

УДК 539.3

# О регулярности бесконечных систем для установившихся колебаний изотропных прямоугольных призм

В. Н. Чехов, А. В. Пан

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. E-mail: chekhov40@mail.ru, a-r-s-e-n@inbox.ru

**Аннотация.** Получено новое аналитическое представление решения для установившихся вынужденных колебаний прямоугольной призмы, которое позволяет элементарно оценить регулярность соответствующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений и найти суммы всех бесконечных рядов для напряженного состояния призмы. Предлагается метод вычисления собственных частот призмы посредством оценки регулярности бесконечных систем алгебраических уравнений при последовательном исключении первых неизвестных. В качестве примера вычислены несколько первых собственных частот для призмы с квадратным основанием.

**Ключевые слова:** установившиеся колебания, метод суперпозиции, регулярная бесконечная система линейных алгебраических уравнений, собственные частоты прямоугольной призмы, аналитическое представление решения.

## On regularity of infinite systems for steady-state oscillations of isotropic rectangular prisms

V. N. Chekhov, A. V. Pan

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** A new analytical presentation of the solution for steady-state oscillations of a rectangular prism is found. This analytical presentation allows elementary to evaluate the regularity corresponding infinite system of linear algebraic equations and to find the analytical sums for the all infinite series in the stress state of the prism. A method for calculating the natural frequencies of the prism through the assessment of regularity of infinite systems of algebraic equations at sequential elimination the first unknowns is proposed. As an example the first few natural frequencies for the prism with a square base have been calculated.

**Keywords:** steady-state oscillations, superposition method, regular infinite system of linear algebraic equations, eigenvalues of a prism, analytical solution

**MSC 2010:** 74G10, 74G30, 74G40, 74G45

### 1. Введение

Прямоугольные пластинки и призмы являются одними из наиболее распространенных элементов конструкций в машиностроении и в строительстве. Результаты исследований динамического поведения тонких пластин и прямоугольных

призм представлены в работах [2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 12]. Наиболее полно они исследованы вариационным методом Рэлея - Ритца [9, 12]. Довольно много исследователей применяют разные варианты метода суперпозиции [2, 3, 6, 7, 10, 11], который в классическом варианте, включая задачи статики, приводит к оценкам решений бесконечной системы линейных алгебраических уравнений [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16]. В статике для изгиба прямоугольных пластин удачный вариант метода суперпозиции был предложен С. П. Тимошенко еще в 1939 году [6, 7, 16]. Эффективность его в статике связана [13, 14] с удачной идеей использовать аналитические частные решения, получаемые методом Леви для шарнирно опертой прямоугольной пластины. В большой степени на распространение этого варианта повлияло и существование нулевого предела для решения соответствующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Радующая пользователей «практическая» сходимость метода простой редукции привела к игнорированию теории бесконечных систем уравнений. К этому варианту метода суперпозиции стали относиться как к вариационному методу Рэлея - Ритца, подтверждая его достоверность сравнениями с решениями по методу Рэлея - Ритца. Однако, «практическая» сходимость бесконечных рядов относится только к прогибам пластины. Для подсчета напряжений и поперечных усилий ряды для прогибов необходимо дифференцировать 2-3 раза. И это заметно увеличивает погрешности в величинах напряжений и поперечных усилий. Теория бесконечных систем линейных алгебраических уравнений позволяет исправить уменьшение точности из-за дифференцирования рядов Фурье. Существует другой вариант метода суперпозиции [2, 3, 5, 13], в котором решение бесконечной системы стремится к ненулевой постоянной. Это свойство позволяет достаточно точно оценить предел решения бесконечной системы и аналитически просуммировать все ряды Фурье. Дифференцирование сумм рядов Фурье в отличие от почленного дифференцирования не увеличивает погрешности.

## 2. Постановка задачи об установившихся вынужденных колебаниях призмы

В рамках математической модели плоской деформации задача об установившихся вынужденных колебаниях упругой изотропной прямоугольной призмы приводится к краевой задаче для векторного дифференциального уравнения Навье в области прямоугольника (рис. 1).

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\nu} \text{grad div} \mathbf{u} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\rho$  — плотность материала;  $\mu$  — модуль сдвига;  $\mathbf{u} = \tilde{u}(x, y, t)\mathbf{i} + \tilde{v}(x, y, t)\mathbf{j}$  — вектор смещений;  $\Delta$  — двумерный оператор Лапласа. Безразмерные координаты  $x, y$  связаны с прямоугольными декартовыми координатами:  $x = X/h, y = Y/h$ . Здесь  $2h$  — длина основания призмы, параметры  $a$  и  $b$  — стороны прямоугольного основания ( $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$ ).

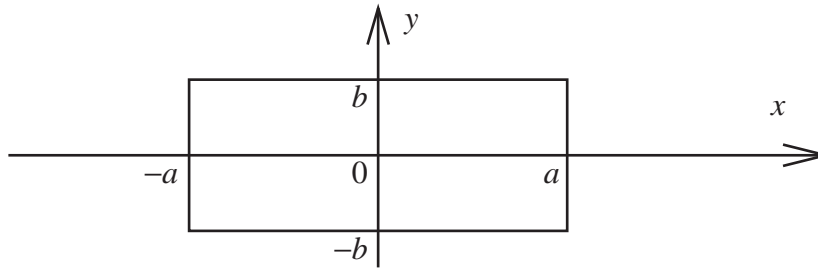


Рис. 1.

Для уменьшения громоздкости выкладок рассмотрим только симметричное относительно двух осей координат деформированное состояние и только нулевые касательные напряжения на границе. Граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx}|_{x=\pm a} &= \mu f(y) \sin \omega t; & \tilde{\sigma}_{xy}|_{x=\pm a} &= 0; \\ \tilde{\sigma}_{yy}|_{x=\pm b} &= \mu f(x) \sin \omega t; & \tilde{\sigma}_{xy}|_{y=\pm b} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

С помощью потенциалов Ламе [9]:

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}; \quad \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \quad (2.3)$$

векторное уравнение (2.1) заменяется двумя волновыми уравнениями

$$\Delta \tilde{\phi} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2}; \quad \Delta \tilde{\psi} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

где  $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ;  $c_1 = c_2 \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}}$  — скорости поперечных и продольных волн. Для установившихся колебаний вводим амплитудные функции потенциалов Ламе:

$$\tilde{\phi} = \phi(x, y) \sin \omega t; \quad \tilde{\psi} = \psi(x, y) \sin \omega t. \quad (2.5)$$

Тогда волновые уравнения (2.4) преобразуются в дифференциальные уравнения Гельмгольца

$$\Delta \phi + \Omega_1^2 \phi = 0; \quad \Delta \psi + \Omega_2^2 \psi = 0, \quad (2.6)$$

где

$$\Omega_2 = \frac{\pi}{2} \Omega; \quad \Omega_1 = \frac{\pi}{2} \Omega \sqrt{\frac{1-2\nu}{2-2\nu}}.$$

$$\text{Здесь } \Omega = \frac{2 \omega h}{\pi c_2} \quad (2.7)$$

безразмерный параметр заданной частоты вынужденных колебаний.

Выражения амплитудных функций напряжений выводятся из закона Гука для плоской деформации:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xy}}{\mu} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2\mu} &= \frac{1}{1 - 2\nu} \Delta \phi; \\ \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\mu} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Граничные условия (2.2) для напряжений преобразуются в граничные условия для амплитудных значений напряжений:

$$\sigma_{xy}|_{x=\pm a} = 0; \quad \sigma_{xy}|_{y=\pm b} = 0. \quad (2.9)$$

$$\sigma_{xx}|_{x=\pm a} = \mu f(y); \quad \sigma_{yy}|_{y=\pm b} = \mu g(x). \quad (2.10)$$

Задача об установившихся колебаниях свелась к краевой задаче (2.6), (2.9), (2.10).

### 3. Аналитическое представление решений и элементарные собственные формы

Ограничиваясь для простоты выкладок чётными как по  $x$ , так и по  $y$  смещениями, выпишем следующее частное решение задачи (2.6), (2.9):

$$\begin{bmatrix} \phi^* \\ \psi^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \Omega_1 y}{\Omega_1 \sin(\Omega_1 b)} - \frac{\cos \Omega_1 x}{\Omega_1 \sin(\Omega_1 a)} \\ \frac{\sin \frac{\Omega_2 x}{\sqrt{2}} \sin \frac{\Omega_2 y}{\sqrt{2}}}{\sin \frac{\Omega_2 a}{\sqrt{2}} \sin \frac{\Omega_2 b}{\sqrt{2}}} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

С помощью разложений в ряды Фурье можно получить следующие тождества в области прямоугольного основания призмы:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} \frac{2}{q_{1n} b \operatorname{ch}(q_{1n} a)} \cos \beta_n y \\ -\frac{\operatorname{sh} q_{2n} x}{\beta_n^2 + q_{2n}^2 b \operatorname{sh}(q_{2n} a)} \sin \beta_n y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{p_{1n} a \operatorname{ch}(p_{1n} b)} \cos \alpha_n x \\ \frac{\operatorname{sh} p_{2n} y}{\alpha_n^2 + p_{2n}^2 a \operatorname{sh}(p_{2n} b)} \sin \alpha_n x \end{bmatrix} \right) \equiv \\ & \equiv \begin{bmatrix} -\phi^* \\ \left\{ \begin{array}{l} \psi^*, \quad |x||y| < ab; \\ 0, \quad |x| = a \text{ и } |y| = b \end{array} \right. \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$  и  $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$ .

Поскольку каждый член ряда в (3.2) является точным решением задачи (2.6), (2.9), общий вид решения задачи (2.6), (2.9) образуем в форме линейных комбинаций этих точных решений с неопределенными множителями  $x_n, y_n$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} &= y_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1 a} \frac{\cos \Omega_1 y}{\sin(\Omega_1 b)} \\ 0 \end{bmatrix} - x_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1 b} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin(\Omega_1 a)} \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \begin{bmatrix} \frac{2}{q_{1n} b} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{2n} x} \frac{\cos \beta_n y}{4\beta_n} \\ -\frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{\beta_n} \frac{b \operatorname{sh}(q_{2n} a)}{\operatorname{sh} q_{2n} x} \sin \beta_n y \end{bmatrix} - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \begin{bmatrix} \frac{2}{p_{1n} a} \frac{\operatorname{ch}(p_{1n} b)}{\operatorname{sh} p_{2n} y} \frac{\cos \alpha_n x}{4\alpha_n} \\ \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{\alpha_n} \frac{a \operatorname{sh}(p_{2n} b)}{\operatorname{sh} p_{2n} y} \sin \alpha_n x \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $p_{ln}^2 = \alpha_n^2 - \Omega_l^2, q_{ln}^2 = \beta_n^2 - \Omega_l^2$  ( $l = 1, 2$ ). Из-за тождества (3.2) представление решения (3.3) в частном случае равенства всех неопределенных коэффициентов единице ( $x_n = y_n = 1$ ) принимает внутри прямоугольной области элементарный вид:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi^* \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Согласно зависимостям (2.8), частному решению (3.1) отвечают амплитуды напряжений:

$$\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = \mu \Omega_2^2 \frac{\cos(\Omega_2 x / \sqrt{2}) \cos(\Omega_2 y / \sqrt{2})}{\sin \frac{\Omega_2 a}{\sqrt{2}} \sin \frac{\Omega_2 b}{\sqrt{2}}}; \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (3.5)$$

Полагая граничные (при  $x = a$  и при  $y = b$ ) значения напряжений (3.5) нулевыми, получаем, что это возможно только для дискретных значений параметра  $\Omega$  и отношения сторон основания призмы:

$$\Omega = (2m - 1)\sqrt{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots); \quad \frac{b}{a} = \frac{2k - 1}{2m - 1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.6)$$

*Пример 1.* Для призмы с квадратным ( $a = b$ ) основанием из (3.6) следует  $k = m$ , и счетное множество собственных частот  $\Omega$ :

$$\{ \sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, \dots \}. \quad (3.7)$$

Этот спектр не исчерпывает весь спектр симметричных относительно осей координат (рис. 1) собственных колебаний призмы, но, тем не менее, достаточно широк и называется [2] модами Ламе. Интересно, что моды Ламе не зависят от коэффициента Пуассона  $\nu$ .

#### 4. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений

Выражения для напряжений получаем, подставляя выражения (3.3) в зависимости (2.8).

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xy}}{\mu} = & 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_n \beta_n}{b} \left( \frac{\operatorname{sh} q_{2n} x}{\operatorname{sh}(q_{2n} a)} - \frac{\operatorname{sh} q_{1n} x}{\operatorname{sh}(q_{1n} a)} \right) \sin \beta_n y + \\ & + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y_n \alpha_n}{a} \left( \frac{\operatorname{sh} p_{1n} y}{\operatorname{sh}(p_{1n} b)} - \frac{\operatorname{sh} p_{2n} y}{\operatorname{sh}(p_{2n} b)} \right) \sin \alpha_n x \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}}{\mu} = & x_0 \frac{\Omega_1}{b} \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin(\Omega_1 a)} - y_0 \frac{\Omega_1}{a} \frac{2\nu}{1 - 2\nu} \frac{\cos \Omega_1 y}{\sin(\Omega_1 b)} + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left( \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{q_{1n} b} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh}(q_{1n} a)} - \frac{4\beta_n^2 q_{2n}}{\beta_n^2 + q_{2n}^2} \frac{\operatorname{ch} q_{2n} x}{\operatorname{bsh}(q_{2n} a)} \right) \cos \beta_n y + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \left( \left( \alpha_n^2 + p_{2n}^2 + \frac{\Omega_2^2}{1 - \nu} \right) \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{p_{1n} \operatorname{ash}(p_{1n} b)} - \frac{4\alpha_n^2 p_{2n}}{\alpha_n^2 + p_{2n}^2} \frac{\operatorname{ch} p_{2n} y}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} \right) \cos \alpha_n x \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{yy}}{\mu} = & x_0 \frac{\Omega_1}{1 - 2\nu} \frac{2\nu}{b} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin(\Omega_1 a)} - y_0 \frac{\Omega_1}{a} \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin(\Omega_1 b)} + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left( \frac{4\beta_n^2 q_{2n}}{\beta_n^2 + q_{2n}^2} \frac{\operatorname{ch} q_{2n} x}{\operatorname{bsh}(p_{2n} a)} - \left( \beta_n^2 + q_{2n}^2 + \frac{\Omega_2^2}{1 - \nu} \right) \frac{\operatorname{ch} q_{1n} y}{q_{1n} \operatorname{bsh}(q_{1n} a)} \right) \cos \beta_n y + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \left( \frac{4\alpha_n^2 p_{2n}}{\alpha_n^2 + p_{2n}^2} \frac{\operatorname{ch} p_{2n} y}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} - \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{p_{1n} a} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{sh}(p_{1n} b)} \right) \cos \alpha_n x \end{aligned} \quad (4.3)$$

Представление для касательных напряжений (4.1) тождественно обращается в нуль на гранях призмы. А подстановка в граничные условия (2.2) выражений для нормальных напряжений (4.2) и (4.3) после известной процедуры [2] метода суперпозиции приводит к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов  $x_k, y_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} x_k \delta_k^x = & \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn}^x y_n + \frac{b}{2} f_k \begin{cases} 1 - 2\nu, & k = 0 \\ -q_{1k}, & k \geq 1, \end{cases} ; \\ y_k \delta_k^y = & \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn}^y x_n - \frac{a}{2} g_k \begin{cases} 1 - 2\nu, & k = 0 \\ -p_{1k}, & k \geq 1, \end{cases} ; \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь

$$\delta_k^x = \begin{cases} \frac{(1 - \nu)\Omega_1 a}{\operatorname{tg}(\Omega_1 a)}, & k = 0 \\ \frac{4\beta_k^2 q_{1k} q_{2k}}{(\beta_k^2 + q_{2k}^2) \operatorname{th}(q_{2k} a)} - \frac{\beta_k^2 + q_{2k}^2}{\operatorname{th}(q_{1k} a)}, & k \geq 1, \end{cases}$$

$$\delta_k^y = \begin{cases} \frac{(1-\nu)\Omega_1 b}{\operatorname{tg}(\Omega_1 b)}, & k=0 \\ \frac{4\alpha_k^2 p_{1k} p_{2k}}{(\alpha_k^2 + p_{2k}^2) \operatorname{th}(p_{2k} b)} - \frac{\alpha_k^2 + p_{2k}^2}{\operatorname{th}(p_{1k} b)}, & k \geq 1, \end{cases}$$

$$A_{kn}^x = \begin{cases} \begin{cases} \nu, & n=0 \\ \frac{1}{(\alpha_n^2 + p_{2n}^2) p_{1n}^2}, & n \geq 1, \end{cases} & k=0 \\ \frac{1}{1-\nu} \Omega_2^2 \begin{cases} \frac{q_{1k} a}{q_{1k}}, & n=0 \\ \frac{4\alpha_n^2 \beta_k^2 - 2\nu \Omega_2^2 (\alpha_n^2 + q_{2k}^2)}{a (\alpha_n^2 + p_{2n}^2) (\beta_n^2 + p_{1n}^2) (\beta_n^2 + p_{2n}^2)}, & n \geq 1 \end{cases}, & k \geq 1, \end{cases} \quad (4.5)$$

$$A_{kn}^y = \begin{cases} \begin{cases} \nu, & n=0 \\ \frac{1}{(\beta_n^2 + q_{2n}^2) q_{1n}^2}, & n \geq 1, \end{cases} & k=0 \\ \frac{1}{1-\nu} \Omega_2^2 \begin{cases} \frac{p_{1k} b}{p_{1k}}, & n=0 \\ \frac{4\beta_n^2 \alpha_k^2 - 2\nu \Omega_2^2 (\beta_n^2 + p_{2k}^2)}{b (\beta_n^2 + q_{2n}^2) (\alpha_n^2 + q_{1n}^2) (\alpha_n^2 + q_{2n}^2)}, & n \geq 1 \end{cases}, & k \geq 1, \end{cases}$$

свободные члены связаны с коэффициентами в рядах Фурье для граничных значений нормальных напряжений в условиях (1.10):

$$f(y) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k \cos(\beta_k y); \quad g(y) = g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k \cos(\alpha_k x). \quad (4.6)$$

Например, в случае амплитуд элементарного напряженного состояния (3.5) граничные значения напряжений на краях  $x = a$  и  $y = b$  прямоугольной области получаются с помощью известного разложения и приводят к следующим коэффициентам в рядах Фурье:

$$f_k = \frac{\Omega_2 \sqrt{2}}{b \operatorname{tg} \frac{a \Omega_2}{\sqrt{2}}} \begin{cases} 1, & k=0, \\ \frac{-\Omega_2^2}{\beta_k^2 - \frac{\Omega_2^2}{2}}, & k \geq 1; \end{cases} \quad g_k = -\frac{\Omega_2 \sqrt{2}}{a \operatorname{tg} \frac{b \Omega_2}{\sqrt{2}}} \begin{cases} 1, & k=0, \\ \frac{-\Omega_2^2}{\beta_k^2 - \frac{\Omega_2^2}{2}}, & k \geq 1. \end{cases} \quad (4.7)$$

### 5. Формулы для оценки регулярности бесконечной системы (4.4)

Для исследования регулярности бесконечной системы линейных алгебраических уравнений необходимо [4] вычислить суммы из абсолютных величин элементов матрицы для каждого уравнения системы. (Предварительно каждое из уравнений необходимо разделить на коэффициент при неизвестной в левой части этого уравнения). В этом отношении бесконечная система (4.4) удачно отличается тем свойством, что для нее почти автоматически получаются аналитические суммы для бесконечных рядов из коэффициентов матрицы во всех уравнениях.

Действительно, специальные свободные члены системы (4.4), которые получаются с помощью коэффициентов (4.7), соответствуют единичным значениям всех неизвестных ( $x_n = y_n = 1$ ). Иными словами бесконечная система (4.4) имеет точное решение  $x_n = y_n = 1$  при подстановке коэффициентов (4.7) в ее свободные члены. При этом бесконечные ряды в правых частях каждого из уравнений системы представляют собой ряды из элементов матрицы бесконечной системы. Они обретают аналитические значения своих сумм посредством вычитания известных свободных членов из единицы в левой части каждого из уравнений. Для строк системы (4.4) выражения бесконечных рядов и значения сумм этих бесконечных рядов получаются в следующем виде:

$$1 - \frac{1}{\delta_k^x} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn}^x = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{\Omega_2 a}{\sqrt{2}}} \begin{cases} \frac{\Omega_1 \operatorname{tg}(\Omega_1 a)}{\Omega_2}, & k = 0 \\ \frac{q_{1k} \Omega_2^3}{(\beta_k^2 + q_{2k}^2) \delta_k^x}, & k \geq 1, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$1 - \frac{1}{\delta_k^y} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn}^y = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{\Omega_2 b}{\sqrt{2}}} \begin{cases} \frac{\Omega_1 \operatorname{tg}(\Omega_1 b)}{\Omega_2}, & k = 0 \\ \frac{p_{1k} \Omega_2^3}{(\beta_k^2 + p_{2k}^2) \delta_k^y}, & k \geq 1. \end{cases}$$

Можно увидеть, что при значениях параметра  $\Omega \leq \sqrt{2}$  все слагаемые в бесконечных рядах (5.1) являются положительными. Поэтому суммы этих рядов тоже положительны, и правые части формул (5.1) — положительные числа меньше единицы. Следовательно, коэффициенты всех уравнений бесконечной системы (4.4) положительны и удовлетворяют условиям регулярности. С увеличением параметра частоты  $\Omega$  в формулах (5.1) появляются отрицательные коэффициенты и комплексные числа. Соответственно нарушается регулярность бесконечной системы (4.4).

## 6. Анализ регулярности бесконечной системы (4.4)

При  $a = b = 1$  на интервале  $0 < \Omega < \Omega_{\text{poz}}$ , где  $\Omega_{\text{poz}} \geq \sqrt{2}$ , все коэффициенты (4.5) оказываются положительными, поэтому для вычисления суммы абсолютных величин коэффициентов (6.8) можно обойтись выражениями (5.1). Попробуем вычленив из интервала  $0 < \Omega < \Omega_{\text{poz}}$  интервал  $0 < \Omega < \Omega_{\text{reg}}$ , на котором суммы (5.1) меньше единицы. В процессе исследования правых частей выражений (5.1) выявились два факта:

**Утверждение 1.** При любом  $k$  правая часть выражений (5.1) монотонно возрастает в зависимости от  $\Omega$ .

**Утверждение 2.** При любом  $k$  правая часть выражений (5.1) равна единице при  $\Omega = \sqrt{2}$ .



Таким образом,  $\Omega_{reg} = \sqrt{2}$ .

### 6.1. Решение системы (4.4) при частотах $\Omega$ , превышающих границу регулярности

К системе (4.4) при частоте  $\Omega > \Omega_{reg}$  может применяться способ исключения  $q$  пар первых неизвестных  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^q$ , описанный в [4] на стр. 52. Ради компактности, запишем бесконечную систему (4.4) в непарном виде:

$$X_k = \sum_{n=1}^{\infty} M_{kn} X_n + B_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.1)$$

Способ заключается в сведении системы (6.1) к последовательности  $2q + 1$  бесконечных систем: для каждого  $j = \overline{0, 2q}$  записываем бесконечную систему относительно неизвестных  $\{X_k^j\}_{k=2q+1}^{\infty}$

$$X_k^j = \sum_{n=2q+1}^{\infty} M_{kn} X_n^j + M_k^j \quad (k = 2q + 1, 2q + 2, \dots), \quad (6.2)$$

где через  $\{M_k^0\}_{k=1}^{\infty}$  обозначена правая часть  $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$  (легко видеть, что последовательность систем (6.2) представляет из себя одну матричную бесконечную систему с  $2q + 1$  столбцами свободных членов). После решения систем (6.2) находятся коэффициенты  $\{X_k^j\}_{k=2q+1}^{\infty}$  по формуле

$$\forall k \geq 2q + 1 : X_k = \sum_{j=1}^{2q} X_k^j X_j + X_k^0. \quad (6.3)$$

Затем решается одна конечная система порядка  $2q$  относительно  $\{X_k\}_{k=1}^{2q}$

$$X_k = \sum_{n=1}^{2q} M_{kn} X_n + \sum_{n=2q+1}^{\infty} M_{kn} X_n + B_k \quad (k = \overline{1, 2q}). \quad (6.4)$$

Условие регулярности каждой из бесконечных систем (6.2) заключается в выполнении неравенств:

$$\forall k \geq 2q + 1 : \sum_{n=2q+1}^{\infty} |M_{kn}| < 1, \quad (6.5)$$

достижимых и при отсутствии регулярности исходной системы (6.1), если подобрать достаточно большой параметр  $q$ . На интервалах параметра частоты  $\Omega$ , где все коэффициенты «усечённой» системы (6.2) имеют один и тот же знак, для проверки выполнения неравенств (6.5) можно задействовать формулы (5.1) так же, как и для исходной системы (6.1).

Заметим, что в матрице системы (6.2) по сравнению с матрицей системы (6.1) опущены не только первые  $2q$  строк, но и первые  $2q$  столбцов. Т. е., для применения только что приведённого способа не требуется квазирегулярности. Из утверждения 1 следует, что при  $\Omega > \Omega_{reg}$  квазирегулярность системы (6.7) отсутствует. Посмотрим, окажется ли действенным вышеприведённый способ при отсутствии квазирегулярности.

### 6.2. Анализ системы (4.4) при $\nu = 0$

Если коэффициент Пуассона равен нулю, то  $x_0$  и  $y_0$  находятся точно:

$$x_0 = f_0 \frac{btg(\Omega_1 a)}{2\Omega_1}, \quad y_0 = -g_0 \frac{btg(\Omega_1 b)}{2\Omega_1} \quad (6.6)$$

Остальные неизвестные определяются из парной бесконечной системы

$$\begin{cases} x_k \delta_k = \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} y_n - \frac{b}{2} f_k q_{1k}; \\ y_k \delta_k = \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} x_n + \frac{a}{2} g_k p_{1k} \end{cases} \quad (6.7)$$

( $k = 1, 2, \dots$ ) с матрицей

$$A_{kn} = \Omega_2^2 \frac{q_{1k}}{a} \frac{4\alpha_n^2 \beta_k^2}{(\alpha_n^2 + p_{2n}^2)(\beta_n^2 + p_{1n}^2)(\beta_n^2 + p_{2n}^2)} \quad (6.8)$$

Вычисленные для системы (6.7) пределы интервалов представим в таблице:

Таблица 1.

$q$	0	1	2	3	4
$\Omega_{poz}$	1,900	3,507	5,244	6,922	8,740
$\Omega_{reg}$	$\sqrt{2}$	3,003	4,638	6,268	7,896

### 6.3. Анализ системы (4.4) при $\nu \neq 0$

В табл. 2 представлены вычисленные таким же способом верхние пределы интервалов положительности и регулярности для системы (4.4). Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,248$  взят, согласно [3, 15], соответствующим титанату бария.

Таблица 2.

$q$	0	1	2	3	4	5
$\Omega_{poz}$	1,725	1,99	3,6	5,5	8,4	9,1
$\Omega_{reg}$	$\sqrt{2}$	1,562	3,259	5,007	6,753	8,495

## 7. Существование предела решения бесконечной системы и суммирование рядов в представлении решения

В работе Б.М. Кояловича [5] для парной регулярной бесконечной системы с положительными коэффициентами и с неотрицательными свободными членами получены достаточные условия существования конечного предела решения при неограниченном увеличении номеров неизвестных. Краткий обзор этих результатов имеется в [2] на стр. 18–21. Достаточные условия относятся только к элементам матрицы. Поэтому существование точного единичного решения у бесконечной системы (4.4) при специальных свободных членах (4.7) свидетельствует о том, что решение системы (4.4) также обладает ненулевым пределом при больших номерах неизвестных:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = G \quad (7.1)$$

Начиная с номера  $n = p + 1$ , полагаем  $x_n = y_n = G$ . Следовательно:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} &\approx y_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1 a} \frac{\cos \Omega_1 y}{\sin(\Omega_1 b)} \\ 0 \end{bmatrix} - x_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1 b} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin(\Omega_1 a)} \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{n=1}^p (-1)^n x_n \begin{bmatrix} \frac{2}{4\beta_n} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{2n} x} \frac{\cos \beta_n y}{\operatorname{bsh}(q_{2n} a)} \\ -\frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{\operatorname{bsh}(q_{2n} a)} \sin \beta_n y \end{bmatrix} - \\ &- \sum_{n=1}^p (-1)^n y_n \begin{bmatrix} \frac{2}{4\alpha_n} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} y} \frac{\cos \alpha_n x}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} \\ \frac{p_{1n} a}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} \sin \alpha_n x \end{bmatrix} + \\ &+ G \left( \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^n \begin{bmatrix} \frac{2}{4\beta_n} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{2n} x} \frac{\cos \beta_n y}{\operatorname{bsh}(q_{2n} a)} \\ -\frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{\operatorname{bsh}(q_{2n} a)} \sin \beta_n y \end{bmatrix} - \right. \\ &\left. - \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^n \begin{bmatrix} \frac{2}{4\alpha_n} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} y} \frac{\cos \alpha_n x}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} \\ \frac{p_{1n} a}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} \sin \alpha_n x \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (7.2)$$

С учетом тождества (3.2) это выражение преобразуем к следующей форме:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \phi \\ \psi \end{Bmatrix} &\approx (y_0 - G) \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1 a} \frac{\cos \Omega_1 y}{\sin(\Omega_1 b)} \\ 0 \end{bmatrix} - (x_0 - G) \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1 b} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin(\Omega_1 a)} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&+ \sum_{n=1}^p (-1)^n (x_n - G) \begin{bmatrix} \frac{2}{q_{1n} b} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{ch}(q_{1n} a)} \cos \beta_n y \\ -\frac{4\beta_n}{\beta_n^2 + q_{2n}^2} \frac{\operatorname{sh} q_{2n} x}{\operatorname{bsh}(q_{2n} a)} \sin \beta_n y \end{bmatrix} - \\
&- \sum_{n=1}^p (-1)^n (y_n - G) \begin{bmatrix} \frac{2}{p_{1n} a} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{ch}(p_{1n} b)} \cos \alpha_n x \\ \frac{4\alpha_n}{\alpha_n^2 + p_{2n}^2} \frac{\operatorname{sh} p_{2n} y}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} \sin \alpha_n x \end{bmatrix} + \\
&+ G \begin{bmatrix} 0 \\ \psi^* \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Погрешность приближенной формы (7.3) можно уменьшать, увеличивая параметр  $p$ .

## 8. Метод улучшенной редукции для численных оценок решений бесконечных систем

Метод улучшенной редукции был предложен Гринченко В.Т. [2, 3] на основании анализа особенностей нормальных напряжений в угловой точке ( $x = a$ ,  $y = b$ ) призмы и на существовании ненулевого предела (7.1) решения регулярной бесконечной системы (4.4). Решение бесконечной системы (4.4), записанной в краткой форме (6.1), выразим через решения двух вспомогательных конечных систем порядка  $p$ . Для этого, предполагая, что при  $k \geq p+1$  все неизвестные не отличаются от предела  $G$ , подставим в первые  $p$  уравнения бесконечной системы (6.1) следующие выражения:

$$X_k = \begin{cases} \hat{X}_k + \check{X}_k G, & k = \overline{1, p} \\ G, & k \geq p+1 \end{cases} \tag{8.1}$$

Собирая коэффициенты при  $G$  и оставшиеся слагаемые, получаем из системы (6.1) две конечные вспомогательные системы:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_k &= \sum_{n=1}^p M_{kn} \hat{X}_n + B_k \quad (k = \overline{1, p}), \\
\check{X}_k &= \sum_{n=1}^p M_{kn} \check{X}_n + \check{B}_k \quad (k = \overline{1, p}),
\end{aligned} \tag{8.2}$$

где  $\check{B}_k = \sum_{n=p+1}^{\infty} M_{kn} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{kn} - \sum_{n=1}^p M_{kn}$  ( $k = \overline{1, p}$ ). Приближённое значение предела  $G$  определится из дополнительного условия, следующего из равенства нормальных напряжений в угловой точке ( $x = a$ ,  $y = b$ ) согласно граничным условиям (2.2):

$$\frac{1}{\mu} \sigma_{xx}(a, b) - \frac{1}{\mu} \sigma_{yy}(a, b) = f(b) - g(a). \tag{8.3}$$

Для реализации условия (8.3) возвращаемся от краткой формы решения (6.1) к решению соответствующих парных вспомогательных систем для бесконечной системы (4.4):

$$x_k = \hat{x}_k + \check{x}_k G, \quad y_k = \hat{y}_k + \check{y}_k G \quad (k = \overline{0, p}) \quad (8.4)$$

Подставляя эти выражения в формулы (4.2), (4.3) для нормальных напряжений, после вычисления значений нормальных напряжений в угловой точке и подстановки получившихся выражений в условие (8.3) приходим к линейному относительно  $G$  уравнению, решение которого не выписываем из-за громоздкости. Найденная таким способом формула для предельного значения  $G$  решения бесконечной системы (4.4) отличается очень быстрой сходимостью. Вычисленное при  $p = 10$  значение  $G$  практически не изменяется при дальнейшем увеличении порядка конечных вспомогательных систем. Важным этапом обоснования метода исследования установившихся вынужденных колебаниях прямоугольной призмы является определение собственных частот призмы. Пока заданная частота внешних нормальных напряжений не совпадает с одной из собственных частот, гарантировано существование ограниченного решения регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений и сходимость рядов Фурье для перемещений и напряжений. В случае призмы с квадратным основанием одной из элементарных собственных форм колебаний является частота  $\Omega = \sqrt{2}$ . Поскольку эта частота совпадает с границей регулярности бесконечной системы, она является минимальной собственной частотой. После исключения нескольких первых неизвестных источником собственных частот являются нули определителя системы линейных уравнений (6.4), из которой вычисляются исключенные неизвестные после оценок решения регулярной бесконечной системы (6.1). На основании представленных в табл. 2. границ интервалов положительности коэффициентов и регулярности бесконечных систем вычислены приближенно первые 8 собственных частот для квадратной призмы из титаната бария (в постановке плоской деформации) как нули определителя системы (6.4). Они представлены в табл. 3.

Таблица 3.

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	$\Omega_7$	$\Omega_8$
1,414	1,625	1,909	2,731	3,269	4,034	4,243	5,053

Можно видеть, что частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_7$  совпали с двумя элементарными собственными частотами ( $\sqrt{2} \approx 1,414$ ;  $3\sqrt{2} \approx 4,243$ ).

## 9. Обсуждение полученных результатов

Построено новое аналитическое представление решения для установившихся гармонических колебаний прямоугольной призмы в постановке плоской деформации. Методом суперпозиции выведена бесконечная система линейных алгебраических уравнений, которая при специальных значениях свободных членов имеет точное решение  $x_n = y_n = 1$ . Подстановка этих специальных свободных членов и отвечающего им единичного решения превращает все уравнения бесконечной системы в тождества, из которых элементарно находятся аналитические выражения для сумм коэффициентов каждой строки матрицы бесконечной системы. Суммы коэффициентов при дополнительном условии неотрицательности всех коэффициентов матрицы позволяют элементарно оценить регулярность бесконечной системы и воспользоваться теоремами о существовании ограниченного решения регулярной бесконечной системы. Для призмы с квадратным основанием посредством вычисления коэффициентов бесконечной системы при заданной частоте колебаний найдены наименьшие значения частоты колебаний, при которых коэффициенты бесконечной системы перестают быть положительными. В интервале положительности коэффициентов системы наименьшей собственной частотой для призмы с квадратным основанием оказалась частота  $\Omega = \sqrt{2}$ . На этой частоте все уравнения бесконечной системы (4.4) перестают (если  $\mu = 1$ ) удовлетворять условиям регулярности. Поэтому система (4.4) не является квазирегулярной. Поскольку в квазирегулярных бесконечных системах «условие регулярности выполнено во всех строках, начиная с некоторой» [4, стр. 52]. По формулам (5.1) для сумм коэффициентов в строках матрицы можно заметить, что интервал регулярности можно распространить на большие частоты колебаний, если исключить несколько первых неизвестных в каждом уравнении. Исключать удобно с помощью такого же количества первых уравнений, как это сделано в [4, стр. 52] при исследовании квазирегулярных бесконечных систем. Здесь этот способ исключения неизвестных отражён в формулах (6.1) — (6.4). А в таб. 1. и таб. 2. представлены в зависимости от количества исключённых неизвестных интервалы частот колебаний призмы, на которых выполнены условия положительности коэффициентов и условия регулярности всех оставшихся уравнений. Следует заметить, что в таб. 1. и таб. 2. интервалы положительности коэффициентов шире, чем интервалы регулярности, то есть для оценки регулярности можно и после исключения неизвестных пользоваться формулами (5.1). При этом собственные частоты находятся среди нулей определителя конечной системы (6.4) относительно исключённых неизвестных. Ещё одно преимущество нового представления решения заключается в том, что бесконечная система (4.4) имеет точное единичное решение при специальных значениях свободных членов. Это свидетельствует о свойстве решений бесконечной системы (4.4) иметь ненулевой предел при неограниченном увеличении номеров неизвестных. Использование существования ненулевого предела для суммирования всех бесконечных рядов в представлении решения представлено в пунктах 7 и 8. Отметим, что суммирование бесконечных рядов для прогибов закреплённой

прямоугольной пластины позволило авторам [8] правильно отобразить закон распределения поперечных усилий без привлечения интегрального преобразования Меллина [14].

### Список цитируемых источников

1. *Бондаренко П. С.* К вопросу о единственности для бесконечных систем линейных уравнений // Матем. сборник. — 1951. — Т. 29, №2. — С. 403–418.  
Bondarenko P. S. (1951). On uniqueness for infinite systems of linear equations. Mat. Sb. 29, No.2, 403–418. (in Russian)
2. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — К.: Наук. думка, 1978. — 264 с.  
Grinchenko V. T. (1978). Equilibrium and steady-state oscillations of elastic bodies of finite dimensions. Kyev: Naukova Dumka. (in Russian)
3. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. — К.: Наук. думка, 1981. — 284 с.  
Grinchenko V. T., Meleshko V. V. (1981). Harmonic vibrations and waves in elastic bodies. Kyev: Naukova Dumka. (in Russian)
4. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. — М. -Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.  
Kantorovich L. V., Krylov V. I. (1958). Approximate methods of higher analysis. Groningen: Noordhoff.
5. *Коялович В. М.* Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. физ.-матем. ин-та им. В.А. Стеклова. — Год. — №3. — С. 41–167.  
Koialovich, V.M. (1930). Studies on infinite systems of linear algebraic equations. Izv. fiz.-mat. Inst. Im. V.A. Steklova. 3, 41-167. (in Russian)
6. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1966. — 636 с.  
Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. (1959). Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill.
7. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.  
Timoshenko, S. P., Young, D. H., Weaver, W. (1974). Vibration problems in engineering. 4th ed. New York: Wiley.
8. *Чехов В. Н., Пан А. В.* Об улучшении сходимости рядов для бигармонической задачи в прямоугольнике // Динамические системы. — 2008. — вып.25. — С. 135–144.  
Chekhov, V. N., Pan, A. V. (2008). On acceleration of convergence of the series for a biharmonic problem in a rectangle. Dinamicheskie sistemy 25, 135-144. (in Russian)
9. *Eringen A. C., Suhubi E. S.* Elastodynamics, Vol. 2. Linear Theory. — New York-London: Academic Press, Inc., 1975. — 343–1003 pp.
10. *Gorman D. J.* Free vibration analysis of rectangular plates. — Elsevier, North Holland-New York: Inc., 1982. — 324 pp.

11. *Gorman D. J., Yu S. D* A review of the superposition method for computing free vibration eigenvalues of elastic structures // *Computers and Structures*. — 2012. — No.104–105. — P. 27–37.
12. *Leissa A. W.* Vibration of plates. — NASA SP, 1969. — 160-353 pp.
13. *Meleshko V. V., Gomilko A. M.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // *Proc. Roy. London*. — 1997. — A453. — P. 2139–2160.
14. *Meleshko V. V., Gomilko A. M., Gourjii A. A.* Normal reactions in a clamped elastic rectangular plate // *J. Engng Math*. — 2001. — 40, No.1. — 19–24 pp.
15. *Onoe M., Pao Y. H.* Edge mode of thin rectangular plate of barium titanate // *J. Acoust. Soc. Amer.* — 1961. — 33, No.11. — P. 16–28.
16. *Timoshenko S. P.* Bending of rectangular plates with clamped edges // In: *Proc. Fifth Intern. Congress for Applied Mechanics*. Wiley, New York. — 1939. — С. 40–43.

Получена 11.04.2016



УДК 517.957

# Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности

А. А. Корнута

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. E-mail: korm\_57@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается параболическое функционально-дифференциальное уравнение на окружности с преобразованием поворота пространственной переменной. Используя метод центральных многообразий, доказывается теорема о существовании стационарных пространственно неоднородных решений, бифурцирующих из пространственно однородного решения при изменении бифуркационного параметра. Теорема носит локальный характер. А также исследуется асимптотическая форма указанных решений при отходе параметра от бифуркационного значения.

**Ключевые слова:** бифуркация, стационарные структуры, метод центральных многообразий

## Stationary structures in a parabolic problem with a rotation transformation on a circle

A. A. Kornuta

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** We considered a parabolic functional differential equation on a circle with rotation transformation of a spatial variable. Using the method of central manifolds, we proved a theorem on the existence of stationary spatially inhomogeneous solutions that bifurcate from a spatially homogeneous solution when the bifurcation parameter changes. The theorem has a local character. We also studied the asymptotic form of these solutions for the departure of the parameter from the bifurcation value.

**Keywords:** bifurcation, stationary structures, the method of central manifolds.

**MSC 2010:** 35B32, 35B35, 35K20

### 1. Введение

Одной из самых популярных нелинейных оптических систем является система, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура двумерной обратной связи. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, которое выполняется призмами, линзами и другими устройствами. Нелинейный интерферометр — одна из наиболее простых оптических систем, в которой реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей. Моделирование динамики нелинейных оптических систем

с нелокальными взаимодействиями в контуре обратной связи [1, 10] приводит к параболическим функционально-дифференциальным уравнениям с преобразованием пространственной переменной искомой функции. В [11] рассмотрены методы построения периодических решений для произвольной области и невырожденного гладкого преобразования. При построении стационарных структур и анализе их устойчивости для параболического уравнения на отрезке с преобразованием отражения в [12] применялась локальная теория бифуркаций. В [6] экспериментально установлено многообразие оптических структур, показана зависимость их количества и форм от коэффициента диффузии.

В [2, 4] для исследования бифурцирующих структур в кольце и круге использован метод центральных многообразий. В [7] на основе теории нормальных форм изучаются качественные свойства периодических структур, описываемых полулинейным параболическим уравнением с поворотом пространственного аргумента.

## 2. Постановка задачи

В работе рассматривается функционально-дифференциальное уравнение на окружности  $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , описывающее динамику фазовой модуляции  $u = u(x, t)$  световой волны прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа в оптической системе с преобразованием поворота на угол  $h$  в контуре обратной связи [1, 10]:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u &= \mu \Delta u + K(1 + \gamma \cos Q_h u), t > 0, \\ u(x + 2\pi, t) &= u(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\Delta$  — одномерный оператор Лапласа,  $Q_h u(x, t) = u(x + h, t)$ ,  $\mu > 0$  — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды,  $h$  — угол поворота поля, коэффициент  $K > 0$  пропорционален интенсивности входного поля,  $0 < \gamma < 1$  — видность (контрастность) интерференционной картины.

Пусть  $H = L_2[\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}]$ . Обозначим  $H^s$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ , шкалу пространств, порожденную оператором  $\Delta$  при граничных условиях  $u(x + 2\pi, t) = u(x, t)$ . Норма в пространстве  $H^s$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$  определяется формулой  $\|u\|_s^2 = \langle (-\Delta)^s u, u \rangle$ , здесь  $\langle *, * \rangle$  — скалярное произведение в гильбертовом пространстве  $H$ .

В работе рассматриваются вопросы существования, формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений, бифурцирующих из пространственно однородных стационарных решений (2.1)  $u(x, t) = \omega$ , которые определяются уравнением

$$\omega = K(1 + \gamma \cos \omega). \quad (2.2)$$

При увеличении  $K$  количество одновременно существующих корней этого уравнения неограниченно растет, причем при  $K \rightarrow \infty$  их состав постоянно обновляется: рождаются новые состояния равновесия и исчезают старые. Фиксируем гладкую ветвь решений

$$\omega = \omega(K), 1 + K\gamma \sin \omega(K) \neq 0 \quad (2.3)$$

уравнения (2.1). Уравнение (2.1), линеаризованное в окрестности решения  $\omega(K)$ , представим в виде

$$\partial_t u = Au, \quad (2.4)$$

где  $Au = -u + \mu\Delta u - LQ_h u$ ,  $L = -K\gamma \sin \omega$  [12],  $Q_h$  – самосопряжённый оператор в  $H$ , определяемый равенством  $Q_h u(x, t) = u(x + h, t)$ .

Далее будем считать, что  $h = \pi$ , параметр  $\mu$  принимается в качестве бифуркационного параметра.

Методом Фурье устанавливается

**Лемма 1.** *Оператор  $A$ , рассматриваемый в гильбертовом пространстве  $H = L_2[\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}]$  с областью определения  $H^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ , имеет полную ортогональную систему собственных функций  $\cos kx$ ,  $\sin kx$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , соответствующих собственным значениям*

$$\lambda_k = -\mu k^2 - 1 + (-1)^k L, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Согласно теореме 5.1.1 [13] и лемме 1, если  $L > 1$ , то решение (2.3) уравнения (2.1) неустойчиво для любого значения параметра  $\mu$ . Если  $-1 < L < 1$ , то решение (2.3) уравнения (2.1) является асимптотически устойчивым для любого значения параметра  $\mu$ . Интерес представляет случай  $L < -1$ . Выберем теперь  $K$  так, чтобы выполнялось следующее условие.

**Условие 1.**

$$L = L(K) < -1.$$

Реализуемость этого условия исследована в [8].

Пусть  $\mu_k = (-1 - L)/k^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Если  $\mu > \mu_1$ , то согласно лемме 1 решение (2.3) уравнения (2.1) является устойчивым. При убывании параметра  $\mu$  и его прохождении через значение  $\mu_1$  решение (2.3) теряет устойчивость.

Если  $\mu_2 < \mu < \mu_1$ , то индекс неустойчивости решение (2.3) равен 1. При уменьшении  $\mu$  и его прохождении через  $\mu_k$ ,  $k = 2, 3, \dots$  индекс неустойчивости решение (2.3) каждый раз увеличивается на единицу.

### 3. Теорема о существовании и устойчивости

Преобразование  $u = v + \omega$  приводит уравнение (2.1) к виду

$$\begin{aligned} \partial_t v + v &= \mu \partial_{xx} v + L \left( Q_h v + \frac{1}{2} (Q_h v)^2 \operatorname{ctg} \omega - \frac{1}{6} (Q_h v)^3 + O(v^4) \right), t > 0, \\ v(x + 2\pi, t) &= v(x, t), v(x, 0) = v_0(x). \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $L = -K\gamma \sin \omega$  [12].

Опуская слагаемые порядка  $O(v^4)$  и выполняя замену  $(-\frac{L}{6})^{1/2} v = U$ , получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \partial_t U + U &= \mu \partial_{xx} U + L Q_\pi U + \Lambda Q_\pi U^2 + Q_\pi U^3, t > 0, \\ U(x + 2\pi, t) &= U(x, t), \quad U(x, 0) = U_0(x), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\Lambda = -\sqrt{\frac{3|L|}{2}}ctg\omega$ .

Множество стационарных решений  $E_\mu$  уравнения (3.2), а следовательно, решений краевой задачи

$$\begin{aligned} \mu\partial_{xx}U - U + LQ_\pi U + \Lambda Q_\pi U^2 + Q_\pi U^3 &= 0, \quad t > 0, \\ U(x + 2\pi, t) &= U(x, t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

зависит от параметров  $L$  и  $\mu$ .

Для случая  $\cos u = 0$  в [9] в окрестности бифуркационного значения параметра  $\mu$  доказана теорема о существовании, устойчивости и асимптотической форме стационарных пространственно неоднородных решений задачи (2.4), построена иерархия упрощенных моделей и установлено существование медленно меняющихся решений.

Далее будем считать, что выполняется следующее условие.

**Условие 2.**

$$\cos u \neq 0.$$

Имеет место теорема.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1 и 2. При  $h = \pi$ ,  $L < -1$ , существует  $\delta > 0$  такое, что для любых значений параметра  $\mu$ , удовлетворяющих неравенству

$$-L - 1 - \delta < \mu < -1 - L, \quad (3.4)$$

существует решение  $\varphi_1(x, \mu)$  уравнения (3.2), определяемое равенством

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \mu) &= (z \cos x + z^2 \sigma_2(x, \mu) + z^3 \sigma_3(x, \mu) + z^4 \sigma_4(x, \mu) + \\ &+ z^5 \sigma_5(x, \mu) + r(z, x, \mu)) |_{z=z(\mu)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\sigma_2 = \frac{\Lambda}{2} \left( -\frac{1}{L-1-2\lambda_1} + \frac{1}{2\lambda_1-\lambda_2} \right) \cos 2x, \quad (3.6)$$

$$\sigma_3 = \frac{-2\Lambda^2 - 2\lambda_1 + \lambda_2}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= \frac{\Lambda}{2} \left[ \frac{1}{L-1-4\lambda_1} \left( \frac{3}{L-1-2\lambda_1} - \frac{3}{4(2\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{5\Lambda^2}{2(L-1-2\lambda_1)^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\Lambda^2}{4(2\lambda_1-\lambda_2)^2} + \frac{\Lambda^2}{(L-1-2\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(4\lambda_1-\lambda_2)} \left( \frac{3}{2(L-1-2\lambda_1)} + \frac{3}{(2\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2(3\lambda_1-\lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{(2\lambda_1-\lambda_2)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3\Lambda^2}{(L-1-2\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{\Lambda^2}{(2\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)} \right) \cos 2x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2\lambda_1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_4)} \left( -\frac{3}{4} - \frac{2\lambda_1-\lambda_2-\Lambda^2}{3\lambda_1-\lambda_3} + \frac{\Lambda^2}{4(2\lambda_1-\lambda_2)} \right) \cos 4x \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_5 = & \frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_3} \left[ \left( -\frac{3}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\Lambda^2}{2} \left( \frac{3}{2(L-1-2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)} - \right. \right. \right. \\
& - \frac{3}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{3}{2(L-1-2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{3}{(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)} - \\
& - \frac{3}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{1}{(L-1-2\lambda_1)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \\
& + \frac{1}{2(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{3}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \\
& \left. \left. - \frac{3}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)} + \frac{1}{2(3\lambda_1 - \lambda_3)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \right) + + \right. \\
& + \frac{\Lambda^4}{2} \left( -\frac{1}{(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{3}{(L-1-2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \right. \\
& + \frac{1}{(L-1-2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_3)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{3}{(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \\
& - \frac{3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{1}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_4)} + \\
& \left. \left. + \frac{1}{(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \right) \right) \cos 3x + \\
& + \frac{1}{(5\lambda_1 - \lambda_5)} \left( \frac{3}{4(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\Lambda^2}{4} \left( \frac{3}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{3}{2(3\lambda_1 - \lambda_3)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2(3\lambda_1 - \lambda_3)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{3}{2(4\lambda_1 - \lambda_4)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{1}{(3\lambda_1 - \lambda_3)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \left. \right) + \\
& + \frac{\Lambda^4}{2} \left( \frac{1}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{1}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_4)} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{(3\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \right) \right) \cos 5x \left. \right] \quad (3.9)
\end{aligned}$$

здесь  $r(z, x, \mu) = O(|z|^5)$ ,  $z(\mu) > 0$  — непрерывная ветвь стационарных точек

уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \lambda_1(\mu)z + \left[ -\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{L-1-2\lambda_1} - \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1-\lambda_2)} \right] z^3 + \\ & + \left[ \frac{3}{16(3\lambda_1-\lambda_3)} + \Lambda^2 \left( -\frac{3}{4(L-1-2\lambda_1)^2} - \frac{3}{(L-1-2\lambda_1)(L-1-4\lambda_1)} + \right. \right. \\ & + \frac{3}{4(L-1-2\lambda_1)(4\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{3}{8(2\lambda_1-\lambda_2)^2} + \frac{3}{4(L-1-2\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)} + \\ & + \frac{3}{4(L-1-4\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{3}{2(4\lambda_1-\lambda_2)(2\lambda_1-\lambda_2)} + \\ & \left. + \frac{1}{4(3\lambda_1-\lambda_3)(4\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2(2\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)} \right) + \\ & + \Lambda^4 \left( \frac{5}{2(L-1-2\lambda_1)^2(L-1-4\lambda_1)} - \frac{1}{4(L-1-4\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)^2} - \right. \\ & - \frac{1}{2(2\lambda_1-\lambda_2)^2(4\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{1}{(L-1-2\lambda_1)(L-1-4\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)} + \\ & + \frac{1}{2(L-1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_2)(2\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2(2\lambda_1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)} + \\ & \left. \left. + \frac{1}{4(2\lambda_1-\lambda_2)^2(3\lambda_1-\lambda_3)} \right) \right] z^5 \end{aligned}$$

Решение  $\varphi_1(x, \mu)$  — экспоненциально устойчиво.

*Доказательство.* Для доказательства теоремы воспользуемся методом центральных многообразий [13]. Существование в окрестности бифуркационного значения параметра  $\mu_1$  центрального многообразия уравнения (3.3) доказывается как в [3]. В окрестности  $U = 0$ ,  $\mu = -1 - L$  центральное многообразие представим в виде

$$\varphi_1(x, \mu) = z \cos x + z^2 \sigma_2(x, \mu) + z^3 \sigma_3(x, \mu) + z^4 \sigma_4(x, \mu) + z^5 \sigma_5(x, \mu) + \dots \quad (3.10)$$

где  $\sigma_k(x, \mu)$ ,  $k = 2, 3, \dots$  функции из пространства  $H_0^1[0, 2\pi]$ . На многообразии (3.10) уравнение (2.4) принимает вид

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 z^4 + C_5 z^5 + \dots \quad (3.11)$$

Найдём коэффициенты разложений (3.10) и (3.11). Для этого подставим (3.10)

и (3.11) в уравнение (3.2).

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1(\mu)z + C_2z^2 + C_3z^3 + C_4z^4 + C_5z^5 + \dots) (\cos x + 2z\sigma_2(x, \mu) + \\
 & + 3z^2\sigma_3(x, \mu) + 4z^3\sigma_4(x, \mu) + 5z^4\sigma_5(x, \mu) + \dots) + z \cos x + z^2\sigma_2(x, \mu) + \\
 & + z^3\sigma_3(x, \mu) + z^4\sigma_4(x, \mu) + z^5\sigma_5(x, \mu) + \dots = \\
 & = \mu \left( -z \cos x + z^2 \frac{\partial^2 \sigma_2(x, \mu)}{\partial x^2} + z^3 \frac{\partial^2 \sigma_3(x, \mu)}{\partial x^2} + z^4 \frac{\partial^2 \sigma_4(x, \mu)}{\partial x^2} + \right. \\
 & \left. + z^5 \frac{\partial^2 \sigma_5(x, \mu)}{\partial x^2} + \dots \right) + L(-z \cos x + z^2\sigma_2(x + \pi, \mu) + z^3\sigma_3(x + \pi, \mu) + \\
 & + z^4\sigma_4(x + \pi, \mu) + z^5\sigma_5(x + \pi, \mu) + \dots) + \Lambda(-z \cos x + z^2\sigma_2(x + \pi, \mu) + \\
 & + z^3\sigma_3(x + \pi, \mu) + z^4\sigma_4(x + \pi, \mu) + z^5\sigma_5(x + \pi, \mu) + \dots)^2 + (-z \cos x + \\
 & + z^2\sigma_2(x + \pi, \mu) + z^3\sigma_3(x + \pi, \mu) + z^4\sigma_4(x + \pi, \mu) + z^5\sigma_5(x + \pi, \mu) + \dots)^3.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Из равенства коэффициентов при  $z^2$  в (3.12) получаем уравнение:

$$\mu \frac{\partial^2 \sigma_2(x, \mu)}{\partial x^2} - (1 + 2\lambda_1) \sigma_2(x, \mu) + L\sigma_2(x + \pi, \mu) = C_2 \cos x - \frac{\Lambda}{2} (1 + \cos 2x). \tag{3.13}$$

Из условия разрешимости (3.13) в пространстве  $H_0^1[0, 2\pi]$  в классе гладких по параметру  $\mu$  функций следует, что  $C_2 = 0$ . Тогда решением уравнения (3.13) в указанном классе является функция, определяемая равенством (3.6).

Приравняем коэффициенты при  $z^3$ . Учитывая (3.13) и  $C_2 = 0$ , получаем уравнение

$$\begin{aligned}
 & \mu \frac{\partial^2 \sigma_3(x, \mu)}{\partial x^2} - (1 + 3\lambda_1) \sigma_3(x, \mu) + L\sigma_3(x + \pi, \mu) = \\
 & = \left( C_3 + \frac{3}{4} - \frac{\Lambda^2}{L - 1 - 2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \right) \cos x + \\
 & + \left( \frac{1}{4} - \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \right) \cos 3x.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Из условия разрешимости уравнения (3.14) в классе гладких по параметру  $\mu$  функций находим

$$C_3 = -\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{L - 1 - 2\lambda_1} - \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)}. \tag{3.15}$$

Тогда решением уравнения (3.14) является функция, удовлетворяющая равенству (3.7).

Учитывая найденные ранее  $C_2, C_3, \sigma_2, \sigma_3$  и приравнявая коэффициенты при  $z^4$

в уравнении (3.12), получим уравнение

$$\begin{aligned}
& \mu \frac{\partial^2 \sigma_4(x, \mu)}{\partial x^2} - (1 + 4\lambda_1) \sigma_4(x, \mu) + L \sigma_4(x + \pi, \mu) = \\
= & C^4 \cos x + \frac{\Lambda}{2} \left[ \frac{3}{L - 1 - 2\lambda_1} - \frac{3\Lambda}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{5\Lambda^2}{2(L - 1 - 2\lambda_1)^2} - \right. \\
& - \frac{\Lambda^2}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{\Lambda^2}{(L - 1 - 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \left( \frac{3}{(L - 1 - 2\lambda_1)} - \right. \\
& \left. - \frac{3}{(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{1}{2(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{3\Lambda^2}{(L - 1 - 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\Lambda^2}{(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \right) \cos 2x + \\
& + \left( - \frac{3}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{1}{2(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\Lambda^2}{(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \right) \cos 4x \left. \right] \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Из условия разрешимости уравнения (3.16), следует, что

$$\begin{aligned}
C_5 = & \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \Lambda^2 \left( - \frac{3}{4(L - 1 - 2\lambda_1)^2} - \right. \\
& - \frac{3}{(L - 1 - 2\lambda_1)(L - 1 - 4\lambda_1)} + \frac{3}{4(L - 1 - 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
& + \frac{3}{4(L - 1 - 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{3}{4(L - 1 - 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \\
& - \frac{3}{2(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{1}{4(3\lambda_1 - \lambda_3)(4\lambda_1 - \lambda_2)} - \\
& \left. - \frac{3}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{1}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \right) + \\
+ & \Lambda^4 \left( \frac{5}{2(L - 1 - 2\lambda_1)^2(L - 1 - 4\lambda_1)} - \frac{1}{4(L - 1 - 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \right. \\
& - \frac{1}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{1}{(L - 1 - 2\lambda_1)(L - 1 - 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
& + \frac{1}{2(L - 1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{1}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \\
& \left. + \frac{1}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(3\lambda_1 - \lambda_3)} \right) \tag{3.17}
\end{aligned}$$

При этом уравнению (3.16) удовлетворяет функция, определяемая равенством (3.9).



Процесс последовательного построения коэффициентов разложений (3.10) и (3.11) неограниченно продолжим. Получающиеся в результате разложения являются асимптотически сходящимися в окрестности  $\mu = -1 - L$ . При  $\mu < \mu_1$  коэффициент  $C_3(\mu) < 0$ , следовательно, в уравнении (3.11) при  $\mu = \mu_1$  имеет место суперкритическая бифуркация и из нулевого устойчивого стационарного решения ответвляются две устойчивые непрерывные по параметру  $\mu$  ветви стационарных точек [13].  $\square$

Заметим, что утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости  $\varphi_1(x, \mu)$  носят локальный по параметру  $\mu$  характер. Однако, анализ построения инвариантного многообразия (3.10) даёт основание для следующего утверждения: в достаточно широком диапазоне изменения параметра  $\mu$  справедливо приближённое равенство

$$\varphi_1(x, \mu) \approx z \cos x + z^2 \sigma_2(x, \mu) + z^3 \sigma_3(x, \mu) + z^4 \sigma_4(x, \mu) + z^5 \sigma_5(x, \mu), \quad (3.18)$$

где  $z(\mu) > 0$  — непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \lambda_1(\mu)z + \left[ -\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{L-1-2\lambda_1} - \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1-\lambda_2)} \right] z^3 + \\ & + \left[ \frac{3}{16(3\lambda_1-\lambda_3)} + \Lambda^2 \left( -\frac{3}{4(L-1-2\lambda_1)^2} - \frac{3}{(L-1-2\lambda_1)(L-1-4\lambda_1)} + \right. \right. \\ & + \frac{3}{4(L-1-2\lambda_1)(4\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{3}{8(2\lambda_1-\lambda_2)^2} + \frac{3}{4(L-1-2\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)} + \\ & \left. \left. + \frac{1}{4(3\lambda_1-\lambda_3)(4\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2(2\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)} \right) \right] + \\ & + \Lambda^4 \left( \frac{5}{2(L-1-2\lambda_1)^2(L-1-4\lambda_1)} - \frac{1}{4(L-1-4\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)^2} - \right. \\ & - \frac{1}{2(2\lambda_1-\lambda_2)^2(4\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{1}{(L-1-2\lambda_1)(L-1-4\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)} + \\ & + \frac{1}{2(L-1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_2)(2\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2(2\lambda_1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)} + \\ & \left. \left. + \frac{1}{4(2\lambda_1-\lambda_2)^2(3\lambda_1-\lambda_3)} \right) \right] z^5. \end{aligned} \quad (3.19)$$

На основании выполненного выше анализа никаких выводов об устойчивости  $\varphi_1(x, \mu)$  при углублении  $\mu$  в область надкритичности сделать нельзя. Однако, приближённое равенство (3.18) позволяет исследовать устойчивость стационарной точки  $\varphi_1(x, \mu)$  при отходе параметра  $\mu$  от бифуркационного значения.

Рассмотрим поведение  $\varphi_1(x, \mu)$  при уменьшении параметра  $\mu$ . С этой целью воспользуемся приближенным равенством (3.18). Численные расчеты проводились для случая  $L = -\frac{3}{2}$ . В качестве иллюстрации на Рис. 1 приведены графики функции  $\varphi_1(x, \mu)$  для  $\mu = 0.49, \mu = 0.4, \mu = 0.2, \mu = 0.1, \mu = 0.01$ .

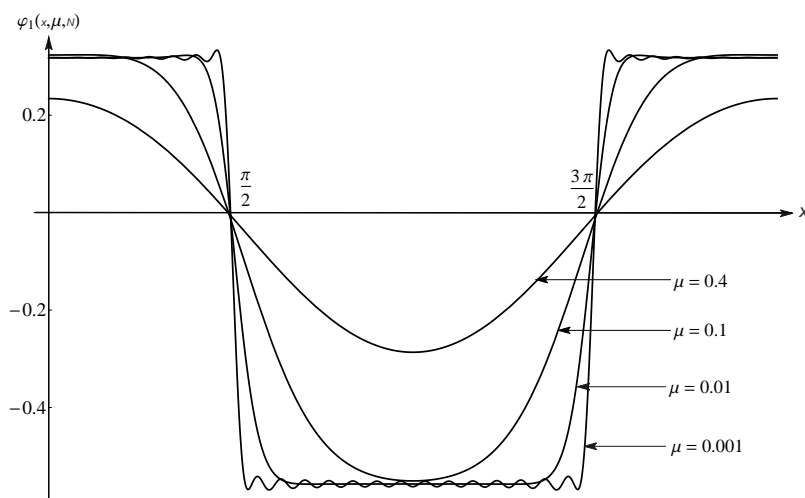


Рис. 1. Приближённое решение (3.18) уравнения (2.5) при  $L = -1.5$ ,  $\mu = 0.49; 0.4; 0.2; 0.1; 0.01$ .

Вблизи значения параметра  $\mu_1$  график функции  $\varphi_1$  имеет квазигармоническую форму с малой амплитудой. При уменьшении параметра  $\mu$  амплитуда функции  $\varphi_1(x, \mu)$  возрастает. При этом  $\varphi_1(x, \mu)$  функции принимает экстремальные значения в точках  $0, \pi$  и  $2\pi$ . Затем рост её амплитуды прекращается. При дальнейшем уменьшении параметра  $\mu$  увеличиваются промежутки, примыкающие к  $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$ , на которых функция  $\varphi_1(x, \mu)$  принимает почти постоянные значения. При достижении  $\mu$  некоторого значения, функция  $\varphi_1(x, \mu)$  начинает колебаться, т. е. проявляется явление Гиббса. При  $\mu$  близких к нулю  $\varphi_1(x, \mu)$  является функцией типа внутреннего переходного слоя [5] с двумя точками перехода  $\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{3\pi}{2}$ .

При уменьшении параметра  $\mu$  и прохождении значений  $\mu_k = \sqrt{-1 - L}/(2k - 1)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  от  $U = 0$  каждый раз ответвляется пара  $\varphi_k(x, \mu), \varphi_k^*(x, \mu)$  пространственно неоднородных стационарных решений задачи (3.2).

Для нахождения  $\varphi_k(x, \mu)$  используется принцип подобия

$$\varphi_k(x, \mu) = \varphi_1(kx; k\mu), \quad k = 2, 3, \dots$$

#### 4. Заключение

В работе, используя метод центральных многообразий, доказана теорема о существовании, форме и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений параболического функционально-дифференциального уравнения с преобразованием поворота пространственной переменной на окружности.

#### Список цитируемых источников

1. Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов, В.Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических анало-

гов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации./Под ред. С. А. Ахманова, М. А. Воронцова. — М.: Наука, 1990. — С. 263-325.

Akhmanov, S. A., Vorontsov, M. A., & Ivanov, V. Ju. (1990) Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback: on the way toward the creation of nonlinear-optical analogs of neuron nets. In S. A. Akhmanov, & M. A. Vorontsov (Eds.), *New Physical Principles of Optical Processing of Information* (pp. 263–325). Moscow: Nauka. (in Russian)

2. *Белан Е. П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — Т. 46, №5. — С. 99-111.

Belan, E. P. (2010). Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflected spatial argument. *Cybernetics and systems analysis*, 46:5, 772-783.

3. *Белан Е. П.* (2004). О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40. №5. — С. 645–654.

Belan E. P. (2004). On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation. *Differ. Equ.*, 40:5, 692–702.

4. *Белан Е. П.* Двумерные стационарные структуры в параболическом уравнении с отражением пространственных переменных // Кибернетика и системный анализ — 2011. — Т. 47. №3. — С.33–41.

Belan E. P. (2011). Two-dimensional stationary structures in a parabolic equation with an inversion transformation of its spatial arguments. *Cybernetics and systems analysis* 47, No.3, 360–367.

5. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений — М: Высшая школа, — 1990. — 208 с.

Vasil'eva, A. B., Butuzov, V. F. (1990). *Asymptotic Methods in the Theory of Singular Perturbations*. Moscow: Vysshaya Shkola. (in Russian)

6. *Воронцов, М. А., Железных, Н. И.* Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью // Матем. моделирование — 1990. — Т.2, №2. — С. 31–38.

Vorontsov M. A., Zheleznykh N. I. (1990). Transverse bistability and multistability in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback. *Matem. Mod.* 2, No.2, 31–38. (in Russian)

7. *Кащенко С. А.* Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1991. — Т.31, №3. — С. 467–473.

Kashchenko, S. A. (1991). Asymptotic form of spatially non-uniform structures in coherent nonlinear optical systems. *Comput. Math. Math. Phys.* 31, No.3, 97-102.

8. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения. // Теор. и матем. физика. — 2004. — Т. 140, №1. — С. 14–28.

Kolesov, A. Yu. & Rozov, N. H. (2004). Optical buffering and mechanisms for its occurrence. *Theoret. and Math. Phys.* 140, No.1, 905–917.

9. *Корнута А. А.* Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении на окружности с поворотом пространственной переменной // *Динамические системы.* — 2014. — Т.4(32), №1-2. — С. 59–75.  
Kornuta A A. (2014). Metastable structures in a parabolic equation on a circle with rotation of a space variable. *Dinamicheskie sistemy* 4(32), No.1-2, 59–75. (in Russian)
10. *Разгулин А. В.* Нелинейные модели оптической синергетики. — М.: МАКС Пресс, 2008. — С. 201.  
Razgulin, A. V. (2008). Nonlinear models of optical synergetics. Moscow: MAX-Press. (in Russian)
11. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения. // *Дифференц. уравнения.* — 1998. — Т. 34, №10. — С. 1394–1401.  
Skubachevskij, A. L. (1998). The Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional-differential equation. *Differ. Equations* 34, No.10, 1395-1402.
12. *Чушкин В. А., Разгулин А. В.* Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отражением пространственного аргумента // *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная Математика и кибернетика.* — 2003. — №2. — С. 13–20.  
Chushkin, V. A, Razgulin, A. V (2003). Steady-state structures in a functional-differential diffusion equation with reflection of the spatial argument. *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15: Vychisl. Mat. Kibern.,* 2, 4-12.
13. *Хенри, Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир. — 1985. — 376 с.  
Henry, D. (1981). *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

*Получена 14.08.2016*

УДК 517.957

## Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке

С. П. Плышевская

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. *E-mail: splyshevskaya@mail.ru*

**Аннотация.** Рассматривается скалярное параболическое уравнение на отрезке с условием Неймана. Методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений рассматриваемого уравнения. Эти решения ответвляются от нулевого решения при увеличении индекса неустойчивости нуля в результате уменьшения коэффициента диффузии и прохождения его через бифуркационное значение 1. Получены приближённые представления для пространственно-неоднородных решений в достаточно широком диапазоне изменения бифуркационного параметра. Эти приближённые представления соответствуют результатам численных расчётов. С помощью метода Галёркина получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений, стационарным точкам которых отвечают приближённые стационарные решения исходной задачи.

**Ключевые слова:** параболическая задача, центральное многообразие, устойчивость, внутренний переходный слой, стационарное решение, метод Галёркина, градиентная система, бифуркация.

## Dynamics of stationary structures in the parabolic problem at a segment

S. P. Plyshevskaya

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** The scalar parabolic equation at a segment with the Neumann's condition is considered. We prove the theorem on the existence and stability of spatially inhomogeneous stationary solutions of the equation by using the method of central manifolds. These solutions are branched from the zero solution when the instability index of zero increases (each time) by an order of magnitude and the coefficient of diffusion decreases and passes through the bifurcation value 1. We obtain approximate representation for the spatially inhomogeneous solutions in a fairly wide range of variation of the bifurcation parameter. These approximate representation correspond to the results of numerical computations. Using the Galerkin method, systems of ordinary differential equations were obtained whose stationary points correspond to approximate stationary solutions of the original problem.

**Keywords:** parabolic problem, central manifold, stability, internal shock layer, stationary solution, Galerkin's method, gradient system, bifurcation.

**MSC 2010:** 35B32, 35B35, 35K20, 35K55

## Введение

На отрезке  $0 \leq x \leq \pi$  рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + \Lambda u^2 - u^3, \quad t > 0 \quad (0.1)$$

с краевыми условиями второго рода:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0 \quad (0.2)$$

и начальными условиями:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (0.3)$$

где  $\mu > 0$  и  $\Lambda$  - параметры.

Уравнение (0.1) при  $\Lambda = 0$  является ярким представителем общего класса скалярных параболических уравнений типа реакция-диффузия. Этот класс является одним из наиболее исследованных примеров в глобальной, геометрической теории параболических уравнений [6].

Множество стационарных решений  $E_\mu$  уравнения (0.1), т.е. решений краевой задачи

$$\mu u_{xx} + u + \Lambda u^2 - u^3 = 0, \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0, \quad (0.4)$$

зависит от параметров  $\mu$  и  $\Lambda$ .

В работе [2] рассмотрен сценарий возникновения и динамика по параметру  $\mu$  метаустойчивых структур уравнения (0.1) при  $\Lambda = 0$  с краевыми условиями (0.2). Для решения этой задачи построен и проведен анализ иерархии упрощенных моделей уравнения (0.1) при  $\Lambda = 0$  с краевыми условиями (0.2) — галёркинских аппроксимаций средних размерностей. Оказалось, что в галёркинских аппроксимациях задачи (0.1)–(0.2) средних (20 - 30) размерностей реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций. Непрерывным ветвям стационарных точек систем обыкновенных дифференциальных уравнений, рожденных в результате седло-узловых бифуркаций, отвечают непрерывные ветви приближенных стационарных решений задачи (0.1)–(0.2). Множество приближенных стационарных решений задачи (0.1)–(0.2) типа переходного слоя с одной и двумя точками перехода правильно отражает характер эволюции метаустойчивых структур с одной и двумя точками перехода при увеличении  $t$  и при средних значениях параметра  $\mu$ . Установлено, что для решения задачи (0.1)–(0.2) при средних значениях параметра  $\mu$  применение метода Галёркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

В работе [5] методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений  $\varphi_1(x, \mu)$ ,  $\varphi_1(\pi - x, \mu)$  задачи (0.1)–(0.2) при  $\Lambda = 0$ , ответвляющихся от нулевого решения при  $\mu = 1$ . Утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости носят локальный по параметру  $\mu$  характер. Отметим, что полученное в теореме

асимптотическое разложение решения  $\varphi_1(x, \mu)$  в окрестности  $\mu = 1$  является приближённым решением рассматриваемой задачи на достаточно широком интервале изменения параметра  $\mu$ .

Данная работа посвящена построению стационарных структур канонической параболической задачи (0.1)–(0.2) ( $\Lambda \neq 0$ ) при уменьшении положительного бифуркационного параметра  $\mu$  с помощью метода центральных многообразий и метода Галёркина. Причём нас будет интересовать случай, когда  $\mu \rightarrow 0$ .

## 1. Бифуркационный анализ

Задачу (0.1)–(0.2) в соболевском пространстве  $H^1(0, \pi)$  представим в виде:

$$\dot{u} + Bu = g(u), \quad (1.1)$$

где

$$B = B(\mu) = \mu A - I, \quad Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ g(u) = \Lambda u^2 - u^3. \quad (1.2)$$

Оператор  $B$ , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве  $L_2[0, \pi]$ , имеет полную ортогональную систему собственных функций

$$\cos kx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

соответствующих собственным значениям

$$-\lambda_k = -1 + k^2\mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Существует  $\delta > 0$  такое, что при  $0 < 1 - \mu < \delta$  уравнение (1.1) имеет два стационарных решения*

$$u_1 = \varphi_1(x, \mu), \quad u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu), \quad (1.4)$$

где функция  $\varphi_1(x, \mu)$  удовлетворяет равенству

$$\varphi_1(x, \mu) = (z \cos x + z^2 p_2(x, \mu) + z^3 p_3(x, \mu) + z^4 p_4(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu) + r(z, x, \mu)) |_{z=z(\mu)},$$

$r(z, x, \mu) = O(|z|^6)$ , а  $z(\mu) > 0$  - непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + \left( -\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{-1 + 2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \right) z^3 + c_5 z^5 + \dots, \quad (1.5)$$

где

$$p_2 = \frac{\Lambda}{2(-1 + 2\lambda_1)} + \frac{\Lambda}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \cos 2x, \quad (1.6)$$

$$p_3 = \frac{2\Lambda^2 - 2\lambda_1 + \lambda_2}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x, \quad (1.7)$$

$$p_4 = -\frac{3\Lambda^3}{4(-1 + 2\lambda_1)^2(-1 + 4\lambda_1)} - \frac{\Lambda^3}{2(-1 + 2\lambda_1)(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} -$$

$$-\frac{3\Lambda}{8(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\Lambda^3}{8(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{3\Lambda}{4(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)} \cos 2x -$$

$$(1.8)$$

$$-\frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_2)} \cos 2x - \frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(-1 + 2\lambda_1)} \cos 2x +$$

$$+\frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 2x - \frac{\Lambda}{4(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 2x +$$

$$+\frac{\Lambda^3}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 4x - \frac{3\Lambda}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 4x +$$

$$+\frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 4x - \frac{\Lambda}{4(4\lambda_1 - \lambda_4)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 4x,$$

$$p_5 = \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left( -\frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_3} \cos 3x + \frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_5} \cos 5x \right) -$$

$$-\frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \frac{\Lambda^2}{4(3\lambda_1 - \lambda_3)(4\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x +$$

$$(1.9)$$

$$+\frac{\Lambda^2}{2(-1 + 2\lambda_1)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x + \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x -$$

$$-\frac{\Lambda^2}{4(4\lambda_1 - \lambda_4)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \frac{3\Lambda^2}{16(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x -$$

$$-\frac{\Lambda^4}{2(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x -$$

$$-\frac{\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x +$$

$$+\frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x -$$

$$-\frac{\Lambda^4}{(-1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x +$$

$$+\frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x -$$

$$-\frac{3\Lambda^4}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x + \frac{\Lambda^4}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_4)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x -$$

$$(1.10)$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x + \\
& + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)(5\lambda_1 - \lambda_3)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{16(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_5)} \cos 5x - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_5)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 5x + \\
& + \frac{\Lambda^4}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_5)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 5x + \frac{\Lambda^4}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_5)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 5x - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_5)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 5x + \\
& + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_5)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 5x - \\
& - \frac{\Lambda^2}{4(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_5)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 5x - \frac{\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_5)} \cos 5x, \\
c_5 = & \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{4(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)^2} - \frac{3\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)^2(-1 + 4\lambda_1)} - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)} - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{\Lambda^4}{2(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \\
& - \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 2\lambda_1)(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
& + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\Lambda^4}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)}. \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Стационарные точки  $u_1 = \varphi_1(x, \mu)$ ,  $u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu)$  неустойчивы с индексом неустойчивости 1.

*Доказательство.* В окрестности  $u = 0$ ,  $\mu = 1$  существует центральное многообразие [6] надстроенной системы

$$\dot{u} + B(\mu)u = g(u), \quad \dot{\mu} = 0, \tag{1.12}$$

представимое в виде:

$$u = z \cos x + p_2(x, \mu)z^2 + p_3(x, \mu)z^3 + p_4(x, \mu)z^4 + p_5(x, \mu)z^5 + \dots, \tag{1.13}$$

где  $p_2(x, \mu)$ ,  $p_3(x, \mu)$ ,  $p_4(x, \mu)$ ,  $p_5(x, \mu)$ , ... функции из пространства  $H^1[0, \pi]$ . На многообразии (1.13) уравнение (1.12) принимает вид:

$$\dot{z} = \lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots \tag{1.14}$$

Найдем коэффициенты разложений (1.13), (1.14). С этой целью подставим (1.13), (1.14) в уравнение (1.12):

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots) \cos x + 2z(\lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \\ & + c_5 z^5 + \dots)p_2 + 3z^2(\lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots)p_3 + 4z^3(\lambda_1 z + c_2 z^2 + \\ & + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots)p_4 + 5z^4(\lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots)p_5 + \\ & + \dots + B(z \cos x + p_2(x, \mu)z^2 + p_3(x, \mu)z^3 + p_4(x, \mu)z^4 + p_5(x, \mu)z^5 + \dots) = g(z \cos x + \\ & + p_2(x, \mu)z^2 + p_3(x, \mu)z^3 + p_4(x, \mu)z^4 + p_5(x, \mu)z^5 + \dots). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим, что коэффициент при  $z$  в левой и правой частях этого равенства совпадают. Приравняв коэффициент при  $z^2$ , получим уравнение:

$$c_2 \cos x + (B + 2\lambda_1)p_2 = \frac{\Lambda}{2}(1 + \cos 2x). \quad (1.16)$$

Из условия его разрешимости в пространстве  $H^1[0, \pi]$  в классе гладких по параметру  $\mu$  функций следует, что  $c_2 = 0$ . При этом его решением в указанном классе является определенная в (1.6) функция.

Приравняв теперь в равенстве (1.15) коэффициент при  $z^3$  и используя (1.2), получим уравнение:

$$c_3 \cos x + (B + 3\lambda_1)p_3 = -\frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x + (2\Lambda \cos x - 2c_2)p_2. \quad (1.17)$$

Из его условия разрешимости находим

$$c_3 = -\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{-1 + 2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

При этом его решением в указанном классе является определенная в (1.7) функция.

Приравняв теперь в равенстве (1.15) коэффициент при  $z^4$  и используя (1.2), приходим к уравнению:

$$c_4 \cos x + (B + 4\lambda_1)p_4 = -\frac{3}{2}(1 + \cos 2x + 2c_3)p_2 + \Lambda p_2^2 + (2\Lambda \cos x - 3c_2)p_3. \quad (1.18)$$

Из его условия разрешимости находим  $c_4 = 0$ . При этом его решением в указанном классе является определенная в (1.8) функция.

Приравняв теперь в равенстве (1.15) коэффициент при  $z^5$  и используя (1.2), приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} c_5 \cos x + (B + 5\lambda_1)p_5 = & -2c_4 p_2 - 3 \cos x p_2^2 - \frac{3}{2}(1 + \cos 2x + 3c_3)p_3 + 2\Lambda p_2 p_3 + \\ & + (2\Lambda \cos x - 4c_2)p_4. \end{aligned}$$

Из его условия разрешимости находим

$$c_5 = \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{4(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{3\Lambda^2} - \frac{\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)^2} - \frac{\Lambda^2}{2(-1 + 2\lambda_1)^2(-1 + 4\lambda_1)} - \frac{\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\Lambda^2}{3\Lambda^2} - \frac{\Lambda^4}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{\Lambda^4}{2(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{\Lambda^4}{3\Lambda^2} - \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 2\lambda_1)(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\Lambda^4}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)}.$$

Затем, как и выше, убеждаемся, что этому уравнению удовлетворяет функция, удовлетворяющая равенству (1.9).

Процесс последовательного построения коэффициентов разложений (1.13), (1.14) неограниченно продолжим. Получающийся в результате ряд (1.13) допускает представление в виде степенного ряда по степеням  $z, 1 - \mu$ . Указанный ряд, как известно [6], является асимптотически сходящимся в окрестности  $z = 0, \mu = 1$ .

Переходим теперь к анализу уравнения (1.5). Его нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при  $\mu > 1$ . При уменьшении параметра  $\mu$  и его прохождении через 1 от нуля ответвляются две непрерывные ветви неустойчивых стационарных точек. Отсюда в силу принципа сведения [6] следует справедливость теоремы.

Подчеркнём, что утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости носят локальный по параметру  $\mu$  характер. Отметим, что в разложениях (1.5), (1.6), (1.8), (1.9), (1.11) знаменатели обращаются в нуль при  $\mu = \frac{3}{4}$  и  $\mu = \frac{1}{2}$ . Поэтому анализ построения инвариантного многообразия (1.13) даёт основания для следующего утверждения: на интервале  $(\frac{3}{4}, 1)$  изменения параметра  $\mu$  справедливо следующее приближенное равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx (z \cos x + z^2 p_2(x, \mu) + z^3 p_3(x, \mu) + z^4 p_4(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu)) |_{z=z(\mu)}. \quad (1.19)$$

Очевидно, для  $\varphi_1(\pi - x, \mu)$  справедливо аналогичное приближённое равенство:

$$\varphi_1(\pi - x, \mu) \approx (-z \cos x + z^2 p_2(x, \mu) - z^3 p_3(x, \mu) + z^4 p_4(x, \mu) - z^5 p_5(x, \mu)) |_{z=z(\mu)}. \quad (1.20)$$

В равенстве (1.19)  $z(\mu) > 0$  — непрерывная ветвь неподвижных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + \left( -\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{-1 + 2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \right) z^3 + c_5 z^5,$$

где  $c_5$  удовлетворяет равенству (1.11).

□

На рис. 1 изображены графики функции  $\varphi_1(x, \mu)$ , определяемые правой частью (1.19), при  $\Lambda = 0.001$  и различных значениях параметра  $\mu$ .

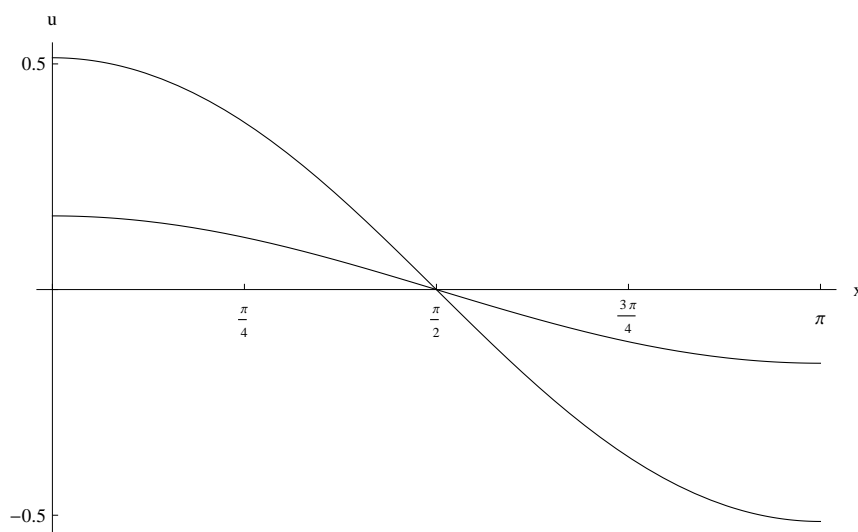


Рис. 1. Функция  $\varphi_1(x, \mu)$  при  $\Lambda = 0.001$ ,  $\mu = 0.98$ ,  $\mu = 0.8$

## 2. Аппроксимации уравнения (0.1)

В данной работе переходим к построению и анализу галёркинских аппроксимаций (1.1).

В работе [2] строился и проводился анализ иерархии упрощенных моделей [1] задачи (0.1)–(0.2) — галёркинских аппроксимаций (0.1)–(0.2) средних размерностей при  $\Lambda = 0$ .

Рассмотрим галёркинскую аппроксимацию уравнения (0.1) в виде:

$$u = z_0 + \sum_{k=1}^N z_k \cos kx. \quad (2.1)$$

Подставим (2.1) в (0.1) и приравняем затем коэффициенты при  $\cos kx$ ,  $k = 0, \dots, N$ . В результате приходим к системам уравнений, правые части которых представляют собой полиномы степени 3.

Например, при  $N = 2$  система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= z_0 + \Lambda z_0^2 + \frac{1}{2}\Lambda z_1^2 + \frac{1}{2}\Lambda z_2^2 - \frac{3}{2}z_0 z_1^2 - \frac{3}{4}z_1^2 z_2 - \frac{3}{2}z_0 z_2^2 - z_0^3, \\ \dot{z}_1 &= (1 - \mu)z_1 + 2\Lambda z_0 z_1 + \Lambda z_1 z_2 - 3z_0^2 z_1 - 3z_0 z_1 z_2 - \frac{3}{2}z_1 z_2^2 - \frac{3}{4}z_1^3, \\ \dot{z}_2 &= (1 - 4\mu)z_2 + \frac{1}{2}\Lambda z_1^2 + 2\Lambda z_0 z_2 - \frac{3}{2}z_0 z_1^2 - 3z_0^2 z_2 - \frac{3}{2}z_1^2 z_2 - \frac{3}{4}z_2^3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В системе (2.2), как и в системах порядка  $N + 1$ , нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при  $\mu > 1$ , а решения  $(\frac{\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 + 4}}{2}, 0, 0)$  устойчивы для  $\mu > 0$ . При переходе параметра  $\mu$  через 1 индекс неустойчивости (размерность неустойчивого многообразия) нуля увеличивается на порядок. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две ветви неподвижных точек  $z^{1,1}(\mu, N)$  и  $z^{1,2}(\mu, N)$ , определённые на  $[0, 1)$ . Все компоненты  $z_k^{1,1}(\mu, N)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , отличны от 0. Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx z_0^{1,1} + \sum_{k=1}^N z_k^{1,1}(\mu, N) \cos kx. \quad (2.3)$$

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости  $\varphi_1$  и  $\varphi_1(\pi - x, \mu)$ . Эта пара решений (0.1) рождается неустойчивой с индексом неустойчивости равным 1. Характер устойчивости  $\varphi_1$  сохраняется на промежутке  $(0, 1)$  изменения параметра  $\mu$ .

Рассмотрим здесь задачу о поведении максимального собственного значения решения  $\varphi_1(x, \mu)$  при средних значениях параметра  $\mu$ . Обратимся в этой связи к вопросу о динамике по параметру  $\mu$  максимального собственного значения  $\lambda_1(\mu, N, 1)$  неподвижных точек  $z^{1,1}(\mu, N)$  системы (2.2). Спектр устойчивости  $z^{1,1}(\mu, N)$  лежит на вещественной оси, а его максимальная точка  $\lambda_1 = \lambda_1(\mu, N, 1)$  при малых  $1 - \mu > 0$  принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра неподвижной точки  $z^{1,1}(\mu, N)$  для всех  $0 < \mu < 1$  лежат на отрицательной полуоси и при убывании  $\mu$  сближаются: максимальная точка убывает, минимальная возрастает. Согласно численному анализу  $\lambda_1$  убывает при убывании  $\mu$  для любого  $30 < N < 40$ . При приближении  $\lambda_1$  к нулю скорость изменения  $\lambda_1$  уменьшается. При этом выделяется интервал  $(\mu_1(N), \mu_2(N))$  изменения  $\mu$ , на которых  $\lambda_1(\mu, N, 1)$  медленно меняется вблизи нуля. Процесс медленной эволюции  $\lambda_1$  на интервале  $(\mu_1(N), \mu_2(N))$ , на котором  $\lambda_1$  принимает малые положительные значения, переходит в стадию медленного монотонного возрастания при уменьшении  $\mu$  от  $\mu_1(N)$ . Отметим, что возрастание  $N$  приводит к возрастанию  $(\mu_2(N) - \mu_1(N))$  и убыванию  $\mu_1(N)$ . Есть основание полагать, что указанное здесь поведение  $\lambda_1$  имеет место для любого фиксированного  $N > 40$ .

Приведём иллюстрирующие примеры при  $\Lambda = 0.001$ :  $\mu_1(32) \approx 0.011$ ,  $\mu_2(32) \approx 0.2$ ;  $\lambda_1(0.2, 32, 1) = 0.005$ ,  $\lambda_1(0.011, 32, 1) = 0.0021$ ,  $\lambda_1(0.01, 32, 1) =$

0.0029;  $\mu_1(34) \approx 0.01$ ,  $\mu_2(34) \approx 0.2$ ;  $\lambda_1(0.2, 34, 1) = 0.005$ ,  $\lambda_1(0.01, 34, 1) = 0.0017$ ,  $\lambda_1(0.009, 34, 1) = 0.0023$ .

На рис. 2 представлены графики функции  $\varphi_1(x, \mu)$  при различных значениях параметра  $\mu$ .

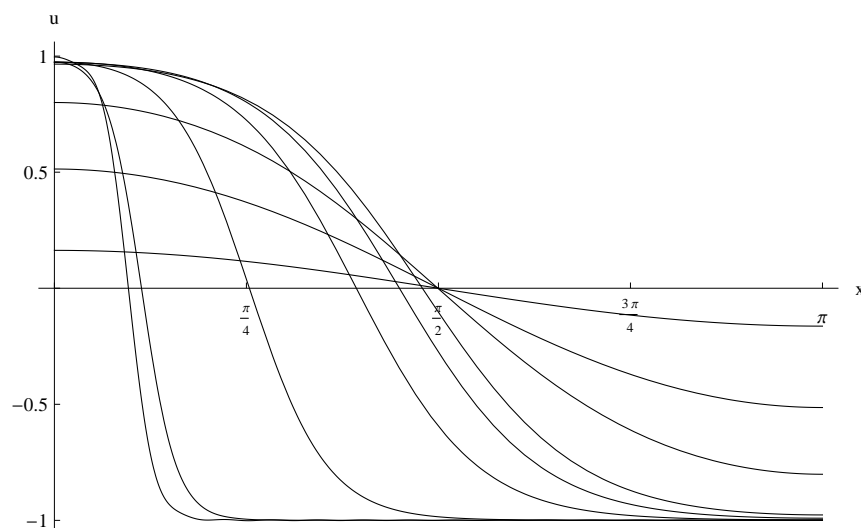


Рис. 2. Функция  $\varphi_1(x, \mu)$  для  $\mu = 0.98, 0.8, 0.5, 0.15, 0.1, 0.05, 0.03, 0.01, 0.005$ ,  $\Lambda = 0.001$ ,  $N = 33$

Построим численно решение задачи (0.1)–(0.3) при  $\mu = 0.01$ ,  $\Lambda = 0.001$ . В качестве начальной функции (0.3) возьмём функцию  $\varphi_1(x, \mu)$ , удовлетворяющую приближённому равенству (2.3) ( $N = 33$ ).

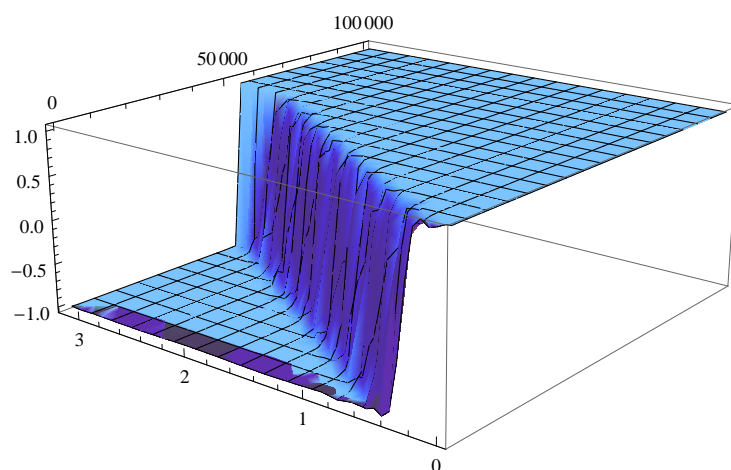


Рис. 3. Решение задачи (0.1)–(0.3),  $\varphi(x) = \varphi_1(x, \mu)$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $\Lambda = 0.001$

Для построения решения воспользуемся пакетом "Mathematica". В работе [5] при  $\Lambda = 0$  решение задачи (0.1)–(0.3) не меняется в течение достаточно долго-

го времени  $\approx 10^{19}$ , то есть порождает метаустойчивые структуры. В данной же работе решение не меняется в течение времени  $\approx 10^5$ .

Следуя [4], с помощью принципа подобия можно построить, опираясь на  $\varphi_1(x, \mu)$ , решения  $\varphi_k(x, \mu)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , краевой задачи (0.4). Пусть  $\varphi(x, \mu)$  — отличное от нуля решение (0.4), определенное для всех  $0 < \mu < a$ . Продолжим функцию  $\varphi(x, \mu)$  на промежуток  $[-\pi, 0)$  чётным образом, а затем на всю ось  $x$  по периодичности с периодом  $2\pi$ . Тогда при любом натуральном  $k$  функция  $\varphi(kx, k^2\mu)$  будет удовлетворять краевой задаче (0.4) для всех  $0 < \mu < \frac{a}{k^2}$ . Отсюда вытекает, что на промежутке  $0 < \mu < \frac{1}{k^2}$  справедливо равенство:

$$\varphi_k(x, \mu) = \varphi_1(kx, k^2\mu), \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Переход параметра  $\mu$  через  $4^{-1}$  приводит к увеличению на порядок индекса неустойчивости тривиального решения. В результате от нуля ответвляются две непрерывные по  $\mu$  ветви пространственно-неоднородных  $\varphi_2(x, \mu)$  и  $\varphi_2(\pi - x, \mu)$  стационарных точек с индексом неустойчивости 2.

Динамика  $\varphi_2(x, \mu)$  при уменьшении  $\mu$  от критического значения  $4^{-1}$  следует из равенств (2.4) и (1.19). На рис. 4 представлены графики функции  $\varphi_2(x, \mu)$  при различных значениях параметра  $\mu$ .

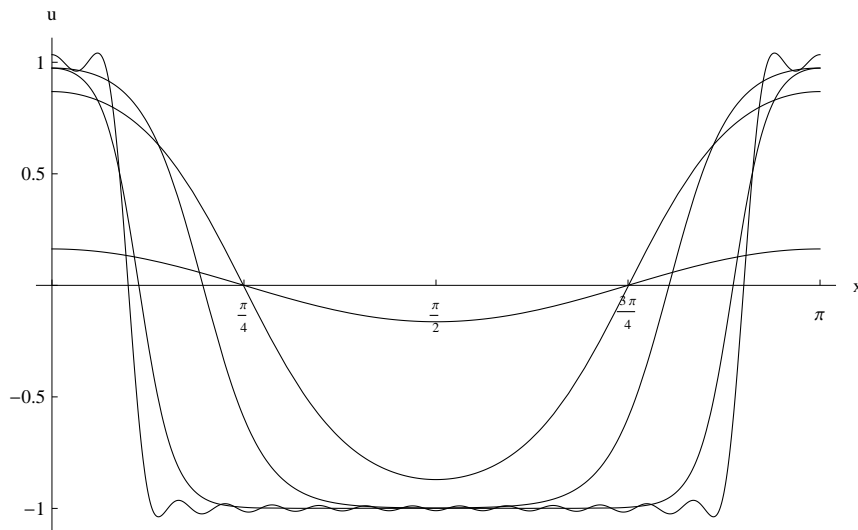


Рис. 4. Функция  $\varphi_2(x, \mu)$  при  $\Lambda = 0.001$ ,  $\mu = 0.245, 0.1, 0.03, 0.01, 0.001$ ,  $N = 33$

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости стационарных решений  $\varphi_2(x, \mu)$  и  $\varphi_2(\pi - x, \mu)$ . Эта пара решений (0.1) рождается при  $\mu = 4^{-1}$  неустойчивой с индексом неустойчивости равным 2.

Для анализа поведения спектра решения (0.1)  $\varphi_2(x, \mu)$  при средних значениях параметра  $\mu$  обратимся вновь к системе (2.2). Для каждого  $N$  в системе (2.2) при уменьшении параметра  $\mu$  и его переходе через значение  $4^{-1}$  индекс неустойчивости

нуля увеличивается на 1. В результате этой бифуркации от нулевого решения ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек  $z^{2,1}(\mu, N)$  и  $z^{2,2}(\mu, N)$ , определённые на  $[0, 2^{-2})$ .

Все нечётные компоненты  $z_{2k+1}^{2,1}(\mu, N)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , равны 0. Нулевая и чётные компоненты  $z_{2k}^{2,1}(\mu, N)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , отличны от нуля. Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_2(x, \mu) \approx z_0^{2,1} + \sum_{k=1}^m z_{2k}^{2,1}(\mu, N) \cos(2k)x, \quad (2.5)$$

$m + 1 = N$ , если  $N$  — нечётно,  $m = N$ , если  $N$  — чётно.

Переходим к анализу спектра неподвижных точек  $z^{2,1}(\mu, N)$ . Точки  $z^{2,1}(\mu, N)$  рождаются неустойчивыми с индексом неустойчивости 2: две точки спектра  $\lambda_1(\mu, N, 2) > \lambda_2(\mu, N, 2) > 0$ , а остальные точки принадлежат отрицательной полуоси. При уменьшении параметра  $\mu$  отрицательные точки спектра сближаются: максимальная точка убывает, а минимальная возрастает. Значительный интерес представляет вопрос о поведении  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ . Приведем здесь результаты анализа о поведении  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$  для  $30 < N < 40$ . При уменьшении параметра  $\mu$  функции  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают и приближаются к нулю. При подходе этих функций к нулю скорость их изменения становится малой. При этом наблюдались интервалы изменения  $\mu$ , на которых  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ , медленно меняются вблизи нуля. Указанные интервалы зависят от  $N$ . При условии уменьшения  $\mu$  и выхода из соответствующего интервала медленной эволюции имеет место монотонное возрастание  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ .

В качестве иллюстрации указанного поведения спектра приведём четыре наибольшие точки спектра при  $N = 34$ :

$$\begin{aligned} \mu = 0.050, & \quad \{-1.465, -1.414, 0.0050, 0.0035\}; \\ \mu = 0.030, & \quad \{-1.459, -1.455, 0.0020, 0.0020\}; \\ \mu = 0.010, & \quad \{-1.457, -1.457, 0.0018, 0.0017\}; \\ \mu = 0.009, & \quad \{-1.456, -1.455, 0.0025, 0.0025\}; \\ \mu = 0.005, & \quad \{-1.504, -1.501, 0.0075, 0.0061\}. \end{aligned}$$

## Заключение

Методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений  $\varphi_1(x, \mu)$ ,  $\varphi_1(\pi - x, \mu)$ , ответвляющихся от нулевого решения при  $\mu = 1$ . Утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости носят локальный по параметру  $\mu$  характер. Проведённые численные расчёты позволяют утверждать, что полученные в теореме асимптотические разложения (1.19) и (1.20) решений



$\varphi_1(x, \mu)$ ,  $\varphi_1(\pi - x, \mu)$  в окрестности  $\mu = 1$  являются приближенными решениями рассматриваемой задачи на достаточно широком интервале изменения параметра  $\mu$ .

С помощью принципа подобия (2.4) найдено решение  $\varphi_2(x, \mu)$ , которое отвечает от нуля при прохождении  $\mu$  через значение  $\frac{1}{4}$ .

Методом Галёркина получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений, стационарным точкам которых отвечают приближённые стационарные решения исходной задачи.

Построено решение задачи (0.1)–(0.3) при  $\mu = 0.01$ ,  $\Lambda = 0.001$ , где качестве начальной функции (0.3) взята функция  $\varphi_1(x, \mu)$ , удовлетворяющая приближённому равенству (2.3) ( $N = 33$ ).

Отметим, что асимптотическое представление пространственно-неоднородных стационарных решений задачи (0.1)–(0.2) при малых  $\mu$  можно построить, используя методы, развитые в [3]. Здесь же мы строили указанные решения в достаточно широком диапазоне изменения  $\mu$ .

Таким образом, в работе построены стационарные структуры рассматриваемой задачи (0.1)–(0.2) ( $\Lambda \neq 0$ ) при уменьшении положительного бифуркационного параметра  $\mu$  методом центральных многообразий и методом Галёркина.

### Список цитируемых источников

1. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. — М.: Физматлит, 2007. — 488 с.  
Akhromeeva, T. S., Kurdyumov, S. P., Malinetskiy, G. G., Samarskiy, A. A. (2007). Structures and chaos in nonlinear media. Moscow: Fizmatlit. (in Russian)
2. *Белан Е. П., Плышевская С. П.* Метаустойчивые структуры скалярного уравнения Гинзбурга-Ландау // Динамические системы. — 2014. — Т. 4(32), №1-2. — С. 27–42.  
Belan, E. P., Plyshevskaya, S. P. (2014). Metastable structure of the scalar Ginzburg-Landau equation. Dinamicheskie sistemy, 4(32), 27-42. (in Russian)
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990. — 208 с.  
Vasil'eva, A. B., Butuzov, V. F. (1990). Asymptotic methods in the theory of singular perturbations. M.: Vysshaya Shkola. (in Russian)
4. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.  
Mischenko, Ye. F., Sadovnichiy, V. A., Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. (2005). Processes in nonlinear media with diffusion. Moskva: Fizmatlit. (in Russian)
5. *Плышевская С. П.* Динамика стационарных структур в канонической параболической задаче // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — №4(29). — С. 66–76.  
Plyshevskaya, S. P. (2015). Dynamics of stationary structures in the canonical parabolic problem. Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki, 4(29), 66-76. (in Russian)

6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

Henry, D. (1981). Geometric theory of semilinear parabolic equations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

*Получена 04.10.2016*

УДК 517.97:517.98

## Задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума

**И. В. Баран**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. *E-mail: matemain@mail.ru*

**Аннотация.** В работе формулируется и исследуется задача поиска направления оптимального перехода (по диаметру) через точку минимума. Эта задача близка по духу, с одной стороны, к хорошо известной в современном анализе задаче поиска направления наискорейшего (радиального) спуска к точке минимума, а с другой стороны, к известному методу Гельфанда (диаметрального) перехода через точку минимума. Оказалось, что для исследования такой задачи удобно использовать симметрические, а не центрированные характеристики (симметрические дифференциалы, либо, в более общем случае, симметрические субдифференциалы первого и второго порядка). Подробно исследован случай вариационных функционалов, рассмотрен класс примеров.

**Ключевые слова:** симметрическая производная, симметрический субдифференциал, локальная асимметрия, локальный эксцесс, локальная суб-асимметрия, локальный суб-эксцесс.

## The problem of finding the direction of the optimal transition through the extremum point

**I. V. Baran**

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** Well-known problem in the analysis of the theory of symmetric derivatives has found extensive applications in harmonic analysis and other areas of mathematics. However, in a nonsmooth analysis, the possibility of a transition from a symmetric derivative to a symmetric subdifferential was not study. In our papers a general apparatus of the theory of symmetric differentials and subdifferentials of the first and higher orders in infinite-dimensional spaces is constructed. Their main properties are described, up to the mean-value theorem and Taylor's formula, symmetric variations and subvariations of one-dimensional variational functionals are calculated.

As an application, we formulate and investigate the problem of finding the direction of the optimal transition (in diameter) through the minimum point. This problem is close in spirit, on the one hand, to the problem of finding the direction of the steepest (radial) descent to the minimum point, well known in modern analysis, and, on the other hand, to the known Gelfand (diametrical) transition through the minimum point. It turned out that to study such a problem it is convenient to use symmetric rather than centered characteristics (symmetric differentials, or, in the more general case, symmetric subdifferentials of the first and second order).

The concepts of local asymmetry and local excess of a functional at a given point of a local extremum are introduced. The problems of determining the direction of the minimum asymmetry and the minimal excess are formulated. In a more general case, an analogous investigation of local sub-asymmetry and local sub-excess on the basis of the previously constructed symmetric subdifferential calculus is carried out. A class of examples for variational functionals with a nonsmooth integrand is considered.

**Keywords:** symmetric derivatives, symmetric subdifferential, local asymmetry, local excess, local sub-asymmetry, local sub-excess.

MSC 2010: 46G05, 49J52

## Введение

В современном анализе хорошо известна задача поиска направления наискорейшего спуска (по радиусу) к точке минимума функционала, подразумевая исследования как в гладком, так и в негладком случае (см. [2]-[4], [6]). В настоящей работе ставится близкая по духу задача поиска наискорейшего перехода (по диаметру) через точку экстремума. Оказывается, что для исследования такой задачи удобно использовать симметрические, а не центрированные характеристики (симметрические дифференциалы, либо, в более общем случае, симметрические субдифференциалы первого и второго порядка ([7], [11])).

Симметрические производные первого и второго порядков определяются через пределы соответствующих разностных отношений:

$$f^{[l]}(y) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta^1 f(y, h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(y+h) - f(y-h)}{2h},$$

$$f^{[m]}(y) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta^2 f(y, 2h)}{4h^2} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(y+2h) - 2f(y) + f(y-2h)}{4h^2}.$$

Отметим, что с симметрическими производными второго порядка связан классический метод Римана-Шварца суммирования рядов Фурье [1].

В работе рассматривается обобщение симметрической производной на случай банаховых пространств, а именно — симметрические субдифференциалы Фреше первого и высшего порядков (см. [7]). Так, под сильным симметрическим субдифференциалом первого порядка мы понимаем субпредел ([7]-[9]):

$$\partial_{sub}^{[l]} f(y, h) = \operatorname{sublim}_{t \rightarrow +0} \overline{co} \left\{ \frac{f(y+th) - f(y-th)}{2t} \mid 0 < t < \delta \right\}$$

при том условии, что  $\partial_{sub}^{[l]} f(y, \cdot)$  — сублинейный ограниченный оператор по  $h$  с компактными выпуклыми значениями.

Далее, по аналогии с теорией сильных центрированных субдифференциалов ([8], [9], [12]), мы рассматриваем удобное достаточное условие симметрической субдифференцируемости — симметрическую субгладкость. В частности, для функционалов симметрическая субгладкость первого порядка сводится к полунепрерывности сверху (снизу), соответственно, верхних (нижних) симметрических производных. Это позволяет ввести понятие и получить оценки симметрических субвариаций первого и высшего порядков для вариационных функционалов (см. [7]).

Применение построенного аппарата к экстремальным вариационным задачам мы строим на идее сочетания центрированных и симметрических характеристик вариационного функционала. А именно:

- а) с помощью центрированных характеристик (с помощью первой и второй центрированных субвариаций  $\partial_{sub} \Phi(y)h$  и  $\partial_{sub}^2 \Phi(y)(h)^2$ ) находится точка экстремума;

- б) в уже найденной точке экстремума мы исследуем следующую задачу: найти оптимальный путь перехода через точку экстремума с помощью симметрических характеристик (первой и второй симметрической субвариаций  $\partial_{sub}^{[l]} \Phi(y)h$  и  $\partial_{sub}^{[m]} \Phi(y)(h)^2$ ).

Понятие оптимальности мы связываем с двумя локальными характеристиками функционала, которые являются локальными аналогами известных в теории вероятности понятий асимметрии и эксцесса распределения случайной величины [5].

Работа состоит из пяти разделов. В первом разделе рассматривается применение аппарата симметрического субдифференциального исчисления к оценке первой субвариации одномерного вариационного функционала. Во втором разделе на базе теории симметрических субдифференциалов высших порядков получена оценка второй субвариации симметрического субдифференциала вариационного функционала. Рассмотрен частный пример.

В третьем разделе рассматривается задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума функционала. С этой целью введены понятия локальной асимметрии и локального эксцесса. В четвертом разделе рассматривается многозначная версия исследования, использующая, соответственно, первой симметрический субдифференциал (либо суб-асимметрию), либо второй симметрический субдифференциал (либо суб-эксцесс). В заключительном разделе рассмотрен достаточно обширный класс примеров.

## 1. Первая симметрическая вариация одномерного вариационного функционала

В работе [8] было показано, что одномерный вариационный функционал с  $C_{sub}^1$ -гладким интегрантом

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (y \in C^1[a; b], f \in C_{sub}^1([a; b] \times \mathbb{R}^2), u = f(x, y, z)) \quad (1.1)$$

допускает следующую оценку первой сильной субвариации:

$$\begin{aligned} & \partial_{sub} \Phi(y)h \subset \\ & \subset \left[ \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')h' \right) dx ; \int_a^b \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y')h' \right) dx \right]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Оценка (1.2) поддается обобщению на случай симметрической субгладкости интегранта. При этом симметрическая оценка оказывается, вообще говоря, более точной.

**Теорема 1.** Пусть для одномерного вариационного функционала интегрант  $f$  является  $C_{sub}^{[l]}$ -субгладким:  $f \in C_{sub}^{[l]}([a; b] \times \mathbb{R}^2)$ . Тогда  $\Phi(y)$  симметрически субдифференцируем всюду в  $C^1[a; b]$ , причем справедлива оценка первой симметрической субвариации ( $\forall h \in C^1[a; b]$ ):

$$\partial_{sub}^{[l]} \Phi(y)h \subset \left[ \int_a^b \left( \frac{\partial^{[l]} f}{\partial y} h + \frac{\partial^{[l]} f}{\partial z} h' \right) dx; \int_a^b \left( \overline{\frac{\partial^{[l]} f}{\partial y}} h + \overline{\frac{\partial^{[l]} f}{\partial z}} h' \right) dx \right]. \quad (1.3)$$

Отметим частный случай оценки (1.3), когда интегрант образован внешней композицией симметрически субгладкой функции с гладкой функцией  $f(x, y, y')$ .

**Теорема 2.** Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b \varphi[f(x, y, y')] dx \quad (y \in C^1[a; b], f \in C^1([a; b] \times \mathbb{R}^2), \varphi \in C_{sub}^{[l]}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка ( $\forall h \in C^1[a; b]$ ):

$$\begin{aligned} \partial_{sub}^{[l]} \Phi(y)h \subset & \left[ \int_a^b \underline{\varphi}^{[l]}(f(x, y, y')) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')h' \right) dx; \right. \\ & \left. \int_a^b \overline{\varphi}^{[l]}(f(x, y, y')) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')h' \right) dx \right]. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Еще один существенный частный случай представляет внутренняя композиция симметрически субгладкой функции с гладкой функцией. Здесь для простоты мы рассмотрим композицию только по третьей переменной.

**Теорема 3.** Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, \varphi(y')) dx \quad (f \in C^1([a; b] \times \mathbb{R}^2), y \in C^1[a; b], \varphi \in C_{sub}^{[l]}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка ( $\forall h \in C^1[a; b]$ ):

$$\begin{aligned} \partial_{sub}^{[l]} \Phi(y)h \subset & \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(y')) h dx + \\ & + \left[ \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(y')) \cdot \underline{\varphi}^{[l]}(y') h' dx; \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(y')) \cdot \overline{\varphi}^{[l]}(y') h' dx \right]. \quad (1.5) \end{aligned}$$

Отметим конкретные примеры оценок (1.4) и (1.5) связанные с модулированием.

Пример 1. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b |f(x, y, y')| dx \quad (y \in C^1[a; b], f \in C^1([a; b] \times \mathbb{R}^2)).$$

Здесь оценка (1.4) принимает вид точного равенства:

$$\partial_{sub}^{[l]} \Phi(y)h = \partial^{[l]} \Phi(y)h = \int_a^b \text{sign } f(x, y, y') \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')h' \right) dx. \quad (1.6)$$

Заметим, что вычисление центрированного субдифференциала (см. [8]) приводит к оценке (в краткой записи):

$$\begin{aligned} \partial_{sub} \Phi(y)h \subset \int_{f(x,y,y') \neq 0} \text{sign } f(x, y, y') \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h' \right) dx + \\ + [-1; 1] \cdot \int_{(f(x,y,y')=0)} \left( \frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h' \right) dx. \end{aligned}$$

При этом только в частном случае  $mes(f(x, y, y') = 0) = 0$  последняя оценка переходит в точное равенство (1.6) для классической первой вариации  $\partial \Phi(y)h$ . Таким образом, в случае  $mes(f(x, y, y') = 0) = 0$  имеет место точное равенство  $\partial_{sub}^{[l]} \Phi(y)h = \partial \Phi(y)h$ .

Пример 2. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, |y'|) dx \quad (y \in C^1[a; b], f \in C^1([a; b] \times \mathbb{R}^2)). \quad (1.7)$$

Здесь оценка (1.4) принимает вид точного равенства:

$$\partial_{sub}^{[l]} \Phi(y)h = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, |y'|)h dx + \int_{y' \neq 0} (\text{sign } y') \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, |y'|)h' dx.$$

Заметим, что вычисление центрированного субдифференциала (см. [8]) приводит к оценке (в краткой записи):

$$\begin{aligned} \partial_{sub} \Phi(y)h \subset \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, |y'|)h dx + \int_{y' \neq 0} (\text{sign } y') \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, |y'|)h' dx + \\ + [-1; 1] \cdot \int_{(y'=0)} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, |y'|)h' dx. \end{aligned}$$

При этом только в частном случае  $mes(y' = 0) = 0$  последняя оценка переходит в точное равенство для классической первой вариации  $\partial\Phi(y)h$ . Таким образом, в случае  $mes(y' = 0) = 0$  имеет место точное равенство:

$$\partial_{sub}^{[l]}\Phi(y)h = \partial\Phi(y)h = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, |y'|)h + (\text{sign } y') \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, |y'|)h' \right] dx.$$

## 2. Вторая симметрическая субвариация одномерного вариационного функционала

В работе [8] было показано, что одномерный вариационный функционал с  $C_{sub}^2$ -гладким интегрантом

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (f \in C_{sub}^2([a; b] \times \mathbb{R}^2), y \in C^1[a; b]).$$

допускает следующую оценку второй сильной субвариации:

$$\begin{aligned} \partial_{sub}^2\Phi(y)(h)^2 \subset & \left[ \int_a^b \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} h h' \right) dx; \int_a^b \left( \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2} h^2 + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z} h h' \right) dx \right] + \\ & + \left[ \int_a^b \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} h h' + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} h'^2 \right) dx; \int_a^b \left( \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y} h h' + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2} h'^2 \right) dx \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Мы получим симметрический аналог оценки (2.1) в случае интегранта класса  $C_{sub}^{[l]}$ . При этом симметрическая оценка оказывается более точной. Далее, учитывая включение  $C_{sub}^{[l]} \supset C^1$ , мы примем следующие обозначения:

$$\frac{\partial^{[l]} f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^{[l]}}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\overline{\partial^{[l]} f}}{\partial y \partial z} = \frac{\overline{\partial^{[l]}}}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^{[l]} f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^{[l]}}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad \frac{\overline{\partial^{[l]} f}}{\partial z \partial y} = \frac{\overline{\partial^{[l]}}}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

**Теорема 4.** *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (f \in C_{sub}^{[l]}([a; b] \times \mathbb{R}^2), y \in C^1[a; b]). \quad (2.2)$$

Тогда вторая симметрическая вариация  $\Phi(y)$  допускает оценку:

$$\partial_{sub}^{[l]}\Phi(y)(h)^2 \subset \left[ \int_a^b \left( \frac{\partial^{[l]} f}{\partial y^2} h^2 + \frac{\partial^{[l]} f}{\partial y \partial z} h h' \right) dx; \int_a^b \left( \frac{\overline{\partial^{[l]} f}}{\partial y^2} h^2 + \frac{\overline{\partial^{[l]} f}}{\partial y \partial z} h h' \right) dx \right] +$$



$$+ \left[ \int_a^b \left( \frac{\partial^{[l]} f}{\partial z \partial y} h h' + \frac{\partial^{[l]} f}{\partial z^2} h'^2 \right) dx ; \int_a^b \left( \frac{\partial^{[l]} f}{\partial z \partial y} h h' + \frac{\partial^{[l]} f}{\partial z^2} h'^2 \right) dx \right]. \quad (2.3)$$

*Доказательство.* Так как  $(f \in C_{sub}^{[l]}([a; b] \times \mathbb{R}^2)) \Rightarrow (f \in C^1([a; b] \times \mathbb{R}^2))$ , то  $\Phi$  имеет обычную первую вариацию

$$\partial\Phi(y)h = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')h' \right) dx =: \Psi(y)h,$$

и, следовательно,  $\partial_{sub}^{[l]} \Phi(y)(h)^2 = \partial_{sub}^{[l]} (\Psi)(y)(h)^2$ .

Введем вспомогательный линейный оператор (очевидно, непрерывный):

$$(Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)), \quad A : C^1[a, b] \longrightarrow [a; b] \times C^1[a, b] \times C[a, b].$$

Далее, введем нелинейный оператор композиции:

$$B(w) = \left( \frac{\partial f}{\partial y}(w), \frac{\partial f}{\partial z}(w) \right) = (B_1(w), B_2(w)), \quad (w : [a; b] \rightarrow [a; b] \times \mathbb{R}^2)$$

и билинейный функциональный оператор:

$$D(u, v) = \int_a^b [u(x)h(x) + v(x)h'(x)]dx, \quad D : C_{sub}^{[l]}[a, b] \times C_{sub}^{[l]}[a, b] \longrightarrow (C^1[a, b])^*.$$

Теперь вариационный функциональный оператор  $\Psi$  можно представить в виде композиции:

$$\Psi(y)h = D(B_1(Ay), B_2(Ay))h = D(B(Ay))h. \quad (2.4)$$

Применяя к композиции (2.4) теорему об  $s$ -субдифференцировании композиции (см. [7]), имеем:

$$\begin{aligned} \partial_{sub}^{[l]}(\Psi(y)h)(h) &= \partial_{sub}^{[l]}(D(B(Ay))h)h \subset \\ &\subset \left[ \partial_{sub}^{[l]} D(B(Ay))h \cdot \left[ \partial_{sub}^{[l]} B(Ay) \cdot \partial_{sub}^{[l]} A(y) \right] \right] h. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Теперь рассмотрим в отдельности компоненты справа в (2.5).

- 1) Так как  $A$  — линейный непрерывный оператор, то он дифференцируем по Фреше, причем  $A'(y) \equiv A$ . Следовательно,

$$\partial_{sub}^{[l]}(Ay)(x) = A'(y)(x) = (Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)).$$

- 2) Для оператора  $B$ , используя теорему о покоординатной  $s$ -субдифференцируемости (см. [7]), откуда находим:

$$\begin{aligned} \partial_{sub}^{[l]} B(Ay)h &\subset (\partial_{sub}^{[l]} B_1(Ay)h) \times (\partial_{sub}^{[l]} B_2(Ay)h) \subset \\ &\subset \left[ \frac{\partial^{[l]}}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) h + \frac{\partial^{[l]}}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) h'; \overline{\frac{\partial^{[l]}}{\partial y}} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) h + \overline{\frac{\partial^{[l]}}{\partial z}} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) h' \right] \times \\ &\times \left[ \frac{\partial^{[l]}}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) h + \frac{\partial^{[l]}}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) h'; \overline{\frac{\partial^{[l]}}{\partial y}} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) h + \overline{\frac{\partial^{[l]}}{\partial z}} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) h' \right]. \end{aligned}$$

- 3) Так как  $D$  — линейный непрерывный функционал, то он дифференцируем по Фреше, причем  $D'(u, v)(k, l) = D(k, v) + D(u, l)$ . Отсюда находим:

$$\begin{aligned} \partial_{sub}^{[l]} \Psi(y)(h)^2 &= \int_a^b \left( \left[ \frac{\partial^{[l]} f}{\partial y^2} h + \frac{\partial^{[l]} f}{\partial y \partial z} h'; \overline{\frac{\partial^{[l]} f}{\partial y^2}} h + \overline{\frac{\partial^{[l]} f}{\partial y \partial z}} h' \right] \cdot h + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\partial^{[l]} f}{\partial z \partial y} h + \frac{\partial^{[l]} f}{\partial z^2} h'; \overline{\frac{\partial^{[l]} f}{\partial z \partial y}} h + \overline{\frac{\partial^{[l]} f}{\partial z^2}} h' \right] \cdot h' \right) dx = \\ &= \left[ \int_a^b \left( \frac{\partial^{[l]} f}{\partial y^2} h^2 + \frac{\partial^{[l]} f}{\partial y \partial z} h h' \right) dx; \int_a^b \left( \overline{\frac{\partial^{[l]} f}{\partial y^2}} h^2 + \overline{\frac{\partial^{[l]} f}{\partial y \partial z}} h h' \right) dx \right] + \\ &\quad + \left[ \int_a^b \left( \frac{\partial^{[l]} f}{\partial z \partial y} h h' + \frac{\partial^{[l]} f}{\partial z^2} h'^2 \right) dx; \int_a^b \left( \overline{\frac{\partial^{[l]} f}{\partial z \partial y}} h h' + \overline{\frac{\partial^{[l]} f}{\partial z^2}} h'^2 \right) dx \right]. \quad (2.6) \end{aligned}$$

□

Здесь, как и при оценке первой симметрической субвариации, мы выделим случай интегранта, образованного внешней композицией  $s$ -субгладкой (теперь уже класса  $C_{sub}^{[l]}$ ) функции с гладкой.

**Теорема 5.** *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int_a^b \varphi[f(x, y, y')] dx \quad (\varphi \in C_{sub}^{[l]}(\mathbb{R}), f \in C^2([a; b] \times \mathbb{R}^2), y \in C^1[a; b]).$$

Тогда вторая симметрическая субвариация  $\Phi$  допускает оценку (в краткой записи):

$$\partial_{sub}^{[l]} \Phi(y)(h)^2 \subset \int_a^b \varphi'(f) \cdot \left( \frac{\partial^{[l]} f}{\partial y} h + \frac{\partial^{[l]} f}{\partial z} h' \right)^2 \cdot f dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \int_a^b \underline{\varphi^{[l]}}(f) \cdot ((f_y)^2 h^2 + f_{yz} h h') dx ; \int_a^b \overline{\varphi^{[l]}}(f) \cdot ((f_y)^2 h^2 + f_{yz} h h') dx \right] + \\
 & + \left[ \int_a^b \underline{\varphi^{[l]}}(f) \cdot (f_{yz} h h' + (f_z)^2 h'^2) dx ; \int_a^b \overline{\varphi^{[l]}}(f) \cdot (f_{yz} h h' + (f_z)^2 h'^2) dx \right]. \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

*Доказательство.* Непосредственные преобразования. □

В качестве конкретного класса примеров рассмотрим функционалы с интегрантами вида  $f|f|$ .

**Теорема 6.** Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y') \cdot |f(x, y, y')| dx \quad (f \in C^2([a; b] \times \mathbb{R}^2), y \in C^1[a; b]).$$

Тогда справедлива оценка (в краткой записи):

$$\begin{aligned}
 \partial_{sub}^{[l]} \Phi(y)(h)^2 & \subset \int_a^b |f| \cdot \left( \frac{\partial^{[l]}}{\partial y} h + \frac{\partial^{[l]}}{\partial z} h' \right)^2 \cdot f dx + 2 \int_{(f \neq 0)} \text{sign } f \cdot (f_y \cdot h + f_z \cdot h')^2 dx + \\
 & + [-2; 2] \cdot \int_{(f=0)} (f_{yz} \cdot h^2 + f_{yz} \cdot h h') dx + [-2; 2] \cdot \int_{(f=0)} (f_{yz} \cdot h h' + f_z^2 \cdot h'^2) dx. \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

В частности, если  $\text{mes}(f(x, y, y') = 0) = 0$ , то оценка (2.8) переходит в точное равенство:

$$\begin{aligned}
 \partial_{sub}^{[l]} \Phi(y)(h)^2 = \partial^{[l]} \Phi(y)(h)^2 & = \int_a^b |f| \cdot \left( \frac{\partial^{[l]}}{\partial y} h + \frac{\partial^{[l]}}{\partial z} h' \right)^2 \cdot f dx + \\
 & + 2 \int_a^b \text{sign } f \cdot (f_y \cdot h + f_z \cdot h')^2 dx.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим частный пример.

*Пример 3.* Пусть

$$f(x) = \int_0^z dt \int_0^t \sin \frac{1}{s^2} ds.$$

Вычисления показывают:

$$\begin{cases} \text{при } z \neq 0 : & f^{[n]}(z) = f''(z) = \sin \frac{1}{z^2}; \\ \text{при } z = 0 : & f^{[n]}(0) = 0; \partial_{sub}^2 f(0) = [-1; 1]. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int_a^b f(y') dx \quad (\text{здесь } f \in C_{sub}^{[n]}([a; b] \times \mathbb{R}^2), \text{ но } f \notin C_{sub}^2([a; b] \times \mathbb{R}^2)).$$

Из теоремы 4 следует:

$$\partial_{sub}^{[n]} \Phi(y)(h)^2 = \partial^{[n]} \Phi(y)(h)^2 = \int_a^b \sin \frac{1}{y'^2} \cdot (h')^2 dx.$$

В то же время теорема об оценке второй центрированной субвариации (см. [8]) здесь неприменима.

### 3. Локальные характеристики функционалов: локальная асимметрия и локальный эксцесс

Напомним определение направления наискорейшего спуска, введенного и исследованного в работах В. Ф. Демьянова [2]-[4]. Далее  $E$  — вещественное банахово пространство,  $U(y)$  — некоторая окрестность точки  $y \in E$ , функционал  $\Phi : E \supset U(y) \rightarrow \mathbb{R}$  достигает локального минимума в точке  $y$  и дифференцируем в этой точке по любому направлению  $h \in E$  ( $\|h\| = 1$ ).

**Определение 1.** Направление  $h^*$  называется *направлением наискорейшего спуска* функции  $\Phi$  в точке  $y$ , если

$$\partial\Phi(y, h^*) = \min_{\|h\|=1} \partial\Phi(y, h).$$

При этом  $\partial\Phi(y, h^*)$  называется *скоростью наискорейшего спуска*.

В гладком случае, в силу леммы Ферма,  $\partial\Phi(y, h^*) \equiv 0$  для любого направления  $h \in E$ . В негладком случае для нахождения  $h^*$  применяются методы квазидифференцируемого исчисления, развитого в работах В. Ф. Демьянова, А. М. Рубинова, В. Н. Малоземова и их учеников [2]-[4].

Наша цель — ввести и исследовать физически адекватное понятие «*направления наискорейшего перехода*» через точку минимума, которое будет определяться уже парой взаимно противоположных направлений  $(h, -h)$ . Другими словами, вместо радиального спуска к точке минимума мы будем рассматривать диаметральный «переход» через точку  $x$  — от абсциссы  $(x - h)$  к абсциссе  $(x + h)$ . В

этом случае среднее время перехода будет определяться уже *симметрическим разностным отношением*  $\frac{\Phi(y + th) - \Phi(y - th)}{2t}$ , а предельное время перехода через  $y$  есть *первая симметрическая производная* ([1], [7], [10], [11]) по направлению  $h$ :

$$\partial^{[l]}\Phi(y, h) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\Phi(y + th) - \Phi(y - th)}{2t}.$$

Поэтому естественным является следующее определение.

**Определение 2.** Направление  $h^* \in E$  назовем *направлением наискорейшего перехода* (через точку  $y$ ), если

$$|\partial^{[l]}\Phi(y, h^*)| = \min_{h \in E} |\partial^{[l]}\Phi(y, h)|.$$

При этом  $|\partial^{[l]}\Phi(y, h^*)|$  назовем *временем наискорейшего перехода*.

В случае отсутствия симметрической дифференцируемости мы вводим более общее определение наискорейшего перехода, вводя локальный аналог известного в теории вероятностей понятия асимметрии (см. [5]).

**Определение 3.** Назовем *локальной асимметрией* функционала  $\Phi$  в точке  $y$  по направлению  $h$  следующий предел:

$$A\Phi(y, h) = \lim_{t \rightarrow +0} \left( \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \frac{\Phi(y + \tau h) d\tau}{\tau} \right).$$

Связь локальной асимметрии с определением 2 вытекает из следующего простого факта.

**Теорема 7.** Если  $\Phi$  симметрически дифференцируем в точке  $y$  по направлению  $h$ , то

$$A\Phi(y, h) = \partial^{[l]}\Phi(y, h).$$

*Доказательство.* Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \frac{\Phi(y + \tau h) d\tau}{\tau} &= \frac{1}{2t} \left( \int_0^t \frac{\Phi(y + \tau h) d\tau}{\tau} - \int_0^t \frac{\Phi(y - \tau h) d\tau}{\tau} \right) = \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \frac{(\Phi(y + \tau h) - \Phi(y - \tau h)) d\tau}{2\tau}. \end{aligned}$$

По теореме о среднем при  $0 < \theta < t$ :

$$\frac{\Phi(y + \theta h) - \Phi(y - \theta h)}{2\theta} \rightarrow \Phi^{[l]}(y, h).$$

□

Таким образом, мы можем заменить определение 2 более общим.

**Определение 4.** Направление  $h^* \in E$  назовем *направлением наискорейшего перехода* (через точку  $y$ ), если

$$|A\Phi(y, h^*)| = \min_{h \in E} |A\Phi(y, h)|.$$

Вернемся теперь к исходной задаче с точки зрения минимального расхода энергии по направлению «спуска-подъема». Поскольку работа на спуске и подъеме отличается знаком, то средняя эффективность работы по переходу через экстремум будет определяться уже *вторым симметрическим разностным отношением*

$$\frac{1}{2t} \left( \frac{\Phi(y + th) - \Phi(y)}{t} - \frac{\Phi(y) - \Phi(y - th)}{t} \right) = \frac{\Phi(y + th) - 2\Phi(y) + \Phi(y - th)}{2t^2},$$

а предельная эффективность работы по переходу через точку минимума есть *вторая симметрическая производная*  $\Phi$  в точке  $y$  по направлению  $h$  ([1], [7], [10], [11]):

$$\partial^{[m]}\Phi(y)(h)^2 = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\Phi(y + th) - 2\Phi(y) + \Phi(y - th)}{2t^2}.$$

Поэтому естественным является следующее определение.

**Определение 5.** Направление  $h^* \in E$  назовем *направлением максимально эффективного перехода* (через точку  $y$ ), если

$$|\partial^{[m]}\Phi(y)(h^*)^2| = \min_{h \in E} |\partial^{[m]}\Phi(y)(h)^2|.$$

При этом  $|\partial^{[m]}\Phi(y)(h^*)^2|$  назовем *дефектом эффективности перехода* через точку  $y$ .

Здесь также, в случае отсутствия симметрической дифференцируемости второго порядка, можно ввести более общее определение наиболее эффективного перехода мы вводим локальный аналог известного в теории вероятностей понятия эксцесса (см. [5]).

**Определение 6.** Назовем *локальным эксцессом* функционала  $\Phi$  в точке  $y$  по направлению  $h$  следующий предел:

$$E\Phi(y)(h)^2 = \lim_{t \rightarrow +0} \left( \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \frac{\Phi(y + \tau h) - \Phi(y)}{\tau^2} d\tau \right).$$

Связь локального эксцесса с определением 5 вытекает из следующего утверждения.

**Теорема 8.** Если  $\Phi$  дважды симметрически дифференцируем в точке  $y$  по направлению  $h$ , то

$$E\Phi(y)(h)^2 = \partial^{[m]}\Phi(y)(h)^2.$$

*Доказательство.* Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \frac{\Phi(y + \tau h) - \Phi(y)}{\tau^2} d\tau &= \\ &= \frac{1}{2t} \int_0^t \frac{\Phi(y + \tau h) - \Phi(y)}{\tau^2} d\tau + \frac{1}{2t} \int_t^0 \frac{\Phi(y - \tau h) - \Phi(y)}{\tau^2} (-d\tau) = \\ &= \frac{1}{2t} \int_0^t \frac{\Phi(y + \tau h) - 2\Phi(y) + \Phi(y - \tau h)}{\tau^2} d\tau = \frac{\Delta_2\Phi(y, \theta h)}{2\theta^2}, \quad \text{где } \theta \in [0; t]. \end{aligned}$$

Отсюда, при  $t \rightarrow 0$ :

$$\frac{1}{2t} \int_{-t}^t \frac{\Phi(y + \tau h) - \Phi(y)}{\tau^2} d\tau \rightarrow \Phi^{[m]}(y)(h)^2.$$

□

Таким образом, мы можем заменить определение 5 более общим.

**Определение 7.** Направление  $h^* \in E$  назовем направлением максимальной эффективности перехода через точку  $y$ , если

$$|E\Phi(y)(h^*)^2| = \min_{h \in E} |E\Phi(y)(h)^2|.$$

#### 4. Многозначные аналоги асимметрии и эксцесса

Здесь мы опираемся на понятие многозначного *субпредела*, введенное и изученное в работах [7]-[9]. Для простоты, приведем определение только в случае функционалов. Далее  $\Psi : E \supset U(y) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E$  – банахово пространство,  $h$  – направление в  $E$ , символы  $\underline{\lim}$  и  $\overline{\lim}$  обозначает, соответственно, нижний и верхний пределы.

**Определение 8.** Зададим *субпредел* функционала  $\Psi$  в точке  $y$  по направлению  $h$  равенством

$$\text{sublim}_{t \rightarrow +0} \Psi(y + th) = \left[ \underline{\lim}_{t \rightarrow +0} \Psi(y + th); \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \Psi(y + th) \right], \tag{4.1}$$

при условии, что оба предела справа в (4.1) конечны. Субпредел (4.1) назовем *сильным*, если он является сублинейным по  $h$  ограниченным суб-функционалом (см. [7], [8]), и сходимость в (4.1) равномерна по  $\|h\| \in 1$ .

Заменяя теперь в определениях 3 и 6 пределы на субпределы, мы приходим к требуемым понятиям.

**Определение 9.** Назовем *локальной суб-асимметрией* функционала  $\Phi$  в точке  $y$  по направлению  $h$  следующий субпредел:

$$A_{sub}\Phi(y, h) = \text{sublim}_{t \rightarrow +0} \left( \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \frac{\Phi(y + \tau h) d\tau}{\tau} \right).$$

Соответственно, назовем *локальным суб-эксцессом* функционала  $\Phi$  в точке  $y$  по направлению  $h$  следующий субпредел:

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2 = \text{sublim}_{t \rightarrow +0} \left( \frac{1}{t} \int_{-t}^t \frac{\Phi(y + \tau h) - \Phi(y)}{\tau^2} d\tau \right).$$

Из определения 9 и предыдущих результатов вытекает следующая теорема.

**Теорема 9.** *Справедливы оценки:*

$$A_{sub}\Phi(y, h) \subset [\underline{\partial}^{[l]}\Phi(y, h), \overline{\partial}^{[l]}\Phi(y, h)];$$

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset [\underline{\partial}^{[l]}\Phi(y)(h)^2; \overline{\partial}^{[l]}\Phi(y)(h)^2].$$

## 5. Класс примеров

Рассмотрим достаточно обширный класс примеров.

*Пример 4.* Пусть

$$\Phi(y) = \int_{-a}^a \varphi \left( \frac{y' + y}{\alpha} \right) dx; \quad \left( f(x, y, z) = \varphi_1 \left( \frac{y + z}{\alpha} \right) + \varphi_2 \left( \frac{y + z}{\alpha} \right), \varphi \in C_{sub}^2 \right),$$

где

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t),$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^t s \sin \frac{1}{s} ds, \quad \varphi_2(t) = -\frac{t|t|}{4},$$

$$\varphi(t) = \int_0^t s \sin \frac{1}{s} ds - \frac{t|t|}{4}.$$

Тогда

$$\varphi'(t) = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t} - \frac{|t|}{2}, & t \neq 0; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$



$$f_y(x, y, z) = f_z(x, y, z) = \begin{cases} \psi(x, y, z) = \frac{1}{\alpha} \cdot \varphi' \left( \frac{y+z}{\alpha} \right), & y+z \neq 0; \\ 0, & y+z = 0. \end{cases}$$

Уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$\left[ \begin{array}{l} \psi(x, y, y') - \frac{d}{dx}(\psi(x, y, y')) = 0, \quad y + y' \neq 0; \\ y + y' = 0. \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \psi(x, y, y') = c \cdot e^x; \\ y + y' = 0. \end{array} \right.$$

Положим  $c = 0$ :

$$\left[ \begin{array}{l} \varphi' \left( \frac{y+y'}{\alpha} \right) = 0; \\ y + y' = 0. \end{array} \right.$$

Рассмотрим уравнение  $\varphi'(t) = 0$ , т.е.

$$\left[ \begin{array}{l} \sin \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \text{sign } t, \quad t \neq 0; \\ t = 0. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

При  $t > 0$  первое уравнение системы имеет, в частности, решения

$t_k = \frac{1}{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Таким образом, система (5.1) имеет решения  $t_k$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ ):

$$t_k = \frac{1}{\frac{\pi}{6} + 2k\pi} \quad (k > 0), \quad t_0 = 0.$$

Тогда систему (5.1) можно записать в виде:

$$y' + y = t_k \cdot \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0).$$

Рассмотрим класс экстремалей вида  $y_{ij}$  ( $i, j \in \mathbb{N}_0$ ), удовлетворяющих условию:

$$y_{ij}(x) : \left[ \begin{array}{l} y' + y = t_i \cdot \alpha \quad (-a < x < 0); \\ y' + y = t_j \cdot \alpha \quad (0 < x < a). \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Легко проверить условие « $C^1$ -склеивания» в нуле (при  $i \neq j$ ) для системы (5.2):

$\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$ . Перейдем к условиям второго порядка:

$$\left[ \begin{array}{l} \varphi''(t) = \sin \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \text{sign } t, \quad t \neq 0; \\ \varphi''_{sub}(0) = [-2; 2], \quad t = 0. \end{array} \right.$$

Условие Лежандра на экстремалиях  $y_{ij}(\cdot)$  (при  $i \neq j$ ) принимает вид:

$$\begin{cases} f_{z^2}(x, y, y') = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi''\left(\frac{y+z}{\alpha}\right) & y+z \neq 0; \\ \left(f_{z^2}\right)_{sub}(x, y, y') = [-2; 2], & y+z = 0; \end{cases}$$

$$f_{z^2}(x, y, y') = \begin{cases} (f_{z^2}(x, y, y'))|_{y_{ij}} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi''(t_i) < 0, & -a < x < 0; \\ (f_{z^2}(x, y, y'))|_{y_{ij}} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi''(t_j) < 0, & 0 < x < a; \end{cases}$$

при  $i, j \neq 0$ .

Таким образом,  $f_{z^2}(x, y, y')|_{y_{ij}} < 0$  ( $y + y' \neq 0$ ).

Поскольку, в силу (5.2),  $y_{ij} + y'_{ij} > 0$  при  $x \neq 0$ , то суб-условие Лежандра выполнено для максимума при  $x \neq 0$ .

Достижение максимума в точках  $y_{ij}$  для  $\Phi$  можно проверить непосредственно:

$$\varphi\left(\frac{y+y'}{\alpha}\right)\Big|_{y_{ij}} = \begin{cases} (f_{z^2}(x, y, y'))|_{y_{ij}} = \varphi(t_i), & -a < x < 0; \\ (f_{z^2}(x, y, y'))|_{y_{ij}} = \varphi(t_j), & 0 < x < a; \end{cases}$$

Следовательно,

$$\Phi(y_{ij}) = a \cdot (\varphi(t_i) + \varphi(t_j)).$$

При этом, поскольку  $\varphi'(t_i) = \varphi'(t_j) = 0$  и  $\varphi''(t_i), \varphi''(t_j) < 0$ , то  $t_i, t_j$  – точки максимума  $\varphi$ .

Следовательно, для малой  $\|y - y_{ij}\|_{C^1}$  будет равномерно малым и отклонение  $\left|\frac{y+y'}{\alpha} - t_i\right|$  ( $x > 0$ ),  $\left|\frac{y+y'}{\alpha} - t_j\right|$  ( $x < 0$ ), откуда  $\varphi\left(\frac{y+y'}{\alpha}\right) < \varphi\left(\frac{y+y'}{\alpha}\right)\Big|_{y_{ij}}$ , т.е.  $\Phi \mapsto \max$  в точках  $y_{ij}$ .

### Вычисление асимметрии.

Так как  $\varphi \in C^1$ , следовательно,  $\Phi \in C^1$ , то

$$A\Phi(y_{ij})h = \partial^{[l]}\Phi(y_{ij})h = \partial\Phi(y_{ij})h = 0.$$

Таким образом, во всех точках экстремума вида  $y_{ij}$  асимметрия по любому направлению  $h$  равна нулю.

### Вычисление эксцесса.

Так как  $\varphi$  нечетна, то

$$\varphi^{[n]}(t) = \begin{cases} \varphi''(t) = \sin \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \text{sign } t, & t \neq 0; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Отсюда (при  $i, j \neq 0$ ):

$$f_{y^2}^{[m]}(x, y, y') = f_{z^2}^{[m]}(x, y, y') = f_{yz}^{[m]}(x, y, y') = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} \varphi''\left(\frac{y+y'}{\alpha}\right), & y+y' \neq 0; \\ 0, & y+y' = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f_{y^2}^{[m]}(x, y, y') \Big|_{y_{ij}} = f_{yz}^{[m]}(x, y, y') \Big|_{y_{ij}} = f_{z^2}^{[m]}(x, y, y') \Big|_{y_{ij}} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi''(t_i), & -a < x < 0; \\ \frac{1}{\alpha^2} \cdot \varphi''(t_j), & 0 < x < a. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} |E\Phi(y_{ij})(h)^2| &= \left| \int_{-a}^0 \varphi''(t_i)(h+h')^2 \frac{dx}{\alpha^2} + \int_0^a \varphi''(t_j)(h+h')^2 \frac{dx}{\alpha^2} \right| = \\ &= \left( \frac{\pi}{6} + 2\pi i \right) \int_{-a}^0 (h+h')^2 \frac{dx}{\alpha^2} + \left( \frac{\pi}{6} + 2\pi j \right) \int_0^a (h+h')^2 \frac{dx}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, минимальное значение эксцесса достигается по направлениям  $h$ :  $h+h' = 0$  ( $E\Phi(y_{ij})(h)^2 = 0$ ).

## Заключение

В работе исследована задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума функционала. Показано, что задача сводится к поиску направления, минимизирующего, соответственно первый, либо второй симметрический дифференциал, а в более общем случае — направления, минимизирующего, соответственно, локальную асимметрию либо локальный эксцесс. Рассмотрена также многозначная версия исследования, использующая, соответственно, первой симметрический субдифференциал (либо суб-асимметрию), либо второй симметрический субдифференциал (либо суб-эксцесса). Рассмотрен класс примеров исследования задачи для вариационных функционалов с негладкими интегрантом.

Автор выражает благодарность профессору Орлову И. В. за постановку задачи и полезные обсуждения.

### Список цитируемых источников

1. *Бари, Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматлит, 1961. — 936 с.  
Bari, N. K. (1967). Trigonometric Series. New York: Holt, Rinehart and Winston.
2. *Демьянов, В. Ф., Малозёмов, В. Н.* Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 368 с.  
Demyanov, V. F., Malozyomov, V. N. (1972). Introduction to minimax (in Russian). Moscow: Nauka.

3. Демьянов, В. Ф., Рубинов, А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990. — 431 с.  
Demyanov, V. F., Rubinov, A. M. (1990). Fundamentals of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus (in Russian). Moscow: Nauka.
4. Демьянов, В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. — М.: Высшая школа, 2005. — 335 с.  
Demyanov, V. F. (2005). Extremum conditions and the calculus of variations (in Russian). Moscow: Vysshaya shkola.
5. Крамер, Г. Математические методы статистики. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 648 с.  
Cramer, H. (1962). Mathematical Methods of Statistics. Princeton: Princeton University Press.
6. Нестеров, Ю. Е. Введение в выпуклую оптимизацию. — М.: МЦНМО, 2010. — 262 с.  
Nesterov, Yu. E. (2010). Introduction to convex optimization (in Russian). Moscow: MCNMO.
7. Орлов, И. В., Баран, И. В. Введение в сублинейный анализ — 2: симметрический вариант. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2015. — Т. 57. — С. 108–161.  
Orlov, I. V., Baran, I. V. (2017). Introduction to Sublinear Analysis — 2: Symmetric Case. Journal of Mathematical Sciences, 225, 265-321.
8. Орлов, И. В. Введение в сублинейный анализ. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2014. — Т. 53. — С. 64–132.  
Orlov, I. V. (2016). Introduction to sublinear analysis. Journal of Mathematical Sciences, 218, 430-502.
9. Орлов, И. В., Стонякин, Ф. С. Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — Т. 34. — С. 121–138.  
Orlov, I. V., Stonyakin, F. S. (2010). Compact subdifferentials: the formula of finite increments and related topics. Journal of Mathematical Sciences 170, 251–269.
10. Фиктенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2001. — 616 с.  
Fikhtengolts, G. M. (2001). Course of differential and integral calculus (in Russian). Moscow: Fizmatlit.
11. Orlov, I. V., Baran, I. V. (2017). Adjoint extremal problem for non-smooth functionals. 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 1-4.
12. Orlov, I. V. (2017). Subdifferentials via sub-operators. 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 1-4.

Получена 31.08.2016

УДК 517:957

# Дисперсионные спектры кристаллической решетки с псевдопериодическими дефектами<sup>1</sup>

А. И. Шевченко, А. С. Мазинов, В. А. Лукьяненко,  
В. Б. Орленсон

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь. *E-mail*: art-inf@yandex.ru

**Аннотация.** Рассмотрена возможность применения теории возмущения для построения зонных диаграмм кристаллической решетки, имеющей дефектную составляющую. Предложенная модель расчета зонной структуры для равномерно легированных полупроводников или полупроводников с периодически встречающимися дефектами основана на введении изменяющейся амплитуды прямоугольных барьеров и соответствующей модификации функции Блоха. Получены дифференциальные уравнения и их решения, позволяющие определить волновую функцию как параметрический функционал, зависящий от соотношения дефектных и основных атомов решетки. Подстановкой параметров реальных полупроводниковых материалов в выведенное трансцендентное уравнение показано изменение дисперсионной картины при внесении заданного количества примесных атомов.

**Ключевые слова:** дефектная кристаллическая решетка, аналитический подход, блоховская волновая функция, дифференциальные уравнения, квантовая яма, потенциальный барьер, характеристическое уравнение, дисперсионная картина, зонная диаграмма.

## Dispersion spectra of a crystal lattice with pseudoperiodic defects

A. I. Shevchenko, A. S. Mazinov, V. A. Lukianenko, V. B. Orlenson

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** The ability to use perturbation theory for the description of the band diagram construction for the crystal lattice, which has a defective component, has been considered. A model for calculation of band structure for uniformly doped semiconductors or semiconductors with periodic defects has been proposed by the introducing of varying amplitude of rectangular barriers and the corresponding modification of the Bloch function. The differential equations and their solutions, allowing to determine the form of the wave function as a function of the parameters, depending on the ratio of defective and fundamental lattice atoms, have been obtained. We have derived a transcendental equation, on the basis of which by substituting the actual parameters of semiconductor materials the change in the dispersion pattern has been shown when a predetermined number of impurity atoms was inserted.

<sup>1</sup>Статья подготовлена в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности, выполняемого Научно-образовательным центром ноосферологии и устойчивого ноосферного развития ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского» (№ гос. регистрации: 115052150083).

**Keywords:** defective crystal lattice, analytical approach, wavefunctions of Bloch wavefunction of electrons, differential equations, quantum well, potential barrier, characteristic equation, dispersion pattern, band diagram

**MSC 2010:** 35K55

## 1. Общие соображения и предпосылки

Шагнув за порог стонанометрового предела, современная прикладная физика конденсированного состояния как никогда ранее нуждается в точных математических моделях, позволяющих описывать атомную структуру материала. Теория возмущения является мощным инструментом, дающим возможность глубокого понимания процессов, происходящих в твердотельной системе [1], [2], и рассмотрения с различных позиций существующей квантовой картины [3]. Однако первой сложностью при составлении модельного представления реальных структур является наличие границ раздела или переходов, нарушающих монопериодичность [4]. Значительное усложнение базовых дифференциальных уравнений [5] при этом требует применения специализированных преобразований Фурье, громоздких трансфер-матриц [6], [7] и т. д. А наличие кластеров, дефектов или даже легирующих примесей [8], [9] существенно усложняет решения уравнения Шредингера [10]–[12], за которыми сложно увидеть реальные объекты.

Поиск оптимальных упрощений постановки задачи сводится к формулировке ряда допущений, которые позволяют посредством теории возмущения получить красивые и стройные дисперсионные картины атомного мира твердотельной системы [13], определить фундаментальные свойства материалов, дающие возможность выстраивать энергетические спектры многослойных приборов [14].

## 2. Описание неоднородности

Исходя из вышеприведенных предпосылок, в данной работе, с учетом сопоставления модельных представлений с экспериментальными результатами, представлена попытка расчета дисперсионных спектров материалов, атомная симметрия которых отлична от монокристаллической [15]. Сложность построения неупорядоченных конденсированных систем предлагается описывать пошаговым подходом, в котором за базу берется классический самосопряженный оператор одноатомной цепочки с дополнительным членом, вносящим отклонение от периодической симметрии, как например в [16]. Само возмущение упрощается до прямоугольных барьеров (ям) [13], [17]–[19], но без предельного представления в виде  $\delta$ -образных функций [13], [17].

В качестве физических допущений принято предположение о периодичности дефектов. Естественно, в реальных немонокристаллических материалах подобное возмущение носит определенный хаотический характер, однако с некоторой точностью можно утверждать о наличии псевдопериодичности поликристаллов, равномерно легированных полупроводников, CVD пленок и т. п. Такое предположение дает возможность считать, что атомное возмущение от встроенного чужеродного элемента плавно спадает симметрично относительно его координаты.

Следовательно, дефектное возмущение представляется периодически возрастающей и убывающей зависимостью, которая в случае однотипных дефектов транслируется по бесконечной цепочке базовой решетки. Наиболее простым видом подобной функции является косинусоидальное или синусоидальное изменение амплитуды потенциала. Описать в общем виде такое изменение можно посредством внесения дополнительных членов в уравнение движения квантовой частицы, например в [20], [21], но с учетом линейности одномерного пространства. То есть взамен постоянному потенциалу  $V_0$  стандартной теории вводится периодический член  $V_0 \cos(nkx)$ . Уравнение взаимодействия для движущегося электрона в этом случае можно записать как:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V \cos(nkx)) \psi = 0.$$

Стандартное решение в невозмущенной области также следует искать как падающую и отраженную волны [22], [23]. Можно предположить, что периодическое возмущение системы будет влиять на движущийся электрон. То есть его волновая функция отчасти будет повторять геометрию поля, вдоль которого он движется. Следовательно, перенос функциональной зависимости потенциала на электронный волновой пакет позволит представить его как стандартную блоховскую функцию с дополнительным множителем (1). Последний должен отвечать за медленное изменение амплитуды, только теперь электронной волны, которая записывается как произведение трех сомножителей. Первые два — традиционные для классической модели, третий сомножитель отвечает за медленный спад и нарастание в системе [24]:

$$\psi = U(x) \exp(ikx) \cos(nkx). \quad (1)$$

При этом медленное и слабое изменение возмущения атомных остовов можно считать незначительным.

Полагая, что концентрация примеси намного меньше основных атомов решетки, то есть  $n \ll 1$ , можно принять, что амплитуда потенциала в пределах одного периода решетки постоянна, а, следовательно, на границе раздела барьер-яма справедливо условие равенства потенциалов  $V(a) = V(-b)$ .

В силу того, что потенциал имеет вид чередующихся ям и барьеров, формируем дифференциальные уравнения отдельно для электрона, находящегося в яме и отдельно для электрона, движущегося через барьер. Справедливы утверждения.

**Утверждение 1.** В случае потенциальной ямы  $V = 0$ ,  $0 < x < a$  получаем дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \cos(nkx) \frac{d^2U(x)}{dx^2} + 2k [i \cos(nkx) - n \sin(nkx)] \frac{dU(x)}{dx} - [k^2 (\cos(nkx) + \\ + 2in \sin(nkx) + n^2 \cos(nkx)) - \alpha^2 \cos(nkx)] U(x) = 0, \end{aligned}$$

где  $\alpha^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2}$  ( $m_e$  — масса электрона,  $E$  — энергия,  $\hbar$  — постоянная Дирака).

Решением данного уравнения будет функция вида

$$U_1(x) = \frac{A \exp(i(\alpha - k)x)}{\cos(nkx)} + \frac{B \exp(-i(\alpha + k)x)}{\cos(nkx)}, \quad (2)$$

где  $A, B$  — произвольные постоянные.

**Утверждение 2.** Для потенциального барьера,  $V = V_0$ ,  $-b < x < 0$ , справедливо дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \cos(nkx) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + 2k [i \cos(nkx) - n \sin(nkx)] \frac{dU(x)}{dx} - [k^2 (\cos(nkx) + \\ + 2in \sin(nkx) + n^2 \cos(nkx)) + \beta^2 \cos(nkx)] U(x) = 0, \end{aligned}$$

где  $\beta^2 = \frac{2m_e(V_0 - E)}{\hbar^2}$ .

Решением данного уравнения будет функция вида

$$U_2(x) = \frac{C \exp((\beta - ik)x)}{\cos(nkx)} + \frac{D \exp(-(\beta + ik)x)}{\cos(nkx)}, \quad (3)$$

где  $C, D$  — произвольные постоянные.

Действительно, справедливость дифференциальных уравнений следует из подстановки волновой функции в уравнение Шредингера [25]–[29] и выражений для первой производной

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} = \exp(ikx) \left( \frac{dU}{dx} + ikU \right) \cos(nkx) - U \exp(ikx) \cdot n \cdot k \cdot \sin(nkx) = \exp(ikx) \cdot \\ \cdot \left[ \cos(nkx) \left( \frac{dU}{dx} + ikU \right) - nk \sin(nkx) U \right] \end{aligned}$$

и второй производной волновой функции

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = ik \exp(ikx) \left[ \cos(nkx) \left( \frac{dU}{dx} + ikU \right) - nk \sin(nkx) U \right] + \\ + \exp(ikx) \left[ \frac{d^2 U}{dx^2} \cos(nkx) + \frac{dU}{dx} \cdot (-2nk \sin(nkx) + ik \cos(nkx)) - \right. \\ \left. - Unk^2 (i \sin(nkx) + n \cos(nkx)) \right] = \\ = \exp(ikx) \left[ i \cos(nkx) \frac{dU}{dx} - k^2 \cos(nkx) U - ink^2 \sin(nkx) U + \right. \\ + \frac{d^2 U}{dx^2} \cos(nkx) - 2nk \sin(nkx) \frac{dU}{dx} + ik \cos(nkx) \frac{dU}{dx} - \\ \left. - ink^2 \sin(nkx) U - n^2 k^2 \cos(nkx) U \right] = \end{aligned}$$



$$= \exp(ikx) \left[ \frac{d^2U}{dx^2} \cos(nkx) + 2k(i \cos(nkx) - n \sin(nkx)) \frac{dU}{dx} - k^2 (\cos(nkx) + 2in \sin(nkx) + n^2 \cos(nkx)) U \right].$$

Воспользовавшись принятым упрощением, что амплитуда возмущения изменяется намного медленнее прямоугольного потенциала, допускаем равенство амплитуд соседних потенциалов. Следовательно, как и в классическом случае применяются следующие условия сшивки для функций  $U_1(x)$  (2) и  $U_2(x)$  (3):

$$U_1(0) = U_2(0); U'_1(0) = U'_2(0); U_1(a) = U_2(-b); U'_1(a) = U'_2(-b).$$

Из вида первых производных функций  $U_1(x)$  и  $U_2(x)$

$$U'_1(x) = \frac{iA(\alpha - k) \exp(i(\alpha - k)x)}{\cos(nkx)} + \frac{Ank \exp(i(\alpha - k)x) \sin(nkx)}{\cos^2(nkx)} - \frac{iB(\alpha + k) \exp(-i(\alpha + k)x)}{\cos(nkx)} + \frac{Bnk \exp(-i(\alpha + k)x) \sin(nkx)}{\cos^2(nkx)},$$

$$U'_2(x) = \frac{C(\beta - ik) \exp((\beta - ik)x)}{\cos(nkx)} + \frac{Cnk \exp((\beta - ik)x) \sin(nkx)}{\cos^2(nkx)} + \frac{D(-\beta - ik) \exp(-(\beta + ik)x)}{\cos(nkx)} + \frac{Dnk \exp(-(\beta + ik)x) \sin(nkx)}{\cos^2(nkx)},$$

находим при  $x = 0$ :

$$U_1(0) = \frac{A \exp(0)}{\cos(0)} + \frac{B \exp(0)}{\cos(0)} = A + B,$$

$$U_2(0) = \frac{C \exp(0)}{\cos(0)} + \frac{D \exp(0)}{\cos(0)} = C + D,$$

$$U'_1(0) = \frac{iA(\alpha - k) \exp(0)}{\cos(0)} + \frac{Ank \exp(0) \sin(0)}{\cos^2(0)} - \frac{iB(\alpha + k) \exp(0)}{\cos(0)} + \frac{Bnk \exp(0) \sin(0)}{\cos^2(0)} = iA(\alpha - k) - iB(\alpha + k),$$

$$U'_2(0) = \frac{C(\beta - ik) \exp(0)}{\cos(0)} + \frac{Cnk \exp(0) \sin(0)}{\cos^2(0)} + \frac{D(-\beta - ik) \exp(0)}{\cos(0)} + \frac{Dnk \exp(0) \sin(0)}{\cos^2(0)} = C(\beta - ik) + D(-\beta - ik).$$

При  $x = a$ :

$$U_1(a) = \frac{A \exp(i(\alpha - k)a)}{\cos(nka)} + \frac{B \exp(-i(\alpha + k)a)}{\cos(nka)},$$

$$U_1'(a) = \frac{iA(\alpha - k) \exp(i(\alpha - k)a)}{\cos(nka)} + \frac{Ank \exp(i(\alpha - k)a) \sin(nka)}{\cos^2(nka)} - \\ - \frac{iB(\alpha + k) \exp(-i(\alpha + k)a)}{\cos(nka)} + \frac{Bnk \exp(-i(\alpha + k)a) \sin(nka)}{\cos^2(nka)}.$$

При  $x = -b$ :

$$U_2(-b) = \frac{C \exp(-(\beta - ik)b)}{\cos(nkb)} + \frac{D \exp((\beta + ik)b)}{\cos(nkb)}, \\ U_2'(-b) = \frac{C(\beta - ik) \exp(-(\beta - ik)b)}{\cos(nkb)} - \frac{Cnk \exp(-(\beta - ik)b) \sin(nkb)}{\cos^2(nkb)} + \\ + \frac{D(-\beta - ik) \exp((\beta + ik)b)}{\cos(nkb)} - \frac{Dnk \exp((\beta + ik)b) \sin(nkb)}{\cos^2(nkb)}.$$

Подставляем полученные выражения в условия сшивки, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно  $A, B, C, D$ :

$$A + B - C - D = 0,$$

$$iA(\alpha - k) - iB(\alpha + k) - C(\beta - ik) - D(-\beta - ik) = 0, \\ \frac{A \exp(i(\alpha - k)a)}{\cos(nka)} + \frac{B \exp(-i(\alpha + k)a)}{\cos(nka)} - \frac{C \exp(-(\beta - ik)b)}{\cos(nkb)} - \frac{D \exp((\beta + ik)b)}{\cos(nkb)} = 0, \\ \frac{iA(\alpha - k) \exp(i(\alpha - k)a)}{\cos(nka)} + \frac{Ank \exp(i(\alpha - k)a) \sin(nka)}{\cos^2(nka)} - \\ - \frac{iB(\alpha + k) \exp(-i(\alpha + k)a)}{\cos(nka)} + \frac{Bnk \exp(-i(\alpha + k)a) \sin(nka)}{\cos^2(nka)} - \\ - \frac{C(\beta - ik) \exp(-(\beta - ik)b)}{\cos(nkb)} + \frac{Cnk \exp(-(\beta - ik)b) \sin(nkb)}{\cos^2(nkb)} - \\ - \frac{D(-\beta - ik) \exp((\beta + ik)b)}{\cos(nkb)} + \frac{Dnk \exp((\beta + ik)b) \sin(nkb)}{\cos^2(nkb)} = 0.$$

В операторном виде  $MX = 0$ , где  $X = (A, B, C, D)^T$ .

Элементы матрицы  $M$  обозначим  $m_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, 4}$ , они будут равны:

$$m_{11} = m_{12} = 1, m_{13} = m_{14} = -1, \\ m_{21} = i(\alpha - k), m_{22} = -i(\alpha + k), m_{23} = -\beta + ik, m_{24} = \beta + ik, \\ m_{31} = \frac{\exp(i(\alpha - k)a)}{\cos(nka)}, m_{32} = \frac{\exp(-i(\alpha + k)a)}{\cos(nka)}, \\ m_{33} = -\frac{\exp(-(\beta - ik)b)}{\cos(nkb)}, m_{34} = -\frac{\exp((\beta + ik)b)}{\cos(nkb)},$$

$$\begin{aligned}
m_{41} &= \frac{i(\alpha - k) \exp(i(\alpha - k)a)}{\cos(nka)} + \frac{nk \sin(nka) \exp(i(\alpha - k)a)}{\cos^2(nka)}, \\
m_{42} &= -\frac{i(\alpha + k) \exp(-i(\alpha + k)a)}{\cos(nka)} + \frac{nk \sin(nka) \exp(-i(\alpha + k)a)}{\cos^2(nka)}, \\
m_{43} &= -\frac{(\beta - ik) \exp(-(\beta - ik)b)}{\cos(nkb)} + \frac{nk \sin(nkb) \exp(-(\beta - ik)b)}{\cos^2(nkb)}, \\
m_{44} &= \frac{(\beta + ik) \exp((\beta + ik)b)}{\cos(nkb)} + \frac{nk \sin(nkb) \exp((\beta + ik)b)}{\cos^2(nkb)}.
\end{aligned}$$

Разрешимость СЛАУ определяется равенством нулю определителя  $\Delta = \det M = 0$ .

Определитель матрицы  $M$ , найденный с использованием ППП «Maple», в виду его громоздкости приводить не будем. После ряда упрощений и дополнительного использования ППП «Mathematica» определитель принимает следующую форму:

$$\begin{aligned}
\Delta &= -4i \exp(-2ika) (\alpha\beta (\exp(2i(a+b)k) \cos^2(nka) + \cos^2(nkb)) + \\
&\quad + \exp(i(a+b)k) [-\beta \cosh(\beta b) \cdot (2\alpha \cos(nka) \cos(nkb) \cos(\alpha a) + \\
&\quad + nk \sin(nk(a+b)) \sin(\alpha a)) + (-nk\alpha \cos(\alpha a) \sin(nk(a+b)) + \\
&\quad + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \cos(nka) \cos(nkb) \sin(\alpha a)) \sinh(\beta b)]).
\end{aligned}$$

После дальнейших упрощений и приравнивания детерминанта нулю получим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta [\exp(2i(a+b)k) \cos^2(nka) + \cos^2(nkb)] + \\
&+ \exp(i(a+b)k) [-\beta \cosh(\beta b) (2\alpha \cos(nka) \cos(nkb) \cos(\alpha a) + nk \sin(nk(a+b)) \sin(\alpha a)) + \\
&+ (-nk\alpha \sin(nk(a+b)) \cos(\alpha a) + (\alpha^2 - \beta^2) \cos(nka) \cos(nkb) \sin(\alpha a)) \sinh(\beta b)] = 0.
\end{aligned}$$

Поделив на  $\exp(i(a+b)k)$ , получим:

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta [\exp(i(a+b)k) \cos^2(nka) + \exp(-i(a+b)k) \cos^2(nkb)] - \\
&\quad - 2\alpha\beta \cos(nka) \cos(nkb) \cos(\alpha a) \cosh(\beta b) - \\
&\quad - nk\beta \sin(nk(a+b)) \sin(\alpha a) \cosh(\beta b) - nk\alpha \sin(nk(a+b)) \cos(\alpha a) \sinh(\beta b) - \\
&\quad - (\beta^2 - \alpha^2) \cos(nka) \cos(nkb) \sin(\alpha a) \sinh(\beta b) = 0.
\end{aligned}$$

Сформируем левую и правую часть с учетом стандартной модели. В правую часть переносим слагаемые, содержащие лишь  $k$  и не зависящие от энергии, умноженные на  $\alpha\beta$ :

$$\begin{aligned}
&2\alpha\beta \cos(nka) \cos(nkb) \cos(\alpha a) \cosh(\beta b) + nk\beta \sin(nk(a+b)) \sin(\alpha a) \cosh(\beta b) + \\
&+ nk\alpha \sin(nk(a+b)) \cos(\alpha a) \sinh(\beta b) + (\beta^2 - \alpha^2) \cos(nka) \cos(nkb) \sin(\alpha a) \sinh(\beta b) =
\end{aligned}$$

$$= \alpha\beta \left[ \exp(i(a+b)k) \cos^2(nka) + \exp(-i(a+b)k) \cos^2(nkb) \right].$$

Далее вынесем синус произведения  $nk(a+b)$  и множитель  $nk$  за общие скобки и упрощаем равенство до:

$$\begin{aligned} & 2\alpha\beta \cos(nka) \cos(nkb) \cos(\alpha a) \cosh(\beta b) + nk \sin(nk(a+b)) \cdot \\ & \quad \cdot (\alpha \cos(\alpha a) \sinh(\beta b) + \beta \sin(\alpha a) \cosh(\beta b)) + \\ & \quad + (\beta^2 - \alpha^2) \cos(nka) \cos(nkb) \sin(\alpha a) \sinh(\beta b) = \\ & = \alpha\beta \left[ \exp(i(a+b)k) \cos^2(nka) + \exp(-i(a+b)k) \cos^2(nkb) \right]. \end{aligned}$$

Для реальной части последнего уравнения (мнимая часть не дает зависимость  $E(k)$ ) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & 2\alpha\beta \cos(nka) \cos(nkb) \cos(\alpha a) \cosh(\beta b) + nk \sin(nk(a+b)) \cdot \\ & \quad \cdot (\alpha \cos(\alpha a) \sinh(\beta b) + \beta \sin(\alpha a) \cosh(\beta b)) + \\ & \quad + (\beta^2 - \alpha^2) \cos(nka) \cos(nkb) \sin(\alpha a) \sinh(\beta b) = \\ & = \alpha\beta \cos(k(a+b)) (\cos^2(nka) + \cos^2(nkb)). \end{aligned}$$

Это выражение упростим путём раскрытия синуса суммы:

$$\begin{aligned} & 2\alpha\beta \cos(nka) \cos(nkb) \cos(\alpha a) \cosh(\beta b) + nk(\sin(nka) \cos(nkb) + \cos(nka) \sin(nkb)) \cdot \\ & \cdot (\alpha \cos(\alpha a) \sinh(\beta b) + \beta \sin(\alpha a) \cosh(\beta b)) + (\beta^2 - \alpha^2) \cos(nka) \cos(nkb) \sin(\alpha a) \sinh(\beta b) = \\ & = \alpha\beta \cos(k(a+b)) (\cos^2(nka) + \cos^2(nkb)) \end{aligned}$$

и делением на произведение косинусов  $\cos(nka) \cos(nkb)$ :

$$\begin{aligned} & 2\alpha\beta \cos(\alpha a) \cosh(\beta b) + nk (\tan(nka) + \tan(nkb)) \cdot \\ & \quad \cdot (\alpha \cos(\alpha a) \sinh(\beta b) + \beta \sin(\alpha a) \cosh(\beta b)) + \\ & \quad + (\beta^2 - \alpha^2) \sin(\alpha a) \cdot \sinh(\beta b) = \alpha\beta \cos(k(a+b)) \left( \frac{\cos(nka)}{\cos(nkb)} + \frac{\cos(nkb)}{\cos(nka)} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Для большей наглядности разделим левую и правую части данной зависимости на произведение  $\alpha\beta$ , получим характеристическое уравнение вида:

$$\begin{aligned} & 2 \cos(\alpha a) \cosh(\beta b) + nk (\tan(nka) + \tan(nkb)) \cdot \\ & \quad \cdot \left( \frac{1}{\beta} \cos(\alpha a) \sinh(\beta b) + \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha a) \cosh(\beta b) \right) + \\ & \quad + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha\beta} \sin(\alpha a) \cdot \sinh(\beta b) = \cos(k(a+b)) \left( \frac{\cos(nka)}{\cos(nkb)} + \frac{\cos(nkb)}{\cos(nka)} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

которое легко в предельном случае при нулевом значении количества примесных центров (подстановка  $n = 0$ ) преобразуется в трансцендентное уравнение модели Кронига-Пенни.

### 3. Проверка истинности или прикладные аспекты

Дальнейшие упрощения (4) или (5) не приводят к изящной наглядной аналитической зависимости собственных значений от волнового числа. Однако современные математические пакеты (использовалась «Mathematica») позволяют построить параметрические зависимости правой и левой частей выражения характеристического уравнения (5) и решить его графически.

Вследствие исходных предположений наличие параметра  $n$  в (2), показывающего количественное описание дефектности, нарушает трансляционную симметрию и дает возможность отслеживать изменение энергетических зон в достаточно большом количестве обратных решеток. Характеристическое уравнение (2) позволяет, в отличие от полупериодных классических подходов, выстроить зонные диаграммы практически на всей протяженности наноструктурированного функционала, ограничиваясь лишь вычислительными мощностями. Поэтому первичной проверкой и физической интерпретацией применимости (5) является зануление параметра  $n$ . Построения энергетического спектра идеальных кристаллов, т. е.  $n = 0$ , дало периодичность параболических зон с прямолинейной интерполяцией энергетической щели  $E_g$  (рис. 1а).

Количественная проверка была осуществлена на основе кристаллического кремния, структура которого хорошо исследована, а сам материал является базовым в нанoeлектронике. К сожалению, нам не удалось найти прямых ссылок на расчетные энергетические параметры кремния, соответствующие представлениям квантовомеханического подхода. Поэтому в качестве исходных физических параметров взяты справочные данные и электронные ресурсы ведущих институтов, основные из которых — [30–33].

Следующим и довольно-таки неоднозначным стал вопрос определения реальных геометрических размеров квантовых ям и барьеров. К тому же необходимо учесть, что кремний, являясь полупроводником, имеет как чисто электронную природу проводимости, так и дырочную кинетику, которая по сути своей является движением связанных электронов и требует определения своих констант. За основу взята кубическая составляющая решетки кремния с периодом  $5,43 \text{ \AA}$  [31], барьерное и межбарьерное расстояние задавались подбором размеров ионов от  $Si^{4+}$ , равного  $0,78 \text{ \AA}$ , до диаметра в  $5,42 \text{ \AA}$  [33].

Также неоднозначным явился выбор потенциала, который в максимальном значении определяется энергией ионизации последнего электрона, равной  $206,15 \text{ eV}$  [33]. Однако в расчетах подобная амплитуда барьеров приводит к сплошной запрещенной зоне, и рассуждения о какой-либо дисперсионной картине априори отпадают. По этой же причине были просчитаны и отброшены энергии ионизации всех электронных оболочек, за исключением  $3s$  и  $3p$ -орбиталей. Разумный предел

амплитуд возмущений в рассматриваемом случае определялся промежутком от 8,15 eV (энергия ионизации первого атома [28]) до 1,12 eV (ширина щели кремния [32]). Особое внимание уделялось энергиям сродства электрона 4,05 eV [31] и его работы выхода 4,85 eV [30]. Диапазон рабочих масс лежал от  $1,46 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  (лёгкие дырки) до  $8,93 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  (продольные электроны) [31].

Таким образом, при нулевом значении дефектности в кристалле ( $n = 0$ ) построение трансцендентного уравнения (2) во всем диапазоне энергий, волновых чисел и геометрий атомной решетки кремния давало хорошее совпадение с классическим представлением модели Кронига-Пенни. Как пример, для высоты барьера в  $7,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , то есть 4,6 eV, и геометрии барьера и ямы  $b = l/7$ ,  $a = l - b$  при периоде решетки  $l = 5,43 \text{ \AA}$  ширина запрещенной зоны — константа в  $1,72 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  (рис. 1а). То есть значение энергетической щели в 1,08 eV имеет порядок, сравнимый с экспериментально подтвержденным значением в 1,12 eV [31], [18], [15]. Разницу в 0,04 eV стоит отнести к ошибке, вносимой неточностью задания формы потенциала и допущений в граничных условиях.

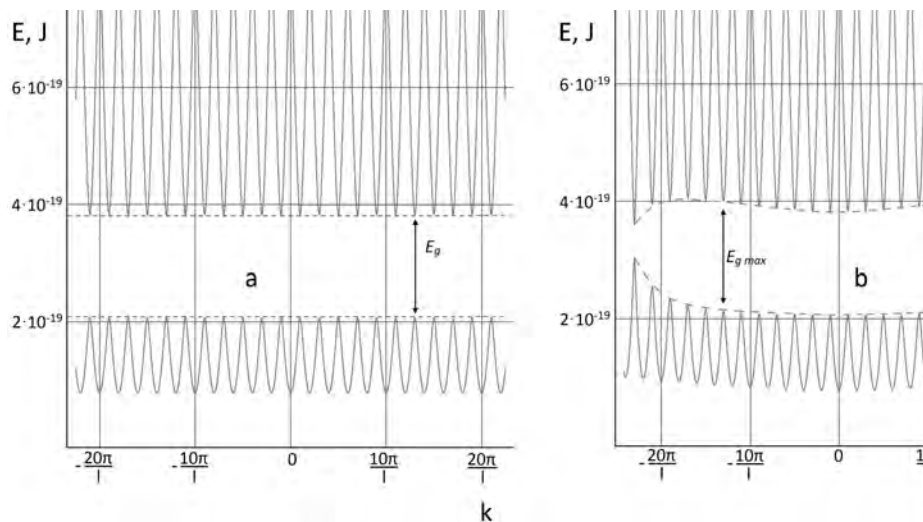


Рис. 1. Дисперсионная картина (а) бездефектного монокристалла. Изменение запрещенной зоны при внесении в кристалл дефектов (б).

Введение дефектов в монокристалл, т. е. возрастание параметра  $n$  до 0,02, дает заметное изменение запрещенной зоны для различных  $k$  (рис. 1б). При этом минимальное значение энергетической щели для  $Si$ , равное 0,30 eV, можно интерпретировать как энергию активации, определяемую измерениями высокотемпературной проводимости аморфного или нанокристаллического кремния. Максимальное значение, остающееся на прежнем уровне, может быть сопоставлено с оптической шириной запрещенной зоны все того же кремния. Дальнейшее увеличение количественной составляющей неоднородности в основной симметрии и возрастание  $n$  до 0,06 приводит к более быстрому изменению геометрии запрещенной зоны (рис. 2а).

Подобное представление неидеальности кристалла явно показывает, что с увеличением количества неоднородностей меняется зависимость энергии от волнового числа не только для одного атома, но также и для его ближайших соседей (рис. 2b).

В предельном случае, когда количество атомов примеси становится сопоставимым с атомами основной решётки, т. е.  $n = 0,5$ , наблюдается практически полное слипание зон — проводимости и валентной, что в свою очередь может быть сопоставимо с эффектом высоколегированных полупроводников, удельное сопротивление которых приближается к металлическому. Это также коррелируется с экспериментальными результатами изменения проводимости, размытия и смещения спектров поглощения полупроводников при введении примесных или дефектных центров [5], [15].

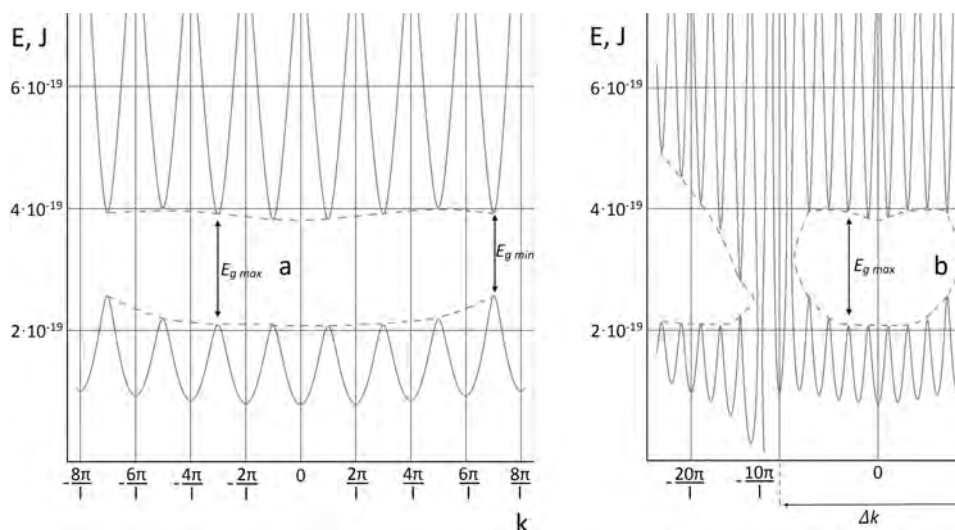


Рис. 2. Увеличение концентрации дефектов — (а,б) и слипание зон в области дефектов (б).

Отдельного внимания заслуживает слипание энергетических зон при рассмотрении нескольких периодов псевдопериодичности (рис. 2). Их частота зависит от отношения количества неоднородностей к количеству атомов основной решетки и поэтому соответствующие  $k$  могут быть интерпретированы как координаты дефектов. Хотя нашей целью было только получение отдельного локального уровня энергии, значение которого могло характеризовать конкретный дефектный центр.

#### 4. Заключение

Установленная корреляция с экспериментальными данными подтверждает возможность модельного представления неидеальности кристаллической решетки посредством введения встроенной подсимметрии. Это предположение позволяет описать изменения, вводимые чужеродными атомами, блоховской функцией с медленно меняющейся амплитудой. Введение количественного параметра  $n$  позволяет

проанализировать изменение дисперсионной картины в зависимости от увеличения количества дефектных атомов.

Особенностью подобного представления является возможность выстроить дисперсионную картину практически для любой бесконечной атомной решетки с наглядным представлением изменения энергии запрещенной зоны.

### Список цитируемых источников

1. *Ансельм А. И.* Введение в теорию полупроводников. — М.: Наука, 1978.  
Anselm A. I. Introduction to the Theory of Semiconductors. Nauka, Moscow, 1978. (in Russian)
2. *Сысоев В. М.* Теория возмущений и уравнение состояния плотных конденсированных сред // ТМФ. — т. 55, № 2 (1983). — С. 305-312.  
Sysoev V. M. Perturbation theory and equation of state for dense condensed medium. Theoret. and Math. Phys., vol. 55, iss. 2 (1983), P. 518-523.
3. *Шевченко А. И.* Модель Кронига-Пенни для описания нанокристаллических полупроводниковых материалов / А. И. Шевченко, А. С. Мазинов, В. Б. Орленсон, А. А. Шадрин, Р. А. Потапов // 25-я Международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо'2015). — Севастополь, 2015. — С. 701-702.  
Shevchenko A. I. The Kronig-Penney model for the description of nanocrystalline semiconductor materials / A. I. Shevchenko, A. S. Mazinov, V. B. Orlenson, A. A. Shadrin, R. A. Potapov // 25th Int. Crimean Conference «Microwave & Telecommunication Technology» (CriMiCo'2015). — Sevastopol, 2015. — P. 701-702. (in Russian)
4. *Behera S. N., Gayen S., Ravi Prasad G. V., Bose S. M.* Electronic properties of ordered and disordered linear clusters of atoms and molecules. Physica B, vol. 390, iss. 1-2 (2007), P. 124-133.
5. *Kong C., Hai K., Tan J., Chen H., Hai W.* A novel exact solution to transmission problem of electron wave in a nonlinear Kronig-Penney superlattice. Superlattice Microst., vol. 91 (2016), P. 129-137.
6. *Hernandez-Herrejon J. C., Izrailev F. M., Tessieri L.* Anomalous properties of the Kronig-Penney model with compositional and structural disorder. Physica E, vol. 40, iss. 10 (2008), P. 3137-3140.
7. *Hernandez-Herrejon J. C., Izrailev F. M., Tessieri L.* Electronic states and transport properties in the Kronig-Penney model with correlated compositional and structural disorder. Physica E., vol. 42, iss. 9 (2010), P. 2203-2210.
8. *Mazinov A.* The influence of defects on the energetic spectrum of noncrystalline semiconductors / A. S. Mazinov, A. I. Shevchenko, E. I. Terukov // JNO. — 2015. — Vol. 9, no. 6. — P. 778-782.
9. *Maksymowicz A. Z., Woloszyn M.* Density of states in structurally disordered 1D chains of atoms. J. Non-cryst. Solids, vol. 352, iss. 40-41 (2006), P. 4200-4205.
10. *Васин М. Г.* О некоторых деталях описания неупорядоченной конденсированной системы с помощью теории дефектных состояний ориентационного порядка. // ТМФ. — т. 161, № 2 (2009) — С. 267-277.



- Vasin M. G. Some details of the description of a disordered condensed system using the theory of defect states of orientational order // *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 161, iss. 2 (2009), P. 1549-1557. (in Russian)
11. Tkachuk V., Voznyak O. Quasi-exactly solvable periodic and random potentials. *Phys. Lett. A*, vol. 301, iss. 3-4, (2002), P. 177-183.
  12. Ковалевский М. Ю. Квазисредние в решении задачи классификации состояний равновесия конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией // *ТМФ*. — т. 160, № 2 (2009). — С. 290-303.  
Kovalevskii M. Yu. Quasi-averages in the solution of the classification problem for equilibria of condensed media with a spontaneously broken symmetry. *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 160, iss. 2 (2009), P. 1113-1123.
  13. Kronig R. de L., Penney W. G. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices. *Proceedings of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 130, iss. 814 (1931), P. 499-513.
  14. Alferov Z. I. Nobel Lecture: The double heterostructure concept and its applications in physics, electronics, and technology. *Rev. Mod. Phys.*, vol. 73 (2001), P. 767-782.
  15. Mazinov A. The offset of the quantum interband transitions in non-crystalline semiconductors / A. Mazinov, A. Shevchenko // *Opt. Quant. Electron.* — 2015. — Vol. 47, no. 7. — P. 1659-1669.
  16. Филатова Т. А., Шафаревич А. И. Квазиклассические спектральные серии оператора Шредингера с дельта-потенциалом на прямой и на сфере // *ТМФ*. — 164:2 (2010). — С. 279-298.  
Filatova T. A., Shafarevich A. I. Semiclassical spectral series of the Schrodinger operator with a delta potential on a straight line and on a sphere. *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 164, iss. 2 (2010), P. 1064-1080.
  17. Davison S. G., Steslicka M. *Basic Theory of Surface States*, Clarendon Press, Oxford, 1992.
  18. Manasreh O. *Semiconductor heterojunctions and nanostructures*, McGraw-Hill, New York, 2005.
  19. Delyon F., Simon B., Souillard B. From power pure point to continuous spectrum in disordered systems. *Ann. I. H. Poincare A*, vol. 42, iss. 3 (1985), P. 283-309.
  20. Белоцкий Е. Д., Лев Б. И. Кластерообразование в конденсированных средах // *ТМФ*. — т. 60, № 1 (1984). — С. 120-132.  
Belotskii E. D., Lev B. I. Clustering in condensed media. *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 60, iss. 1 (1984), P. 711-719.
  21. Jones H. F. The energy spectrum of complex periodic potentials of the Kronig-Penney type. *Phys. Lett. A*, vol. 262, iss. 2-3, (1999), P. 242-244.
  22. Hughes R. J. Generalized Kronig-Penney Hamiltonians. *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 222, iss. 1 (1998), P. 151-166.
  23. Ашкрофт Н., Мермин Н. *Физика твёрдого тела*. — М.: Мир. — Т. 1.— 1979.  
Ashcroft N. W., Mermin N. D. *Solid State Physics*, Saunders College Publishers, Fort Worth, 1976.

24. *Шевченко А.* Модель Кронига-Пенни с потенциалом периодически изменяющейся амплитуды / А. Шевченко, В. Б. Орленсон, В. А. Лукьяненко // XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2015): Международная конференция: сб. тез. докл. — Симферополь: ООО ФОРМА, 2015. — С. 28.  
Shevchenko A. The Kronig-Penney model with the potential of periodically varying amplitude / A. I. Shevchenko, V. A. Lukyanenko, V. B. Orleson // XXVI Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolutionary Problems (KROMSH-2015). Simferopol, 2015, P. 28. (in Russian)
25. *Shockley W.* Electrons and Holes in Semiconductors, van Nostrand, New York, 1959.
26. *Gerasimov O. I., Khudyntsev N. N.* Tamm resonances and minibands in the models of atomic chains and superlattices. *Condens. Matter Phys.*, vol. 3, no. 1 (21) (2000), P. 175-182.
27. *Harrison W. A.* Solid State Theory, McGraw-Hill, New York, 1970.
28. *Kittel C.* Introduction to Solid State Physics, John Wiley & Sons, 2004.
29. *Эфрос А. Л.* Локализация электронов в неупорядоченных системах (переход Андерсона) // УФН. — т. 126, вып. 1 (1978). — С. 41-65.  
Efros A. L. The localization of electrons in disordered systems (the Anderson transition) *Uspehi fizicheskikh nauk.* — Vol. 126, iss. 1 (1978), P. 41-65. (in Russian)
30. *Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М. и др.* Физические величины / под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. — Энергоатомиздат, М., 1991.  
Babichev A. P., Babushkina N. A., Bratkovskiy A. M. et al. Physical quantities / Ed. by I. S. Grigoriev, Ye. Z. Meylihov. — Moscow: Energoatomizdat, 1991. (in Russian)
31. *Basic Parameters of Silicon [Электронный ресурс], New Semiconductor Materials. Biology systems. Characteristics and Properties [Официальный сайт].* — URL: [http://www.matprop.ru/Si\\_basic](http://www.matprop.ru/Si_basic)
32. *NSM Archive – Band structure and carrier concentration of Silicon (Si), New Semiconductor Materials. Biology systems. Characteristics and Properties [Официальный сайт].* — URL: [http://www.matprop.ru/Si\\_bandstr/Pressure](http://www.matprop.ru/Si_bandstr/Pressure)
33. *Лурье Ю. Ю.* Справочник по аналитической химии // Химия. — М., 1971.

Получена 12.12.2016

УДК 621.396.96

## Применение двухполосного метода оценки полного электронного содержания ионосферы по широкополосному сигналу, отраженному от сложного объекта

А. Г. Виноградов, А. Н. Теохаров

Московский физико-технический институт (университет),  
Долгопрудный 141701. E-mail: a.vino@mail.ru, teo-haro@mail.ru

**Аннотация.** Предложено развитие двухполосного метода прямого измерения полного электронного содержания ионосферы (ТЕС) по результатам зондирования сверхширокополосным сигналом сложного объекта. Проведено компьютерное моделирование отражения широкополосных сигналов от сложных целей и оценки ТЕС двухполосным методом. Моделирование показало принципиальную возможность удовлетворительного измерения ТЕС для разных типов сигнала в широком диапазоне возмущений ионосферы, а также в присутствии аддитивного шума.

**Ключевые слова:** полное электронное содержание ионосферы, дисперсионные искажения, широкополосный радиолокационный сигнал, согласованная фильтрация, радиолокация.

## Two-band Method of Estimating Complete Electron Content of the Ionosphere Applied to Wideband Signal Reflected from a Complex Object.

A. G. Vinogradov, A. N. Teokharov

Moscow Institute of Physics and Technogy (State University), Dolgoprudny 141701.

**Abstract.** The two-sideband method of estimating the total electron content (TEC) of ionosphere is extended to the case of a wideband radar signal reflected from a complex object. Computer simulation of the wideband radar signal reflection from complex targets was carried out and TEC estimations by the two-sideband method were obtained. Simulation demonstrated the in-principle possibility of acceptable TEC measuring with the use of signals of different types in a wide range of ionosphere distortions, and in presence of an additive noise.

**Keywords:** complete electron content of ionosphere, dispersion distortions, wideband radar signal, matched filtering, radiolocation.

**MSC 2010:** 78A50, 78A55, 78M25

## Введение

При распространении через ионосферу широкополосного сигнала, позволяющего обеспечить значительную разрешающую способность по дальности, возникают дисперсионные искажения сигнала, которые могут привести к полному разрушению сигнала при его обычной согласованной обработке [2].

Однако при известном значении полного электронного содержания ионосферы (ТЕС — total electron content) вдоль траектории сигнала можно модифицировать обработку, согласовав ее не с излученным, а с ожидаемым сигналом путем коррекции каждой гармоники согласованного фильтра.

В работе [4] изложена идея использовать для оценки ТЕС вдоль трассы сам принимаемый широкополосный сигнал, обрабатывая его в линейке согласованных фильтров, настроенных на последовательность значений ТЕС с определенным шагом вблизи выбранного начального значения. В основу такой методики положено априорное знание характера дисперсионных искажений ультракоротких радиоволн в земной ионосфере — основное влияние на параметры распространяющегося в ней сигнала оказывают продольные ленгмюровские колебания ионосферной плазмы [5].

В работах [1, 3] предложен двухполосный метод оценки ТЕС вдоль луча радиолокатора. В работе [3] на основе компьютерного моделирования отражения разных широкополосных сигналов показана принципиальная возможность прямого измерения ТЕС в реальном времени даже по единичному отклику радиолокатора без использования дополнительных измерительных средств в присутствии значительного аддитивного зашумления. В частности, в работе [3] рассматривались широкополосные сигналы с линейной модуляцией частоты (ЛЧМ сигналы), и шумоподобные импульсные сигналы с фазовой кодовой манипуляцией импульсов (ФКМ сигналы).

В основе двухполосного метода лежит формирование парциальных фильтров, согласованных с зондирующим сигналом в разных участках спектра (а именно, в «высокочастотном» и «низкочастотном» или «левом» и «правом» участках спектра) и устраняющих остальные гармоники. Сама оценка ТЕС зависит от обусловленной ионосферной дисперсией относительной задержки откликов на выходе этих фильтров и вычисляется по формуле [1, 3]

$$\text{ТЕС} = \frac{3}{8080} \cdot \Delta t_{\text{лп}} \cdot \left( \frac{1}{F_{0\text{л}}^2} - \frac{1}{F_{0\text{п}}^2} \right)^{-1}. \quad (1)$$

Здесь  $\Delta t_{\text{лп}} = \Delta t_{\text{л}} - \Delta t_{\text{п}}$  — относительная задержка принятого сигнала на выходах «левого» и «правого» фильтров в мксек,  $F_{0\text{л}}$ ,  $F_{0\text{п}}$  — несущие частоты «левого» и «правого» фильтров в МГц, а ТЕС измеряется единицах ТЕС — TECU, 1 TECU =  $10^{16}$  эл/м<sup>2</sup>.

## 1. Особенности отражения широкополосного сигнала от сложной цели

В упомянутой работе [3] был использован ряд допущений, которые позволяли сформулировать разработанную методику оценки ТЕС и показать на моделях принципиальную возможность реализации предложенного алгоритма, позволяющего с достаточной степенью достоверности получить оценку ТЕС с приемлемой погрешностью.

Основное допущение состояло в использовании отражающего объекта в виде компактного (точечного) объекта, коэффициент рассеяния (отражения) которого не зависит от частоты. При отражении от точечного объекта это приемлемо, поскольку неискаженные отклики после фильтрации в «правом» и «левом» парциальных фильтрах представляют собой кривые с единственным хорошо выраженным пиком (максимумом) в моменты времени, соответствующие задержкам  $\Delta t_{\text{п}}$ ,  $\Delta t_{\text{л}}$ .

Между тем, само использование широкополосных (сверхширокополосных) сигналов продиктовано необходимостью повысить мощность сигнала (и, соответственно, отношение сигнал/шум) и улучшить пространственное (радиальное) разрешение объекта. Потенциальная разрешающая способность радиолокационного сигнала по дальности  $\Delta R$  определяется шириной полосы  $\Delta F$ :  $\Delta R = c/2\Delta F$ ,  $c$  — скорость света. Например, при полосе частот 250 МГц  $\Delta R \approx 0,6$  м. Реальные отражающие объекты имеют обычно бóльшие размеры и их нельзя представить в виде точечной цели. Поэтому допущение о точечности отражающего объекта при использовании алгоритма двухполосного метода оценки ТЕС в прикладных задачах должно быть снято.

В данной работе мы учитываем отражение сигнала от сложного пространственно-распределенного объекта. Отклики «левого» и «правого» парциальных фильтров, как и полного согласованного фильтра представляют собой в этом случае сложные кривые с несколькими пиками, соответствующими компактными отражающим областям на объекте («блестящим точкам»). Такие пики могут иметь сравнимые амплитуды, пересекаться друг с другом и т.п., в результате чего отклики приобретают сложную структуру, и использование допущения о «точечности» объекта будет приводить к ошибочным оценкам задержек и — в конечном итоге — к неправильным оценкам ТЕС. В качестве примера на рис. 1 приведен характерный отклик согласованного фильтра при отражении широкополосного ЛЧМ сигнала от сложной цели с пятью блестящими точками.

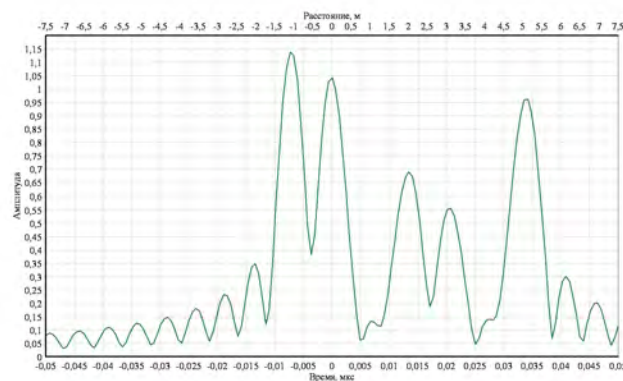


Рис. 1. Характерный отклик от сложного объекта

Здесь предлагается усовершенствованный алгоритм оценки относительной задержки  $\Delta t_{\text{лп}}$ , основанный на достаточно правдоподобном предположении о схожести (подобии) временных откликов «правого» и «левого» фильтров  $s_{\text{л,п}}(t)$  с локальными максимумами, соответствующими расположению «блестящих точек» на отражающем объекте. Алгоритм состоит в вычислении функции корреляции амплитуд кривых

$$K(\tau) = \int |s_{\text{п}}(t)s_{\text{л}}(t + \tau)| dt \quad (2)$$

и нахождения временного сдвига  $\tau_{\text{м}}$ , дающего максимум  $K(\tau_{\text{м}}) = \max(K(\tau))$ . Тогда имеем оценку

$$\Delta t_{\text{лп}} = \tau_{\text{м}}. \quad (3)$$

Данный алгоритм позволяет снять допущение о «точечности» отражающего объекта, поскольку работает и со сложными (но похожими) кривыми. К его достоинствам следует отнести и то, что результатом его работы является относительная задержка сигналов  $s_{\text{л,п}}(t)$ , требуемая для оценки ТЕС, а не задержки  $\Delta t_{\text{п}}$ ,  $\Delta t_{\text{л}}$  по отдельности.

## 2. Алгоритм оценки несущих частот парциальных фильтров

Другими параметрами, влияющими на точность оценок ТЕС по формуле (1), являются несущие частоты  $F_{0\text{л}}$ ,  $F_{0\text{п}}$  «левого» и «правого» согласованных фильтров. В работе [3] они оценивались простейшим образом — только по ширине полосы излученного сигнала  $\Delta F$  ( $F_{0\text{л,п}} \approx F_0 \mp \Delta F/3$  при вырезании  $1/3$  центральной части спектра принятого сигнала).

Такая оценка несущих частот парциальных фильтров приемлема для широкополосного ЛЧМ сигнала в силу того, что модуль его спектра имеет почти прямоугольную форму. Однако спектры других типов сигналов, в частности, широкополосных шумоподобных ФКМ сигналов, характеризуются более сложным поведением, и для них требуется более сложный алгоритм оценки несущих частот парциальных фильтров.

В качестве несущих частот парциальных фильтров предлагается использовать средние взвешенные частоты этих фильтров

$$F_{0\text{п,0л}} = \frac{\int_0^{\infty} F |S_{0\text{п,0л}}(F)|^2 dF}{\int_0^{\infty} |S_{0\text{п,0л}}(F)|^2 dF} \quad (4)$$

с весовой функцией, пропорциональной спектру мощности соответствующего «сигнала».

### 3. Параметры моделирования двухполосного метода оценки ТЕС

Для демонстрации возможностей использования двухполосного метода оценки ТЕС при отражении от сложной цели было проведено компьютерное моделирование с использованием сигналов двух типов с похожими параметрами, при которых явно сказываются эффекты искажения при прохождении через ионосферу:

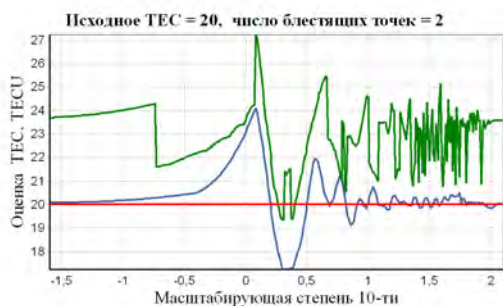
– сигнал с линейной модуляцией частоты (ЛЧМ сигнал) длительностью  $T = 0,3024$  мкс с несущей частотой  $F_0 = \omega_0/2\pi = 1300$  МГц и шириной полосы спектра  $\Delta F = \Delta\omega/2\pi \approx 250$  МГц;

– фазоманипулированный шумоподобный импульсный сигнал с кодовой манипуляцией импульсов на основе M-последовательности (ФКМ или ФМн сигнал), состоящий из 63 импульсов длительностью  $T_n = 0,0048$  мкс каждый, ширина полосы такого сигнала  $\Delta F \approx 250$  МГц.

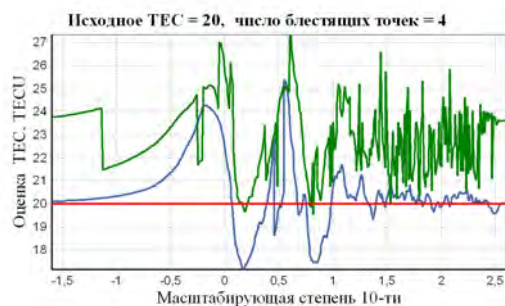
Модельные рассеивающие объекты составлялись из отдельных блестящих точек, каждая из которых характеризуется парой чисел  $(\Delta x, \sigma)$ , где  $\Delta x$  — смещение вдоль радиолуча относительно первой, а  $\sigma$  — её коэффициент рассеяния. В расчетах использовались: двухточечный объект =  $[(0, 1), (1, 0,5)]$ ; четырехточечный объект =  $[(0, 1), (-0,5, 0,7), (1,7, 0,8), (-3, 0,5)]$ ; шеститочечный объект =  $[(0, 1), (0,2, 0,5), (-1, 0,7), (-0,5, 0,7), (0,7, 0,8), (-3, 0,8)]$ . Перед началом расчета смещения нормировались таким образом, чтобы среднее расстояние между соседними точками равнялось длине волны зондирующего сигнала.

Для выявления зависимости качества работы алгоритма от расстояния между блестящими точками задержки от точек умножаем на масштабирующий множитель:  $\tau_i = C_M \tau_i^{\text{исх}}$ , где  $C_M = 10^x$ , а  $x$  — масштабирующая степень. Рассматриваем изменение масштабирующей степени примерно от  $-1,5$  до  $2,5$ . Малые значения  $C_M$  (при отрицательных  $x$ ) соответствуют близкому расположению блестящих точек (в масштабе длины волны сигнала), когда отражающий объект фактически можно рассматривать как одну отражающую точку. Большие положительные значения  $C_M$  (при положительных  $x$ ) означают, что сложная цель распадается на отдельные точечные цели, на которых происходит независимая согласованная обработка. В этих крайних случаях пространственная распределенность объекта не сказывается на обработке и ее можно рассматривать как согласованную обработку для точечного объекта (или нескольких отдельных точечных объектов), как в работе [3]. Принципиальные проблемы, связанные со сложным характером объекта, возникают в промежуточной области  $x \approx 0$ , что и снимается предложенным здесь корреляционным алгоритмом обработки (2)–(3).

Для оценки влияния степени искажения сигнала мы рассматриваем (условно) ионосферу со слабым (ТЕС = 20 TECU), средним (ТЕС = 50 TECU), а также сильным (ТЕС = 100 TECU) возмущениями.



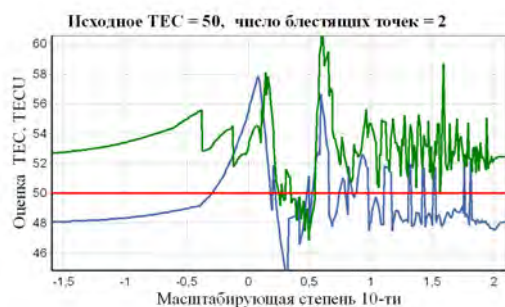
(a) Объект с 2 б.т., ТЕС = 20



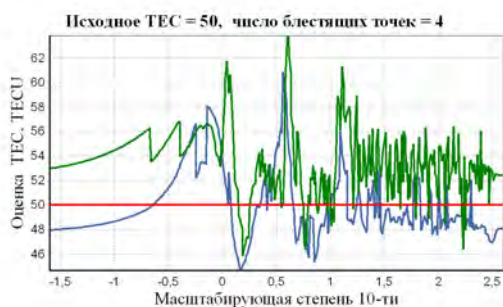
(b) Объект с 4 б.т., ТЕС = 20



(c) Объект с 6 б.т., ТЕС = 20



(d) Объект с 2 б.т., ТЕС = 50



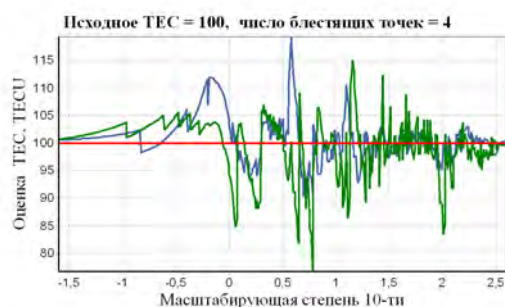
(e) Объект с 4 б.т., ТЕС = 50



(f) Объект с 6 б.т., ТЕС = 50



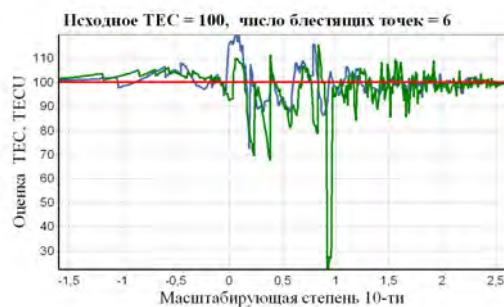
(g) Объект с 2 б.т., ТЕС = 100



(h) Объект с 4 б.т., ТЕС = 100

Рис. 2. Оценки ТЕС для разных типов сигналов (ЛЧМ — синий и ФМн — зеленый).





(i) Объект с 6 б.т., ТЕС = 100

Рис. 2. Оценки ТЕС для разных типов сигналов (продолжение).

#### 4. Сравнение качества оценки ТЕС для разных типов сигналов

Результаты моделирования по сравнению излучения разных типов радиолокационных сигналов (ЛЧМ и ФМн сигналы с приведенными ранее параметрами) показаны на рис. 2(а)–2(і). Графики рассчитаны для разных условий возмущения и разных отражающих объектов; синяя кривая соответствует ЛЧМ сигналу, а зеленая — ФКМ сигналу.

Из этих графиков следует, что оценка ТЕС с использованием ФМн сигнала в среднем дает завышенные результаты (примерно на 3 ТЕСУ), что особенно заметно при слабой возмущенности ионосферы, тогда как ЛЧМ сигнал несколько занижает (примерно на 1 ТЕСУ) значение оценки. С усилением возмущенности этот эффект становится менее заметным, и при ТЕС = 100 ТЕСУ практически исчезает.

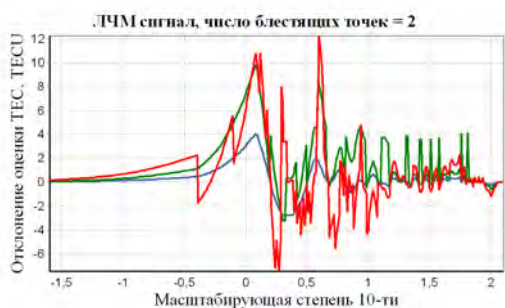
Значительные отклонения оценки от истинного значения ТЕС имеют место, как и ожидалось, в области  $0 < x < 1$ . Даже в этой области большие ( $> 10$  ТЕСУ) отклонения оценки от истинного значения редки как для ЛЧМ, так и для ФМн сигнала, из чего можно заключить, что оба типа сигналов пригодны для измерения ТЕС.

#### 5. Сравнение качества оценки ТЕС для разных условий возмущения ионосферы

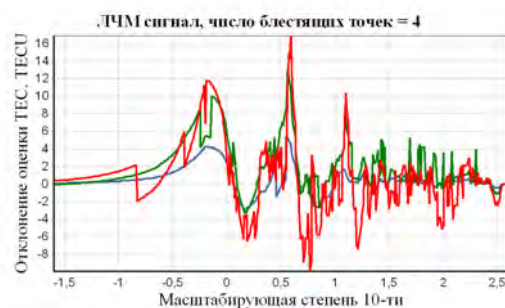
Результаты моделирования по сравнению оценки ТЕС для разных условий возмущения ионосферы (слабое, среднее и сильное возмущение) показаны на рис. 3(а)–3(ф). При этом графики рассчитаны для разных типов сигнала и разных отражающих объектов, по оси ординат показаны отклонения оценок ТЕС от точечной оценки, синяя кривая соответствует исходному значению ТЕС = 20, зеленая — ТЕС = 50, а красная — ТЕС = 100.

Видно, что даже в условиях сильно возмущенной ионосферы погрешность оценки ТЕС лишь изредка превышает 10 ТЕСУ, то есть эта оценка вполне при-

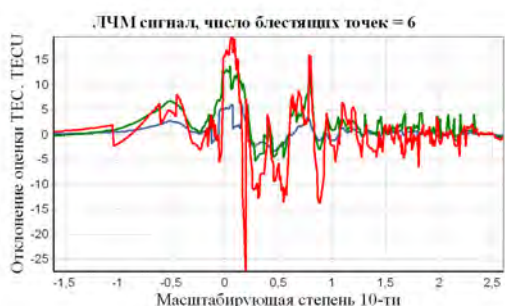
годна для использования во многих приложениях. В частности, при такой погрешности остаточные дисперсионные искажения ухудшают потенциальную разрешающую способность сигнала всего на несколько процентов.



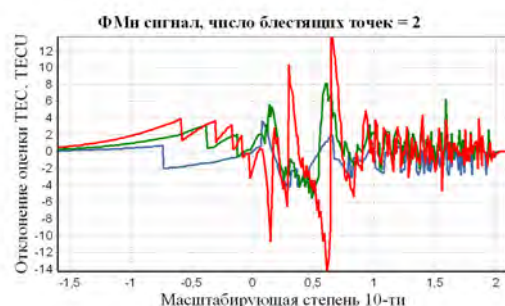
(a) ЛЧМ сигнал, объект с 2 б.т.



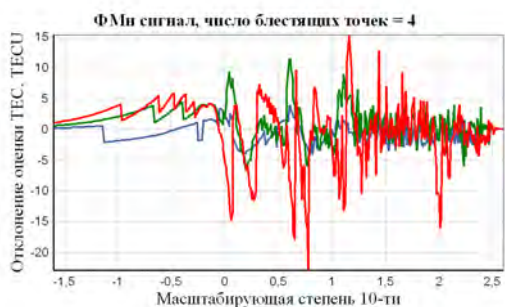
(b) ЛЧМ сигнал, объект с 4 б.т.



(c) ЛЧМ сигнал, объект с 6 б.т.



(d) ФМн сигнал, объект с 2 б.т.



(e) ФМн сигнал, объект с 4 б.т.



(f) ФМн сигнал, объект с 6 б.т.

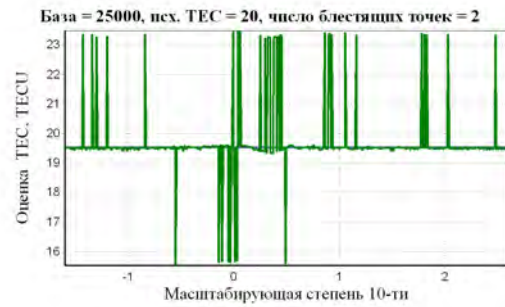
Рис. 3. Оценки ТЕС для разных возмущений (ТЕС = 20 — синий, 50 — зелёный, 100 — красный).

## 6. Влияние аддитивного шума на качество оценки ТЕС

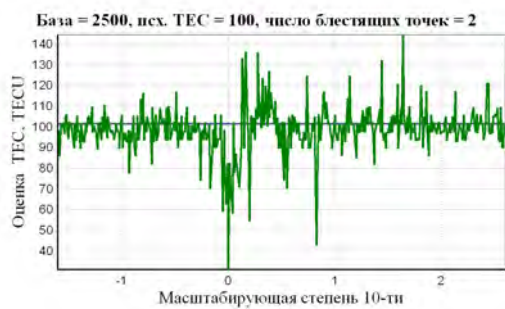
Результаты моделирования по сравнению качества оценки ТЕС для ЛЧМ сигналов с полосой частот  $\Delta F = 250$  МГц и разной базой ( $T \cdot \Delta F = 2500; 25000$ ) показаны на рис. 4(а)–4(г). Для формирования базы использовались сигналы длительностью  $T = 10$  и  $100$  мкс.



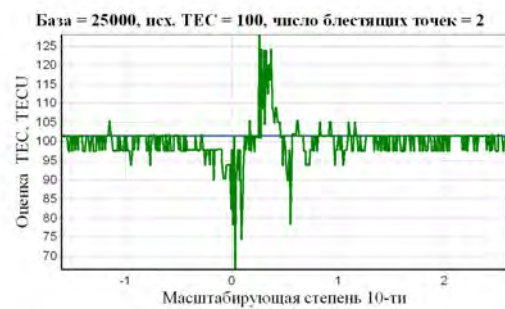
(а) База 2 500, ТЕС = 20, объект с 2 б.т.



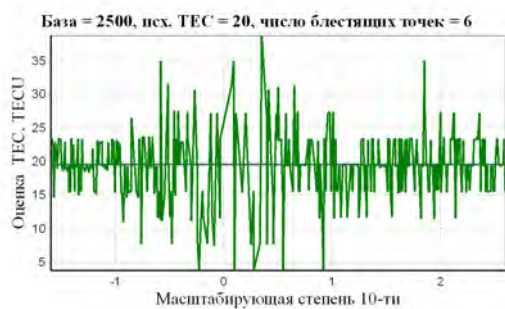
(б) База 25 000, ТЕС = 20, объект с 2 б.т.



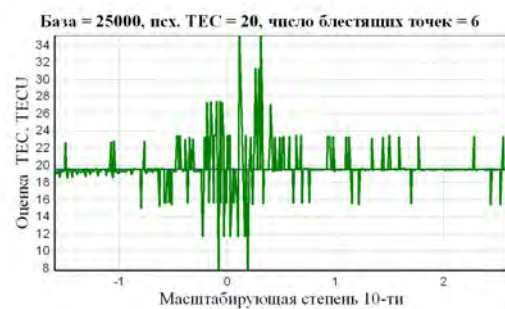
(в) База 2 500, ТЕС = 100, объект с 2 б.т.



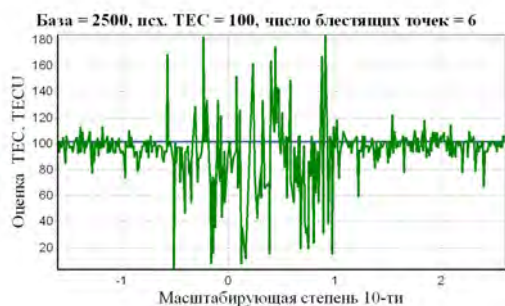
(д) База 25 000, ТЕС = 100, объект с 2 б.т.



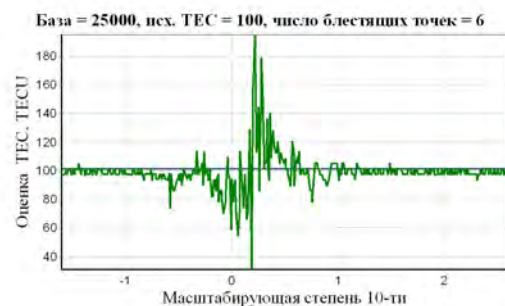
(е) База 2 500, ТЕС = 20, объект с 6 б.т.



(ф) База 25 000, ТЕС = 20, объект с 6 б.т.



(г) База 2 500, ТЕС = 100, объект с 6 б.т.



(х) База 25 000, ТЕС = 100, объект с 2 б.т.

Рис. 4. Оценки ТЕС для ЛЧМ сигналов с разной базой

Графики рассчитаны для разной степени возмущения ионосферы ( $TEC = 20$  и  $100$  TECU) и разных отражающих объектов, составленных из 2 и 6 блестящих точек. Однократная оценка TEC проводилась с аддитивным зашумлением сигнала при отношении сигнал/шум равным  $-10$  дБ. Из приведенных графиков следует, что наибольшие погрешности оценки приходятся на область  $0 < x < 1$ , то есть на область, в которой расстояния между блестящими точками сравнимы с длиной волны зондирующего сигнала. В этих условиях интерференция откликов от отдельных блестящих точек может практически полностью подавить полезный сигнал, из-за чего заметно усиливается влияние шума. Кроме того, увеличение базы сигнала заметно повышает качество оценки TEC.

## 7. Выводы

1. Показана принципиальная возможность использования двухполосного метода для прямого измерения TEC по данным зондирования сложного объекта сверхширокополосным сигналом.
2. Двухполосный метод работает для разных видов сверхширокополосного сигнала (широкополосных ЛЧМ и ФКМ-сигналов) в широком диапазоне возмущений ионосферы.
3. Предложенный двухполосный метод удовлетворительно работает даже в условиях резонансных отражений от сложного объекта при расстояниях между блестящими точками, близкими к длине волны сигнала.
4. В присутствии аддитивного шума двухполосный метод дает лучшие оценки TEC при увеличении базы сигнала.

### Список цитируемых источников

1. *Аджемов С. С., Виноградов А. Г., Лобов Е. М., Теохаров А. Н.* Прямая оценка полного электронного содержания ионосферы (TEC) путем специальной обработки широкополосного радиолокационного сигнала // Сборник трудов научно-технической конференции «Системы синхронизации, формирования и обработки сигналов в инфокоммуникациях» «СИНХРОИНФО 2015». — С-Петербург, 2015. — С. 167–169.  
Adjemov S. S., Vinogradov A. G., Lobov E. M., Teokharov A. N. (2015). Direct Evaluation of the Total Electron Content (TEC) of Ionosphere by Wideband Radar Signal Special Processing. In Proceedings of the Scientific Conference «SYNCHROINFO 2015», St-Petersburg, 167–169. (in Russian)
2. *Виноградов А. Г., Лучин А. А., Теохаров А. Н.* Обработка сверхширокополосных сигналов и формирования радиолокационных изображений в РЛС дальнего обнаружения L-диапазона. // Научные технологии. — 2013. — Т. 14, №9. — С. 32–36.  
Vinogradov A. G., Luchin A. A., Teokharov, A. N. (2013). Problems of Processing Very Broadband Signals and Constructing Radar Images in Long-Range Radars of L-Range. *Naukoemkie tekhnologii (Science Intensive Technologies)* 14:9, 32–36. (in Russian)
3. *Виноградов А. Г., Теохаров А. Н.* Двухполосный метод оценки полного электронного содержания ионосферы по сигналам широкополосной РЛС. // Динамические системы. — 2016. — Т.6(35), №3. — С. 273–285.

- Vinogradov A. G., Teokharov, A. N. (2016). Two-Sideband Method for Estimating Total Electron Content of the Ionosphere Using Signals of Wideband Radar. *Dinamicheskie Sistemy* 6(35), No.3, 273-285. (in Russian)
4. *Виноградов А. Г., Теохаров А. Н.* Прямая оценка полного электронного содержания ионосферы (ТЕС) по искажениям широкополосного радиолокационного сигнала. // Тезисы международной конференции «Метод функций Ляпунова и его приложения». — Алушта —2014, 15-20 сент. — С. 80.
- Vinogradov A. G., Teokharov, A. N. (2014). Direct Estimation of the Total Electron Content (TEC) of the Ionosphere from Distortion of a Broadband Radar Signal. In Proc. of the International Conference «Lyapunov Functions Method and its Application», Alushta, Sept. 15-20, 2014, 80. (in Russian)
5. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
- Ginzburg V. L. (1970). *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas.* — Oxford-New York: Pergamon Press.

*Получена 28.11.2016*

## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ за 2016 г.

- D. Malyshev, O. Pochinka.** Description of domain structures in the Solar Corona by means multi-color graphs. №1, 3-14.
- A. V. Osipov, G. J. Söderbacka.** Extinction and coexistence of predators. №1, 61-70.
- O. Pochinka** (см. D. Malyshev). №1, 3-14.
- G. J. Söderbacka** (см. A. V. Osipov). №1, 61-70.
- И. В. Баран.** Задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума. №4, 337-354.
- Е. П. Белан.** Динамика бегущих волн в параболической задаче с преобразованием поворота пространственной переменной. №3, 209-243.
- А. Г. Виноградов, А. Н. Теохаров.** Двухполосный метод оценки полного электронного содержания ионосферы по сигналам широкополосной РЛС. №3, 275-287.
- А. Г. Виноградов, А. Н. Теохаров.** Применение двухполосного метода оценки полного электронного содержания ионосферы по широкополосному сигналу, отраженному от сложного объекта. №4, 369-379.
- Б. М. Вронский.** Задача Коши, порожденная колебаниями стратифицированного газа. №3, 267-274.
- С. Д. Глызин, В. Е. Фролов.** Процесс разделения видов в слабо неоднородной среде. №1, 71-79.
- Е. В. Жужома, В. С. Медведев.** Рождение сепараторов в магнитных полях. №1, 37-49.
- Л. И. Ивановский.** Устойчивые режимы динамических систем с импульсными воздействиями. №2, 115-134.
- А. А. Корнута.** Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности. №4, 311-322.
- А. А. Короткин.** Модель поведения стохастических  $\varepsilon$ -автоматов в задаче автономного выбора рабочих частот. №1, 81-89.
- Е. П. Кубышкин, П. А. Солодовников.** Об одном алгоритме оптимального управления поворотом твердого диска с упругим стержнем. №2, 99-114.
- В. А. Лукьяненко, А. И. Песчанский.** Юрий Иосифович Черский — ученый, учитель.... №3, 187-208.
- В. А. Лукьяненко** (см. А. И. Шевченко). №4, 355-368.
- А. С. Мазинов** (см. А. И. Шевченко). №4, 355-368.
- А. А. Максимов.** Количественная оценка изменений на полутоновых изображениях клеточным автоматом. №2, 135-147.
- В. С. Медведев** (см. Е. В. Жужома). №1, 37-49.
- В. Б. Орленсон** (см. А. И. Шевченко). №4, 355-368.
- Г. С. Осипенко.** Оценка показателей Ляпунова методами символического анализа. №1, 15-35.
- А. В. Пан** (см. В. Н. Чехов). №4, 295-310.

- А. Ю. Переварюха.** Модель сценария популяционного кризиса в результате бифуркации Андронова-Хопфа. №2, 149-159.
- А. И. Песчанский** (см. В. А. Лукьяненко). №3, 187-208.
- С. П. Плышевская.** Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке. №4, 323-336.
- П. А. Солодовников** (см. Е. П. Кубышкин). №2, 99-114.
- А. Н. Степанов** (см. Ф. С. Стонякин). №2, 161-177.
- Ф. С. Стонякин, А. Н. Степанов.** Интеграл Бохнера в линейных нормированных конусах. №2, 161-177.
- А. Н. Теохаров** (см. А. Г. Виноградов). №3, 275-287.
- А. Н. Теохаров** (см. А. Г. Виноградов). №4, 369-379.
- В. Н. Тхай.** Замкнутые динамические модели. №1, 51-60.
- В. Е. Фролов** (см. С. Д. Глызин). №1, 71-79.
- Д. О. Цветков.** Теорема существования сильного решения одной начально-краевой задачи. №3, 245-266.
- В. Н. Чехов, А. В. Пан.** О регулярности бесконечных систем для установившихся колебаний изотропных прямоугольных призм. №4, 295-310.
- А. И. Шевченко, А. С. Мазинов, В. А. Лукьяненко, В. Б. Орленсон.** Дисперсионные спектры кристаллической решетки с псевдопериодическими дефектами. №4, 355-368.



## РЕФЕРАТЫ

УДК 539.3

В. Н. ЧЕХОВ, А. В. ПАН. **О регулярности бесконечных систем для установившихся колебаний изотропных прямоугольных призм** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №4. — С. 295–310.

Получено новое аналитическое представление решения для установившихся вынужденных колебаний прямоугольной призмы, которое позволяет элементарно оценить регулярность соответствующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений и найти суммы всех бесконечных рядов для напряженного состояния призмы. Предлагается метод вычисления собственных частот призмы посредством оценки регулярности бесконечных систем алгебраических уравнений при последовательном исключении первых неизвестных. В качестве примера вычислены несколько первых собственных частот для призмы с квадратным основанием.

**Ключевые слова:** установившиеся колебания, метод суперпозиции, регулярная бесконечная система линейных алгебраических уравнений, собственные частоты прямоугольной призмы, аналитическое представление решения.

Ил. 1. Табл. 3. Библиогр. 16 назв.

УДК 517.957

А. А. КОРНУТА. **Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №4. — С. 311–322.

Рассматривается параболическое функционально-дифференциальное уравнение на окружности с преобразованием поворота пространственной переменной. Используя метод центральных многообразий, доказывается теорема о существовании стационарных пространственно неоднородных решений, бифурцирующих из пространственно однородного решения при изменении бифуркационного параметра. Теорема носит локальный характер. А также исследуется асимптотическая форма указанных решений при отходе параметра от бифуркационного значения.

**Ключевые слова:** бифуркация, стационарные структуры, метод центральных многообразий

Ил. 1. Библиогр. 13 назв.

УДК 517.957

С. П. ПЛЫШЕВСКАЯ. **Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №4. — С. 323–336.

Рассматривается скалярное параболическое уравнение на отрезке с условием Неймана. Методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений рассматриваемого уравнения. Эти решения отходят от нулевого решения при увеличении индекса неустойчивости нуля в результате уменьшения коэффициента диффузии и прохождения его через бифуркационное значение 1. Получены приближённые представления для пространственно-неоднородных решений в достаточно широком диапазоне изменения бифуркационного параметра. Эти приближённые представления соответствуют результатам численных расчётов. С помощью метода Галёркина получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений, стационарным точкам которых отвечают приближённые стационарные решения исходной задачи.

**Ключевые слова:** параболическая задача, центральное многообразие, устойчивость, внутренний переходный слой, стационарное решение, метод Галёркина, градиентная система, бифуркация.

Ил. 4. Библиогр. 6 назв.



УДК 517.97:517.98

И. В. БАРАН. **Задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №4. — С. 337–354.

В работе формулируется и исследуется задача поиска направления оптимального перехода (по диаметру) через точку минимума. Эта задача близка по духу, с одной стороны, к хорошо известной в современном анализе задаче поиска направления наискорейшего (радиального) спуска к точке минимума, а с другой стороны, к известному методу Гельфанда (диаметрального) перехода через точку минимума. Оказалось, что для исследования такой задачи удобно использовать симметрические, а не центрированные характеристики (симметрические дифференциалы, либо, в более общем случае, симметрические субдифференциалы первого и второго порядка). Подробно исследован случай вариационных функционалов, рассмотрен класс примеров.

**Ключевые слова:** симметрическая производная, симметрический субдифференциал, локальная асимметрия, локальный экстремум, локальная суб-асимметрия, локальный суб-экстремум.

Библиогр. 12 назв.

УДК 517:957

А. И. ШЕВЧЕНКО, А. С. МАЗИНОВ, В. А. ЛУКЪЯНЕНКО, В. Б. ОРЛЕНСОН. **Дисперсионные спектры кристаллической решетки с псевдопериодическими дефектами** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №4. — С. 355–368.

Рассмотрена возможность применения теории возмущения для построения зонных диаграмм кристаллической решетки, имеющей дефектную составляющую. Предложенная модель расчета зонной структуры для равномерно легированных полупроводников или полупроводников с периодически встречающимися дефектами основана на введении изменяющейся амплитуды прямоугольных барьеров и соответствующей модификации функции Блоха. Получены дифференциальные уравнения и их решения, позволяющие определить волновую функцию как параметрический функционал, зависящий от соотношения дефектных и основных атомов решетки. Подстановкой параметров реальных полупроводниковых материалов в выведенное трансцендентное уравнение показано изменение дисперсионной картины при внесении заданного количества примесных атомов.

**Ключевые слова:** дефектная кристаллическая решетка, аналитический подход, блоховская волновая функция, дифференциальные уравнения, квантовая яма, потенциальный барьер, характеристическое уравнение, дисперсионная картина, зонная диаграмма.

Ил. 2. Библиогр. 33 назв.

УДК 621.396.96

А. Г. ВИНОГРАДОВ, А. Н. ТЕОХАРОВ. **Применение двухполосного метода оценки полного электронного содержания ионосферы по широкополосному сигналу, отраженному от сложного объекта** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №4. — С. 369–379.

Предложено развитие двухполосного метода прямого измерения полного электронного содержания ионосферы (ТЕС) по результатам зондирования сверхширокополосным сигналом сложного объекта. Проведено компьютерное моделирование отражения широкополосных сигналов от сложных целей и оценки ТЕС двухполосным методом. Моделирование показало принципиальную возможность удовлетворительного измерения ТЕС для разных типов сигнала в широком диапазоне возмущений ионосферы, а также в присутствии аддитивного шума.

**Ключевые слова:** полное электронное содержание ионосферы, дисперсионные искажения, широкополосный радиолокационный сигнал, согласованная фильтрация, радиолокация.

Ил. 4. Библиогр. 5 назв.

## ABSTRACTS

MSC 2010: 74G10, 74G30, 74G40, 74G45

V. N. CHEKHOV, A. V. PAN. **On regularity of infinite systems for steady-state oscillations of isotropic rectangular prisms** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.4, 295–310 (2016).

A new analytical presentation of the solution for steady-state oscillations of a rectangular prism is found. This analytical presentation allows elementary to evaluate the regularity corresponding infinite system of linear algebraic equations and to find the analytical sums for the all infinite series in the stress state of the prism. A method for calculating the natural frequencies of the prism through the assessment of regularity of infinite systems of algebraic equations at sequential elimination the first unknowns is proposed. As an example the first few natural frequencies for the prism with a square base have been calculated.

**Keywords:** steady-state oscillations, superposition method, regular infinite system of linear algebraic equations, eigenvalues of a prism, analytical solution

Fig. 1. Tbl. 3. Ref. 16.

MSC 2010: 35B32, 35B35, 35K20

A. A. KORNUA. **Stationary structures in a parabolic problem with a rotation transformation on a circle** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.4, 311–322 (2016).

We considered a parabolic functional differential equation on a circle with rotation transformation of a spatial variable. Using the method of central manifolds, we proved a theorem on the existence of stationary spatially inhomogeneous solutions that bifurcate from a spatially homogeneous solution when the bifurcation parameter changes. The theorem has a local character. We also studied the asymptotic form of these solutions for the departure of the parameter from the bifurcation value.

**Keywords:** bifurcation, stationary structures, the method of central manifolds.

Fig. 1. Ref. 13.

MSC 2010: 35B32, 35B35, 35K20, 35K55

S. P. PLYSHEVSKAYA. **Dynamics of stationary structures in the parabolic problem at a segment** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.4, 323–336 (2016).

The scalar parabolic equation at a segment with the Neumann's condition is considered. We prove the theorem on the existence and stability of spatially inhomogeneous stationary solutions of the equation by using the method of central manifolds. These solutions are branched from the zero solution when the instability index of zero increases (each time) by an order of magnitude and the coefficient of diffusion decreases and passes through the bifurcation value 1. We obtain approximate representation for the spatially inhomogeneous solutions in a fairly wide range of variation of the bifurcation parameter. These approximate representation correspond to the results of numerical computations. Using the Galerkin method, systems of ordinary differential equations were obtained whose stationary points correspond to approximate stationary solutions of the original problem.

**Keywords:** parabolic problem, central manifold, stability, internal shock layer, stationary solution, Galerkin's method, gradient system, bifurcation.

Fig. 4. Ref. 6.

MSC 2010: 46G05, 49J52

I. V. BARAN. **The problem of finding the direction of the optimal transition through the extremum point** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.4, 337–354 (2016).

Well-known problem in the analysis of the theory of symmetric derivatives has found extensive applications in harmonic analysis and other areas of mathematics. However, in a nonsmooth analysis,

the possibility of a transition from a symmetric derivative to a symmetric subdifferential was not study. In our papers a general apparatus of the theory of symmetric differentials and subdifferentials of the first and higher orders in infinite-dimensional spaces is constructed. Their main properties are described, up to the mean-value theorem and Taylor's formula, symmetric variations and subvariations of one-dimensional variational functionals are calculated.

As an application, we formulate and investigate the problem of finding the direction of the optimal transition (in diameter) through the minimum point. This problem is close in spirit, on the one hand, to the problem of finding the direction of the steepest (radial) descent to the minimum point, well known in modern analysis, and, on the other hand, to the known Gelfand (diametrical) transition through the minimum point. It turned out that to study such a problem it is convenient to use symmetric rather than centered characteristics (symmetric differentials, or, in the more general case, symmetric subdifferentials of the first and second order).

The concepts of local asymmetry and local excess of a functional at a given point of a local extremum are introduced. The problems of determining the direction of the minimum asymmetry and the minimal excess are formulated. In a more general case, an analogous investigation of local sub-asymmetry and local sub-excess on the basis of the previously constructed symmetric subdifferential calculus is carried out. A class of examples for variational functionals with a nonsmooth integrand is considered.

**Keywords:** symmetric derivatives, symmetric subdifferential, local asymmetry, local excess, local sub-asymmetry, local sub-excess.

Ref. 12.

MSC 2010: 35K55

A. I. SHEVCHENKO, A. S. MAZINOV, V. A. LUKIANENKO, V. B. ORLENSON. **Dispersion spectra of a crystal lattice with pseudoperiodic defects** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.4, 355–368 (2016).

The ability to use perturbation theory for the description of the band diagram construction for the crystal lattice, which has a defective component, has been considered. A model for calculation of band structure for uniformly doped semiconductors or semiconductors with periodic defects has been proposed by the introducing of varying amplitude of rectangular barriers and the corresponding modification of the Bloch function. The differential equations and their solutions, allowing to determine the form of the wave function as a function of the parameters, depending on the ratio of defective and fundamental lattice atoms, have been obtained. We have derived a transcendental equation, on the basis of which by substituting the actual parameters of semiconductor materials the change in the dispersion pattern has been shown when a predetermined number of impurity atoms was inserted.

**Keywords:** defective crystal lattice, analytical approach, wavefunctions of Bloch wavefunction of electrons, differential equations, quantum well, potential barrier, characteristic equation, dispersion pattern, band diagram

Fig. 2. Ref. 33.

MSC 2010: 78A50, 78A55, 78M25

A. G. VINOGRADOV, A. N. TEOKHAROV. **Two-band Method of Estimating Complete Electron Content of the Ionosphere Applied to Wideband Signal Reflected from a Complex Object.** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.4, 369–379 (2016).

The two-sideband method of estimating the total electron content (TEC) of ionosphere is extended to the case of a wideband radar signal reflected from a complex object. Computer simulation of the wideband radar signal reflection from complex targets was carried out and TEC estimations by the two-sideband method were obtained. Simulation demonstrated the in-principle possibility of acceptable

TEC measuring with the use of signals of different types in a wide range of ionosphere distortions, and in presence of an additive noise.

**Keywords:** complete electron content of ionosphere, dispersion distortions, wideband radar signal, matched filtering, radiolocation.

Fig. 4. Ref. 5.

# Динамические системы

Том 6(34) №4

2016

## Содержание

В. Н. ЧЕХОВ, А. В. ПАН. О регулярности бесконечных систем для установившихся колебаний изотропных прямоугольных призм	295
А. А. КОРНУТА. Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности	311
С. П. ПЛЫШЕВСКАЯ. Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке	323
И. В. БАРАН. Задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума	337
А. И. ШЕВЧЕНКО, А. С. МАЗИНОВ, В. А. ЛУКЪЯНЕНКО, В. Б. ОРЛЕНСОН. Дисперсионные спектры кристаллической решетки с псевдопериодическими дефектами	355
А. Г. ВИНОГРАДОВ, А. Н. ТЕОХАРОВ. Применение двухполосного метода оценки полного электронного содержания ионосферы по широкополосному сигналу, отраженному от сложного объекта	369
АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ	380

# Dinamicheskie sistemy (Dynamical Systems)

---

Volume 6(34) no.4

2016

---

## Table of Contents

V. N. CHEKHOV, A. V. PAN. On regularity of infinite systems for steady-state oscillations of isotropic rectangular prisms	295
A. A. KORNUA. Stationary structures in a parabolic problem with a rotation transformation on a circle	311
S. P. PLYSHEVSKAYA. Dynamics of stationary structures in the parabolic problem at a segment	323
I. V. BARAN. The problem of finding the direction of the optimal transition through the extremum point	337
A. I. SHEVCHENKO, A. S. MAZINOV, V. A. LUKIANENKO, V. B. ORLENSON. Dispersion spectra of a crystal lattice with pseudoperiodic defects	355
A. G. VINOGRADOV, A. N. TEOKHAROV. Two-band Method of Estimating Complete Electron Content of the Ionosphere Applied to Wideband Signal Reflected from a Complex Object.	369
Author index (Russian)	380