* О стационарных качениях диска на шероховатой плоскости // ПММ. — 2001. — Т. 65, Вып. 1. — С. 173–175.

   Kuleshov, A. S. (2001). The steady rolling of a disc on a rough plane // J. Appl. Math. Mech. 65, 171–173.

4. *Миндлин, И. М., Пожарицкий, Г. К.* Об устойчивости стационарных движений тяжёлого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. — 1965. — Т. 29, вып. 4. — С. 742–745.

   Mindlin, I. M., Pozharitskii, G. K. On the stability of steady motions of a heavy body of revolution on an absolutely rough horizontal plane // J. Appl. Math. Mech. — 1965, Vol. 29. — P. 879–883.

5. *Рубановский, В. Н., Степанов, С. Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. — 1969. — Т. 33, Вып. 5. — С. 904–912.

   Rubanovskii, V. N., Stepanov, S. Ja. On the Routh theorem and the Chetaev method for constructing the Liapunov function from the integrals of the equations of motion // J. Appl. Math. Mech. — 1969, Vol. 33. — P. 882–890.

6. *Чаплыгин, С. А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. — 1897. — Т. 9, Вып. 1. — С. 10–16.

   Chaplygin, S. A. On a motion of a heavy body of revolution on a horizontal plane // Regul. Chaotic Dyn. — 2002. — Vol. 7. — P. 119—130.

7. *Karapetyan, A. V.* The Routh theorem and its extensions // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Qualitative Theory of Differential Equations. Vol. 53. Eds. B. Sz-Nagy, L. Hatvani. — Amsterdam: North-Holland, 1990. — P. 271–290.

8. *Karapetyan, A. V., Kuleshov, A. S.* Steady motions of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn. — 2002. — Vol. 7. — P. 81—117.

9. *O'Reilly, O. M.* The dynamics of rolling disks and sliding disks // Nonlinear Dyn. — 1996. — Vol. 10. — P. 287–305.

10. *Routh, E. J.* A treatise on the stability of a given state of motion. — London: MacMillan and Co, 1877.

11. *Salvadori, L.* Un osservazione su di un criterio di stabilita del Routh // Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. — 1953. — Vol. 20. — P. 269–272.

12. *Salvadori, L.* Sulla stabilita del movimento // Matematiche. — 1969. — Vol. 24. — P. 218–239.

Получена 05.03.2017