

УДК 517.9

Юрий Иосифович Черский — ученый, учитель...

В. А. Лукьяненко*, А. И. Песчанский**

*Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. E-mail: art-inf@yandex.ru

+ **Севастопольский государственный университет,
Севастополь 299053. E-mail: peschansky_sntu@mail.ru.

Аннотация. Профессор Юрий Иосифович Черский (1929-2015) — видный советский математик, один из создателей теории интегральных уравнений типа свертки, краевых задач теории аналитических функций и их приложений, основатель научных школ в Ростовском, Одесском, Симферопольском университетах и Институте прикладных проблем механики и математики АН УССР. В статье научные результаты Ю.И. Черского изложены в соответствии его жизненному пути. Предложены возможные направления развития.

Ключевые слова: биография, список публикаций, уравнение типа свертки, краевые задачи теории аналитических функций.

Yu.I. Chersky — scientist, teacher...

V. A. Lukianenko, A. I. Peschansky

Crimean Federal University, Simferopol 295007,
Sevastopol State University, Sevastopol 299053.

Abstract. Professor Yuri Iosifovich Chersky (1929-2015) — a prominent Soviet mathematician, one of the creators of the theory of integral equations of convolution type and boundary value problems in the theory of analytic functions and their applications, the founder of scientific schools in Rostov, Odessa, Simferopol universities and the Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. In the article the scientific results of Yu. I. Chersky are set out in accordance with his life path. Possible development directions are suggested.

Keywords: biography, bibliography, equation of convolution type, boundary value problems in the theory of analytic functions.

MSC 2010: 01A70, 45E10

Юрий Иосифович Черский родился 8 декабря 1929 г. в Казани, в семье врачей. С 1947 по 1952 гг. учился на математическом факультете Казанского государственного университета, который окончил с отличием. В «Ученых записках Казанского университета» опубликована первая статья Юрия Иосифовича [1*]¹, посвященная особым интегральным уравнениям и основанная на результатах его дипломной работы. Избранная тема исследования уравнений типа свертки являлась новой, перспективной для приложений [1].

¹Номер ссылки со звездочкой относится к списку публикаций Ю. С. Черского, помещенному в конце статьи. Номера ссылок без звездочек относятся к пристатейному списку цитируемых источников.



(1929-2015)

Исторически первые результаты по уравнениям типа свертки связаны с именами В. А. Фока, Г. Деча, Н. Винера, Е. Хопфа, Е. Рейснера, И. М. Рапопорта. В. А. Фок в 1924 г. вывел формулу свертки и решил уравнение

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t k(t-s)f(s)ds = g(t), \quad t > 0,$$

более общая теория дана в работах Г. Деча (G. Doetsch, 1923, 1925), из которой следуют результаты В. А. Фока. Н. Винер и Е. Хопф в 1931 г. предложили метод решения нового однородного одностороннего уравнения, возникшего в теории лучистого равновесия

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k(t-s)f(s)ds = g(t), \quad 0 < t < \infty.$$

С тех пор это уравнение называют уравнением Винера-Хопфа, а соответствующий метод решения — методом Винера-Хопфа. В тоже время работах В. А. Фока и

Е. Рейснера независимо решено неоднородное уравнение Винера-Хопфа. И. М. Раппорт для решения уравнений типа свертки впервые использовал краевую задачу Римана [98*]. Этот подход успешно развивается и в наше время. Следующим шагом является работа Ю. И. Черского [1*] (1953 г.), в которой введено уравнение с двумя ядрами

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k_1(t-s)f(s)ds + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 k_2(t-s)f(s)ds = g(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

и показано, что это уравнение является сопряженным для парного уравнения

$$\varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty k_1(t-s)\varphi(s)ds = g(t), \quad t > 0,$$

$$\varphi(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty k_2(t-s)\varphi(s)ds = g(t), \quad t < 0.$$

Установлена равносильность этих уравнений уравнению с ядром Коши. Впервые рассмотрены «полные» уравнения типа свертки, проведена их регуляризация и доказаны теоремы Нетера.

В 1958 г. была опубликована, по словам Юрия Иосифовича, замечательная статья М. Г. Крейна [102], в которой на примере одностороннего уравнения с абсолютно непрерывным ядром даны глубокие теоретические результаты по разрешимости уравнения типа свертки и соответствующей краевой задачи Римана в классе непрерывных функций, являющихся преобразованием Фурье абсолютно интегрируемых функций. В 1954 г. найдено решение задачи Римана для всего класса непрерывных коэффициентов (И. Б. Симоненко, В. В. Иванов, Б. В. Хведелидзе, И. Ц. Гохберг). Полученные результаты остаются справедливыми и для более общих пространств (L_p , $p \geq 1$ и др.).

В 1953 г. Юрий Иосифович поступил в аспирантуру к профессору Федору Дмитриевичу Гахову и переехал в г. Ростов-на-Дону, где продолжил учебу в аспирантуре Ростовского государственного университета им. В. М. Молотова. В 1955 г. Юрий Иосифович закончил обучение в аспирантуре. В 1956 г. в Тбилисском математическом институте им. А. М. Размадзе АН Грузинской ССР защитил диссертацию «Интегральные уравнения типа свертки» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук [4*]. Это была работа очень высокого уровня. По результатам защиты ученый совет, возглавляемый Н. И. Мухелишвили, присудил сразу степень доктора физико-математических наук. По формальным причинам ВАКом СССР была утверждена степень кандидата наук.

В 1955-1964 гг. Ю. И. Черский преподавал в Ростовском государственном университете (1955-1961 гг. — ассистент, старший преподаватель, доцент кафедры математического анализа; 1961-1964 гг. — доцент кафедры вычислительной математики).

Интересна история появления университета в Ростове. До 1915 года в Ростове-на-Дону не было ни одного высшего учебного заведения и никого с ученым званием или степенью. В 1910 году ростовчане обращались в вышестоящие инстанции с просьбой открыть в городе учебное заведение, предлагая 2 млн. рублей и

землю под строительство. Царское правительство в просьбе отказало. Однако в 1915 году возникла угроза взятия Варшавы немцами, и Варшавский университет срочно был эвакуирован сначала в Москву, а затем было принято решение о переезде университета в Ростов. Механико-математический факультет Ростовского университета был знаменит своими преподавателями. Будущий известный писатель и Нобелевский лауреат по литературе А. И. Солженицын поступил на механико-математический факультет университета только потому, что именно на этом факультете работал сильный преподавательский состав, хотя интересы студента лежали совсем в другой области.

Из воспоминаний о Борисе Ивановиче Рухлине (ученик Ю. И. Черского) — «среди преподавателей университета во время его обучения на механико-математическом факультете преподавали широко известный ученый, доктор физико-математических наук, профессор Федор Дмитриевич Гахов и его ученик — талантливый молодой математик, кандидат физико-математических наук, доцент Ю. И. Черский! Книга Ф. Д. Гахова «Краевые задачи» была, есть и будет еще очень много лет настольной книгой аспирантов. Не знаю, есть ли еще одна такая монография, которую читать не только полезно, но и приятно! Добросовестного, трудолюбивого, активного, очень способного студента сразу заметил и отметил Юрий Иосифович Черский, под руководством которого Борис Иванович пишет свою первую научную работу» [23].

В 1959 г. Ю. И. Черский для решения задачи Римана [11*] применил разработанный им вариант теории обобщенных функций. Классический подход (С. Л. Соболев (1936 г.), Л. Шварц (1950-1951 гг.), И. М. Гельфанд, И. Г. Шилев (1956 г.) и др.) предполагает бесконечную дифференцируемость и финитность основных функций, кроме того, пространство основных функций не нормировано, что создает неудобства при исследовании линейных операторов в пространстве обобщенных функций. Подход Ю. И. Черского предполагает выбор наиболее подходящего для данного уравнения пространства обобщенных функций. В монографии [43*] изложен такой наиболее простой вариант теории обобщенных функций. Обобщенные функции определяются как на прямой, так и на контуре в комплексной плоскости. Основные функции могут не быть бесконечно дифференцируемыми и финитными, что позволило существенно расширить сферу приложений. Исторически первое интегральное уравнение типа свертки в пространстве обобщенных функций рассмотрел О. С. Парасюк (1956 г.). Он ограничился схемой решения без выяснения условий разрешимости и записи соответствующих формул. Полные результаты для нормального случая разрешимости задачи Римана и соответствующих характеристических уравнений получены Ю. И. Черским. Дальнейшее использование и развитие этого направления отражено в работах В. С. Рогожина, В. Б. Дыбина, Н. К. Карапетянца, Н. И. Морару, Б. И. Рухлина, М. И. Хайкина и др. (см., например, [6]-[8]). В период работы Черского в Ростовском государственном университете под его руководством С. И. Юрченко и В. Б. Дыбин подготовили и защитили кандидатские диссертации.

В 1964 г. в Тбилисском математическом институте им. А. М. Размадзе Юрий

Иосифович защитил диссертацию «Интегральные уравнения типа свертки и некоторые их приложения» [19*] на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Характерной чертой научной работы Ю. И. Черского является выявление креативных направлений, точек роста для многих последователей. При этом важные результаты исследований могли быть опубликованы и в тезисах докладов, и в научных журналах. Выделим несколько важных публикаций и направлений, которые можно применять и развивать в будущем.

Для уравнений типа свертки важную роль играют теоремы, доказанные для абстрактных линейных уравнений в абстрактном линейном пространстве, о приближенном решении линейных уравнений. Впервые метод приближенного решения одностороннего уравнения типа свертки с помощью замены ядра другим ядром, удобным для факторизации предложил в 1954 г. У. Т. Койтер [2]. В 1962-1963 годах Ю. И. Черским получено усовершенствование метода и его теоретическое обоснование [15*, 17*]. Результаты улучшены и представлены в совместной с Ф. Д. Гаховым монографии [43*]. Дальнейшее развитие получено в работах Н. Я. Тихоненко и других.

Поиск приближенного решения линейного неоднородного уравнения общего вида

$$Kf = g, \quad (1)$$

где K — заданный линейный оператор, действующий из линейного множества X в линейное множество Y , $g \in Y$, искомый элемент $f \in X$ сводится к точному решению более простого по своей структуре приближенного уравнения

$$\tilde{K}\tilde{f} = \tilde{g}. \quad (2)$$

Предполагается, что $\tilde{f} \in X$ и обеспечивается качественная близость между решениями

$$f - \tilde{f} \in X_0 \subset X, \quad (3)$$

где X_0 — линейное подмножество множества X . Это условие будет выполнено, когда операторы K и \tilde{K} и элементы g, \tilde{g} в некотором смысле близки.

В монографии [43*] опубликована теорема.

Теорема 1. Пусть

- (1°) уравнение (2) имеет единственное решение \tilde{f} ;
- (2°) $g - \tilde{g} \in Y_0$, где Y_0 — линейное подмножество, $Y_0 \subset Y$;
- (3°) оператор $K - \tilde{K}$ действует из X в Y_0 ;
- (4°) на Y_0 определен оператор $\tilde{K}^{-1}, \tilde{K}^{-1} : Y_0 \rightarrow X_0$;
- (5°) оператор $I + \tilde{K}^{-1}(K - \tilde{K})$ на X_0 имеет обратный.

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение, равное

$$f = \tilde{f} + [I + \tilde{K}^{-1}(K - \tilde{K})]^{-1} \tilde{K}^{-1}(g - K\tilde{f}). \quad (4)$$

При этом имеет место свойство (3) и

$$K\tilde{f} - g \in Y_0. \quad (5)$$

Теорема 1 аналогична соответствующим теоремам из общей теории приближенных методов Л. В. Канторовича. Если выполнены условия 1°-4°, причем X_0 является банаховым пространством, а условие 5° заменено ограниченностью оператора $\tilde{K}^{-1}(K - \tilde{K})$ в X_0 с нормой

$$\|\tilde{K}^{-1}(K - \tilde{K})\| < 1, \quad (6)$$

то справедливы все утверждения теоремы 1 и имеет место оценка погрешности

$$\|f - \tilde{f}\|_{X_0} \leq \frac{\|\tilde{K}^{-1}(g - K\tilde{f})\|_{X_0}}{1 - \|\tilde{K}^{-1}(K - \tilde{K})\|}. \quad (7)$$

Действительно, при условии (6) оператор $I + \tilde{K}^{-1}(K - \tilde{K})$ имеет ограниченный обратный, т.е. условие 5° выполнено, а оценка (7) следует из равенства (4).

На основе этих результатов выводятся итерационные формулы построения приближенных решений, которые для уравнений типа свертки приводят к разностным уравнениям, а их решения позволяют явно получить n -е приближения в образах Фурье без итерационного процесса [62*, 81*].

Разработанный подход применим не только для приближенного решения уравнений, но и к исследованию решений на устойчивость при различных возмущениях ядер и правой части g . Это позволяет существенно расширить классы функций, входящих в уравнение. Для задачи Римана в [43*] приведены результаты с измеримым коэффициентом. Впервые задачу Римана с измеримым коэффициентом в 1960 г. решил И. Б. Симоненко [3]. Перспективны исследования на устойчивость для уравнений с особенностями, уравнения первого рода, а также для экстремальных задач для интегральных уравнений типа свертки, краевых задач, функциональных уравнений и т.п.

В 1964 г. Ю. И. Черский переезжает в Одессу, он избран заведующим вновь созданной в Одесском государственном университете им. И. И. Мечникова кафедры методов математической физики. «Интересна история переезда Ю. И. Черского в Одессу. Сидели Юрий Иосифович с Георгием Семеновичем Литвинчуком, а рядом лежала карта. Г. С. Литвинчук — доктор физико-математических наук, профессор, автор известной монографии «Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом» [5]. Георгий Семенович пальцем водит по карте, останавливается там, где находится Одесса, и говорит: «Вот куда надо ехать жить!». И поехал! Потом пригласил в Одессу работать в университет и Ю. И. Черского» [23]. Черский читал лекции по математическому анализу, функциональному

анализу, дифференциальным уравнениям, интегральным уравнениям, уравнениям математической физики, теории вероятностей, теории функций действительного переменного, теории функций комплексного переменного, уравнениям с частными производными, методам приближенных вычислений, спецкурс по краевым задачам аналитических функций и другие спецкурсы.

«В те времена в полной мере отражала действительность поговорка: «Скажи мне, кто твой научный руководитель, и я скажу, кто ты!». Ю. И. Черский — удивительный человек. Талантливый, очень скромный и деликатный! Слушать его огромное удовольствие, точнее, наслаждение, особенно интересны его комментарии к научным докладам или выступления на защите в качестве оппонента. Он всегда говорит кратко, но какой глубокий смысл в каждой фразе!» [23].

На лекции по функциональному анализу, которые Ю. И. Черский читал в Большом актовом зале университета, ходили студенты разных курсов. Характерной чертой Юрия Иосифовича — лектора было умение быстро подстраиваться под уровень аудитории и излагать весьма сложные понятия простым и доступным языком. Бог математики — так называли его студенты. Член команды КВН преподавателей мехмата ОГУ, велосипедист и лыжник, временами он музицировал в четыре руки со своими студентами. Вылепленные им фигуры любимых классических музыкантов были потрясающе реалистичными.

Заметный след оставил Ю. И. Черский и в научной жизни Одессы. Он организовал и возглавил научный семинар по краевым задачам, вместе с Георгием Семеновичем Литвинчуком основал школу по краевым задачам теории аналитических функций. Под его руководством Н. Я. Тихоненко, П. В. Керекеша, Б. И. Рухлин, Н. И. Морару, Фан Танг Да (Вьетнам) защитили кандидатские диссертации, а позже Н. Я. Тихоненко и П. В. Керекеша стали докторами физико-математических наук.

В этот одесский период Ю. И. Черский продолжил исследования по приближенным методам решения уравнений типа свертки, краевым задачам и задачам для уравнений математической физики [21*, 26*, 28*]. Метод факторизации становится рабочим инструментом для различных классов уравнений [38*, 39*]. Заметим, что Ю. И. Черский еще в 1957 г. статье, опубликованной в ДАН [8*], предложил использовать для решения смешанных задач не метод Винера-Хопфа, а методы теории краевой задачи Римана для системы n пар функций. В теории задачи Римана не требуется аналитичности коэффициента в некоторой полосе в отличие от метода Винера-Хопфа. Естественным развитием метода факторизации явился, предложенный Юрием Иосифовичем в 1969 г., метод неполной факторизации [31*, 35*, 43*]. Этот метод еще не исчерпал своего потенциала и может быть перспективным в различных прикладных задачах.

Новые задачи, уравнения, их конструирование и обоснование, разработка методов решения сопровождают научное творчество Ю. И. Черского. В 1967 г. в тезисах докладов [29*], а затем и в статье [34*] введено в рассмотрение новое ин-

тегральное уравнение типа свертки — уравнение плавного перехода

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)f(s)ds - g(t) + e^{-t} \left\{ f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)f(s)ds - g(t) \right\} = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

В случае нормальной разрешимости

$$1 + K_j(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad K_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_j(t)e^{itx} dt, \quad j = 1, 2,$$

уравнение плавного перехода сведено к задаче Карлемана для полосы $0 < \text{Im}z < 1$

$$\Phi(x) = -\frac{1 + K_2(x)}{1 + K_1(x)}\Phi(x+i) + \frac{K_2(x) - K_1(x)}{1 + K_1(x)}G(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

а затем к задаче Римана. Это позволило найти решение интегрального уравнения в квадратурах. При сведении задачи Карлемана и задаче Римана был реализован метод конформного склеивания. Теоретические результаты о возможности сведения задачи Карлемана к задаче Римана на разомкнутом контуре отражены в работах многих математиков: И. Б. Симоненко, Л. И. Чибриковой, Г. С. Литвинчука, Э. Г. Хабасова, Э. И. Зверовича, В. А. Чернецкого и др. Подробная библиография по теории задачи Карлемана и ее обобщений изложена в монографии Г. С. Литвинчука [5]. Заметим, что теоретический метод конформного склеивания реализован Ю. И. Черским при решении краевой задачи Карлемана для полосы. Эти результаты позволили найти точное решение ряда задач теории упругости (Г. Я. Попов, Л. Я. Тихоненко, Р. Д. Банцуры, Б. М. Нуллер). Отметим также работы Л. Я. Тихоненко, в которых задачи теории упругости для клина с помощью преобразования Меллина приводятся к задаче Карлемана для полосы.

В монографии Ф. Д. Гахова, Ю. И. Черского [43*] выделен класс задач математической физики, содержащий экспоненту в краевом условии, которые приводят к решению задачи Карлемана. Некоторые задачи, сводящиеся к обобщенному трехэлементному функциональному уравнению со сдвигом во внутрь области аналитичности, исследовались в работах Н. Л. Василевского, А. А. Карелина, П. В. Керекеша, Г. С. Литвинчука [10, 11]. Разрешимость таких уравнений может быть получена сведением к сингулярным интегральным уравнениям со сдвигом, развитие теории которых отражено в монографии [5]. Представляет интерес исследование обобщенной задачи Карлемана со сдвигом в область аналитичности (многоэлементная задача). Так как в общем случае такая задача не имеет решения в квадратурах, то, опираясь на решение двухэлементной задачи Карлемана для полосы, найдены случаи точного решения для трехэлементной задачи (симметричный случай приводится в работах [10, 11]). Эквивалентные сингулярные уравнения позволяют находить приближенные решения. Приведем необходимые сведения для постановки многоэлементной задачи Карлемана.

Теорема 2 (43*). Пусть α, β – вещественные числа ($\alpha < \beta$). Для того чтобы функция $\varphi(t)$ одновременно удовлетворяла условиям

$$e^{-\alpha t}\varphi(t) \in L_2(\mathbb{R}), \quad e^{-\beta t}\varphi(t) \in L_2(\mathbb{R}) \quad (10)$$

необходимо и достаточно, чтобы

- 1) её интеграл Фурье $\Phi(x)$ был аналитически продолжим на полосу $\alpha < \text{Im } z < \beta$;
- 2) существовала постоянная c такая, что для всех $\alpha \leq y \leq \beta$ интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x + iy)|^2 dx \leq c$.

При этом справедливо следующее свойство для интегралов Фурье

$$F e^{-yt}\varphi(t) = \Phi(x + iy), \quad \alpha \leq y \leq \beta. \quad (11)$$

Класс функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условиям (10), обозначается $\{\alpha, \beta\}$, а их преобразования Фурье ([43*], с.221) $\Phi(x) \in \{\{\alpha, \beta\}\}$.

Теорема 3. Для того чтобы функция $\Phi(z)$ удовлетворяла условиям 1), 2) теоремы 2, необходимо и достаточно, чтобы а) функция $\Phi(z)$, представимая интегралом

$$\Phi(z) = \frac{1}{2(\beta - \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau)d\tau}{\text{ch} \frac{\pi}{\beta - \alpha} (\tau - z + i \frac{\alpha + \beta}{2})} \quad (12)$$

с плотностью $U(x) \in L_2(\mathbb{R})$ или б) функция

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \Phi \left(\frac{\beta - \alpha}{2\pi} \ln \zeta + i\alpha \right), \quad (13)$$

где ветви функций $\sqrt{\zeta}$ и $\ln \zeta$ определены и аналитичны на плоскости с разрезом $\arg \zeta = 0$, на верхнем берегу разреза логарифм принимает вещественное, а квадратный корень – положительное значение, была представима интегралом типа Коши

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\Omega(t)}{t - \zeta} dt, \quad \Omega(t) \in L_2(0, \infty). \quad (14)$$

или в) функция $\Psi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(a-\zeta)(\zeta-b)}} \Phi \left(\frac{\beta - \alpha}{2\pi} \ln \frac{a-\zeta}{\zeta-b} + i \frac{\beta + \alpha}{2} \right)$ была представима интегралом $\Psi(\zeta) = \frac{b-a}{2\pi} \int_a^b \frac{w(t)dt}{(a+b)(t+\zeta) - 2(ab+t\zeta)}$ с плотностью $w(t) \in L_2(a, b)$ ($a < b$).

Обобщенная задача Карлемана. Постановка задачи [9].

Пусть заданы $A_k(x)$, $k = 0, \dots, m$ — непрерывные на сомкнутой вещественной оси \mathbb{R} функции. Требуется найти функцию $\Phi(z) \in \{\{\alpha, \beta\}\}$ по краевому условию

$$K\Phi \equiv \sum_{k=0}^m A_k(x)\Phi(x + i\alpha_k) = G(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

где $\alpha = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{m-1} \leq \alpha_m = \beta$ — вещественные числа.

Частным случаем (15) является краевая задача Карлемана для полосы $\alpha \leq \text{Im } z \leq \beta$. Задача (15) является $m + 1$ -элементной (m -го порядка) со сдвигом во внутрь области аналитичности $\alpha < \text{Im } z < \beta$. Это усложняет ее исследование по сравнению с двухэлементной задачей Карлемана, которая допускает решение в квадратурах.

Эквивалентное сингулярное уравнение на вещественной оси, полуоси и на конечном промежутке. Условие принадлежности функции $\Phi(z)$ пространству $\{\{\alpha, \beta\}\}$ является необходимым и достаточным для представления $\Phi(z)$ интегралом (12) с плотностью $U(t) \in L_2(\mathbb{R})$, при этом справедливы формулы типа Сохоцкого для предельных значений $\Phi(x + i\alpha)$ и $\Phi(x + i\beta)$. Используя эти результаты, задачу (15) можно заменить на эквивалентное сингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{A_0(x) + A_m(x)}{2} U(x) + \frac{A_m(x) - A_0(x)}{2(\beta - \alpha)i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau) d\tau}{sh \frac{\pi}{\beta - \alpha}(\tau - x)} + \\ & + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k(x)}{2(\beta - \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau) d\tau}{ch \frac{\pi}{\beta - \alpha}(\tau - x) + iv_k sh \frac{\pi}{\beta - \alpha}(\tau - x)} = G(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\sigma_k = \cos \frac{\pi}{\beta - \alpha} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha_k \right)$, $v_k = \sin \frac{\pi}{\beta - \alpha} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha_k \right)$.

Сделав замену переменных $\tau = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \ln t$ и $x = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \ln \xi$ в (16) и положив $u(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U \left(\frac{\beta - \alpha}{2\pi} \ln t \right)$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_0(\xi) + \alpha_m(\xi)}{2} u(\xi) + \frac{\alpha_m(\xi) + \alpha_0(\xi)}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{u(t) dt}{(t - \xi)} + \\ & + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\alpha_k(\xi)}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{u(t) dt}{\sigma_k(t + \xi) + iv_k(t - \xi)} = g(\xi). \end{aligned} \quad (17)$$

В (17) $\xi > 0$, $\alpha_k(\xi) = A_k \left(\frac{\beta - \alpha}{2\pi} \ln \xi \right)$, $k = \overline{0, m}$ — непрерывные функции, $g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} G \left(\frac{\beta - \alpha}{2\pi} \ln \xi \right) \in L_2(0, +\infty)$. Согласно б) теоремы 3, решение $u(t)$ ищется в пространстве $L_2(0, +\infty)$. Последний интеграл можно переписать в виде

$$\Psi_k(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{u(t) dt}{\sigma_k(\tau + \xi) + iv_k(\tau + \xi)} = W_k \left(\frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{u(t) dt}{\tau - \xi} \right),$$

где $W_k \phi(t) = i(\sigma_k - iv_k)\phi(-[\sigma_k - iv_k]^2 t)$ — оператор взвешенного сдвига.

Для того, чтобы получить эквивалентное сингулярное уравнение на конечном промежутке, воспользуемся утверждением в) теоремы 3 (для случая $a = \alpha = -1$, $b = \beta = 1$, см. [10, 11]).

Если теперь в (16) сделать замену переменных, указанную в теореме, получим сингулярное уравнение относительно $w(t)$:

$$\frac{\alpha_0(\xi) + \alpha_m(\xi)}{2} w(\xi) + \frac{\alpha_m(\xi) + \alpha_0(\xi)}{2\pi i} \int_a^b \frac{w(t) dt}{(t - \xi)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\alpha_k(\xi)}{2\pi} \int_a^b \frac{(b-a)w(t) dt}{\sigma_k[(a+b)(t+\xi) - 2(ab+t\xi)] + iv_k(b-a)(t-\xi)} = g(\xi), \quad a < \xi < b,$$

где

$$a_k(\xi) = A_k \left(\frac{\beta - \alpha}{2\pi} \ln \frac{a - \xi}{\xi - b} \right), \quad k = \overline{0, m}, \quad g(\xi) = \frac{G \left(\frac{\beta - \alpha}{2\pi} \ln \frac{a - \xi}{\xi - b} \right)}{\sqrt{(a - \xi)(\xi - b)}}.$$

В симметричном случае $a = -1, b = 1$ уравнение несколько упрощается

$$\frac{\alpha_0(\xi) + \alpha_m(\xi)}{2} w(\xi) + \frac{\alpha_m(\xi) + \alpha_0(\xi)}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{w(t) dt}{(t - \xi)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\alpha_k(\xi)}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(t) dt}{\sigma_k(1 - t\xi) + iv_k(t - \xi)} = g(\xi), \quad |\xi| < 1. \quad (18)$$

В таком виде уравнение (18) удобно использовать для приближенного решения. Интегральный оператор под знаком суммы представим в следующем виде (см. [12]):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(t) dt}{\sigma_k(1 - t\xi) + iv_k(t - \xi)} = \frac{1}{(iv_k - \sigma_k \xi) 2\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(t) dt}{\left[t - \frac{iv_k \xi - \sigma_k}{iv_k - \sigma_k \xi} \right]}.$$

Полученный в [9] набор теорем, частных случаев точного решения, эквивалентных интегральных уравнений отражает первоначальный этап исследований более общих задач, сводящихся к подобным краевым задачам.

В 1972 г. Ю. И. Черский в течение нескольких месяцев был профессором кафедры вычислительной математики Ростовского государственного университета, а затем переехал в Симферополь, где стал профессором кафедры математического анализа Симферопольского государственного университета им. М. В. Фрунзе, а в 1973 г. возглавил новую кафедру дифференциальных и интегральных уравнений. В Симферополе Ю. И. Черский интенсивно работал над предпечатной подготовкой совместной с Ф. Д. Гаховым книги «Уравнения типа свертки» [43*]. На семинарах обсуждались результаты по новому подходу к теории обобщенных функций. Им был впервые изложен самый простой вариант теории обобщенных функций.

Такой подход позволил Ю. И. Черскому с достаточной полнотой решить задачу Римана в обобщенных функциях и ряд классов уравнений типа свертки [43*, 44*, 97*].

В семинарах Ю. И. Черского активно участвовали его ученики, студенты и сотрудники СГУ (А. В. Семенцов, В. А. Лукьяненко, В. В. Шевчик, А. И. Песчанский, Е. П. Белан, А. Д. Дерюгин, Л. М. Львовская и др.). После семинара обсуждение продолжалось на аллеях парка «Салгирка»: о новых классах уравнений типа свертки; о классах не нетеровых операторов, рассматриваемых как гомоморфизмы модулей; уравнения плавного перехода в шкалах обобщенных функций и т.п. Заметим, что изучение уравнения плавного перехода (8) в шкалах пространств обычных и обобщенных функций, в отличие от рассмотренных в таких шкалах уравнений типа свертки, уравнение (8) не имеет явно выраженной точки раздела двух условий, что приводит к некоторой специфике в исследовании (8) на разрешимость.

Следуя Ю. И. Черскому, выделим пространства основных и обобщенных функций. Для любых целых чисел $n \geq 0$, $m \geq 0$ рассмотрим пространство W_m^n основных функций $\omega(t)$, которые не только n раз дифференцируемы, но и достаточно быстро убывают на бесконечности:

$$\|\omega\|_{W_m^n} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| (t+i)^m \left(\frac{d}{dt} + 1 \right)^n \omega(t) \right|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Через W_{-m}^{-n} обозначим построенное на W_m^n пространство обобщенных функций. С помощью преобразования Фурье и изучения возникающей краевой задачи Римана в работе [43*] исследовались уравнения типа свертки в пространствах обобщенных функций W_{-m}^{-n} . Там же приводятся исторические сведения. Зависимость разрешимости уравнений типа свертки в пространствах W_{-m}^{-n} от чисел m, n , не обязательно целых, исследовал В. В. Шевчик [15]. В работе В. А. Лукьяненко [14] приведено изучение уравнения плавного перехода в пространствах основных W_{β}^{α} и обобщенных функций $W_{-\beta}^{-\alpha}$ для произвольных вещественных чисел α, β . Свойства таких шкал позволяют свести разрешимость уравнения (8) в классе обобщенных функций $W_{-\beta}^{-\alpha}$ к изучению сопряженного уравнения в классе основных функций W_{β}^{α} для целых индексов. Так как исследование (8) в пространствах $W_{-\beta}^{-\alpha}$, при соответствующих ограничениях на ядра, может быть сведено к исследованию в пространстве $W_{-\beta}^0$, то отдельно рассматриваются уравнения (8) в $W_0^{-\alpha}$ и $W_{-\beta}^0$ (более сложный случай).

В 1977 г. Ю. И. Черский возглавил созданный в Институте прикладных проблем механики и математики АН УССР (г. Львов) отдел функционального анализа и интегральных уравнений, в котором сформировал творческий коллектив сотрудников, многие из которых впоследствии стали докторами наук. В этот период он руководил исследованиями в области теории сингулярных интегральных уравнений типа плавного перехода [47*-50*, 55*-61*], разработкой методов и алгоритмов анализа антенных решеток [52*, 54*], возглавлял научный семинар «Функ-

циональный анализ и смежные вопросы» при Западном научном центре АН УССР. Его ученики А. В. Семенцов, В. А. Лукьяненко, В. В. Шевчик, А. И. Песчанский, В. А. Козицкий и Л. В. Гладун защитили диссертации на соискание степени кандидатов физико-математических наук.

В [16] выяснен характер разрешимости площадной задачи со сдвигом

$$G^+(z)\Phi^+(z + \beta i) - \lambda\Phi^+(z) = H^+(z) \quad (\beta > 0)$$

в классе Харди H_2 функций аналитических в верхней полуплоскости, и в некоторых случаях найдены решения этого уравнения в квадратурах.

На основании подхода, предложенного Ю. И. Черским, в работах [61*], [17]-[20] его ученика А. И. Песчанского исследованы интегральные и интегродифференциальные уравнения с криволинейными свертками на замкнутом контуре в комплексной плоскости. Для ряда уравнений, в частности, уравнения, содержащего гипергеометрическую функцию Гаусса в ядре

$$\frac{a(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{t}{\tau}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \frac{b(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{\tau}{t}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{t} = g(t),$$

$$t \in \Gamma, \gamma > \alpha; \gamma, \alpha \neq 0, -1, -2, \dots$$

получены решения в замкнутой форме.

Результаты Ю.И.Черского нашли применение при решении систем интегральных уравнений для определения стационарного распределения вложенных цепей Маркова полумарковских процессов, которые используются при построении моделей теории надежности и систем массового обслуживания [21, 22].

Работу в академическом институте Юрий Иосифович по-прежнему совмещал с преподавательской деятельностью. Он руководил дипломными и курсовыми работами студентов математического факультета Львовского университета, производственной практикой студентов Симферопольского университета, читал лекции для членов Малой академии наук «Эврика».

В 1983 г. Ю. И. Черский вновь приехал в Одессу и до 1990 г. возглавлял кафедру высшей математики Одесского института инженеров морского флота, а затем был профессором этой же кафедры. Здесь он подготовил кандидатов физико-математических наук Ю. А. Григорьева и А. Л. Комарницкого. Из множества работ Ю. И. Черского выделим класс экстремальных задач для уравнений типа свертки, аналитических функций, уравнений Лапласа в полупространстве, для нетеровых операторов [64*-66*, 69*, 75*, 84*, 87*-89*, 95*, 96*], которые находят применения в задачах математической физики, некорректных задачах. Учебные пособия по аналитическим методам решения экстремальных задач, ляпуновским экстремальным задачам [71*, 72*] используются в ряде университетов.

С 1995 г. Юрий Иосифович — профессор Одесской государственной академии строительства и архитектуры, где возглавил и проводил межвузовский научный семинар.

Ю. И. Черским получены значительные результаты в теории интегральных уравнений типа свертки с привлечением общей теории операторов Нетера, а также установлена связь этих уравнений с сингулярными интегральными уравнениями с ядром Коши. При решении уравнений типа свертки им использовались интегральное преобразование Фурье и Меллина, решение методом факторизации и неполной факторизации соответствующих краевых задач теории аналитических функций, разработан метод поэтапного решения [48*, 95*].

С помощью краевой задачи Карлемана для полосы с линейным сдвигом Юрий Иосифович решил новое интегральное уравнение плавного перехода, имеющее важные приложения на практике. Он также внес вклад в построение теории бесконечных алгебраических систем с дискретными свертками и дискретно-непрерывных систем [79*, 91*].

Ю. И. Черскому удалось впервые сконструировать и решить уравнения с переменными коэффициентами и свертками более общего вида, чем интеграл типа Коши, тем самым обобщив сингулярные интегральные уравнения. Он ввел в рассмотрение и решил близкие по характеру уравнение с аналитическими ядрами и уравнение, сводящееся к задаче Карлемана. Обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, обобщенное гиперболическое, а также дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом [41*], которые приводят к задаче Карлемана получили дальнейшее развитие (см. [97*]).

Ю. И. Черский исследовал общее сингулярное уравнение в банаховом пространстве, обобщив впервые рассмотренные З. И. Халиловым абстрактные сингулярные уравнения. Он решил абстрактное сингулярное уравнение, а затем и абстрактную задачу Римана в произвольном линейном пространстве при любом индексе.

В фундаментальном анализе актуальной является задача построения функций от оператора. Задача решена для функции $f(\sigma)$ аналитической в области, содержащей спектр оператора A . Хорошо известен случай, когда A — самосопряженный оператор (спектр расположен на вещественной оси), а функция $f(\sigma)$ в определенном смысле интегрируема. Черским Ю. И. предложен способ построения (неаналитический вообще говоря) функции от оператора A с помощью преобразования Фурье, а также новый способ построения (неаналитической) функции от оператора, спектр которого располагается на контуре в комплексной плоскости (см. [97*, гл. 15]). Материал, посвященный конструированию и решению уравнений [90*, 92*, 97*] отражен в публикациях лишь частично.

Перспективным является направление базирующееся на определении оператора от оператора. Здесь Юрий Иосифович использовал аналитически зависящий от комплексного параметра линейный оператор в банаховом пространстве и определил оператор от оператора, аналогично определению аналитической функции от оператора. Имея решение линейного уравнения можно выбрать подходящий линейный оператор, чтобы сконструировать и автоматически решить более сложное уравнение или систему уравнений.

Также Ю. И. Черский решил важную экстремальную задачу с двумя линей-

ными функционалами в виде n -мерных интегралов, один из которых минимизируется, а величина другого задана при условии, что функция-решение должна быть неотрицательной. Это позволяет найти решение аналогичной задачи, где с искомой функции снято условие неотрицательности и она взята по модулю в одном из интегралов. Юрий Иосифович предложил новую экстремальную задачу, имеющую много приложений, и назвал её «взаимной» [88*].

Ю. И. Черский впервые поставил и изучил важные для приложений экстремальные задачи с искомыми областями интегрирования. Также он предложил «комплексный вариант метода Лагранжа», с помощью которого экстремальные задачи в комплексных пространствах можно свести к вещественным, тем самым сохраняя для комплексного случая полную аналогию с вещественным случаем. На этом пути Ю. И. Черским поставлены и решены новые экстремальные задачи с искомыми аналитическими функциями, которые обобщают такие важные задачи теории аналитических функций, как задачи Римана, Карлемана, Гильберта, Газемана. Большое внимание Юрий Иосифович уделил приложениям теории экстремальных задач к задачам прогнозирования, интерполирования и фильтрации случайных процессов [97*, гл. 13].

Характеризуя научное творчество Ю. И. Черского в целом, следует отметить его отличительную черту — приоритет конструктивного направления над теоретическим при доказательстве существования решения задач и построении алгоритмов их решения.

Несомненно, научное наследие Ю. И. Черского послужит отправной точкой для многих будущих исследований. В 2019 г. планируется проведение международной конференции посвященной памяти Юрия Иосифовича Черского.

Список опубликованных работ Ю. И. Черского

- 1*. О некоторых особых интегральных уравнениях // Учен. зап. Казан. ун-та. — 1953. — Т. 113, кн. 10. — С. 43-55.
- 2*. Интегральные уравнения типа свертки / соавт. Ф. Д. Гахов // Докл. АН. — 1954. — Т. 99, № 2. — С. 197-199.
- 3*. Особые интегральные уравнения типа свертки и площадная задача типа задачи Римана / соавт. Ф. Д. Гахов // Учен. зап. Казан. ун-та. — 1954. — Т. 114, кн. 8. — С. 21-33.
- 4*. Интегральные уравнения типа свертки: автореф. дис. ... кандидата физ.-мат. наук. — Тбилиси, 1956.
- 5*. Интегральные уравнения типа свертки // Тр. III Всесоюз. мат. съезда. Москва, июнь-июль 1956 г. — М., 1956. — Т. 1. — С. 70-71.
- 6*. Особые интегральные уравнения типа свертки / соавт. Ф. Д. Гахов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1956. — Т. 20, № 1. — С. 33-52.
- 7*. Случай полубесконечного промежутка. Примеры. Более общие уравнения // Курс высшей математики / В. И. Смирнов. — М., 1957. — Т. 4, ч. 1. — С. 193-201; Там же. — 6-е изд., перераб. и доп. — М., 1974. — С. 185-188.

- 8*. О сведениях смешанных граничных задач к краевой задаче Римана // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 116, № 6. — С. 927-929.
- 9*. Общее сингулярное уравнение и уравнения типа свертки // Мат. сб. — 1957. — Т. 41, № 3. — С. 277-296.
- 10*. Об уравнениях типа свертки // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1958. — Т. 22, № 3. — С. 361-378.
- 11*. К решению краевой задачи Римана в классах обобщенных функций // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 500-503.
- 12*. Вопросы, связанные с приведением граничных задач для дифференциальных уравнений к задаче Римана // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного: сб. ст. — М., 1961. — С. 389-391.
- 13*. Задачи математической физики, сводящиеся к задаче Римана: (обзор докл.) // Всесоюзное совещание по применению методов теории функций комплексного переменного к задачам математической физики: тез. докл. Тбилиси, 20-27 февр. 1961 г. — Тбилиси, 1961. — С. 61-68.
- 14*. Сведение периодических задач математической физики к особым уравнениям с ядром Коши // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 140, № 1. — С. 69-72.
- 15*. Задачи математической физики, сводящиеся к задаче Римана // Тр. Тбил. мат. ин-та. — 1962. — Т. 28. — С. 209-246.
- 16*. Уравнения типа свертки в классе функций со степенным ростом // Тез. докл. 1-й науч. сессии Сев.-Кавказ. совета. — Новочеркасск, 1962. — С. 22-23.
- 17*. Две теоремы об оценке погрешности и некоторые их приложения // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 150, № 2. — С. 271-274.
- 18*. К общей теории приближенных методов // Науч. сообщ. за 1962 год. Сер. точных и естеств. наук / Ростов. ун-т. — Ростов н/Д, 1963. — С. 13.
- 19*. Интегральные уравнения типа свертки и некоторые их приложения: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Тбилиси, 1964. — 15 с.
- 20*. Дослідження з теорії функцій та рівнянь в частинних похідних // Ювт. наук. сес., присвяч. 100-річчю ОДУ. Фіз.-мат. науки, астрономія, географія, геологія: (тез. доп.). Одеса, 26-27 трав. 1965 р. — О., 1965. — С. 26-30.
- 21*. Теорема об оценке погрешности // Науч. конф., посвящ. столетию университета. Мех.-мат. фак.: тез. докл. Одесса, 20-24 сент. 1965 г. — О., 1965. — С. 21-22.
- 22*. Задача сопряжения в одном классе обобщенных функций // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20, вып. 5. — С. 246-250.
- 23*. К решению смешанных задач для уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1965. — Т. 1, № 5. — С. 647-662.
- 24*. Об интегро-дифференциальном уравнении Винера-Хопфа и его приложениях // Изв. вузов. Математика. — 1965. — № 2. — С. 188-200.
- 25*. К теории уравнений типа Винера-Хопфа // Тез. кратких науч. сообщ. Секция 5. Функц. анализ: [Международ. мат. конгр.]. Москва, 16-26 авг. 1966 г. — М., 1966. — С. 81-82.

- 26*. Про приближене рішення ітегральних рівнянь // XXI наук. конф. мех.-мат., фіз. та хім. ф-ів Одес. ун-ту. Одеса, 15-20 шт. 1966 р.: тези доп. — О., 1966. — С. 11-13.
- 27*. Про приближене розв'язання рівняння Вінера-Хопфа першого роду // Доп. АН УРСР. — 1966. — № 8. — С. 992-995.
- 28*. Приближенное решение уравнения Винера-Хопфа в одном исключительном случае // Дифференц. уравнения. — 1966. — Т. 2, № 8. — С. 1093-1100.
- 29*. Краевые задачи со специальным сдвигом, разрешимые в квадратурах // Вторая респ. конф. математиков Белоруссии: тез. докл. Минск, 27-30 июля 1967 г. — Минск, 1967. — Ч. 2. — С. 57-59.
- 30*. Задача сопряжения на двулистной поверхности // Мат. исследования. — Кишинев, 1968. — С. 139-149.
- 31*. О методе неполной факторизации // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 189, № 1. — С. 53-56.
- 32*. Интегральные уравнения с ядрами, зависящими от разности аргументов // История отечественной математики. — К., 1970. — Т. 4, кн. 1: 1917-1967. — С. 789-797.
- 33*. Задача сопряжения трех аналитических функций / соавт. М. Я. Курганская // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 195, № 4. — С. 765-768.
- 34*. Нормально разрешимое уравнение плавного перехода // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 190, № 1. — С. 57-60.
- 35*. Метод неполной факторизации // Тр. семинара по краевым задачам. — Казань, 1970. — Вып. 7. — С. 293-296.
- 36*. О хороших и плохих слонах // Наука и жизнь. — 1970. — № 2. — С. 131-134.
- 37*. Бесконечная алгебраическая система плавного перехода // Третья респ. конф. математиков Белоруссии: тез. докл. Минск, 4-7 июня 1971 г. — Минск, 1971. — Ч. 1. — С. 57-59.
- 38*. Граничные задачи и интегральные уравнения, решаемые методом факторизации // Симпозиум по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа: аннот. докл. Тбилиси, 23-29 сент. 1971 г. — Тбилиси, 1971. — С. 49-50.
- 39*. Граничные задачи и интегральные уравнения, решаемые методом факторизации // Тр. симп. по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. Тбилиси, 23-29 сент. 1971 г. — Тбилиси, 1974. — Т. 2. — С. 281-291.
- 40*. Исключительный случай одного обыкновенного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. науч. работ. — Д., 1975. — Вып. 3. — С. 154-160.
- 41*. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, приводящиеся к задаче Карлемана / соавт. В. А. Лукьяненко // IV Всесоюз. конф. по дифференц. уравнениям с отклоняющимся аргументом: тез. докл. — К., 1975. — С. 244-245.
- 42*. Федор Дмитриевич Гахов: (к семидесятилетию со дня рождения) / соавт.: Г. С. Литвинчук, Л. Г. Михайлов, Б. В. Хведелидзе // Успехи мат. наук. — 1976. — Т. 31, вып. 4. — С. 288-297.

- 43*. Уравнения типа свертки / соавт. Ф. Д. Гахов. — М.: Наука, 1978. — 295 с.
- 44*. О близости нелинейных операторов // Интегро-дифференциальные уравнения и их приложения. — Фрунзе, 1978. — Вып. 1. — С. 83-84.
- 45*. Интегральные преобразования и задачи теории функций комплексных переменных // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1979. — № 2. — С. 97-99.
- 46*. Об операторах сдвига в теории обобщенных функций // Мат. методы и физ.-мех. поля: респ. межвед. сб. — К., 1979. — Вып. 10. — С. 3-7.
- 47*. Интегральные уравнения, сводящиеся к двум задачам Римана // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 248, № 4. — С. 802-805.
- 48*. Метод поэтапного разделения переменных // Мат. методы и физ.-мех. поля: респ. межвед. сб. — К., 1980. — Вып. 12. — С. 10-14.
- 49*. Интегральные уравнения, разрешимые в квадратурах // V Респ. конф. математиков Белоруссии: тез. докл. Гродно, 29-30 окт. 1980 г. — Гродно, 1980. — Ч. 2. — С.*
- 50*. Сингулярное интегральное уравнение со сдвигом // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1980. — № 12. — С. 15-18.
- 51*. Федор Дмитриевич Гахов: (некролог) // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1980. — № 4. — С. 130-132. — Некролог подписали также: А. А. Килбас, О. И. Маричев, М. Д. Мартыненко, В. С. Рогожин, С. Г. Самко, А. С. Феденко, В. И. Азаматова, Г. С. Литвинчук, И. Б. Симоненко.
- 52*. К теории моделирования протяженных периодических систем / соавт. А. Ф. Чаплин // Электрон. моделирование. — 1981. — № 5. — С. 3-6.
- 53*. Федор Дмитриевич Гахов: (некролог) // Успехи мат. наук. — 1981. — Т. 36, вып. 1. — С. 193-194. — Некролог подписали также: Н. П. Векуа, Г. С. Литвинчук, С. М. Никольский, В. С. Рогожин, С. Г. Самко, И. Б. Симоненко, Б. В. Хведелидзе.
- 54*. К решению задач дифракции на протяженных периодических структурах / соавт.: А. Ф. Чаплин, С. П. Винковский // VIII Всесоюз. симп. по дифракции и распространению радиоволн: крат. тез. докл. — 1981. — Т. 1. — С. 50-53.
- 55*. Интегральные уравнения в свертках с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн. — 1981. — Т. 33, № 6. — С. 793-799.
- 56*. К решению некоторых линейных интегральных уравнений // Третий респ. симп. по дифференциальным и интегральным уравнениям: тез. докл. Одесса, 1-3 июня 1982 г. — О., 1982. — С. 197-198.
- 57*. К решению интегральных уравнений в квадратурах // Мат. методы и физ.-мех. поля: респ. межвед. сб. — К., 1982. — Вып. 15. — С. 3-5.
- 58*. Интегральное уравнение, обратное уравнению Винера-Хопфа, и его дискретный аналог // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1982. — № 6. — С. 29-31.
- 59*. Уравнения с периодическими сингулярными свертками // Сообщения АН ГССР. — 1982. — Т. 106, № 3. — С. 481-484.

- 60*. Разрешимое в квадратурах сингулярное интегральное уравнение со сдвигом и разрывными коэффициентами / соавт. Л. В. Гладун // Мат. методы и физ.-мех. поля: респ. межвед. сб. науч. тр. — К., 1984. — Вып. 19. — С. 26-29.
- 61*. Интегральное уравнение с криволинейными свертками на замкнутом контуре / соавт. А. И. Песчанский // Укр. мат. журн. — 1984. — Т. 36, № 3. — С. 335-340.
- 62*. Алгоритмы итерационных методов // Мат. методы и физ.-мех. поля: респ. межвед. сб. науч. тр. — К., 1985. — Вып. 21. — С. 19-23.
- 63*. Уравнения, разрешимые в квадратурах // Науч. тр. юбил. семинара по крайевым задачам, посвящ. 75-летию со дня рождения акад. АН БССР Ф. Д. Гахова. — Минск, 1985. — С. 120-128.
- 64*. Экстремальные краевые задачи теории аналитических функций // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1985. — № 10. — С. 18-21.
- 65*. Экстремальная задача для уравнения Лапласа в полупространстве // Динамические системы: респ. межвед. науч. сб. — К., 1987. — Вып. 6. — С. 101-103.
- 66*. Приложение комплексного анализа к экстремальным задачам математической физики // Современные проблемы математической физики: тр. Всесоюз. симп. Тбилиси, 22-25 апр. 1987 г. — Тбилиси, 1987. — Т. 2. — С. 134-141.
- 67*. Многомерное парное уравнение на согласованных множествах // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1988. — № 6. — С. 25-26.
- 68*. Разрешимость и аналитическое решение многомерных уравнений типа свертки / соавт.: А. Л. Комарницкий, Ю. А. Григорьев // Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики. — Тбилиси, 1988. — Т. 3, № 1. — С. 190-193.
- 69*. Экстремальные задачи для нетерова оператора // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов: сб. науч. тр. — К., 1989. — С. 196-200.
- 70*. Многомерное парное уравнение типа свертки и его транспонированное // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 5. — С. 897-901.
- 71*. Аналитическое решение экстремальных задач: практикум / Одес. ин-т инженеров мор. флота. — О., 1990. — 54 с.
- 72*. Ляпуновские экстремальные задачи и их приложения. — Львов: ИППММ, 1990. — 55 с.
- 73*. An Expansion of the Theory of Equations of Convolution Type // International Workshop on Operator Theory and Applications IWOTA 95: Final Programme and Book of Abstracts. Regensburg, July 31 — Aug. 4, 1995. — Regensburg, 1995. — P. 24.
- 74*. Интегральное представление аналитической функции в кольце и его приложение / соавт. П. В. Керекеша // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 3. — С. 322-329.
- 75*. Экстремальные задачи, родственные парным уравнениям // Вторая крым. мат. шк. «Метод функций Ляпунова и его приложения»: тез. докл. Алушта, 1-7 окт. 1995 г. — Симф., 1995. — С. 66.

- 76*. Интегральное уравнение типа свертки с экспонентой в ядре // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, № 1. — С. 1566-1567.
- 77*. Про деякі двохвимірні крайові задачі / у соавт. М. С. Коверний // Сьома міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: матеріали конф. Кив, 14-16 трав. 1998 р. — К., 1998. — С. 216.
- 78*. Сумісна аналітичність оригіналу та образу Фур'є // Сьома міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: матеріали конф. Кив, 14-16 трав. 1998 р. — К., 1998. — С. 521.
- 79*. Дискретно-непрерывная система уравнений свертки // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 10. — С. 81-82.
- 80*. Об аналитичности Фурье-оригинала и Фурье-образа внутри противоположных углов // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, № 5. — С. 703-707.
- 81*. Один итерационный алгоритм // Восьма міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: тези доп. Київ, 11-14 трав. 2000 р. — К., 2000.*
- 82*. Экстремальная задача с оператором Винера-Хопфа // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 10. — С. 1434-1435.
- 83*. Сингулярное интегральное уравнение на удвоенном контуре // Міжнар. конф. «Диференціальні та інтегральні рівняння»: тези доп. Одеса, 12-14 жовт. 2000 р. — О., 2000. — С. 293.
- 84*. Экстремальная задача, возникающая из уравнения Винера-Хопфа // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 8. — С. 1144-1147.
- 85*. On Equality Between Integral and Series // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений АМАДЕ: тез. докл. междунар. конф. Минск, 15-19 февр. 2001 г. — Минск, 2001. — С. 175-176.
- 86*. Обобщение метода секущих // Дев'ята міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: тези доп. Кив, 16-19 трав. 2002 р. — К., 2002.*
- 87*. On Mutual Extremal Problem // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений АМАДЕ: тез. докл. междунар. конф. Минск, 4-9 сент. 2003 г. — Минск, 2003.*
- 88*. Теорема о взаимных экстремальных задачах и одно ее применение // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. — Чернівці, 2004. — Вип. 11. — С. 196-200.
- 89*. Экстремальная задача с сингулярным решением // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. — Чернівці, 2004. — Вип. 11. — С. 200-203.
- 90*. Конструирование и решение некоторых линейных уравнений // Десята міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: тези доп. Кив, 13-15 трав. 2004 р. — К., 2004. — С. 550.
- 91*. Система интегральных уравнений, содержащая периодические функции // Интегральные уравнения и их применения: тез. докл. междунар. конф. Одеса, 29 июня — 4 июля 2005 г. — О., 2005. — С. 157.
- 92*. Одно интегральное уравнение в пространстве векторных функций // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. — Чернівці 2005. — Вип. 12. — С. 322-325.

- 93*. Две задачи направления Ф. Д. Гахова // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений АМАДЕ: тез. докл. междунар. конф., посвящ. 100-летию акад. Ф. Д. Гахова (1906-1980). Минск, 13-19 сент. 2006 г. — Минск, 2006. — С. 141.
- 94*. Новый вид двумерных парных уравнений // Дванадцять міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: тези доп. Кив, 1517 трав. 2008 р. — К., 2008. — С. 430.
- 95*. Поэтапное решение некоторых экстремальных задач // Тр. XIV Междунар. симп. «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». — Х.; Херсон, 2009.*
- 96*. Экстремальные задачи с квадратичным функционалом и условием ляпуновского типа / соавт. О. Н. Яковлева // Вюн. Харк. нац. ун-ту. Сер. «Мат. моделювання. інф. технологи. Автоматизовані системи управління». — 2009. — № 847. — С. 339-344.
- 97*. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / соавт. П. В. Керекеша, Д. П. Керекеша. — Одесса: Астропринт, 2010. — 552 с.
- 98*. Cherskii Yu.I., Gakhov F. D. Boundary value problems. — Daver Publications Inc., New York, 1990.

Список цитируемых источников

1. *Юрий Иосифович Черский*. — Библиографический указатель / Научный редактор Г. С. Полетаев. — Составитель И. Э. Рикун. — Ученые записки Одессы. Серия основана в 1957 году. Вып. 41. — Одесса: ОНБ им. М. Горького, 2009. — 30 с.
2. *Koiter W. T.* Approximate solution of Wiener-Hopf type integral equations with applications, I-III, Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc., B. 57 (1954). — P. 558-579.
3. *Симоненко И. Б.* Краевая задача Римана с измеримыми коэффициентами // ДАН СССР. — 1960. — Т.135, №3. — С. 538-541.
4. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УММ. — 13, № 5 (83). — С. 3-120.
5. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. — М.: Наука, 1977. — 448 с.
6. *Рогожсин В. С.* Краевая задача Римана в классе обобщенных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1964. — Т.28, №6. — С. 1325-1344.
7. *Дыбин В. Б.* Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки в классе обобщенных функций // ДАН СССР. — 1965. — Т.161, №4. — С. 753-756.
8. *Дыбин В. Б., Карапетянц Н. К.* Об интегральных уравнениях типа свертки в классе обобщенных функций // Сиб. матем. ж. — 1965. — №3. — С. 531-545.
9. *Лукьяненко В. А.* Обобщенная краевая задача Карлемана // Динамические системы. — 2005. — вып.19. — С. 129-144.
10. *Василевский Н. Л., Кареллин А. А., Керекеша П. В., Литвинчук Г. С.* Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с инволюцией и его применениях в теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т.13, №9. — С. 1692-1700.

11. Василевский Н. Л., Карелин А. А., Керекеша П. В., Литвинчук Г. С. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с инволюцией и его применениях в теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т.13, №11. — С. 2051-2061.
12. Дудучава Р. В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. — Тбилиси: Мицниереба, 1979.
13. Лукьяненко В. А. Дифференциально-разностное уравнение типа плавного перехода в особом случае // Таврический вестник информатики и математики. — 2000. — №1. — С. 104-113.
14. Лукьяненко В. А. Уравнения плавного перехода в семействе пространств обобщенных функций. // Таврический вестник информатики и математики. — 2005. — №2. — С. 90-106.
15. Шевчик В. В. Интегральные уравнения типа свертки в семействе пространств обобщенных функций, непрерывно зависящих от параметра. // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т. 14, №11. — С. 2060-2064.
16. Песчанский А. И., Шевчик В. В. О площадной задаче со сдвигом // Мат. методы и физ.-мех. поля: респ. межвед. сб. — Вып.15. — С. 39-43.
17. Песчанский А. И. Интегральное уравнение с сингулярными свертками. // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1981. — №10. — С. 15-18.
18. Песчанский А. И. Интегральные уравнения с сингулярными криволинейными свертками. // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, №11. — С. 2007-2009.
19. Песчанский А. И. Интегро-дифференциальное уравнение с гипергеометрическими функциями. // Сообщ. АН ГрССР. — 1986. — Т. 121. — №7. — С. 469-472.
20. Песчанский А. И. Об описании пространства дробных интегралов типа криволинейной свертки. // Изв. вузов. Математика. — 1989. — №7. — С. 29-39.
21. Коновалюк В. С. Двухканальная система с зависимыми отказами. // Кибернетика. — 1981. — №6. — С. 81-87.
22. Peschansky A. I. Semi-Markov Models of One-Server Loss Queues with Recurrent Input / Germany: LAP LAMPERT Academic Publishing, 2013. — 138 p.
23. Памяти Бориса Ивановича Рухлина. [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://vestnik.od-ua.com/all-numbers/5265/reporter-31>

Получена 02.06.2016

УДК 517:957

Динамика бегущих волн в параболической задаче с преобразованием поворота пространственной переменной

Е. П. Белан

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: belan@crimea.edu*

Аннотация. В статье предложен новый подход по исследованию бегущих волн в параболических задачах на окружности с малой диффузией и преобразованием сдвига пространственной переменной, которые ответвляются от пространственно однородного стационарного решения. Доказано, что бегущие волны взаимодействуют по принципу 1:2. Получен новый критерий устойчивости бегущих волн в соответствии с этим принципом. Согласно этому результату число устойчивых бегущих волн возрастает при условии, что коэффициент диффузии стремится к нулю.

Ключевые слова: параболическая задача, малая диффузия, поворот переменной, бегущая волна, устойчивость, бифуркация, взаимодействие

Traveling wave dynamics in a nonlinear parabolic equation with rotation of spatial arguments

E. P. Belan

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In this paper, we develop a new approach to study the behavior of traveling wave solutions in a nonlinear parabolic equation on a circle with a small diffusion and rotation of spatial arguments, that bifurcate from a spatial homogenies stationary solution. We prove that the traveling waves interaction satisfies to 1:2 principle. From this, it is followed the new criterion of the traveling wave stability. In according this result, a number of stable traveling waves increases when the diffusion coefficient tends to zero.

Keywords: parabolic equation, small diffusion, rotation arguments, traveling wave, stability, bifurcations, interaction

MSC 2010: 35K20, 35K59, 35Q60, 78A05, 37L10, 35R10, 35B32, 35B10, 35B35, 35C07, 35C20

Введение

Как известно [18], [25], [2], одним из основных предметов исследования в нелинейной динамике являются устойчивые пространственно-временные структуры. Широкие возможности исследования процессов зарождения и развития диссипативных структур демонстрируют оптические системы с двумерной обратной

связью [1]. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами. Экспериментально показано [1], что использование даже простейших типов преобразований (отражение, поворот) позволяет реализовать широкий спектр самоорганизации светового поля.

Нелинейный интерферометр с гладким преобразованием поля в двумерной обратной связи является одной из наиболее простых оптических систем, в которых реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей. В этом случае экспериментально установлено многообразие оптических структур, выявлена зависимость их форм и количества от коэффициента диффузии [49], [38].

Математической моделью оптических систем с двумерной обратной связью являются квазилинейные параболические уравнения с преобразованиями пространственных переменных. Фазовая модуляцией световой волны на апертуре $S \in \mathbb{R}^2$ описывается функцией $u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\partial u / \partial t + u = D \Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad x \in S, \quad t > 0, \quad (0.1)$$

и краевым условиям на ∂S . Здесь Δ — двумерный оператор Лапласа, $Qu(t, x) = u(t, q(x))$, $q(x)$ — гладкое обратимое преобразование пространственных переменных, $D > 0$ — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $0 < \gamma \leq 1$ — видность интерференционной картины, $K > 0$ — коэффициент нелинейности, зависящий от интенсивности входного поля.

Бегущие волны, ротационные волны, движущиеся фронты, стационарные пространственно-неоднородные структуры представляют значительный интерес при исследовании процессов, описываемых нелинейными параболическими уравнениями. Бегущие волны на окружности для параболического уравнения на окружности и преобразованием поворота пространственной переменной исследовались в работах [20], [26], [27], [42]. Построению асимптотической формы и анализу устойчивости ротационных волн для параболического уравнения на круге с преобразованием поворота пространственной переменной посвящены работы [28], [6], [9]. В работах [20], [42], рассмотрены вопросы существования, асимптотической формы и устойчивости медленно меняющихся бегущих волн на окружности с преобразованием поворота пространственной переменной. Задача о взаимодействии бегущих волн на окружности (Хопф-Хопф бифуркация [44]) с преобразованием поворота пространственной переменной в регулярном случае и бифуркация рождения 2-х частотного тора решений рассматривалась в [20], [42], [7]. Взаимодействию вращающихся волн на круге с преобразованием поворота пространственной переменной в регулярном случае и бифуркация рождения 2-х частотного тора решений посвящены работы [6]. Задача о бифуркации рождения вращающихся структур для параболического уравнения на круге с преобразованием поворота и радиального сжатия пространственных переменных рассматривалась в [8], [9]. Бифуркация рождения периодических решений в (0.1) на гладкой

области S с условиями Неймана на S и гладким обратимым преобразованием q исследована в [34, 4].

Согласно натурных экспериментов и численных расчетов в оптических системах с двумерной обратной связью и их математических моделях (0.1) наблюдались пространственно-неоднородные стационарные структуры [49, 38]. В работах [20], [42] методом квазинормальных форм исследованы вопросы существования, формы и устойчивости медленно меняющихся решений в параболической задаче на окружности с малой диффузией и преобразованием поворота близкого к рационально соизмеримому π . В случае параболической задаче на симметричном относительно нуля отрезке и преобразования отражения бифуркационному анализу рождения из пространственно однородного стационарного решения пространственно неоднородных стационарных решений посвящена работа [37]. В отличие от [37] указанная задача исследовалась [11], [12], [13] построением иерархии упрощенных моделей — галеркинских аппроксимаций исходной задачи. Задача о построении стационарных структур в случае параболической задаче на прямоугольнике и преобразование отражения пространственных переменных рассматривалась в [14]. Подчеркнем теперь, что в параболических задачах с малой диффузией при определенных условиях возникают метаустойчивые структуры — медленно меняющиеся решения [16], [23]. Фундаментальные результаты по исследованию метаустойчивых структур в параболической задаче Неймана на отрезке и малой диффузией принадлежат авторам работ [43], [41].

При учете запаздывания в двумерной обратной связи функция $u(x, t)$ удовлетворяет параболическому уравнению с преобразованиями пространственных переменных и запаздыванием. Как отмечено в [42] наличие запаздывания существенно усложняет анализ пространственно-временных структур. Даже при $D = 0$ фазовое пространство соответствующего дифференциального уравнения с запаздыванием является бесконечномерным и согласно проведенным экспериментам в этом случае наблюдались хаотические режимы [45], [46]. Исследование (0.1) при учете запаздывания начало развиваться недавно. Полученные здесь результаты и библиография представлены в публикациях [29], [31], [30]. В работе [39] рассмотрен случай дифракции с учетом запаздывания в двумерной обратной связи. Оказалось, что интересно, тогда в случае отсутствия поворота при одних и тех же параметрах существуют вправо-влево вращающиеся волны и их суперпозиция — стоячая волна. Этот эффект проанализирован в [40] для случая вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа, возникающей при $O(2)$ симметрии задачи с учетом дифракции и запаздывания.

Особый интерес представляет исследование динамики структур в параболической задаче с преобразованием пространственной переменной и малой диффузией. Экспериментально установлено [1], что в этом случае имеет место явление распада оптических структур (оптическая турбулентность). Для случая окружности с преобразованием сдвига, близкого к рационально соизмеримому с π , в статьях [20, 42] методом квазинормальных форм получено асимптотическое представление бегущих волн и установлено, что при малом коэффициенте диффузии имеет место их

мультистабильность. В работах [21], [25] доказано, что в указанной выше задаче реализуется явление буферности [21], [25]. Буферность, как показано [21], [25], при определенных условиях носит высококомодовый характер.

Настоящая статья носит обзорный характер. В ней отражены результаты работы [10], которой предшествовали исследования, изложенные в [5].

В соответствии с общим взглядом на процессы установления той или иной структуры в диссипативных динамических системах [18], в работе автора [10] было установлено, что устойчивость выделенной бегущей волны определяется воздействиями на неё вполне определенных пар бегущих волн. Следует отметить, что реализуются два сценария динамики бегущих волн:

- родившаяся устойчивой бегущая волна сохраняет устойчивость при уменьшении коэффициента диффузии;
- родившаяся устойчивой бегущая волна устойчивость теряет, при этом индекс её неустойчивости возрастает с уменьшением коэффициента диффузии.

В первом случае каждая родившееся неустойчивой бегущая волна, преодолевая последовательно давление определенных пар бегущих волн, обретает устойчивость, сохраняя ее при дальнейшем уменьшении коэффициента диффузии. Во втором случае каждая родившееся неустойчивой бегущая волна, преодолевая последовательно давление определенных пар бегущих волн, обретает устойчивость при уменьшении коэффициента диффузии, теряя её под давлением вполне определенных пар бегущих волн. Индекс же её неустойчивости возрастает с уменьшением коэффициента диффузии. Результаты в [10] дополнены численными расчетами по исследованию спектров бегущих волн, что позволяет оценить степень влияния на выделенную бегущую волну воздействующих на неё пар бегущих волн.

1. Основные предположения

На окружности $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ рассмотрим уравнение

$$\dot{u} + u = \mu\Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad (1.1)$$

где $0 < \mu \ll 1$, $Qu(\theta, t) = u(\theta + h, t)$, Δ — одномерный оператор Лапласа.

Будем исследовать вопросы существования, асимптотической формы и устойчивости решений типа бегущих волн уравнения (1.1), бифурцирующих при изменении K или h из пространственно однородных стационарных состояний.

Обозначим через $H = L_2(S^1)$ гильбертово пространство измеримых на S^1 функций. Норму в пространстве H будем обозначать $\|\cdot\|$. Обозначим через $H^l(S^1)$, $l \in \mathbb{Z}_+$, пространство Соболева измеримых на S^1 функций. Скалярное произведение в $H^l(S)$, $l \in \mathbb{Z}_+$ определяется стандартно. Норму в пространстве $H^l(S)$ обозначим $\|\cdot\|_l$. В качестве фазового пространства рассматриваемой задачи возьмем соболевское пространство $H^1(S^1)$.

Далее будем интересоваться вопросами о существовании и устойчивости (в метрике H^1) бегущих волн уравнения (1.1), бифурцирующих при увеличении параметра K из пространственно однородных состояний равновесия, т. е. решений уравнения

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \quad (1.2)$$

В связи с тем, что с ростом K количество сосуществующих корней уравнения (1.2) растет, возникает проблема выбора подходящего решения, т. е. такого, которое колебательным образом теряет устойчивость при увеличении K .

Итак, фиксируем какую-либо непрерывную ветвь решений уравнения (1.2)

$$w = w(K), \quad 1 + K\gamma \sin w(K) \neq 0. \quad (1.3)$$

Затем линеаризуем уравнение (1.1) в окрестности состояния равновесия (1.3) и применим к полученному на S^1 уравнению

$$\dot{u} = \mu \Delta u - u + \Lambda(K)Qu,$$

где $\Lambda(K) = -K\gamma \sin w(K)$, метод Фурье по системе функций $\exp(im\theta)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В результате убеждаемся, что спектр устойчивости рассматриваемого состояния равновесия состоит из собственных значений

$$-1 - \mu m^2 + \Lambda(K) \exp(imh), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.4)$$

Согласно (1.3) либо $\Lambda(K) > -1$, либо $\Lambda(K) < -1$. Если $\Lambda(K) \in (-1, 1)$, то $w = w(K)$ — экспоненциально устойчивое стационарное решение (1.1) для любого $\mu > 0$. Если же $\Lambda(K) > 1$, то оно, очевидно, неустойчиво. При $\Lambda(K) = -1$ изменение устойчивости носит апериодический характер. В этой связи предполагается, что

$$\Lambda(K) < -1.$$

Проблема реализуемости этого условия решена в [21].

Остановимся на выборе фигурирующего в (1.1) параметра h . Из формул (1.4) следует, что при иррациональном отношении π/h спектр устойчивости любого состояния равновесия при $m \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 0$ фактически меняется непрерывно. В этой связи будем предполагать, что

$$h = 2\pi p/q, \quad (1.5)$$

где натуральные числа p, q взаимно просты, а $q \geq 3$ — нечетное. Тогда среди натуральных чисел $k = 1, \dots, q-1$ найдутся ровно два значения $m^+ < m^-$, $m^+ + m^- = q$, такие, что справедливо равенство [21]

$$\min_{0 \leq k \leq q} \cos(kh) = \cos(m^\pm h) = -\cos \pi/q. \quad (1.6)$$

Теперь осуществим выбор бифуркационного значения параметра K из условия

$$-1 + \Lambda(K) \cos(m^+ h) = 0. \quad (1.7)$$

Согласно [21] существует счетная последовательность $\widehat{K}_r, r = 1, 2, \dots$, корней уравнения (1.7) такая, что $\widehat{K}_r \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, причем

$$\Lambda'(\widehat{K}_r) < 0.$$

Выберем некоторое \widehat{K}_r (с целью упрощения записи нижний индекс опустим). Легко видеть, что в окрестности нуля существует аналитическая функция $\kappa(\nu)$, $\kappa(0) = 0$ такая, что

$$\Lambda(\widehat{K} + \kappa) = \widehat{\Lambda} - \nu. \quad (1.8)$$

Здесь $\widehat{\Lambda} = \Lambda(\widehat{K})$.

Выполним теперь в уравнении (1.1) замену

$$u = v + w(\nu),$$

где $w(\nu) = w(\widehat{K} + \kappa(\nu))$, и представим полученное уравнение в виде

$$\dot{v} = \mathfrak{L}(\mu, \nu)v + \mathfrak{R}(Qv, \nu), \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mu, \nu)v &= \mu\Delta v - v + (\widehat{\Lambda} - \nu)Qv, \\ \mathfrak{R}(v, \nu) &= (\widehat{K} + \kappa(\nu))\gamma[\cos(w(\nu) + v) - \cos w(\nu) + v \sin w(\nu)]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Очевидно,

$$\mathfrak{L}(\mu, \nu) \exp(im\theta) = \lambda_m(\mu, \nu) \exp(im\theta), \quad (1.11)$$

где

$$\lambda_m(\mu, \nu) = -1 - \mu m^2 + (\widehat{\Lambda} - \nu) \exp(imh) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.12)$$

Для уравнения (1.9) в фазовом пространстве H реализуется критический случай устойчивости бесконечной размерности. Действительно, согласно (1.4) – (1.8), (1.12)

$$\lambda_{s^\pm}(0, 0) = \pm i\omega_0, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\omega_0 = \widehat{\Lambda} \sin m^+ h \neq 0$, $s^\pm = m^\pm + sq$, $s = 0, 1, 2, \dots$. В силу (1.4), (1.6), (1.7), (1.11)

$$\operatorname{Re} \lambda_{s^\pm}(\mu, \nu) = -\mu(m^\pm + sq)^2 - \widehat{\Lambda}^{-1}\nu. \quad (1.13)$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} \lambda_{0^+}(\mu, \nu) > \operatorname{Re} \lambda_{0^-}(\mu, \nu) > \operatorname{Re} \lambda_{1^+}(\mu, \nu) > \dots, \quad \mu > 0. \quad (1.14)$$

Эти неравенства используются ниже при анализе устойчивости бегущих волн уравнения (1.9).

2. Асимптотические разложения бегущих волн

Исходя из равенства (1.13), в качестве бифуркационного параметра в уравнении (1.9) примем $\varepsilon = \frac{\mu}{\nu}$. Тогда при уменьшении параметра ε и прохождении его через значения

$$(-\Lambda)^{-1}(m^{\pm} + sq)^{-2}, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

каждый раз в результате бифуркации Андронова-Хопфа от нулевого решения уравнения (1.9) ответвляется бегущая волна.

Бегущая волна, бифурцирующая из устойчивого тривиального решения при прохождении ε через значение $(-\Lambda)^{-1}(m^+)^{-2}$, рождается устойчивой.

Бегущая волна, которая ответвляется от потерявшего устойчивость нулевого решения в точке $(-\Lambda)^{-2}(m^-)^{-2}$, рождается неустойчивой с двумерным неустойчивым многообразием. При прохождении параметра ε через значения $(-\Lambda)^{-1}(m^+ + sq)^{-2}$, $(-\Lambda)^{-1}(m^- + sq)^{-2}$ от нуля ответвляется бегущая волна с $4s$ и $4s + 2$ -мерным неустойчивым многообразием, соответственно.

Таким образом, уменьшение параметра ε (при фиксированном ν) приводит к увеличению числа бегущих волн. Рассмотрим далее вопрос о взаимодействии бегущих волн, следуя общему представлению о взаимодействии структур в диссипативных системах [18].

При ответе на последний вопрос здесь используется формализм метода построения центральных многообразий в виде разложения в асимптотически сходящиеся ряды [35], [36, гл. 5] в случае симметрии относительно группы вращения окружности. С этой целью найдем представление бегущей волны, которая ответвляется от нулевого решения уравнения (1.9) при прохождении параметра ε через значения $(-\Lambda)^{-1}(m^+ + sq)^{-2}$.

Будем искать двухпараметрическое семейство решений уравнения (1.9) в виде

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(z \exp(i(m^+ + sq)\theta), \text{к.с.}, \mu, \nu). \quad (2.1)$$

Здесь $\sigma_1(z, \bar{z}, \mu, \nu) = z + \bar{z}$, $\sigma_k(z, \bar{z}, \mu, \nu)$, $k = 2, 3, \dots$, — форма k -ой степени относительно z, \bar{z} , а переменная z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = z(\lambda_{s^+} + c_1|z|^2 + c_2|z|^4 + \dots), \quad (2.2)$$

где $c_k = c_k(\mu, \nu)$, $k = 1, 2, \dots$. Комплексно сопряженная переменная \bar{z} удовлетворяет комплексно сопряженному дифференциальному уравнению. Подставим (2.1), (2.2) в уравнение (1.9). Выполним замену $z \exp(i(m^+ + sq)\theta) \rightarrow z$ и приравняем формы одинаковых степеней относительно переменных z, \bar{z} в левой и правой частях полученного равенства. В результате получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений

$$B_{s^+}(\mu, \nu)\sigma_k = f_k(z, \bar{z}, \nu), \quad k = 2, 3, \dots, \quad (2.3)$$

где $B_{s^+}(\mu, \nu)$ оператор, определенный на пространстве многочленов относительно z, \bar{z} следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B_{s^+}(\mu, \nu)\sigma &= \frac{\partial\sigma}{\partial z}\lambda_{s^+}z + \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}}\overline{\lambda_{s^+}z} + \\
 &+ \mu(m^+ + sq)^2\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}z^2 - 2\frac{\partial^2\sigma}{\partial z\partial\bar{z}}z\bar{z} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial\bar{z}^2}\bar{z}^2 + \frac{\partial\sigma}{\partial z}z + \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{z}}\bar{z}\right) + \\
 &+ \sigma - (\widehat{\Lambda} - \nu)\widehat{Q}\sigma, \\
 \widehat{Q}\sigma(z, \bar{z}) &= \sigma(z \exp(im^+h), \bar{z} \exp(im^+h))
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ясно, оператор $B_{s^+}(\mu, \nu)$ является диагональным оператором, причем имеют место следующие равенства

$$B_{s^+}(\mu, \nu)z^\alpha\bar{z}^\beta = (\lambda_{s^+}\alpha + \overline{\lambda_{s^+}}\beta - \lambda_{s^+(\alpha-\beta)})z^\alpha\bar{z}^\beta. \tag{2.5}$$

Отсюда, в частности, следует в силу (1), что

$$B_{s^+}(0, 0)z^\alpha\bar{z}^\beta = (i\omega_0(\alpha - \beta) - \lambda_{s^+(\alpha-\beta)}(0, 0))z^\alpha\bar{z}^\beta, \tag{2.6}$$

В силу (1.10)

$$f_2(z, \bar{z}, 0, 0) = -\frac{1}{2}\widehat{K}\gamma \cos \widehat{w}(z \exp(im^+h) + \bar{z} \exp(-im^+h))^2.$$

Обозначим

$$b = 2i\omega_0 + 1 - \widehat{\Lambda} \exp(2im^+h). \tag{2.7}$$

Из уравнения (2.3) при $k = 2$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ в силу (2.6) находим $\sigma_2 = \sigma_2(z, \bar{z}, 0, 0)$:

$$\sigma_2 = \frac{\widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w}}{2}(b^{-1} \exp(im^+h)z^2 + \text{к.с.} + 2(1 - \widehat{\Lambda})^{-1}z\bar{z}). \tag{2.8}$$

Переходим теперь к уравнению (2.3) при $k = 3$, $\mu = 0$, $\nu = 0$. Опираясь на формулу (2.9) для σ_2 и привлекая тейлоровское разложение $\Re(v, 0)$, приходим к неоднородности

$$f_3(z, \bar{z}) = ((\widehat{Q}(\frac{1}{2}\widehat{\Lambda}(z + \bar{z})^2\sigma_2(z, \bar{z}) + \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w}(z + \bar{z})^3) - c(z^2\bar{z} + z\bar{z}^2)), \tag{2.9}$$

$c_1(0, 0) = c$. Согласно (2.6) для разрешимости уравнения (2.3) при $k = 3$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при $z^2\bar{z}$, $z\bar{z}^2$ в $f_3(z, \bar{z})$ были равны нулю. Из этого условия однозначно находим

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{1}{2} \exp(im^+h)(-\widehat{\Lambda} + (\widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w})^2 \times \\
 &\times (2(1 - \widehat{\Lambda})^{-1} + \exp(2im^+h)b^{-1})).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Затем находим σ_3 из уравнения (2.3) при $k = 3$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ в той же форме, что и его неоднородность.

Заметим, что уравнение (2.3) при $k = 2$ имеет аналитическое относительно μ, ν в окрестности нуля решение $\sigma_2 = \sigma_2(\cdot, \mu, \nu)$. Это же уравнение при $k = 3$ имеет решение $c_1(\mu, \nu)$ и $\sigma_3(\cdot, \mu, \nu)$. Эти функции являются аналитическими функциями μ, ν в окрестности нуля. Отметим, что процесс последовательного построения $c_k(\mu, \nu)$, $\sigma_k(\cdot, \mu, \nu)$ в пространстве аналитических по μ, ν в окрестности нуля функций неограниченно продолжим.

Формальные разложения (2.1), (2.2) позволяют построить приближенные разложения. Примем, в частности, в качестве первого приближения

$$v = \sum_{k=1}^2 \sigma_k(z \exp(i(m^+ + sq)\theta), \text{к.с.}, 0, 0), \quad (2.11)$$

в котором переменная z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = z(\lambda_{s^+} + c|z|^2). \quad (2.12)$$

Рассмотрим теперь вопрос о периодических решениях уравнений (2.12). Бифуркационный анализ этих уравнений опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *Re c < 0.*

Доказательство. Согласно (2.10) достаточно установить неравенство

$$\text{Re}(\exp(3im^+h)(2i\hat{\omega}_0 + 1 - \hat{\Lambda} \exp(2im^+h))^{-1}) \leq 0. \quad (2.13)$$

Учитывая вытекающее из (1.7) и определения ω_0 равенство

$$\hat{\Lambda} \exp(im^+h) = 1 + i\omega_0,$$

убеждаемся, что (2.13) эквивалентно условию

$$(\hat{\Lambda} - 1)(\hat{\Lambda} + 2)(-2\hat{\Lambda}^2 + \hat{\Lambda} + 2) \geq 0.$$

Последнее справедливо, так как $\hat{\Lambda} \in (-1, -2]$. Лемма доказана. \square

Доказанная лемма позволяет решить вопрос о бифурцирующих из нуля периодических решениях уравнения (2.12). Таким решением уравнения (2.12) при $\text{Re } \lambda_{s^+}(\mu, \nu) > 0$ является

$$z = \rho_{s^+}^{1/2} \exp(i\hat{\omega}_{s^+}t), \quad (2.14)$$

где

$$\rho_{s^+} = \frac{\text{Re } \lambda_{s^+}(\mu, \nu)}{-\text{Re } c}, \quad (2.15)$$

$$\hat{\omega}_{s^+} = \text{Im } \lambda_{s^+}(\mu, \nu) + \text{Im } c\rho_{s^+}(\mu, \nu).$$

Следовательно, в силу (2.9), (2.11) уравнение (1.9) имеет приближенное по невязке порядка $\|(\mu, \nu)\|^{3/2}$ периодическое по t решение

$$\widehat{v}_{s^+} = \rho_{s^+}^{1/2} 2 \cos \eta + \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} \rho_{s^+} ((1 - \widehat{\Lambda})^{-1} + \operatorname{Re}(b \exp(2i(\eta + m^+ h))))), \quad (2.16)$$

где

$$\eta = \widehat{\omega}_{s^+}(\mu, \nu)t + (m^+ + sq)\theta.$$

Ясно, что решение \widehat{v}_{s^-} уравнения (1.9) с волновым числом $m^- + sq$ можно получить из \widehat{v}_{s^+} заменой s^+ , c на s^- , \bar{c} соответственно.

Согласно проведенному выше анализу квазигармоническая форма рождающегося из нуля периодического по времени решения сохраняется при $\varepsilon \rightarrow 0$. Причина этого явления ясна — бегущие волны уравнения (1.9) имеют различные фазовые скорости.

Устойчивость приближенных решений \widehat{v}_{0^+} , \widehat{v}_{0^-} . Решение поставленной в предыдущем разделе задачи о характере взаимодействия бегущих волн уравнения (1.9) начнем для случая, когда их число не превосходит четырех. Естественно, что этот случай представляет и самостоятельный интерес в связи с анализом начального этапа самоорганизации системы в окрестности потерявшего устойчивость нулевого решения. Для решения указанной задачи воспользуемся формализмом метода построения разложения центральных многообразий, предположив, что размерность критического пространства равна восьми. Итак, будем искать приближенные решения уравнения (1.9) в виде

$$v = \sum_{k=1}^3 \sigma_k(z_1 \exp(i(m^+) \theta), z_2 \exp(i(m^-) \theta), z_3 \exp(i(m^+ + q) \theta), z_4 \exp(i(m^- + q) \theta), \text{к.с.}), \quad (2.17)$$

где $\sigma_1(z, \bar{z}) = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \text{к.с.}$, $\sigma_s(z, \bar{z})$, $s = 2, 3$ — форма s -ой степени относительно z, \bar{z} , $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, а переменная z_k , $k = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяет уравнению

$$\dot{z}_k = \widehat{\lambda}_k(\mu, \nu) z_k + a_k(z, \bar{z}), \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (2.18)$$

Здесь $\widehat{\lambda}_1 = \lambda_{0^+}$, $\widehat{\lambda}_2 = \lambda_{0^-}$, $\widehat{\lambda}_3 = \lambda_{1^+}$, $\widehat{\lambda}_4 = \lambda_{1^-}$, а $a_k(z, \bar{z})$, $k = 1, 2, 3, 4$, — формы третьей степени относительно z, \bar{z} . Мы осуществим выбор форм $a_k(z, \bar{z})$, $k = 1, 2, 3, 4$, согласно следующих условий S^1 эквивариантности

$$a_k(z, \text{к.с.}) \exp(im(k)\theta) = a_k(z \exp(im(\cdot)\theta), \text{к.с.}), \quad (2.19)$$

где $m(1) = m^+$, $m(2) = m^-$, $m(3) = m^+ + q$, $m(4) = m^- + q$, а

$$z \exp(im(\cdot)\theta) = (z_1 \exp(i(m^+) \theta), z_2 \exp(i(m^-) \theta), z_3 \exp(i(m^+ + q) \theta), z_4 \exp(i(m^- + q) \theta)).$$

Подставим (2.17), (2.18) в уравнение (1.9). Затем, выполнив замену $z \exp(im(\cdot)\theta) \rightarrow z$, приравняем формы соответственно второй и третьей степени в левой и правой частях полученного равенства. В результате, полагая $\mu = 0, \nu = 0$, получим следующее уравнение относительно σ_2 :

$$B_2\sigma_2 = \frac{\widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w}}{2} ((z_1 + z_3) \exp(im^+h)) + (z_2 + z_4) \exp(im^-h) + \text{к.с.})^2. \quad (2.20)$$

Рассуждая, как и выше, приходим к заключению, что B_2 диагональный оператор, определенный на пространстве многочленов относительно z, \bar{z} , и, кроме того, имеют место равенства

$$B_2 z^\alpha \bar{z}^\beta = (i\omega_0(\alpha - \beta, e_1) - \lambda_m(0, 0)) z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad (2.21)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ – целочисленные векторы с неотрицательными компонентами, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} z_4^{\alpha_4}$, $m = (\alpha - \beta, e_1)m^+ + (\alpha - \beta, e_2)q$, $e_1 = (1, -1, 1, -1)$, $e_2 = (0, 1, 1, 2)$, $(a, b) = \sum_{k=1}^4 a_k b_k$. Согласно (2.21) уравнение (2.20) имеет решение того же вида, что и его неоднородность.

Рассмотрим теперь уравнение относительно σ_3 :

$$B_2\sigma_3 = f_3(z, \bar{z}). \quad (2.22)$$

Выберем формы a_k , $k = 1, 2, 3, 4$ так, чтобы мономы $z^\alpha \bar{z}^\beta$ в правой части этого уравнения, которые удовлетворяют одному из условий (2.19), имели нулевые коэффициенты. В результате однозначно находим формы a_k , $k = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяющие условию (2.19). Согласно методу Галеркина опустим в правой части уравнения (2.22) оставшиеся резонансные мономы, т.е. мономы $z^\alpha \bar{z}^\beta$ такие, что $(\alpha - \beta, e_1)^2 = 1$. Получившееся в результате уравнение имеет решение того же вида, что и его свободный член. Итак, поставленная выше задача разрешима в восьмимодовой аппроксимации Галеркина. Подставим полученные выражения для a_k , $k = 1, 2, 3, 4$, в систему (2.18). В результате получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1(\lambda_{0+} + c(|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2 + 2|z_4|^2)) + c\bar{z}_2^2 z_4, \\ \dot{z}_2 &= z_2(\lambda_{0-} + \bar{c}(2|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2 + 2|z_4|^2)) + \bar{c}z_1^2 z_3, \\ \dot{z}_3 &= z_3(\lambda_{1+} + c(2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + |z_3|^2 + 2|z_4|^2)) + cz_1^2 z_2, \\ \dot{z}_4 &= z_4(\lambda_{1-} + \bar{c}(2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2 + |z_4|^2)) + \bar{c}z_1 z_2^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Эта система инвариантна относительно группы преобразований

$$\{z_k \rightarrow \exp((-1)^{k+1} ig)z_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad g \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\},$$

которая является унитарным представлением в пространстве \mathbb{C}^4 группы вращений окружности.

Бегущей волне \widehat{v}_{0+} уравнения (1.9) соответствует периодическое решение

$$\varphi_{0+}(t, \mu, \nu) = \rho_{0+}^{1/2} (\exp(i\widehat{\omega}_{0+}t), \exp(-i\widehat{\omega}_{0+}t), 0, \dots, 0)^T$$

системы (2.23). Исследуем теперь на устойчивость это периодическое решение системы (2.23). С этой целью линеаризуем систему (2.23) на решении φ_{0+} . Полученная в результате система с периодическими коэффициентами заменой

$$z_k \rightarrow \exp(-1^{k+1}\widehat{\omega}_{0+}t)z_k, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

приводится к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, матрица коэффициентов которой является блочно-диагональной.

Одним из её блоков является матрица

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{Re} \lambda_{0+} + i\operatorname{Im} c\rho_{0+} & -\operatorname{Re} \lambda_{0+} + i\operatorname{Im} c\rho_{0+} \\ -\operatorname{Re} \lambda_{0+} - i\operatorname{Im} c\rho_{0+} & -\operatorname{Re} \lambda_{0+} - i\operatorname{Im} c\rho_{0+} \end{pmatrix}$$

с собственными значениями 0 и $-2\operatorname{Re} \lambda_{0+}$, что, разумеется, естественно, так как (2.23) — периодическое решение системы (2.23). Блоками указанной матрицы являются матрицы $A_{0+,0-} = A_{0+,0-}(\mu, \nu)$ и ей сопряженная $A_{0+,0-}^*$, где

$$A_{0+,0-} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda_{0-} - 2\operatorname{Re} \lambda_{0+} - i\chi\operatorname{Re} \lambda_{0+} & \bar{c}\rho_{0+} \\ c\rho_{0+} & \operatorname{Re} \lambda_{1+} - 2\operatorname{Re} \lambda_{0+} + \chi\operatorname{Re} \lambda_{0+} \end{pmatrix},$$

$\chi = \operatorname{Im} c / -\operatorname{Re} c$, ее одномерными блоками $-\operatorname{Re} \lambda_{1+} - 2\operatorname{Re} \lambda_{0+} - 2i\operatorname{Im} c\rho_{0+}$ и ей комплексно сопряженная величина.

Итак, орбитальная устойчивость решения φ_{0+} определяется матрицей $\operatorname{diag}(A_{0+,0-}(\mu, \nu), A_{0+,0-}^*(\mu, \nu))$ с характеристическим многочленом

$$\lambda^4 + 2a\lambda^3 + (a^2 + 2b)\lambda^2 + 2ab\lambda + b^2 + d^2. \quad (2.24)$$

Здесь

$$a = a_{0+,0-}(\mu, \nu) = 4\operatorname{Re} \lambda_{0+} - \operatorname{Re} \lambda_{0-} - \operatorname{Re} \lambda_{1+}, \quad (2.25)$$

$$b = b_{0+,0-}(\mu, \nu) = (2\operatorname{Re} \lambda_{0+} - \operatorname{Re} \lambda_{0-})(2\operatorname{Re} \lambda_{0+} - \operatorname{Re} \lambda_{1+}) + (\chi^2 - 1)\operatorname{Re} \lambda_{0+}^2, \quad (2.26)$$

$$d = d_{0+,0-}(\mu, \nu) = 2\chi\operatorname{Re} \lambda_{0+}(\operatorname{Re} \lambda_{0-} - \operatorname{Re} \lambda_{1+}). \quad (2.27)$$

В силу (1.14) $a_{0+,0-} > 0, b_{0+,0-} > 0$. Согласно критерию Рауса-Гурвица для устойчивости многочлена (2.24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} 2a(a^2 + 2b) - 2ab &> 0, \\ 2a(a^2 + 2b)2ab - (2ab)^2 - (2a)^2(b^2 + d^2) &> 0 \end{aligned}$$

Первое из этих условий, очевидно, выполняется. Второе же эквивалентно неравенству

$$ba^2 - b^2 + d^2 > 0. \quad (2.28)$$

С точностью порядка ε левая часть этого неравенства равна $4\Lambda^{-4}\chi^2$. Так как в рассматриваемом случае $\chi > 0$, то условие устойчивости многочлена (4.11) выполняется. Итак, бифурцирующее из нуля периодическое решение φ_{0+} уравнения (1.9) является экспоненциально орбитально устойчивым на промежутке $(0, (-\Lambda)^{-1}(m^+)^{-2})$ изменения бифуркационного параметра ε .

В силу равенств (1.13), (2.15) справедливо следующее представление

$$A_{0+,0-}(\mu, \nu) = -\widehat{\Lambda}^{-1}\nu\widehat{A}_{0+,0-}(\varepsilon). \quad (2.29)$$

Обозначим $\lambda_k^\pm(\varepsilon)$, $k = 1, 2$, корни характеристического многочлена, отвечающие матрице $\text{diag}(\widehat{A}_{0+,0-}(\varepsilon), \widehat{A}_{0+,0-}^*(\varepsilon))$ такие, что $\text{Re } \lambda_1 < \text{Re } \lambda_2$. Умножая корни указанного характеристического многочлена на $-\widehat{\Lambda}^{-1}\nu$, получим согласно (2.29) корни многочлена (4.11).

Приведем теперь ряд иллюстрирующих численных расчетов, в которых принято $h = 2\pi/3$, $L = -2$. Отметим, что именно случай $h = 2\pi/3$ рассматривался в [42]. Результаты численного анализа, выполненных с использованием пакета Mathematica, приводятся далее по следующей схеме: $(\widehat{K}, \gamma, w, \varepsilon, c, \lambda_1^\pm(\varepsilon), \lambda_2^\pm(\varepsilon))$:

Пример 1.

- 1)(2.266, 0.906, 1.8, 0.01, $-0.5362 \pm 0.9498i$, $-0.79849 \pm 2.12667i$, $-0.3615 \pm 0.9746i$)
- 2)(., ., ., ., 0.001, $-0.536287 \pm 0.949827i$, $-0.775353 \pm 1.47329i$, $-0.240647 \pm 0.457363i$)
- 3)(., ., ., ., 3.196, 0.7165, 2.08, 0.01, $-0.70780 \pm 1.34594i$, $-0.7844 \pm 2.23249i$,
 $-0.3755 \pm 1.0804i$),
- 4)(., ., ., ., 2.08, $-0.70780 \pm 1.34594i$, 0.001, $-0.66407 \pm 1.141493i$, $-0.351928 \pm 1.14569i$).

Здесь, как и далее, точками обозначены приведенные выше первые четыре значения из предыдущего примера. Согласно приведенным здесь примерам c имеет отрицательную вещественную часть. Собственные значения матриц $\text{diag}(\widehat{A}_{0+,0-}(\varepsilon), \widehat{A}_{0+,0-}^*(\varepsilon))$ для значений $w = 1.8, 2.08$ принадлежат левой комплексной полуплоскости.

Перейдем теперь к вопросу о характере устойчивости приближенного решения \widehat{v}_{0-} уравнения (1.9). Как уже отмечалось, решение \widehat{v}_{0-} рождается неустойчивым с индексом неустойчивости 2. Этому решению соответствует периодическое решение

$$\varphi_{0-}(t, \mu, \nu) = \rho_{0-}^{1/2}(0, 0, \exp(i\widehat{\omega}_{0-}t), \exp(-i\widehat{\omega}_{0-}t), 0, \dots, 0)^T$$

системы (2.23). Рассуждая, как и выше, приходим к заключению, что устойчивость периодического решения \widehat{v}_{0-} определяется матрицей

$$A_{0-,0+}(\mu, \nu) = \begin{pmatrix} \text{Re } \lambda_{0+} - 2\text{Re } \lambda_{0-} + i\text{Im } c\rho_{0-} & c\rho_{0-} \\ \bar{c}\rho_{0-} & \text{Re } \lambda_{1-} - 2\text{Re } \lambda_{0-} - i\text{Im } c\rho_{0-} \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся равенством

$$A_{0-,0+}(\mu, \nu) = -\widehat{\Lambda}^{-1}\nu\widehat{A}_{0-,0+}(\varepsilon).$$

Очевидно, два собственных значения матрицы $\text{diag}(\widehat{A}_{0-,0+}(\varepsilon), \widehat{A}_{0-,0+}^*(\varepsilon))$ имеют вблизи бифуркационного значения ε положительные вещественные значения. При углублении в область надкритичности, т. е. при уменьшении ε , вещественные части указанной пары убывают и проходят через мнимую ось. Приведем далее иллюстрирующие результаты численных расчетов корней характеристического многочлена матрицы $\text{diag}(\widehat{A}_{0-,0+}(\varepsilon), \widehat{A}_{0-,0+}^*(\varepsilon))$.

Пример 2.

- 5)(., ., 1.8, 0.067, -1.66956 ± 0.424581 , $-0.000440221 \pm 0.424581$)
 6)(., ., 1.8, 0.01, $-0.536287 \pm 0.949827i$, $-0.695606 \pm 0.720168i$,
 $-0.404394 \pm -0.404394i$),
 7)(., ., 1.8, 0.001, $-0.536287 \pm 0.949827i$, $-0.712479 \pm 1.73441i$,
 $-0.297521 \pm 0.724753i$),
 8)(., ., 2.08, 0.0672, $-1.67752 \pm 0.421305i$, $0.000744531 \pm 0.000744531i$),
 9)(., ., 2.08, 0.001, $-0.519656 \pm 0.771467i$, $-0.490344 \pm 0.771467i$),
 10)(., ., 2.5, 0.0626, -1.62603 ± 1.63653 , $0.0000292246 \pm 0.185641i$),
 11)(., ., 2.5, 0.001, $-0.550958 \pm 1.01441i$, $-0.459042 \pm 0.938943i$).

Согласно 5) при переходе ε через значение ≈ 0.067 пара чисто мнимых корней указанного характеристического многочлена для $w = 1.8$ переходит через мнимую ось из правой в левую полуплоскость. При дальнейшем уменьшении ε от указанного критического значения ε собственные значения матрицы $\text{diag}(\widehat{A}_{0-,0+}(\varepsilon), \widehat{A}_{0-,0+}^*(\varepsilon))$ остаются в устойчивой полуплоскости, что иллюстрируют, в частности, результаты в 6), 7). В случае $w = 2.08$, $w = 2.5$ критическими значениями ε собственных значений матрицы $\text{diag}(\widehat{A}_{0-,0+}(\varepsilon), \widehat{A}_{0-,0+}^*(\varepsilon))$ являются ≈ 0.0672 , ≈ 0.0626 соответственно (см. 8), 10)). Динамика собственных значений при уменьшении ε от критических значений такова, как и в случае $w = 1.8$.

Обратимся теперь к вопросу о взаимодействии бегущих волн \widehat{v}_{k+} , \widehat{v}_{k-} , $k = 0, 1, 2$ уравнения (1.9). Учитывая вид матрицы $A_{0+,0-}$, заключаем о давлении на \widehat{v}_{0+} пары бегущих волн решений \widehat{v}_{0-} , \widehat{v}_{1+} . Воздействие же на \widehat{v}_{0+} указанной пары решений уравнения (1.9) описывается как совместное воздействие на периодическое решение φ_{0+} системы (2.23) пары периодических решений φ_{0-} , φ_{1+} . Это воздействие, очевидно, можно описать шестимерной системой уравнений, положив в системе (2.23) $z_4 = \bar{z}_4 = 0$. Аналогичные рассуждения приводят к заключению, что воздействие на бегущую волн \widehat{v}_{0-} пары бегущих волн \widehat{v}_{0+} , \widehat{v}_{1-} уравнения (1.9) описывается системой (2.23) как соответствующее воздействие на φ_{0-} пары периодических решений φ_{0+} , φ_{1-} . Характер этого воздействия вполне описывается шестимерной системой уравнений. Полагая в системе (2.23) $z_3 = \bar{z}_3 = 0$, получим указанную систему.

Подчеркнем теперь, что давление на периодическое решение φ_{0+} системы (2.23) пары периодических решений φ_{0-} , φ_{1+} не приводит, согласно проведенному выше анализу, к изменению характера устойчивости φ_{0+} при уменьшении параметра ε и

его приближения к нулю. Неустойчивое периодическое решение φ_{0-} , преодолевая совместное воздействие периодических решений φ_{0+} , φ_{1-} , при некотором значении параметра ε обретает устойчивость и сохраняет его при дальнейшем уменьшении ε .

Ниже будет установлено соответствие в характере устойчивости периодического режима \hat{v}_{0-} уравнения (1.9) и периодического решения φ_{0-} системы (2.23).

3. Основной результат

Выполненный выше анализ приводит к целесообразности рассмотрения вопроса о воздействии на выделенную бегущую волну упорядоченных пар бегущих волн. В качестве такой волны возьмем \hat{v}_{k+} и рассмотрим воздействие на нее бегущих волн \hat{v}_{s-} , \hat{v}_{l+} , $l = 2k + s + 1$. С этой целью построим приближенные решения уравнения (1.9) в виде

$$v = \sum_{k=1}^3 \sigma_k(z_1 \exp(ik^+\theta), z_2 \exp(is^-\theta), z_3 \exp(il^+\theta), \text{к.с.}), \quad (3.1)$$

где $\sigma_1(z, \bar{z}) = z_1 + z_2 + z_3 + \text{к.с.}$, а $\sigma_2(z, \bar{z})$, $\sigma_3(z, \bar{z})$ — формы второй, третьей степени соответственно относительно z, \bar{z} , $z = (z_1, z_2, z_3)$. Рассуждая, как и выше, получаем G -эквивариантную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1(\lambda_{k+} + c(|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2)), \\ \dot{z}_2 &= z_2(\lambda_{s-} + \bar{c}(2|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2)) + \bar{c}z_1^2 z_3, \\ \dot{z}_3 &= z_3(\lambda_{l+} + c(2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + |z_3|^2)) + cz_1^2 z_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Следовательно, устойчивость периодического решения

$$\varphi_{k+}(t, \mu, \nu) = \rho_{k+}^{\frac{1}{2}} (\exp(i\hat{\omega}_{k+}t), \exp(-i\hat{\omega}_{k+}t), 0, \dots, 0)^T$$

системы (3.2) определяется матрицей

$$A_{k+,s-} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda_{s-} - 2\operatorname{Re} \lambda_{k+} - i\operatorname{Im} c\rho_{k+} & \bar{c}\rho_{k+} \\ c\rho_{k+} & \operatorname{Re} \lambda_{l+} - 2\operatorname{Re} \lambda_{k+} + i\operatorname{Im} c\rho_{k+} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем теперь матрицу $A_{k+,s-}$, заменив в ней λ_{k+} , λ_{s-} , λ_{l+} , ρ_{k+} на λ_{k-} , λ_{s+} , λ_{l+} , ρ_{k+} , соответственно. Полученную указанным образом матрицу обозначим $A_{k-,s+}$.

Рассмотрим теперь вопрос о воздействии на бегущую волну \hat{v}_{k+} бегущих волн \hat{v}_{s+} , \hat{v}_{n+} , где $s < k$, $n = 2k - s$. Построим с этой целью приближенные решения уравнения (1.9) в виде

$$v = \sum_{k=1}^3 \sigma_k(z_1 \exp(ik^+\theta), z_2 \exp(is^+\theta), z_3 \exp(in^+\theta), \text{к.с.}), \quad (3.3)$$

где $\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3 + \text{к.с.}$, а $\sigma_2(z, \bar{z})$, $\sigma_3(z, \bar{z})$ удовлетворяют тем же требованиям, что и в рассмотренном выше случае. Относительно z_k , $k = 1, 2, 3$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1(\lambda_{k^+} + c(|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2)), \\ \dot{z}_2 &= z_2(\lambda_{s^+} + c(2|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2)) + cz_1^2 \bar{z}_3, \\ \dot{z}_3 &= z_3(\lambda_{n^+} + c(2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + |z_3|^2)) + cz_1^2 \bar{z}_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Характер устойчивости периодического решения

$$\rho_{k^+}^{\frac{1}{2}} (\exp(i\hat{\omega}_{k^+} t), \exp(-i\hat{\omega}_{k^+} t), 0, \dots, 0)^T$$

системы (3.4) определяется матрицей A_{k^+, s^+} , которая равна матрице

$$A_{k^+, s^+} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda_{s^+} - 2\operatorname{Re} \lambda_{k^+} - i\chi \operatorname{Re} \lambda_{k^+} & \bar{c}\rho_{k^+} \\ c\rho_{k^+} & \operatorname{Re} \lambda_{n^+} - 2\operatorname{Re} \lambda_{k^+} + i\chi \operatorname{Re} \lambda_{k^+} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем теперь матрицу A_{k^+, s^+} , заменив в ней λ_{k^+} , λ_{s^+} , λ_{l^+} , ρ_{k^+} на λ_{k^-} , λ_{s^-} , λ_{l^-} , ρ_{k^-} , соответственно. Полученную указанным образом матрицу обозначим A_{k^-, s^-} .

Итак, воздействие на бегущую волну \hat{v}_{k^+} бегущих волн \hat{v}_{s^-} , \hat{v}_{l^+} , $l = 2k + s + 1$, описывается системой дифференциальных уравнений (3.2). Воздействие же на \hat{v}_{k^+} бегущих волн \hat{v}_{s^+} , $\hat{v}_{(2k-s)^+}$, $s < k$ описывается системой дифференциальных уравнений (3.4). В первом случае это воздействие порождает матрицу A_{k^+, s^-} , во втором – матрицу A_{k^+, s^+} . Очевидно, что для устойчивости решения \hat{v}_{k^+} уравнения (1.9) необходима гурвицевость указанных матриц. Эти условия обеспечивают, как доказано ниже, орбитальную устойчивость приближенного решения \hat{v}_{k^+} . Аналогичные утверждения имеют место, разумеется, и относительно воздействий на бегущую волну \hat{v}_{k^-} соответствующих пар бегущих волн. В частности, для устойчивости решения \hat{v}_{k^-} уравнения (1.9) необходима гурвицевость матриц A_{k^-, s^+} , A_{k^-, s^-} .

Прежде чем сформулировать соответствующий результат обозначим

$$\mathfrak{D}_{k^\pm} = \{(\mu, \nu) : \mu > 0, \nu > 0, \operatorname{Re} \lambda_{k^\pm}(\mu, \nu) > 0\},$$

Теорема 1. *Существует $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $(\mu, \nu) \in \mathfrak{D}_{k^+}$, $\|(\mu, \nu)\| < \delta_0$, уравнение (1.9) имеет периодическое по t решение $v_{k^+}(\eta, \mu, \nu)$, $(v_{k^-}(\eta, \mu, \nu))$, $\eta = \omega_{k^+}(\mu, \nu)t + (m^+ + kq)\theta$, $(\eta = \omega_{k^-}(\mu, \nu)t + (m^- + kq)\theta)$. С точностью порядка $\|(\mu, \nu)\|^{3/2}$ имеют место следующие равенства*

$$v_{k^\pm} = \rho_{k^\pm}^{1/2} 2 \cos \eta + \hat{\Lambda} \operatorname{ctg} \hat{w} \rho_{k^\pm} ((1 - \hat{\Lambda})^{-1} + \operatorname{Re}(b \exp(2i(\eta + m^\pm h))),$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{k^\pm} &= \frac{\operatorname{Re} \lambda_{k^\pm}(\mu, \nu)}{-\operatorname{Re} c}, \\ \omega_{k^\pm}(\mu, \nu) &= \operatorname{Im} \lambda_{k^\pm}(\mu, \nu) + \operatorname{Im} c \rho_{k^\pm}, \end{aligned}$$

а постоянная b удовлетворяет равенству (2.7).

Решение $v_{k+}(\mu, \nu)$ ($v_{k-}(\mu, \nu)$) — экспоненциально орбитально устойчиво в пространстве H^1 тогда и только тогда, когда:

- i) для любого $s \geq 0$ матрица $A_{k+,s-}(\mu, \nu)$ ($A_{k-,s+}(\mu, \nu)$) устойчива;
- ii) для любого $s < k$ матрица $A_{k+,s+}(\mu, \nu)$ ($A_{k-,s-}(\mu, \nu)$) устойчива.

Доказательство. Ограничимся доказательством утверждений теоремы относительно периодического решения $v_{k+}(\eta, \mu, \nu)$ уравнения (1.9). Аналогично доказываются и утверждения теоремы относительно периодического решения $v_{k-}(\eta, \mu, \nu)$.

Центральный момент доказательства состоит в исследовании свойств устойчивости в пространстве H^1 уравнения

$$\dot{\xi} = \mathfrak{L}(\mu, \nu)\xi + \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{R}(Q\hat{v}_{k+}, \nu)Q\xi, \quad (3.5)$$

полученного линеаризацией уравнения (1.9) на приближенном решении \hat{v}_{k+} . Введем в пространстве H ортопроектор P :

$$P\xi = \sum_{-k_0}^{k_0} P_s \xi_s, \quad P_s \xi = \xi_s \exp(is\theta), \quad \xi_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi \exp(-is\theta) d\theta,$$

где выбор k_0 осуществим позже. Воспользуемся представлением $\xi = h + w$, $h = P\xi$, $w = (I - P)v$, где I — тождественный оператор. В полученной относительно h, w системе уравнений положим $w = 0$. В результате получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\dot{h}_n = \lambda_n h_n + P_n \frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{R}(Q\hat{v}_{k+}, \nu) Q \sum_{-k_0}^{k_0} h_s \exp(is\theta). \quad (3.6)$$

Здесь $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k_0$, $h_{-n} = \bar{h}_n$. Очевидно, эта система является $2k_0 + 1$ -модовой галеркинской аппроксимацией уравнения (3.5). Для исследования устойчивости этой системы воспользуемся принципом сведения. В системе (3.6) будем различать критические и некритические переменные. Выделим из (3.6) уравнения относительно критических переменных. Используя равенство

$$\frac{\partial \mathfrak{R}(u, 0)}{\partial u} = \hat{\Lambda} \operatorname{ctg}(\hat{w})u - \frac{1}{2} \hat{\Lambda} u^2 + o(u^2),$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{h}_{l+} &= \lambda_{l+} h_{l+} + \rho_{k+}^{1/2} \hat{\Lambda} \operatorname{ctg} \hat{w} (\exp(i(\hat{\omega}_{k+} t + m^+ h))) h_{(l-k)q} + \\ &+ \exp(-i(\hat{\omega}_{k+} t + m^+ h)) h_{2m^+ + (l+k)q} + \\ &+ \rho_{k+} ((\hat{\Lambda} \operatorname{ctg} \hat{w})^2 (1 - \hat{\Lambda})^{-1} \exp(im^+ h) h_{l+} + \\ &+ (-\hat{\Lambda}/2 + (\hat{\Lambda} \operatorname{ctg} \hat{w})^2 b \exp(2im^+ h) \times \\ &\times \exp(i(2\hat{\omega}_{k+} t + m^+ h))) h_{(l-2k-1)-} + \dots, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $l \geq 0$, $m^+ + lq \leq k_0$, $2m^+ + (l+k)q \leq k_0$. Здесь многоточие обозначает члены порядка ρ_{k^+} , содержащие некритические переменные, и слагаемые порядка $\rho_{k^+}^{3/2}$. Точно так же имеем

$$\begin{aligned} \dot{h}_{l-} &= \lambda_{l-} h_{l-} + \rho_{k^+}^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} (\exp(i(\widehat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{m^- - m^+ + (l-k)q} + \\ &+ \exp(-i(\widehat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{(l+k+1)q}) + \\ &+ \rho_{k^+} ((\widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w})^2 (1 - \widehat{\Lambda})^{-1} \exp(-im^+ h) h_{l-} + \\ &+ (-\widehat{\Lambda}/2 + (\widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w})^2 \bar{b} \exp(-2im^+ h) \times \\ &\times \exp(-i(2\widehat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{(2k+l+1)q}) + \dots, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $l \geq 0$, $m^- + lq \leq k_0$, $2m^+ + (l+k)q \leq k_0$, а многоточие имеет тот же смысл, что и выше. Заметим, что если $l \geq 0$, $m^- + lq \leq k_0$, но $2m^+ + (l+k)q > k_0$, то в правой части уравнения (3.7) следует опустить слагаемое, пропорциональное $h_{2m^+ + (l+k)q}$. Аналогично поступаем и со слагаемым в правой части уравнения (3.8), пропорциональным $h_{(2k+l+1)q}$, если $(2k+l+1)q > k_0$. Уравнения относительно $h_{-l+} = \bar{h}_{l+}$, $h_{-l-} = \bar{h}_{l-}$, $l \geq 0$, получаются соответственно из уравнений (3.7), (3.8) операцией комплексного сопряжения.

В соответствии с уравнениями (3.7), (3.8) выделим из системы (3.6) следующие уравнения относительно некритических переменных

$$\begin{aligned} \dot{h}_{sq} &= \lambda_{sq} h_{sq} + \rho_{k^+}^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} (\exp(i\widehat{\omega}_{k^+} t) h_{(s-k-1)-} + \\ &+ \exp(-i\widehat{\omega}_{k^+} t) h_{(s+k)+}) + \dots, \\ \dot{h}_{2m^+ + sq} &= \lambda_{2m^+ + sq} h_{2m^+ + sq} + \\ &+ \rho_{k^+}^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} \exp(i(\widehat{\omega}_{k^+} t + 2m^+ h)) h_{(s-k)+} + \dots, \\ \dot{h}_{m^- - m^+ + sq} &= \lambda_{m^- - m^+ + sq} h_{m^- - m^+ + sq} + \\ &+ \rho_{k^+}^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} \exp(i\widehat{\omega}_{k^+} t) h_{(s+k)+} + \dots, \end{aligned}$$

где многоточие означает члены порядка $\rho_{k^+}^{1/2}$, содержащие некритические переменные, и слагаемые порядка ρ_{k^+} .

Выполним теперь в системе (3.6) преобразование

$$\begin{aligned} h_{l+} &\rightarrow h_{l+} - \rho_{k^+}^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} (\exp(i(\widehat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{(l-k)q} + \\ &+ b \exp(i(-\widehat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{2m^+ + (l-k)q}), \quad 2m^+ + (l+k+1)q \leq k_0, \\ h_{l-} &\rightarrow h_{l-} - \rho_{k^+}^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} (\exp(-i(\widehat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{(l+k+1)q} + \\ &+ b \exp(i(\widehat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{m^- - m^+ + (l-k)q}), \quad (l+k+1)q \leq k_0. \end{aligned}$$

Если $2m^+ + (l+k)q > k_0$, то в этом преобразовании опустим слагаемые, содержащие $h_{2m^+ + (l+k)q}$. Аналогично поступим со слагаемым, пропорциональным $h_{(2k+l+1)q}$, если $(2k+l+1)q > k_0$. В результате получим систему относительно критических

переменных, которая членами $o(\rho_{k^+})$ отличается от системы

$$\begin{aligned}\dot{h}_{l^+} &= (\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+})h_{l^+} + c\rho_{k^+} \exp(2i\hat{\omega}_{k^+}t)h_{(l-2k-1)^-}, \\ \dot{h}_{l^-} &= (\lambda_{l^-} + 2\bar{c}\rho_{k^+})h_{l^-} + \bar{c}\rho_{k^+} \exp(-2i\hat{\omega}_{k^+}t)h_{(l+2k+1)^+}, \\ \dot{h}_{l^+} &= (\lambda_{l^+} + 2\bar{c}\rho_{k^+})h_{l^+}, \quad (l+2k+1)^+ > k_0.\end{aligned}$$

Ясно, что эта система с точностью $o(\rho_{k^+})$ представляет систему (3.6) на критическом инвариантном многообразии.

Замена

$$h_{l^+} \rightarrow \exp(i\hat{\omega}_{k^+}t)h_{l^+}, \quad h_{l^-} \rightarrow \exp(-i\hat{\omega}_{k^+}t)h_{l^-}.$$

приводит эту систему уравнений к виду

$$\begin{aligned}\dot{h}_{l^+} &= (\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+} - i\hat{\omega}_{k^+})h_{l^+} + c\rho_{k^+}h_{(l-2k-1)^-}, \\ \dot{h}_{l^-} &= (\lambda_{l^-} + 2\bar{c}\rho_{k^+} + i\hat{\omega}_{k^+})h_{l^-} + \bar{c}\rho_{k^+}h_{(l+2k+1)^+}, \\ \dot{h}_{l^+} &= (\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+} + i\hat{\omega}_{k^+})h_{l^+}, \quad (l+2k+1)^+ > k_0.\end{aligned}$$

Блочно-диагональная матрица коэффициентов A^{k^+} этой системы состоит из двумерных и одномерных блоков. Её двумерные блоки:

- a) $A_{k^+,s^-}, \bar{A}_{k^+,s^-}, m^+ + (2k+s+1)q \leq k_0$;
- b) $A_{k^+,s^+}, \bar{A}_{k^+,s^+}, 0 \leq s < k$;

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{Re} \lambda_{k^+} + i\operatorname{Im} c\rho_{k^+} & -\operatorname{Re} \lambda_{k^+} + i\operatorname{Im} c\rho_{k^+} \\ -\operatorname{Re} \lambda_{k^+} - i\operatorname{Im} c\rho_{k^+} & -\operatorname{Re} \lambda_{k^+} - i\operatorname{Im} c\rho_{k^+} \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы A_{k^+,s^-}, A_{k^+,s^+} определены выше. Одномерными блоками матрицы A^{k^+} являются $\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+} + i\hat{\omega}_{k^+}, (l+2k+1)^+ > k_0$, и им комплексно сопряженные величины. Следовательно, при фиксированных $\mu > 0, \nu > 0$ найдется такое $k_0 = k_0(\mu, \nu)$, что $\operatorname{Re}(\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+}) < 0$ для всех l , удовлетворяющих неравенству $(l+2k+1)^+ > k_0$. Итак, устойчивость системы (3.6) определяется матрицами $A_{k^+,s^-}, s \geq 0, m^+ + (2k+s+1)q \leq k_0, A_{k^+,s^+}, 0 \leq s < k$.

Следуя [17], приходим к заключению, что экспоненциальная орбитальная устойчивость приближенного решения \hat{v}_{k^+} имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия i), ii) теоремы. Перейдем теперь к вопросу о существовании решения v_{k^+} уравнения (1.9) типа бегущей волны. Положим в (1.9) $v = y(\tau, \mu, \nu) = y(\omega t + (m^+ + kq)\theta, \mu, \nu)$. В результате для определения 2π -периодического решения $y(\tau, \mu, \nu)$ и $\omega = \omega_{k^+}(\mu, \nu)$ имеем сингулярно возмущенное дифференциально-разностное уравнение

$$\begin{aligned}\omega y'(\tau) &= \mu(m^+ + kq)^2 y''(\tau) - y(\tau) + \\ &+ (\hat{\Lambda} - \nu)y(\tau + m^+h) + \Re(y(\tau + m^+h), \nu).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Согласно (2.16) это уравнение при $\omega = \hat{\omega}_{k^+}$ имеет приближенное по невязке порядка $\rho_{k^+}^{3/2}$ 2π -периодическое решение $\hat{y}(\tau) = \hat{y}(\tau, \mu, \nu)$, где

$$\hat{y}(\tau) = \rho_{k^+}^{1/2} 2 \cos(\tau) + \hat{\Lambda} \operatorname{ctg} \hat{\omega}_{k^+} ((1 - \hat{\Lambda})^{-1} + \operatorname{Re} b \exp(2i(\tau + m^+h))).$$

Согласно изложенному выше, можно построить приближенные 2π -периодические решения уравнения (3.9) с любой наперед заданной точностью при соответствующем выборе ω . Следуя [17], покажем, что существование приближенных 2π -периодических решений влечет существование 2π -периодического решения уравнения (3.9). Линеаризованное на $\hat{y}(\tau)$ уравнение запишем в виде

$$\mathfrak{B}(\mu, \nu)z = \hat{\omega}_{k+} z'(\tau) - \mu(m^+ + kq)^2 z''(\tau) - z(\tau) + \\ + (\hat{\Lambda} - \nu)z(\tau + m^+h) + (\rho^{1/2}g_1 + \rho g_2 + \rho^{3/2}g_3)z(\tau + m^+h) = 0,$$

где $\rho = \rho_{k+}(\mu, \nu)$,

$$g_1 = g_1(\tau) = -\hat{\Lambda} \operatorname{ctg} \hat{w}(\exp(i(\tau + m^+h)) + \exp(-i(\tau + m^+h))), \\ g_2 = g_2(\tau) = \frac{1}{2}\hat{\Lambda}(\exp(i(\tau + m^+h)) + \exp(-i(\tau + m^+h)))^2 - \\ - (\hat{\Lambda} \operatorname{ctg} \hat{w})^2((1 - \hat{\Lambda})^{-1} + (\frac{b}{2} \exp(2i(\tau + m^+h)) + \text{к.с.})),$$

а функция $g = g_3(\tau, \mu, \nu) - 2\pi$ -периодична по τ , непрерывно дифференцируема по τ и непрерывна по (μ, ν) при $0 \leq \mu < \mu_0$, $0 < \nu < \nu_0$. Замена

$$y = \hat{y}(\tau) + z$$

приводит уравнение (3.9) к виду

$$\mathfrak{B}(\mu, \nu)z = F(\tau, z, z', \mu, \nu, \delta), \quad (3.10)$$

где

$$F(\tau, z, z', \mu, \nu, \delta) = \delta(z'(\tau) + \hat{y}'(\tau)) + f(\tau, z, \mu, \nu).$$

Здесь $\delta = \hat{\omega}_{k+} - \omega$,

$$f(\tau, z, \mu, \nu) = f_0(\tau, \mu, \nu) + f_2(\tau, z, \mu, \nu),$$

где 2π -периодическая функция f_0 такова, что

$$\|f_0(\cdot, \mu, \nu)\|_H < d\rho^{3/2}(\mu, \nu),$$

а функция $f_2(\tau, \cdot, \mu, \nu) : H^1 \rightarrow H$, $f_2(\tau, 0, \mu, \nu) = 0$ удовлетворяет условию

$$\|f_2(\cdot, z_1, \cdot) - f_2(\cdot, z_2, \cdot)\|_H < d \max(\|z_1\|_{H^1}, \|z_2\|_{H^1}) \|z_1 - z_2\|_H \quad (3.11)$$

для всех $\|z_k\|_{H^1} < d\rho$, $k = 1, 2$. Здесь и далее одним символом d будем обозначать положительные постоянные, которые не зависят от μ, ν и точные значения которых несущественны.

Вопрос о разрешимости уравнения (3.10) приводит к рассматриваемой в пространстве H^2 задаче

$$\mathfrak{B}(\mu, \nu)z = g, \quad g \in H. \quad (3.12)$$

Предположим, что $z \in H^2$ удовлетворяет этому уравнению. Умножим его левую и правую части скалярно на z . Используя затем интегрирование по частям и неравенство Гельдера, получим априорную оценку

$$\|z\|_{H^1} < d(\|z\|_H + \|g\|_H).$$

Действуя аналогично, получим неравенство

$$(m^+ + kq)^2 \mu \|z\|_{H^2} < d(\|z\|_H + \|g\|_H).$$

Дальнейший анализ задачи (3.12) опирается на свойства спектральной задачи

$$\mathfrak{B}(\mu, \nu)z = \lambda z, \quad z \in H. \quad (3.13)$$

Интерпретируем её как возмущение задачи

$$\hat{\omega}_k z'(\tau) - \mu(m^+ + kq)^2 z''(\tau) - z(\tau) - (\hat{\Lambda} - \nu)z(\tau + m^+h) = \lambda z,$$

рассматриваемой в пространстве H . Ясно, что последняя имеет полную, ортонормированную в H систему собственных функций $1, \exp(ik\tau), k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Собственным функциям $\exp(i\tau), \exp(-i\tau)$ соответствуют комплексно сопряженные собственные значения, стремящиеся к нулю при $\mu \rightarrow 0, \nu \rightarrow 0$.

Все остальные собственные значения при малых μ, ν являются простыми и равномерно отделены от нуля. В этой связи достаточно ограничиться исследованием задачи (3.13) для λ из окрестности нуля. Так как $\rho^{-1/2} \hat{y}'(\tau)$ — приближенное решение (3.13) при $\lambda = 0$, то применима следующая методика. Положим

$$\begin{aligned} z &= \beta_1 \exp(i\tau) + \beta_2 \exp(-i\tau) + z_2(\tau, \mu, \nu) + z_3(\tau, \mu, \nu) + \dots, \\ \lambda &= \lambda_1(\mu, \nu) + \lambda_2(\mu, \nu) + \dots \end{aligned}$$

и подставим эти равенства в (3.13). Приравняем затем слагаемые в левой и правой частях полученного равенства одного порядка малости. В результате относительно z_2 получим уравнение

$$\mathfrak{B}z_2 = -\rho^{1/2} g_1(\tau)(\beta_1 \exp(i(\tau + m^+h)) + \beta_2 \exp(-i(\tau + m^+h))),$$

где $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(0, 0)$, которому удовлетворяет функция

$$\begin{aligned} z_2 &= \hat{\Lambda} \operatorname{ctg} \hat{w}(b\beta_1 \exp(2i(\tau + m^+h)) + \\ &+ \bar{b}\beta_2 \exp(-2i(\tau + m^+h)) + (1 - \hat{\Lambda})^{-1}(\beta_1 + \beta_2)). \end{aligned}$$

Уравнение

$$\mathfrak{B}z_3 = G_3(\tau, \mu, \nu)$$

разрешимо тогда и только тогда, когда функция G_3 ортогональна $\exp(i\tau)$ и $\exp(-i\tau)$. Отсюда следует, что $(\beta_1, \beta_2)^T$ является собственным вектором матрицы

$$\rho S = \rho \begin{pmatrix} c & c \\ \bar{c} & \bar{c} \end{pmatrix},$$

а λ_1 — соответствующее собственное значение. Очевидно, собственным векторам $(1, -1)^T$ и $(c, \bar{c})^T$ этой матрицы отвечают собственные значения 0 и $2\rho \operatorname{Re} c$ соответственно. Итак,

$$z^1(\tau, \mu, \nu) = \operatorname{Re}(c \exp(i\tau)) + \rho^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w}((1 - \widehat{\Lambda})^{-1} + \operatorname{Re}(c \exp(2i(\tau + m^+ h)))) + O(\rho) \quad (3.14)$$

— собственная функция оператора $\mathfrak{B}(\mu, \nu)$, соответствующая собственному значению $2\rho \operatorname{Re} c + O(\rho^2)$. Нулевому с точностью $O(\rho^2)$ собственному значению отвечает собственная функция $\rho^{-1/2}(\hat{y}'(\tau) + O(\rho))$. Из условия разрешимости уравнения

$$S\beta = \alpha$$

закключаем, что $\operatorname{Im}(c \exp(i\tau)) + O(\rho^{1/2})$ — собственная функция оператора, сопряженного к оператору $\mathfrak{B}(\mu, \nu)$, и нулевым с точностью $O(\rho^2)$ собственным значением.

Добавим теперь в левую часть (3.13) слагаемое $-\langle z, h^0 \rangle \mathfrak{B}(\mu, \nu) h^0 \|h^0\|^{-2}$, где $h^0(\tau) = \rho^{-1/2} \hat{y}'(\tau)$. В результате получим спектральную задачу

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu, \nu)z = \lambda z, \quad z \in H.$$

Ясно, что $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu, \nu)h^0 = 0$. Спектральные свойства оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu, \nu)$ аналогичны таковым для оператора $\mathfrak{B}(\mu, \nu)$. В частности, $2\rho \operatorname{Re} c + O(\rho^2)$ есть собственное значение оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu, \nu)$, которому соответствует собственная функция $h^1 = z^1 + O(\rho^2)$, где z^1 удовлетворяет равенству (3.14). Воспользуемся далее равенством $\widehat{\mathfrak{B}}^*q = 0$, где

$$q = q(\tau, \mu, \nu) = (\operatorname{Re} c)^{-1} \operatorname{Im}(c \exp(i\tau)) + O(\rho^{1/2}), \quad \langle q, h^0 \rangle = 1.$$

Обозначим $M_1 = \operatorname{Span}\{h^1\}$. Пусть H разложено по $\{0, 2\rho \operatorname{Re} c + O(\rho^2)\}$, т. е.

$$H = \operatorname{Ker}(\widehat{\mathfrak{B}}) \oplus M_1 \oplus M_2.$$

В силу альтернативы Фредгольма уравнение

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu, \nu)z = g, \quad g \in H,$$

разрешимо тогда и только тогда, когда: $\langle g, q \rangle = 0$. Согласно изложенному имеют место оценки

$$\|\mathfrak{K}g\|_1 < d\|g\|, \quad g \in M_2,$$

$$\|\mathfrak{K}g\|_1 < \frac{d}{\rho}\|g\|, \quad g \in M_1.$$

Пусть \widehat{P} проектор в пространстве H на $\operatorname{Ker}(\widehat{\mathfrak{B}}) \oplus M_1$. В силу построения \hat{v}_{k+} справедливо неравенство

$$\|\widehat{P}f_0(\cdot, \mu, \nu)\| < d\rho^{5/2}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (3.10). Заменяем в нём \mathfrak{B} на $\widehat{\mathfrak{B}}$. Это замену мы учтем и в правой части. Правую часть обозначим \widehat{F} . В этой связи отметим, что согласно проведенному анализу задачи (3.13)

$$\|\mathfrak{B}(\mu, \nu)h^0\| < d\rho, \quad \|\widehat{F}\mathfrak{B}(\mu, \nu)h^0\| < d\rho^{3/2}.$$

Рассмотрим в пространстве H^1 уравнение

$$w - \mathfrak{K}(\widehat{F}(\cdot, w, w', \mu, \nu, \delta) - \langle q, \widehat{F}(\cdot, w, w', \mu, \nu, \delta) \rangle q) = 0. \quad (3.15)$$

Теперь ясно, что метод последовательных приближений с нулевой начальной точкой, примененный к этому уравнению, приводит к сходящейся в H^1 последовательности равномерно по μ, δ в области $0 \leq \mu \leq \mu_0, |\delta| \leq d\rho^{3/2}$. Предел этой последовательности $w^*(\mu, \nu, \delta)$ является решением уравнения (3.15) таким, что:

$$\|w^*(\mu, \nu, \delta)\|_1 < d\rho^{3/2}. \quad (3.16)$$

Согласно (3.11) существует единственное решение уравнения (3.15), удовлетворяющее этому неравенству. Функция $w^*(\mu, \nu, \delta) \in H^2$ при $\mu > 0$ ($w^*(0, \nu, \delta) \in H^1$) непрерывна по μ, ν, δ и удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{B}(\mu, \nu)z = F(\tau, z, z', \mu, \nu, \delta) - \mathfrak{D}(\mu, \nu, \delta)q(\tau),$$

где

$$\mathfrak{D}(\mu, \nu, \delta) = \langle q, \widehat{F}(\cdot, w^*(\mu, \nu, \delta), w^{*'}(\mu, \nu, \delta), \mu, \nu, \delta) \rangle.$$

Несложно убедиться в том, что $w^*(\mu, \nu, \delta)$ имеет непрерывную производную по δ . Итак, вопрос о разрешимости уравнения (3.10) в пространстве H^2 при $\mu > 0$ сводится к вопросу о разрешимости относительно δ уравнения

$$\mathfrak{D}(\mu, \nu, \delta) = 0. \quad (3.17)$$

Несложно убедиться в справедливости равенства

$$\mathfrak{D}(\mu, \nu, \delta) = \rho((\operatorname{Re} c)^{-1}\delta + \rho^{3/2}\sigma(\mu, \nu, \delta)),$$

где $\sigma(\mu, \nu, \delta)$ непрерывна по всем переменным и непрерывно дифференцируема по δ . Отсюда следует существование непрерывного при $0 \leq \mu \leq \mu_0, 0 \leq \nu \leq \nu_0$ решения $\delta = \delta(\mu, \nu)$ уравнения (3.17) такого, что

$$|\delta(\mu, \nu)| < d\rho^{3/2}.$$

Следовательно, $w^*(\mu, \nu, \delta(\mu, \nu))$ есть 2π -периодическое по t решение уравнения (3.7) при $0 \leq \mu \leq \mu_0, 0 \leq \nu \leq \nu_0$. Очевидно,

$$|\delta(\mu, \nu)| + \|w^*(\mu, \nu, \delta(\mu, \nu))\|_1 < d\rho^{3/2}(\mu, \nu).$$

Теорема доказана. □

Опираясь на теорему, можно получить легко проверяемые условия устойчивости бегущей волны v_{k+} . Введем с этой целью следующие обозначения

$$\begin{aligned} a_{k+,s-} &= 4\operatorname{Re} \lambda_{k+} - \operatorname{Re} \lambda_{s-} - \operatorname{Re} \lambda_{l+}, \\ b_{k+,s-} &= (2\operatorname{Re} \lambda_{k+} - \operatorname{Re} \lambda_{s-})(2\operatorname{Re} \lambda_{k+} - \operatorname{Re} \lambda_{l+}) - \operatorname{Re} \lambda_{k+}^2, \\ \beta_{k+,s-} &= \chi \operatorname{Re} \lambda_{k+} (\operatorname{Re} \lambda_{s-} - \operatorname{Re} \lambda_{l+}), \end{aligned}$$

где $l = 2k + s + 1$. Для устойчивости матриц $A_{k+,s-}$, $\bar{A}_{k+,s-}$, $s \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство

$$d_{k+,s-} = a_{k+,s-}^2 - b_{k+,s-} - b_{k+,s-}^2 - \beta_{k+,s-}^2 > 0.$$

Заметим, что $\operatorname{Re} \lambda_{k+} = -\widehat{\Lambda}^{-1} \nu (1 + \widehat{\Lambda} (m^+ + kq)^2 \varepsilon^2)$, где $\varepsilon^2 = \frac{\mu}{\nu}$. В силу (1.14) $b_{k+,s-}$ принимает минимальное значение при $s = 0$. Будем далее считать, что ε достаточно мало. Как легко видеть, если

$$m^+ + kq < (-\widehat{\Lambda}^{-1})^{1/2} \left(\frac{2}{5\varepsilon}\right)^{1/2},$$

то $b_{k+,0-} > 0$. Можно убедиться, что, если

$$m^+ + kq < (-\widehat{\Lambda}^{-1})^{1/2} \left(\frac{2}{(5 + 4\chi^2)\varepsilon}\right)^{1/2},$$

то матрицы $A_{k+,s-}$, $s \geq 0$, — гурвицевы при малых ε .

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости матрицы $A_{k+,s+}$, $s < k$. Несложный анализ приводит к заключению, что для устойчивости матрицы $A_{k+,(k-1)+}$ необходимо выполнения условия

$$m^+ + kq < \left(\frac{\nu}{3\mu}\right)^{1/2} (-\widehat{\Lambda}^{-1})^{1/2}. \quad (3.18)$$

В этом случае имеет место неравенство

$$1 + \widehat{\Lambda} (m^+ + kq)^2 \frac{\mu}{\nu} > \frac{2}{3} (1 + \widehat{\Lambda} (m^+)^2 \frac{\mu}{\nu}). \quad (3.19)$$

Можно убедиться, что для устойчивости матрицы $A_{k+,s+}$, $s < k$, достаточно выполнения неравенства

$$m^+ + kq < \left(\frac{\nu}{(3 + 8\chi^2)\mu}\right)^{1/2} (-\widehat{\Lambda}^{-1})^{1/2}. \quad (3.20)$$

Таким образом, для экспоненциальной орбитальной устойчивости бегущей волны $v_{k+}(\eta, \varepsilon)$ достаточно выполнения неравенства (3.20). Если же имеет место неравенство строго противоположное неравенству (3.18), то бегущая волна $v_{k+}(\eta, \varepsilon)$ неустойчива. Отметим, что достаточным условием устойчивости бегущей волны $v_{k-}(\eta, \varepsilon)$ является неравенство (3.20), в котором выполнена замена m^+ на m^- .

Итак, при сформулированных выше условиях и при $\varepsilon \rightarrow 0$ в рассматриваемой задаче реализуется феномен буферности, т.е. неограниченно увеличивается количество сосуществующих экспоненциально орбитально устойчивых периодических по t решений уравнения (1.9) типа бегущих волн.

В качестве иллюстрации к теореме рассмотрим вопрос об обретении устойчивости решения v_{1+} . v_{1+} рождается неустойчивым с индексом неустойчивости 4. Воздействие бегущих волн v_{0+} , v_{2+} на бегущую волну v_{1+} описывается системой дифференциальных уравнений (3.4), в которой $s^+ = 0^+$, $n^+ = 2^+$. Далее приводятся собственные значения матриц указанного воздействия, увеличенные на $-\hat{\Lambda}\nu^{-1}$.

Пример 3.

- 12) $(1.8, 0.1, -3.34431 \pm 2.38068i, 3.74431 \pm 2.38257i)$,
 13) $(1.8, 0.0085, -0.88008 \pm 0.89224i, -0.000919586 \pm 0.135304i)$,
 14) $(1.8, 0.001, -0.57882 \pm 0.73119i, -0.470103 \pm 0.73119i)$.

Согласно примеру бегущая волна v_{1+} в случае $w = 1.8$ неустойчива относительно рассматриваемого давления до значения $\varepsilon \approx 0.0085$. v_{1+} при переходе через указанное значение ε преодолевает давление пары v_{0+} , v_{2+} при дальнейшем уменьшении ε . Индекс неустойчивости v_{1+} при этом понижается на два порядка.

Воздействие бегущих волн v_{0-} , v_{3+} на v_{1+} описывается системой дифференциальных уравнений (3.2), в которой $s^+ = 0^-$, $l^+ = 3^+$. Приведем, как и выше, собственные значения соответствующих матриц.

Пример 4.

- 15) $(1.8, 0.1, -8.11695 \pm 3.3007i, 3.11695 \pm 3.30073i)$,
 16) $(0.0078, -1.305626 \pm 0.764432i, -0.005052 \pm 0.0.764432i)$,
 17) $(1.8, 0.001, -0.635064 \pm 0.715197i, -0.404936 \pm 0.715197i)$.

Бегущая волна v_{1+} согласно приведенным расчетам неустойчива относительно рассматриваемого давления до значения $\varepsilon \approx 0.0078$. При переходе через указанное значение ε v_{1+} , преодолевая давление v_{0-} , v_{3+} , устойчивость обретает и сохраняет его при уменьшении ε .

4. Высококомодовая буферность

Предположим, что имеет место равенство

$$h = \hat{h} + \nu, \quad \hat{h} = 2\pi p/q, \quad (4.1)$$

где ν меняется в окрестности нуля, а натуральные p, q такие же, как в равенстве (1.4). Этот случай представляет теоретический интерес и, что самое главное, отвечает физическим условиям преобразования поворота в оптических системах с двумерной обратной связью.

Определим согласно (1.6) при $h = \widehat{h}$ натуральные $m^+ < m^-$, $m^+ + m^- = q$. Рассмотрим теперь уравнение (1.7) при $h = \widehat{h}$. Сохраняя принятые выше обозначения, предположим, что \widehat{K} решение этого уравнения, причем $\sin \widehat{w} > 0$, $\widehat{\Lambda} = -\widehat{K}\gamma \sin \widehat{w} < -1$. $\widehat{w} = w(\widehat{K})$.

Выполним в уравнении (1.1) преобразование

$$u = v + \widehat{w}$$

и представим полученное уравнение в виде

$$\dot{v} = \mathfrak{L}_1(\mu, \nu)v + \mathfrak{R}_1(Qv, \nu), \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1(\mu, \nu)v &= \mu\Delta v - v + \widehat{\Lambda}Qv, \\ \mathfrak{R}_1(v, \nu) &= \widehat{K}\gamma[\cos(\widehat{w} + v) - \cos \widehat{w} + v \sin(\widehat{w})]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$\mathfrak{L}_1(\mu, \nu) \exp(im\theta) = \lambda_m^1(\mu, \nu) \exp(im\theta), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где

$$\lambda_m^1(\mu, \nu) = -1 - \mu m^2 + \widehat{\Lambda} \exp(im(\widehat{h} + \nu)). \quad (4.3)$$

Обозначим

$$\delta_{s\pm}^1(\mu, \nu) = -\mu(m^\pm + sq)^2 - \nu\widehat{\Lambda}(m^\pm + sq) \sin m^\pm \widehat{h}. \quad (4.4)$$

Из равенств (4.3) следуют формулы

$$\operatorname{Re} \lambda_{s\pm}^1(\mu, \nu) = \delta_{s\pm}^1(\mu, \nu) + O(\nu^2), \quad (4.5)$$

$$\operatorname{Im} \lambda_{s\pm}^1(\nu) = \widehat{\Lambda} \sin m^\pm \widehat{h} + i\nu s^\pm \cos m^\pm \widehat{h} O(\nu^2). \quad (4.6)$$

Предположим теперь, что

$$\sin m^+ \widehat{h} < 0.$$

Если $\nu < 0$, то $\delta_{k-}^1(\mu, \nu) < 0$ при всех $k \geq 0$. Следовательно, при $\nu < 0$ все собственные значения $\lambda_{s-}^1(\mu, \nu)$, $s = 0, 1, 2, \dots$ оператора $\mathfrak{L}_1(\mu, \nu)$ принадлежат левой комплексной полуплоскости.

Следовательно, при $\nu > 0$ интерес представляет случай

$$\sin m^+ \widehat{h} > 0. \quad (4.7)$$

Тогда согласно равенств (4.3), (4.4) для бифуркационного параметра $\varepsilon = -\frac{\mu}{\nu\widehat{\Lambda}}$ точками бифуркации являются $(m^+ + sq)^{-1} \sin m^+ \widehat{h}$. При уменьшении ε в этих точках из тривиального решения уравнения ответвляются решения типа бегущих волн. Рассуждая, как и выше, приходим к следующему заключению: если

$\delta_{k^+}(\mu, \nu) > 0$, то уравнение (4.2) при $\nu > 0$ имеет приближенное по невязке порядка $\delta_{k^+}(\mu, \nu)^{3/2}$, периодическое по t решение $v_{k^+}^1(\eta, \mu, \nu)$, $\eta = \omega_{k^+}^1(\mu, \nu)t + (m^+ + kq)\theta$, где

$$v_{k^+}^1 = (\rho_{k^+}^1)^{1/2} 2 \cos \eta + \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} \rho_{k^+}^1 ((1 - \widehat{\Lambda})^{-1} + \operatorname{Re} b \exp(2i(\eta + m^+ h))) + o(\mu, \nu). \quad (4.8)$$

Здесь

$$\rho_{k^+}^1 = \frac{\delta_{k^+}(\mu, \nu)}{-\operatorname{Re} c} + o(\|(\mu, \nu)\|), \quad (4.9)$$

$$\omega_{k^+}^1(\mu, \nu) = \operatorname{Im} \lambda_{k^+}^1(\mu, \nu) + \operatorname{Im} c \rho_{k^+}^1 + o(\|(\mu, \nu)\|),$$

а постоянные b, c удовлетворяют равенствам (2.7) и (2.10), соответственно.

Исследуем по изложенной выше методике характер устойчивости бегущей волны $\widehat{v}_{k^+}^1$ уравнения (4.2). В результате приходим к заключению, что воздействие бегущих волн $\widehat{v}_{s^-}^1, \widehat{v}_{l^+}^1, l = 2k + s + 1$ на $\widehat{v}_{k^+}^1$ приводит к матрице

$$A_{k^+, s^-}^1 = \begin{pmatrix} \delta_{s^-}^1 - 2\delta_{k^+}^1 - i(\chi\delta_{k^+} - \gamma_{k^+, s^-}) & \bar{c}\rho_{k^+} \\ c\rho_{k^+} & \delta_{l^+}^1 - 2\delta_{k^+}^1 + i(\chi\delta_{k^+}^1 + \gamma_{k^+, s^-}) \end{pmatrix}.$$

Воздействие же на $\widehat{v}_{k^+}^1$ бегущих волн $\widehat{v}_{s^+}^1, \widehat{v}_{n^+}^1, n = 2k - s$, приводит к матрице

$$A_{k^+, s^+}^1 = \begin{pmatrix} \delta_{s^+}^1 - 2\delta_{k^+}^1 - i(\chi\delta_{k^+} - \gamma_{k^+, s^+}) & \bar{c}\rho_{k^+} \\ c\rho_{k^+} & \delta_{n^+}^1 - 2\delta_{k^+}^1 + i(\chi\delta_{k^+}^1 - \gamma_{k^+, s^+}), \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\gamma_{k^+, s^-} = \nu \widehat{\Lambda}(k + s + 1)q \cos m^+ \widehat{h}, \quad \gamma_{k^+, s^+} = \nu \widehat{\Lambda}(k - s)q \cos m^+ \widehat{h}. \quad (4.10)$$

Так как при рассматриваемых условиях уравнение (4.2) бегущей волны $\widehat{v}_{s^-}^1$ не имеет, то предположение о взаимодействии бегущей волны $\widehat{v}_{k^+}^1$ с бегущей волной $\widehat{v}_{s^-}^1$ следует понимать как чисто формальное, порождающее матрицу A_{k^+, s^-}^1 .

Отметим теперь, что собственные значения матрицы $\operatorname{diag} A_{k^+, s^-}^1, A_{k^+, s^-}^{1*}$ являются корнями многочлена

$$\lambda^4 + 2\hat{a}\lambda^3 + (\hat{a}^2 + 2b)\lambda^2 + 2\hat{a}\hat{b}\lambda + \hat{b}^2 + \hat{d}^2, \quad (4.11)$$

где

$$\hat{a} = a_{k^+, s^-} = 4\delta_{k^+} - \delta_{s^-} - \delta_{l^+}, \quad (4.12)$$

$$\hat{b} = b_{k^+, s^-} = (2\delta_{k^+} - \delta_{k^+})(2\delta_{k^+} - \delta_{l^+}) + (\chi\delta_{k^+} - \gamma_{k^+, s^-})^2 - \delta_{k^+}^2, \quad (4.13)$$

$$\hat{d} = d_{k^+, s^-} = 2(\chi\rho_{k^+} - \gamma_{k^+, s^-})(\delta_{k^+} - \delta_{l^+}). \quad (4.14)$$

Заменим в (4.12) s^-, l^+ на s^+, n^+ соответственно. Тогда корни многочлена (4.11), в котором коэффициенты определены, как указано выше, являются собственными значениями матрицы $\operatorname{diag} A_{k^+, s^+}^1, A_{k^+, s^+}^{1*}$.

Обозначим

$$\mathfrak{D}_{k^+}^1 = \{(\mu, \nu) : \mu > 0, \nu > 0, \delta_{k^+}(\mu, \nu) > 0\},$$

где $k \geq 0$ — некоторое целое число. Следуя доказательству теоремы 1, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Существует $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k)$ такое, что для всех $(\mu, \nu) \in \mathfrak{D}_{k^+}^1$, удовлетворяющих неравенству $\|(\mu, \nu)\| < \varepsilon_0$, уравнение (4.2) имеет периодическое по t решение $v_{k^+}^1(\eta, \mu, \nu)$, удовлетворяющее равенству (4.9).*

Для экспоненциальной орбитальной устойчивости $v_{k^+}^1(\eta, \mu, \nu)$ необходимо и достаточно выполнение условий:

- iii) для любого $s \geq 0$ матрица $A_{k^+, s^-}^1(\mu, \nu)$ устойчива;*
- iv) для любого $0 \leq s < k$ матрица $A_{k^+, s^+}^1(\mu, \nu)$ устойчива.*

Опираясь на эту теорему, найдем условия устойчивости бегущей волны $v_{k^+}^1$. Рассмотрим с этой целью матрицу $A_{k^+, (k-1)^+}^1$. Согласно критерию Рауса-Гурвица для устойчивости этой матрицы необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \operatorname{Tr} A_{k^+, (k-1)^+}^1 \operatorname{Re} \det A_{k^+, (k-1)^+}^1 + \\ & + \operatorname{Im} \operatorname{Tr} A_{k^+, (k-1)^+}^1 \operatorname{Im} \det A_{k^+, (k-1)^+}^1 < 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В силу (4.3), (4.4), (4.5) отсюда получаем

$$-6(m^+ + kq)^2 + 6(m^+ + kq)\varepsilon - \varepsilon^2 > 0.$$

Следовательно, если бегущая волна $v_{k^+}^1(\mu, \nu)$ является устойчивой, то

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{6\varepsilon} < m^+ + kq < \frac{3 + \sqrt{3}}{6\varepsilon}. \quad (4.16)$$

Предположим теперь, что $\chi^2 < 3$. Можно убедиться, что тогда при достаточной малости параметра μ/ν для устойчивости матрицы $A_{k^+, (k-1)^+}^1$ достаточно, чтобы имело место неравенство

$$\frac{3 + \chi^2 - \sqrt{3 - \chi^2}}{(6 + \chi^2)\varepsilon} < m^+ + kq < \frac{3 + \chi^2 + \sqrt{3 - \chi^2}}{(6 + \chi^2)\varepsilon}. \quad (4.17)$$

Более того, в этом случае устойчивы как матрицы A_{k^+, s^+}^1 , $1 \leq s < k$, так и матрицы A_{k^+, s^-}^1 , $s = 0, 1, \dots$. Итак, если выполнено неравенство (4.17), то при малых ε волна $v_{k^+}(\varepsilon)$ устойчива. Если имеет место неравенство, строго противоположное неравенству (4.16), то при малых ε волна $v_{k^+}(\varepsilon)$ неустойчива.

Отметим, что условие (4.16) с точностью $O(\|(\mu, \nu)\|^2)$ эквивалентно неравенству

$$\delta_{k^+}(\mu, \nu) > \frac{2}{3} \sup_{s < k} \delta_{s^+}(\mu, \nu). \quad (4.18)$$

При $\chi^2 < 3$ в силу (4.17) в уравнении (4.2) при $\frac{\nu}{\mu} \rightarrow \infty$, $\frac{\nu^2}{\mu} \rightarrow 0$ реализуется так называемая высокомодовая буферность [22], [21], [25] т.е. устойчивыми оказываются лишь бегущие волны v_{k+}^1 с достаточно большими волновыми числами.

Перейдем теперь к иллюстрирующим примерам. Согласно проведенному выше анализу под давлением пары $\hat{v}_{0-}^1, \hat{v}_{1+}^1, \hat{v}_{0+}^1$ устойчивость теряет при соответствующем значении ε . Поведение собственных значений матрицы $\text{diag} A_{0+,0-}^1 A_{0+,0-}^{1*}$ отвечает этому предположению. Предположим, как и выше, что $h = 2\pi/3$, $L = -2$. В этом случае $m^+ = 1$, $m^- = 2$. Далее приводятся собственные значения матриц воздействия с коэффициентом умножения $(-\nu\hat{\Lambda})^{-1}$. Эти собственные значения для $\text{diag} A_{0+,0-}^1 A_{0+,0-}^{1*}$ при указанных значениях ε , $w = 2.08$ таковы:

Пример 5.

$$\begin{aligned} 18) & (2.08, 0.45, -9.7058 \pm 3.57733i, -0.883221 \pm 3.57733i) \\ 19) & (2.08, 0.392, -7.54512 \pm 3.85687i, -0.00378 \pm 3.85687i) \\ 20) & (2.08, 0.01, -7.26923 \pm 3.34038i, 3.64512 \pm 3.34038i) \end{aligned}$$

Итак, \hat{v}_{0+}^1 теряет устойчивость под давлением пары $\hat{v}_{0-}^1, \hat{v}_{1+}^1$, когда ε , убывая, проходит значение ≈ 0.392 .

Приведем собственные значения матриц воздействия бегущих волн $\hat{v}_{-1+}^1, \hat{v}_{1+}^1$ на \hat{v}_{0+}^1 для 3-х значений ε .

Пример 6.

$$\begin{aligned} 21) & (2.08, 0.3, -0.795257 \pm 3.85687i, -0.540642 \pm 3.97437i) \\ 22) & (2.08, 0.259, -0.674094 \pm 4.05086i, 0.0059 \pm 4.05086i) \\ 23) & (2.08, 0.01, -1.1979 \pm 5.01574i, 4.5288 \pm 5.01574i) \end{aligned}$$

Итак, \hat{v}_{0+}^1 под давлением пары бегущих волн $\hat{v}_{0-}^1, \hat{v}_{1+}^1$, когда ε проходит убывая значение ≈ 0.259 , теряет устойчивость. Разумеется, что при указанном переходе индекс неустойчивости \hat{v}_{0+}^1 принимает значение 4.

Заключение

Согласно проведенному анализу характер устойчивости бегущей волны v_{k+} уравнения (1.1) определяется её взаимодействиями конкурентного типа с парами бегущих волн $v_{s-}, v_{(2k+s+1)+}$, $s = 0, 1, \dots, v_{s+}, v_{(k-s)+}$, $s < k$. Аналогичный результат имеет место и относительно v_{k-} .

Этот результат, следуя [10], сформулируем в виде следующего принципа.

Принцип 1:2 взаимодействия бегущих волн. Характер устойчивости бегущей волны v_{k+} ; v_{k-} семейства уравнений (1.9) вполне определяется ее взаимодействиями с парами бегущих волн: $(v_{s-}, v_{(2k+s+1)+})$, $(v_{s+}, v_{(2k-s)+})$, $s < k$; $(v_{s+}, v_{(2k+s+1)-})$, $(v_{s-}, v_{(2k-s)-})$, $s < k$, соответственно.

Есть основания полагать, что этот принцип имеет универсальный характер. Бегущие волны феноменологического уравнения спинового горения [19] взаимодействуют по принципу 1:2 [32, 15, 33]. Бегущие волны комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау также взаимодействуют по указанному конкурентному принципу [15].

Список цитируемых источников

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей. // Новые принципы оптической обработки информации. — М.: Наука. — 1990. — С. 263-325.
Akhmanov, S. A., Vorontsov, M. A., Ivanov, V. Yu. (1990). Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback: on the way to creation of nonlinear optical analogs of neural networks. In *Novye printsipy opticheskoi obrabotki informatsii* (pp. 263-325), Moscow: Nauka. (in Russian).
2. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Структуры и хаос в нелинейных средах. — М.: Физматлит, 2007. — 485 с.
Akhromeeva, T. S., Kurdyumov, S. P., Malinetskiĭ, G. G., Samarskiĭ, A. A. (2007). Structures and chaos in nonlinear media. Moscow: Fizmatlit. (in Russian).
3. Белан Е. П. Бифуркация рождения периодических решений в параболической задаче с преобразованным аргументом. Ученые записки ТНУ. Математика. — 2001. — Т. 14, №1. — С. 24-33.
Belan, E. P. (2001). Bifurcation of the generation of periodic solutions in a parabolic problem with a transformed argument. *Uchenye zapiski TNU. Matematika* 14, No.1, 24-33. (in Russian).
4. Белан Е. П. О бифуркации периодических решений в параболическом функционально-дифференциальном уравнении. // Ученые записки ТНУ. Математика. — 2002. — Т.15, №2. — С. 24-33.
Belan, E. P. (2002). On the bifurcation of periodic solutions in a parabolic functional-differential equation. *Uchenye zapiski TNU. Matematika* 15, No.2, 24-33. (in Russian).
5. Белан Е. П. Об автоколебаниях в сингулярно возмущенном параболическом уравнении с преобразованным аргументом. // Доповіді НАНУ. — 2002. — №7. — С. 7-12.
Belan, E. P. (2002). On auto-oscillations for a singularly perturbed parabolic equation with transformed argument. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky* 2002, No.7, 7-12. (in Russian).
6. Белан Е. П., Лыкова О. В. О бифуркации вращающихся волн в параболической задаче с преобразованным аргументом. // Доповіді НАНУ. — 2003. — №1. — С. 7-12.
Belan, E. P., Lykova, O. V. (2003). On the bifurcation of rotating waves in a parabolic problem with transformed argument. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky* 2003, No.1, 7-12. (in Russian).
7. Белан Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении. // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, №5. — С. 645-654.

- Belan, E. P. (2004). On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation. *Differ. Equ.* 40, No.5, 692-702.
8. Белан Е. П., Лыкова О. Б. Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении. // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т.40, №10. — С. 1348-1357.
- Belan, E. P., Lykova, O. V. (2004). Rotating structures in a parabolic functional-differential equation. *Differ. Equ.* 40, No.10, 1419-1430.
9. Белан Е. П., Лыкова О. Б. Бифуркации вращающихся структур в параболическом функционально-дифференциальном уравнении. // Нелінійні коливання. — 2006. — Т.9, №2. — С. 155-169.
- Belan, E. P., Lykova, O. V. (2006). Bifurcations of rotating structures in a parabolic functional differential equation. *Nonlinear Oscil.* 9, No.2, 152-165.
10. Белан Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной. // Журнал математической физики, анализа, геометрии. — 2005. — Т.1, №1. — С. 3–34.
- Belan, E. P. (2005). On the dynamics of travelling waves in a nonlinear parabolic equation with a shift transformation of the space variable. *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* 1, No.1, 3-34. (in Russian).
11. Белан Е. П. Оптическая буферность стационарных структур. // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — Т.44, №5. — С. 61-75.
- Belan, E. P. (2008). Optical buffering in stationary structures. *Cybern. Syst. Anal.* 44, No. 5, 680-691.
12. Белан Е. П. Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной. // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — Т.46, №5. — С. 95-111.
- Belan, E. P. (2010). Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflected spatial argument. *Cybern. Syst. Anal.* 46, No. 5, 772-783.
13. Белан Е. П. Стационарные структуры в параболическом уравнении с преобразованием отражения пространственной переменной. // Динамические системы. — 2010. — Вып. 28. — С. 35-47.
- Belan, E. P. (2010). Stationary structures in parabolic equations with inversion transformer spatial argument. *Dinamicheskie Sistemy* 28, 35-47. (in Russian).
14. Белан Е. П. Двумерные стационарные структуры в параболическом уравнении с отражением пространственных переменных. // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — Т.47, №3. — С. 33-41.
- Belan, E. P. (2011). Two-dimensional stationary structures in a parabolic equation with an inversion transformation of its spatial arguments. *Cybern. Syst. Anal.* 47, No. 3, 360-367.
15. Белан Е. П., Самойленко А. М. Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения. // Украинский матем. журнал. — 2013. — Т.65, №1. — С. 21–43.
- Belan, E. P.; Samoilenko, A. M. (2013). Dynamics of periodic modes for the phenomenological equation of spin combustion. *Ukr. Math. J.* 65, No.1, 21-46.

16. Белан Е. П., Хазова Ю. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с преобразованием отражения пространственной переменной. // *Динамические системы*. — 2014. — Т. 4(32), №1-2. — 43–57.
Belan, E. P.; Khazova, Yu. A. (2014). Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dinamicheskie Sistemy* 4(32), No.1-2, 43-57. (in Russian).
17. Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией. // *Математический сборник*. — 1986. — Т.130(172), №4. — С. 488–499.
Vasil'eva, A.B.; Kashchenko, S.A.; Kolesov, Yu.S.; Rozov, N.Kh. (1987). Bifurcation of self-oscillations of nonlinear parabolic equations with small diffusion. *Math. USSR. Sb.* 58, No.4, 491-503.
18. Гапонов-Грехов А. В., Ломов А. С., Осипов Г. В., Рабинович М. И. Рождение и динамика двумерных структур в неравновесных диссипативных системах. // *Нелинейные волны. Динамика и эволюция*. / Под ред. А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Рабинович. — М.: Наука, 1989. — С. 61-73.
Gaponov-Grekhov, A. V., Lomov, A. S., Osipov, G. V., Rabinovich, M. I. (1989). Pattern formation and dynamics of two-dimensional structures in nonequilibrium dissipative media. In A. V. Gaponov-Grekhov, M. I. Rabinovich (Eds.) *Nonlinear waves. Dynamics and evolution*. (pp. 61-73). Moscow: Nauka.
19. Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах. // *Известия вузов, сер. Радиофизика*. — 1982. — Т.15, №6 — С. 591-618.
Zeldovich, Ya. B., Malomed, B. A. (1982). Complex wave regimes in distributed dynamic systems. *Izv. vuzov, ser. radiofizika* 15, No.6, 591-618. (in Russian).
20. Кащенко С. А. Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*. — 1991. — Т.31, №3. — С. 467-473.
Kashchenko, S. A. (1991). Asymptotic form of spatially non-uniform structures in coherent nonlinear optical systems. *Comput. Math. Math. Phys.* 31, No.3, 97-102.
21. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения. // *Теор. и мат. физика*. — 2004. — 140. — С. 14-28.
Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. (2004). Optical buffering and mechanisms for its occurrence. *Theor. Math. Phys.* 140, No. 1, 905-917.
22. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. — М.: Физматлит, 2004. — 405 с.
Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. (2004). Invariant tori of nonlinear wave equations. Moscow: Fizmatlit. (in Russian).
23. Корнута А. А. Метастойчивые структуры в параболическом уравнении с поворотом пространственной переменной. // *Динамические системы*. — 2014. — Т.4(32), №1-2. — С. 59-75.
Kornuta, A. A. (2014). Metastable patterns of a parabolic equation on the circle with the rotation of the spatial variable. *Dinamicheskie Sistemy* 4(32), No. 1-2, 59-75. (in Russian).

24. *Марсден Дж.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир. — 1980. — 368 с.
Marsden, J. E., McCracken M. (1976). The Hopf bifurcation and its applications. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.
25. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.
Mishchenko, E. F., Sadovnichii, V. A., Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. (2005). Autowave processes in nonlinear media with diffusion. Moscow: Fizmatlit. (in Russian).
26. *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1993. — Т.33, №1. — С. 69-80.
Razgulin, A. V. (1993). Self-excited oscillations in the nonlinear parabolic problem with transformed argument. Comput. Math. Math. Phys. 33, No.1, 61-70.
27. *Разгулин А. В.* Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1993. — Т.33, №10. — С. 1499-1508.
Razgulin, A. V. (1993). The stability of self-excited bifurcation oscillations in a nonlinear parabolic problem with transformed argument. Comput. Math. Math. Physics 33, No.10, 1323-1330.
28. *Разгулин А. В.* Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // Математическое моделирование. — 1993. — Т. 5, №4. — С. 105-119.
Razgulin, A. V. (1993). Rotational waves in optical system with two-dimensional feedback. Matemat. Modelirovanie 5, No.4, 105-119. (in Russian).
29. *Разгулин А. В., Романенко Т.Е.* Ротационные волны в параболических функционально-дифференциальных уравнениях с преобразованием поворота и запаздыванием. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, №11. — С. 42-60.
Razgulin, A. V., Romanenko, T. E. (2013). Rotating waves in parabolic functional-differential equations with rotation of spatial arguments and time delay. Comput. Math. Math. Phys. 53, No.11, 1626-1643.
30. *Романенко Т. Е., Разгулин А. В.* О моделировании подавления искажений в нелинейной оптической системе с запаздыванием в контуре обратной связи. // Математическое моделирование. — 2014. — Т.26, №11. — С. 123-136.
Romanenko, T., E., Razgulin, A. V. (2015). Modeling of distortion suppression in a nonlinear optical system with a delayed feedback loop. Math. Models Comput Simul. 7, No.3, 259-270.
31. *Романенко Т.Е.* Двумерные вращающиеся волны в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с поворотом пространственных аргументов и запаздыванием. // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т.50, №2. — С. 260-263.
Romanenko, T. E. (2014). Two-dimensional rotating waves in a functional-differential diffusion equation with rotation of spatial arguments and time delay. Differ. Equ. 50, No. 2, 264-267.

32. *Самойленко А. М., Белан Е. П.* Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения. // Доклады РАН. — 2006. — Т.406, №6. — С. 738-741.
Samoilenko, A. M., Belan, E. P. (2006). Dynamics of traveling waves in the phenomenological equation of spin combustion. Dokl. Math. 73, No.1, 134-137.
33. *Самойленко А. М., Белан Е. П.* Периодические режимы феноменологического уравнения спинового горения. // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т.51, №2. — С. 211-228.
Samoilenko, A. M., Belan, E. P. (2015). Periodic modes of the phenomenological spin combustion equation. Differ. Equ. 51, No.2, 214-231.
34. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т.34, №10. — С. 1394-1401.
Skubachevskij, A. L. (1998). The Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional-differential equation. Differ. Equations 34, No.10, 1395-1402.
35. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
Henry, D. (1981). Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.
36. *Хэссард Б., Казаринов Н., ВэнИ.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М.: Мир, 1985. — 280 с.
Hassard, B. D., Kazarinoff, N. D., Wan, U.-H. (1981). Theory and applications of Hopf bifurcation. Cambridge-New York-Sydney: CUP.
37. *Чушкин В. А., Разгулин А. В.* Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отраженным аргументом. // Вестн. Моск. ун-та. — сер. 15, вычисл. матем. и киберн. — 2003, №2. — С. 13-20.
Chushkin, V. A., Razgulin, A. V. (2003). The stationary structures in the functional-differential diffusion equation with a reflected argument. Vestnik Moskovskogo Univ., Ser.15, vychislit. matem. i kibernetika, No.2, 13-20.
38. *Воронцов М. А., Железных Н. И.* Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью. // Математическое моделирование, — 1990. — Т.2, №2. — С. 31 — 38.
Vorontsov, M. A., Zheleznykh, N. I. (1990). Transverse bistability and multistability in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback. Matemat. modelirovanie 2, No.2, 31-38. (in Russian).
39. *Budzinskiy S.* Rotating waves in a model of delayed feedback optical system with diffraction. // Interdisciplinary Information Sciences. — 2016. — Vol.22, no.2. — P. 187-197.
40. *Budzinskiy S. S., Razgulin A. V.* Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under $O(2)$ hopf bifurcation. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2017. — Vol. 49. — P. 17-29.
41. *Carr J., Pego R.L.* Metastable Patterns in Solution of $u_t = \mu^2 u_{xx} - f(u)$. Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1989. — Vol. XLII. — P. 523-576.

42. *Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S. A., Pelster A.* Traveling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback. // *Physica D.* — 1999. — Vol. 125. — P. 123-141.
43. *Fusco G., Hale J.K.* Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singular Perturbations. // *Journal of Dynamics and Differential Equations.* — 1989. — Vol. 1, no.1. — P. 75-94.
44. *Kuznetsov Y. A.* Elements of applied bifurcation theory. — New York: Springer-Verlag, 1998.
45. *Ikeda K., Daido H., Okimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity. // *Phys. Rev. Lett.* — 1980. — Vol.45. — P. 709-712.
46. *Le Berry M., Ressayre E., Tallet A.* Lyapunov analysis of the Ruelle-Takens route to chaos in optical retarded differential system. // *Opt. Commun.* — 1980. — Vol.72. — P. 123-128.
47. *Razgulin A. V.* Rotational multi-petel waves in optical system with 2-D feedback. *Chaos in Optics.* Ed. Rajarshi Roy (proc.SPIE-2039), 1993. — P. 342-351.
48. *Skubachevskii A.L.* Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics. // *Nonlinear Analysis. Theory. Methods & Applications.* — 1998. — Vol.12, no.2. — P. 261-278.
49. *Vorontsov M. A., Zheleznykh, N. I., Ivanov V. Yu.* Transverse interaction in 2-D feedback non-linear optical systems. // *Opt. and Quant. Electron.* — 1988. — Vol.22. — P. 301-318.

Получена 28.06.2016

УДК 517.9+532

Теорема существования сильного решения одной начально-краевой задачи

Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Симферополь, 295007, e-mail: *tsvetdo@gmail.com*

Аннотация. Изучается задача о малых движениях системы, состоящей из трех тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя и верхняя жидкости по отношению к действию силы тяжести считаются вязкими, а средняя — идеальной. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, дифференциально-операторное уравнение, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.

Theorem on the existence of a strong solution for an initial-boundary value problem

D. O. Tsvetkov

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. Let immovable container be completely filled with system of three nonmixing heavy stratified incompressible fluids. The lower fluid (with respect to gravity) is viscous, middle fluid is ideal, upper one is viscous. The problem on small oscillations is studied on the base of approach connected with application of so-called operator matrices theory with unbounded entries. The initial boundary value problem is reduced to the Cauchy problem in some Hilbert space. The theorem on strong solvability of initial boundary value problem is proved.

Keywords: stratification effect in viscous and ideal fluids, differential equation in Hilbert space, accretive operator, strong solution.

MSC 2010: 35P05, 47D03

Введение

Задачи о колебаниях стратифицированной жидкости, заполняющей ограниченную область пространства, находят приложение в теории сейш, в теории колебаний нефти в танкерах, при изучении колебаний криогенных жидкостей в закрытых резервуарах. Известно, что наличие вертикальной стратификации жидкости по плотности порождает в таких гидросистемах весьма интересные физические явления, связанные с действием сил плавучести. Не приводя подробной библиографии, упомянем лишь монографии [1], [4], [6] и работу [3], где изучаются те или иные аспекты теории колебаний такой системы.

В данной работе изучается задача о малых движениях системы из трех тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд, что является обобщением ситуации, рассмотренной в работе [3]. Проведены дополнительные построения, позволяющие в исследуемой задаче получить аналог известного ортогонального разложения Вейля гильбертова пространства векторных полей скоростей. Путем проектирования уравнений движения и неразрывности на выделенные ортогональные подпространства и введения вспомогательных краевых задач и их операторов, исходная начально-краевая задача приведена к дифференциальному уравнению первого порядка в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{H} :

$$\mathcal{R} \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = f, \quad y(0) = y^0.$$

Оператор \mathcal{R} самосопряжен, положительно определен и ограничен в \mathcal{H} . Оператор \mathcal{A} — аккретивный, однако не является максимальным аккретивным оператором. Применение метода операторных блок-матриц, общей теории абстрактных дифференциально-операторных уравнений [5] позволило доказать теорему о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи.

1. Математическая формулировка задачи

Рассмотрим неподвижный сосуд, полностью заполненный системой из трех несмешивающихся жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми и в силу этого действие капиллярных сил в задаче не учитывается. Области Ω_1 и Ω_3 , соответственно нижняя и верхняя по отношению к действию силы тяжести, заполнены вязкими стратифицированными несжимаемыми жидкостями с коэффициентами динамической вязкости $\mu_i = \text{const} > 0$ ($i = \overline{1, 3}$). Средняя область Ω_2 заполнена идеальной стратифицированной несжимаемой жидкостью. При этом плотности жидкостей ρ_i ($i = \overline{1, 3}$) в состоянии покоя изменяются вдоль вертикальной оси.

Обозначим через \vec{n}_i ($i = \overline{1, 3}$) единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_i$ ($i = \overline{1, 3}$) и направленный вне Ω_i ($i = \overline{1, 3}$). Через S_i обозначим часть стенки сосуда, отвечающей области Ω_i ($i = \overline{1, 3}$). Представим $\Gamma = \partial\Omega_2 \setminus \overline{S_2} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 — это нижняя и верхняя границы области Ω_2 соответственно. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на поверхности Γ_1 .

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкостей по плотностям $\rho_i = \rho_i(x_3)$ ($i = \overline{1, 3}$):

$$0 < N_{i,\min}^2 \leq N_i^2(x_3) \leq N_{i,\max}^2 =: N_{0,i}^2 < \infty, \quad N_i^2(x_3) := -\frac{g\rho_i'(x_3)}{\rho_i(x_3)}. \quad (1.1)$$

Рассмотрим малые движения изучаемой гидросистемы, близкие к состоянию покоя. Пусть \vec{u}_i ($i = \overline{1, 3}$) — поля скоростей в жидкостях, а $\zeta_i = \zeta_i(t, \hat{x})$, $\hat{x} \in \Gamma_i$ представляют собой отклонение свободно движущихся поверхностей жидкостей

$\Gamma_i(t)$ от Γ_i ($i = 1, 2$) по нормали \vec{n}_i ; $p_i = p_i(t, x)$, $x \in \Omega_i$ ($i = \overline{1, 3}$) — отклонение полей давлений от равновесных; $\tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_i(t, x)$, $x \in \Omega_i$ ($i = \overline{1, 3}$) — отклонения полей плотности от исходных $\rho_i(x_3)$.

Линейная постановка начально-краевой задачи о колебаниях рассматриваемой гидросистемы выглядит следующим образом (см., например, [3]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} &= \rho_i^{-1}(x_3)(-\nabla p_i + \mu_i \Delta \vec{u}_i - \tilde{\rho}_i g \vec{e}_3) + \vec{f}, \quad \operatorname{div} \vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i, i = 1, 3), \\ \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} &= \rho_2^{-1}(x_3)(-\nabla p_2 - \tilde{\rho}_2 g \vec{e}_3) + \vec{f}, \quad \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial t} + \nabla \rho_i \cdot \vec{u}_i &= 0 \quad (\text{в } \Omega_i, i = \overline{1, 3}), \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_i &= \vec{0} \quad (\text{на } S_i, i = 1, 3), \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } S_2), \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} &= \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = \vec{u}_3 \cdot \vec{n}_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \\ \mu_1 \left(\frac{\partial (u_1)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial (u_1)_3}{\partial x_k} \right) &= 0 \quad (k = 1, 2), \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ -p_1 + 2\mu_1 \frac{\partial (u_1)_3}{\partial x_3} &= -p_2 - g \Delta \rho_1 \zeta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \Delta \rho_1 := \rho_1(0) - \rho_2(0), \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \mu_3 \left(\frac{\partial (u_3)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial (u_3)_3}{\partial x_k} \right) &= 0 \quad (k = 1, 2), \quad (\text{на } \Gamma_2), \\ -p_3 + 2\mu_3 \frac{\partial (u_3)_3}{\partial x_3} &= -p_3 + g \Delta \rho_3 \zeta_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \Delta \rho_3 := \rho_2(b) - \rho_3(b), \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_i(0, x) &= \vec{u}_i^0(x), \quad \tilde{\rho}_i(0, x) = \tilde{\rho}_i^0(x) \quad (x \in \Omega_i, i = \overline{1, 3}), \\ \zeta_j(0, \hat{x}) &= \zeta_j^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma_i, j = 1, 2). \end{aligned} \tag{1.5}$$

2. Об ортогональном разложении гильбертова пространства вектор-функций

Пусть задана область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Граница области $\partial\Omega = \overline{S} \cup \Gamma$, где Γ — связное множество с $\operatorname{mes} \Gamma > 0$. Введем пространство $H_\Gamma^1(\Omega, \rho)$ функций из $H^1(\Omega, \rho)$, имеющих средним значением по Γ нуль, с нормой

$$\|p\|_{H_\Gamma^1(\Omega, \rho)}^2 = \int_\Omega \rho^{-1} |\nabla p|^2 d\Omega < \infty, \quad \int_\Gamma p d\Gamma = 0. \tag{2.1}$$

Как и при $\rho = \operatorname{const}$, для $H_\Gamma^1(\Omega, \rho)$ имеет место ортогональное разложение:

$$H_\Gamma^1(\Omega, \rho) = H_{h,S}^1(\Omega, \rho) \oplus H_{0,\Gamma}^1(\Omega, \rho), \tag{2.2}$$

где

$$H_{h,S}^1(\Omega, \rho) = \{ p \in H_{\Gamma}^1(\Omega, \rho) \mid \nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\ \rho^{-1} \nabla p \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0 \}, \\ H_{0,\Gamma}^1(\Omega, \rho) = \{ p \in H_{\Gamma}^1(\Omega, \rho) \mid p = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \},$$

причем ортогональность в (2.2) понимается относительно скалярного произведения, соответствующего норме (2.1).

Предположим теперь, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, Γ_1 и Γ_2 — связные множества ненулевой меры, расположенные горизонтально.

Введем в рассмотрение множество

$$H_{h,S}^1(\Omega, \rho) := \{ p \in H_{\Gamma}^1(\Omega, \rho) \mid \nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho^{-1} \nabla p \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\ \int_{\Gamma_1} \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma_1 = 0, \quad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma_2 = 0, \quad \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0 \}. \quad (2.3)$$

В работе [3] доказана

Лемма 1. *Справедливо ортогональное разложение*

$$H_{h,S}^1(\Omega, \rho) = H_{h,S}^1(\Omega, \rho) \oplus \{ \alpha \varphi_0 \}, \quad (2.4)$$

где $\{ \alpha \varphi_0 \}$ — одномерное подпространство, а функция φ_0 является решением следующей краевой задачи:

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla \varphi_0) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho^{-1} \nabla \varphi_0 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\ \varphi_0 = \text{mes } \Gamma_1 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \varphi_0 = -\text{mes } \Gamma_2 \quad (\text{на } \Gamma_1). \quad (2.5)$$

Разложение (2.4) порождает разложение подпространства потенциальных полей $\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho) = \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho) \oplus \{ \alpha \rho^{-1} \nabla \varphi_0 \}. \quad (2.6)$$

3. Метод ортогонального проектирования

В этом пункте для исследования начально-краевой задачи (1.2) — (1.5) мы применим метод проектирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса на ортогональные подпространства гильбертовых пространств $\vec{L}_2(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = \overline{1, 3}$).

Для области Ω_i ($i = 1, 3$) введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_i, \rho_i)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{L}_2(\Omega_i, \rho_i) = \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i, \rho_i), \quad \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i) = \vec{J}_0(\Omega_i, \rho_i) \oplus \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i, \rho_i),$$

где (для удобства Γ_2 переобозначим через Γ_3)

$$\begin{aligned} \vec{J}_0(\Omega_i, \rho_i) &:= \{ \vec{u}_i \mid \operatorname{div} \vec{u}_i = 0 \text{ (в } \Omega_i), \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \text{ (на } \partial\Omega_i), i = 1, 3 \}, \\ \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i, \rho_i) &:= \{ \vec{v}_i \mid \vec{v}_i = \rho_i^{-1}(x_3) \nabla p_i, \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \text{ (на } S_i), \\ &\quad \nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \text{ (в } \Omega_i), \int_{\Gamma_i} p_i d\Gamma_i = 0, i = 1, 3 \}, \\ \vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i, \rho_i) &:= \{ \vec{w}_i \mid \vec{w}_i = \rho_i^{-1}(x_3) \nabla \varphi_i, \varphi_i = 0 \text{ (на } \Gamma_i), i = 1, 3 \}. \end{aligned}$$

Здесь операции $\operatorname{div} \vec{u}$ и $(\vec{u} \cdot \vec{n})_{\partial\Omega}$ понимаются в смысле обобщенных функций (распределений), см. [2, с. 101 – 102].

Введем ортопроекторы P_{0,S_i} и P_{0,Γ_i} на подпространства $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$) соответственно. В силу условия соленоидальности и условия прилипания на S_i для \vec{u}_i ($i = 1, 3$), считаем, что поле \vec{u}_i принадлежит пространству $\vec{J}_{0,S_i}^1(\Omega_i, \rho_i)$, которое плотно вложено в пространство $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$) (см., например, [3]). Подействуем введенными ортопроекторами P_{0,S_i} и P_{0,Γ_i} ($i = 1, 3$) на уравнения для вязких жидкостей из (1.2), получим:

$$\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} = -\rho_i^{-1} \nabla p_{i,1} + P_{0,S_i}(\rho_i^{-1} \mu_i \Delta \vec{u}_i) - P_{0,S_i}(\rho_1^{-1} g \tilde{\rho}_i \vec{e}_3) + P_{0,S_i} \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_i), \quad (3.1)$$

$$\vec{0} = -\rho_i^{-1} \nabla p_{i,2} + P_{0,\Gamma_i}(\rho_i^{-1} \mu_i \Delta \vec{u}_i) - P_{0,\Gamma_i}(\rho_1^{-1} g \tilde{\rho}_i \vec{e}_3) + P_{0,\Gamma_i} \vec{f} \quad (\text{в } \Omega_i), \quad (3.2)$$

где $\rho_i^{-1} \nabla p_{i,1} := P_{0,S_i}(\rho_i^{-1} \nabla p_i)$, $\rho_i^{-1} \nabla p_{i,2} := P_{0,\Gamma_i}(\rho_i^{-1} \nabla p_i)$ ($i = 1, 3$).

Из уравнений (3.2) при известных \vec{u}_i и $\tilde{\rho}_i$ составляющие $\rho_i^{-1} \nabla p_{i,2}$ ($i = 1, 3$) градиентов давлений из подпространств $\vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$) вычисляются непосредственно. Учитывая эти тривиальные соотношения, в дальнейшем будем рассматривать для вязких жидкостей основные уравнения (3.1).

Для области Ω_2 введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_2, \rho_2)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{L}_2(\Omega_2, \rho_2) = \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2, \rho_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2, \rho_2). \quad (3.3)$$

Подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2, \rho_2)$ из (3.3) состоит из квазипотенциальных гармонических полей с нулевой нормальной составляющей на твердой стенке S_2 , для которых также выполнено условие сохранения объема по всей границе $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. В изучаемой задаче, в силу несжимаемости жидкостей, условие сохранения объема должно выполняться на каждой из границ Γ_1 и Γ_2 в отдельности. Отсюда следует, что подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2, \rho_2)$ шире, чем требуется. В связи с этим, воспользуемся разложением этого подпространства в ортогональную сумму двух подпространств см. (2.6), естественным образом приспособленных к данной задаче.

Учитывая (2.6) и (3.3), введем ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_2, \rho_2) = \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \oplus \widehat{\vec{G}_{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) \oplus \{ \alpha \rho_2^{-1} \nabla \varphi_0 \} \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2, \rho_2), \quad (3.4)$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Введем также ортопроекторы на соответствующие подпространства: $P_0, P_{\widehat{h,S_2}}, P_\varphi, P_{0,\Gamma}$.

Основываясь на разложении (3.4), применим метод ортогонального проектирования к уравнению Эйлера из начально-краевой задачи (1.2). В силу условия солёноидальности и условия непротекания на твердой стенке S_2 считаем, что $\vec{u}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \oplus \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) =: \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2, \rho_2)$.

Поле $\rho_2^{-1}\nabla p_2$ квазипотенциально, поэтому

$$\rho_2^{-1}\nabla p_2 \in \vec{G}(\Omega_2, \rho_2) := \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) \oplus \{\alpha\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0\} \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2, \rho_2).$$

Представим поля \vec{u}_2 и $\rho_2^{-1}\nabla p_2$ в виде:

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2, \quad \rho_2^{-1}\nabla p_2 = \rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} + \rho_2^{-1}\nabla p_{2,2} + \alpha(t)\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0, \quad (3.5)$$

$$\text{где } \vec{v}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2 \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2), \\ \rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla p_{2,2} \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2, \rho_2). \quad (3.6)$$

Подставим эти представления в уравнение движения для идеальной жидкости из (1.2) и применим к нему ортопроекторы, отвечающие разложению (3.4). Получим:

$$\frac{\partial\vec{v}_2}{\partial t} = -P_0(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_0\vec{f}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) = -\rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} - P_{\widehat{h,S_2}}(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f}, \quad (3.8)$$

$$\alpha(t)\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0 = -P_\varphi(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_\varphi\vec{f}, \quad (3.9)$$

$$\rho_2^{-1}\nabla p_{2,2} = -P_{0,\Gamma}(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_{0,\Gamma}\vec{f}. \quad (3.10)$$

Соотношения (3.9) и (3.10) показывают, что $\alpha\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0$ и $\rho_2^{-1}\nabla p_{2,2}$ могут быть найдены, если известно решение $\tilde{\rho}_2$. В то же время эти поля не входят в (3.7) (3.8). Отметим также, что для элементов подпространства $\{\alpha\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0\}$ выполнены условия:

$$\nabla \cdot (\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0) = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla\varphi_0 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \\ \varphi_0 = \alpha \text{mes } \Gamma_1 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \varphi_0 = -\alpha \text{mes } \Gamma_2 \quad (\text{на } \Gamma_1),$$

поэтому из (3.9) находятся все коэффициенты α , и тем самым составляющая $\{\alpha\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0\}$.

Учитывая тривиальные соотношения (3.9), (3.10), в дальнейшем будем рассматривать для идеальной жидкости уравнения (3.7), (3.8).

4. Формулировка задачи после отделения тривиальных соотношений

Перейдем к окончательной формулировке задачи с учетом проведенных выше преобразований. Введем операторы γ_i — операторы нормальных следов полей, заданных в Ω_i , на границу Γ_i ($i = 1, 3$). Отметим здесь, что единичные векторы \vec{n}_i нормальны к $\partial\Omega_i$ и направлены вне Ω_i ($i = 1, 3$). Рассмотрим кинематические соотношения из (1.4). В силу представлений (3.5), (3.6) можем написать:

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = \gamma_1\vec{u}_1 = \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2 \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial\zeta_2}{\partial t} = \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2 \cdot \vec{n}_2 = -\gamma_3\vec{u}_3 \quad (\text{на } \Gamma_2).$$

После отделения тривиальных соотношений (3.2), (3.9) и (3.10) начально-краевая задача (1.2) — (1.5) формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t} = & -\rho_i^{-1}\nabla p_{i,1} + P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}\mu_i\Delta\vec{u}_i) - \\ & - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}g\tilde{\rho}_i\vec{e}_3) + P_{0,S_i}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_i, i = 1, 3), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial\tilde{\rho}_i}{\partial t} + \nabla\rho_i \cdot \vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i, i = 1, 3), \quad \vec{u}_i = \vec{0} \quad (\text{на } S_i, i = 1, 3),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) = & -\rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} - P_{\widehat{h,S_2}}(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \frac{\partial\vec{v}_2}{\partial t} = & -P_0(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_0\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2 \cdot \vec{n}_2 = & 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega_2), \\ \frac{\partial\tilde{\rho}_2}{\partial t} + \nabla\rho_2 \cdot & (\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) + \nabla\rho_2 \cdot \vec{v}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2 \cdot \vec{n}_2 = & -\gamma_1\vec{u}_1 = -\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2 \cdot \vec{n}_2 = & -\gamma_3\vec{u}_3 = \frac{\partial\zeta_2}{\partial t} \quad (\text{на } \Gamma_3), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \mu_i \left(\frac{\partial(u_i)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial(u_i)_3}{\partial x_k} \right) = & 0 \quad (k = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma_i (i = 1, 3)), \\ -P_{\Gamma_1}p_{1,1} + 2\mu_1 \frac{\partial(u_1)_3}{\partial x_3} = & -g\Delta\rho_1\zeta_1 - P_{\Gamma_1}p_{2,1} \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ -P_{\Gamma_3}p_{3,1} + 2\mu_3 \frac{\partial(u_3)_3}{\partial x_3} = & g\Delta\rho_3\zeta_2 - P_{\Gamma_3}p_{2,1} \quad (\text{на } \Gamma_3), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1(0, x) = P_{0,S_1}\vec{u}_1^0(x), \quad \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2(0, x) = & P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x), \quad \vec{v}_2(0, x) = P_0\vec{u}_2^0(x), \\ \tilde{\rho}_i(0, x) = \tilde{\rho}_i^0(x) \quad (i = \overline{1, 3}), \quad \zeta_j(0, \hat{x}) = & \zeta_j^0(\hat{x}) \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Через P_{Γ_i} обозначены ортопроекторы на $L_{2,\Gamma_i} := L_2(\Gamma_i) \ominus \{1_{\Gamma_i}\}$ ($i = 1, 3$), Γ_2 переобозначим через Γ_3 .

5. Вспомогательные краевые задачи и их операторы

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Вспомогательная задача I.

$$\begin{aligned} \rho_i^{-1}(x_3)\nabla p_i - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}\mu_i\Delta\vec{u}_i) &= \vec{f}, & \operatorname{div}\vec{u}_i &= 0 & (\text{в } \Omega_i, i = 1, 3), \\ \vec{u}_i &= \vec{0} & (\text{на } S_i, i = 1, 3), & & -p_i + 2\mu_i\frac{\partial(u_i)_3}{\partial x_3} = 0 & (\text{на } \Gamma_i, i = 1, 3), \\ \mu_i\left(\frac{\partial(u_i)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial(u_i)_3}{\partial x_k}\right) &= 0 & (k = 1, 2, \text{ на } \Gamma_i, i = 1, 3). \end{aligned}$$

Это аналог первой вспомогательной задачи С.Г.Крейна (см. [2, с.116]). Она имеет единственное обобщенное решение $\vec{u}_i = \mu_i^{-1}A_i^{-1}\vec{f}$ для любого вектора \vec{f} из $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$), где A_i ($i = 1, 3$) — оператор задачи I. Оператор A_i есть неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор с $\overline{\mathcal{D}(A_i)} = \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$, при этом оператор A_i^{-1} является положительным и компактным в $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$).

Вспомогательная задача II.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_i^{-1}\nabla p_i) &= 0 & (\text{в } \Omega_i, i = 1, 3), & & \rho_i^{-1}\nabla p_i \cdot \vec{n}_i &= 0 & (\text{на } S_i, i = 1, 3), \\ \rho_i^{-1}p_i &= \tau_i & (\text{на } \Gamma_i, i = 1, 3), & & \int_{\Gamma_i} \tau_i d\Gamma_i &= 0. \end{aligned}$$

Это аналог известной задачи Зарембы (при $\rho_i = \text{const}$, см. [2, с.45]). Она имеет единственное решение $p_i \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i, \rho_i)$ при $\tau_i \in H_{\Gamma_i}^{\frac{1}{2}}$ ($i = 1, 3$).

Вспомогательная задача III.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_2^{-1}\nabla\Psi_1) &= 0 & (\text{в } \Omega_2), & & \rho_2^{-1}\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_2 &= 0 & (\text{на } S_2), \\ \rho_2^{-1}(b)\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_2 &= 0 & (\text{на } \Gamma_3), & & \rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_2 &= \eta_1 & (\text{на } \Gamma_1), & & \int_{\Gamma} \Psi_1 d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Вспомогательная задача IV.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_2^{-1}\nabla\Psi_2) &= 0 & (\text{в } \Omega_2), & & \rho_2^{-1}\nabla\Psi_2 \cdot \vec{n}_2 &= 0 & (\text{на } S_2), \\ \rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_2 \cdot \vec{n}_2 &= 0 & (\text{на } \Gamma_1), & & \rho_2^{-1}(b)\nabla\Psi_2 \cdot \vec{n}_2 &= \eta_2 & (\text{на } \Gamma_3), & & \int_{\Gamma} \Psi_2 d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Задачи III и IV — это задачи Неймана. Если $\eta_1 \in H_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, то задача III имеет единственное решение $\Psi_1 \in H_{\Gamma}^1(\Omega_2, \rho_2)$, аналогично, если $\eta_2 \in H_{\Gamma_3}^{-\frac{1}{2}}$, то задача IV имеет единственное решение $\Psi_2 \in H_{\Gamma}^1(\Omega_2, \rho_2)$ (см. [2, с.45]).

Введем по решениям задач III и IV операторы:

$$\begin{aligned} \rho_2^{-1}(0)P_{\Gamma_1}\Psi_1|_{\Gamma_1} &=: S_{1,1}\eta_1, & \rho_2^{-1}(b)P_{\Gamma_3}\Psi_1|_{\Gamma_3} &=: S_{2,1}\eta_1, \\ \rho_2^{-1}(0)P_{\Gamma_1}\Psi_2|_{\Gamma_1} &=: S_{1,2}\eta_2, & \rho_2^{-1}(b)P_{\Gamma_3}\Psi_2|_{\Gamma_3} &=: S_{2,2}\eta_2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь следует отметить, что оператор $S_{1,1}$ — самосопряженный, положительный и компактный в L_{2,Γ_1} , а оператор $S_{2,2}$ — самосопряженный, положительный и компактный в L_{2,Γ_3} .

Вспомогательная задача V.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_1^{-1}\nabla w_{1,2}) &= 0 \quad (\text{в } \Omega_1), & \rho_1^{-1}\nabla w_{1,2} \cdot \vec{n}_1 &= 0 \quad (\text{на } S_1), \\ \rho_1^{-1}(0)\nabla w_{1,2} \cdot \vec{n}_1 &= \eta_0 \quad (\text{на } \Gamma_1), & \int_{\Gamma_1} w_{1,2} d\Gamma_1 &= 0. \end{aligned}$$

Задача V — это задача Неймана. Если $\eta_0 \in H_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, то задача имеет единственное решение $w_{1,2} \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1, \rho_1)$. Введем по решению задачи V оператор:

$$\rho_1^{-1}(0)P_{\Gamma_1}w_{1,2}|_{\Gamma_1} =: S_0\eta_0,$$

оператор S_0 является самосопряженным, положительным и компактным в L_{2,Γ_1} .

6. Вывод системы операторных уравнений

Представим в (4.1) поле $\rho_1^{-1}\nabla p_{i,1}$ ($i = 1, 3$) в виде $\rho_1^{-1}\nabla p_{i,1} = \rho_1^{-1}\nabla \tilde{p}_{i,1} + \rho_1^{-1}\nabla \hat{p}_{i,1}$ и подберем поле $\rho_1^{-1}\nabla \tilde{p}_{i,1}$ таким образом, чтобы поле \vec{u}_i ($i = 1, 3$) являлось решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \rho_i^{-1}\nabla \tilde{p}_{i,1} - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}\mu_i\Delta \vec{u}_i) &= -\rho_i^{-1}\nabla \hat{p}_{i,1} - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}g\tilde{\rho}_i\vec{e}_3) + P_{0,S_i}\vec{f} - \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{u}_i &= 0 \quad (\text{в } \Omega_i), & \vec{u}_i &= \vec{0} \quad (\text{на } S_i), \\ \mu_i \left(\frac{\partial (u_i)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial (u_i)_3}{\partial x_k} \right) &= 0 \quad (k = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma_i), \\ -P_{\Gamma_i}\tilde{p}_{i,1} + 2\mu_i \frac{\partial (u_i)_3}{\partial x_3} &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_i), & i &= 1, 3. \end{aligned}$$

Используя вспомогательную задачу I, заключаем, что последняя краевая задача имеет единственное обобщенное решение

$$\vec{u}_i = \mu_i^{-1}A_i^{-1} \left(P_{0,S_i}\vec{f} - \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} - \rho_i^{-1}\nabla \hat{p}_{i,1} - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}g\tilde{\rho}_i\vec{e}_3) \right)$$

для правой части из $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$). Свойства оператора A_i описаны в предыдущем пункте. Итак, можно написать:

$$\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + \mu_i A_i \vec{u}_i + \rho_i^{-1}\nabla \hat{p}_{i,1} + P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}g\tilde{\rho}_i\vec{e}_3) = P_{0,S_i}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_i, \quad i = 1, 3). \quad (6.1)$$

При расщеплении второго и третьего условия (4.4) для нормальных напряжений на границах вязкой жидкости остались условия

$$\begin{aligned} P_{\Gamma_1} \widehat{p}_{1,2} &= g\Delta\rho_1\zeta_1 + P_{\Gamma_1} p_{2,1} \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ P_{\Gamma_3} \widehat{p}_{3,2} &= -g\Delta\rho_3\zeta_2 + P_{\Gamma_3} p_{2,1} \quad (\text{на } \Gamma_3). \end{aligned}$$

Учитывая принадлежность $\rho_i^{-1} \nabla \widehat{p}_{i,2} \in \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$, приходим к выводу, что потенциал $P_{\Gamma_i} \widehat{p}_{i,2}$ удовлетворяет II вспомогательной задаче при $\tau_1 = g\Delta\rho_1\zeta_1 + P_{\Gamma_1} p_{2,1}$, $\tau_2 = -g\Delta\rho_3\zeta_2 + P_{\Gamma_3} p_{2,1}$. Поэтому можно считать, что

$$\begin{aligned} \rho_1^{-1} \nabla \widehat{p}_{1,2} &=: \rho_1^{-1}(0) G_1 (g\Delta\rho_1\zeta_1 + P_{\Gamma_1} p_{2,1}), \\ \rho_3^{-1} \nabla \widehat{p}_{3,2} &=: \rho_3^{-1}(b) G_3 (-g\Delta\rho_3\zeta_2 + P_{\Gamma_3} p_{2,1}). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Оператор G_i ограниченно действует из пространства $H_{\Gamma_i}^{\frac{1}{2}}$ в пространство $\vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$), что будет показано ниже.

Обозначим

$$P_{0,S_i}(\rho_i^{-1} g \tilde{\rho}_i \vec{e}_3) =: \tilde{C}_i \tilde{\rho}_i, \quad -\nabla \rho_i \cdot \vec{u}_i =: \tilde{C}_i^* \vec{u}_i \quad (i = 1, 3) \tag{6.3}$$

и введем гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega_i)$ ($i = 1, 3$) скалярных функций со скалярным произведением:

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega_i)} := \int_{\Omega_i} g^2 [\rho_i(x_3) N_i^2(x_3)]^{-1} \varphi(x) \overline{\psi(x)} d\Omega_i.$$

Лемма 2. Операторы $\tilde{C}_i : \mathfrak{L}_2(\Omega_i) \rightarrow \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ и $\tilde{C}_i^* : \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i) \rightarrow \mathfrak{L}_2(\Omega_i)$ ($i = 1, 3$), определенные соотношениями (6.3), взаимно сопряжены и

$$\|\tilde{C}_i\| = \|\tilde{C}_i^*\| \leq N_{0,i}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из тождества

$$\begin{aligned} (\tilde{C}_i \tilde{\rho}_i, \vec{u}_i) &= (\tilde{\rho}_i, \tilde{C}_i^* \vec{u}_i)_{\mathfrak{L}_2(\Omega_i)} = g \int_{\Omega_i} \tilde{\rho}_i \overline{u_{i3}} d\Omega_i \\ \forall \vec{u}_i &\in \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i), \quad \forall \rho_i \in \mathfrak{L}_2(\Omega_i), \quad i = 1, 3. \end{aligned}$$

□

С учетом (6.2) и (6.3) перепишем (6.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1 \vec{u}_1 + \rho_1^{-1}(0) g \Delta \rho_1 G_1 \zeta_1 + \rho_1^{-1}(0) G_1 P_{\Gamma_1} p_{2,1} + \tilde{C}_1 \tilde{\rho}_1 &= P_{0,S_1} \vec{f}, \\ \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} + \mu_3 A_3 \vec{u}_3 - \rho_3^{-1}(b) g \Delta \rho_3 G_3 \zeta_2 + \rho_3^{-1}(b) G_3 P_{\Gamma_3} p_{2,1} + \tilde{C}_3 \tilde{\rho}_3 &= P_{0,S_3} \vec{f}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Рассмотрим уравнения для идеальной жидкости из (4.1).

Обозначим

$$\begin{aligned} P_{\widehat{h,S_2}}(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) &=: \tilde{C}_{2,1}\tilde{\rho}_2, & -\nabla\rho_2 \cdot (\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) &= \tilde{C}_{2,1}^*(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2); \\ P_0(\rho_2^{-1}g\tilde{\rho}_2\vec{e}_3) &=: \tilde{C}_{2,0}\tilde{\rho}_2, & -\nabla\rho_2 \cdot \vec{v}_2 &= \tilde{C}_{2,0}^*\vec{v}_2, \end{aligned} \tag{6.6}$$

и введем гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega_2)$ скалярных функций со скалярным произведением:

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega_2)} := \int_{\Omega_2} g^2 [\rho_2(x_3)N_2^2(x_3)]^{-1} \varphi(x)\overline{\psi(x)} d\Omega_2.$$

Лемма 3. *Операторы, определенные соотношениями (6.6),*

$$\tilde{C}_{2,1} : \mathfrak{L}_2(\Omega_2) \rightarrow \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) \quad \text{и} \quad \tilde{C}_{2,1}^* : \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) \rightarrow \mathfrak{L}_2(\Omega_2),$$

$$\tilde{C}_{2,0} : \mathfrak{L}_2(\Omega_2) \rightarrow \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \quad \text{и} \quad \tilde{C}_{2,0}^* : \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \rightarrow \mathfrak{L}_2(\Omega_2),$$

взаимно сопряжены и

$$\|\tilde{C}_{2,1}\| = \|\tilde{C}_{2,1}^*\| \leq N_{0,2}, \quad \|\tilde{C}_{2,0}\| = \|\tilde{C}_{2,0}^*\| \leq N_{0,2}. \tag{6.7}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2.

С учетом введенных операторов уравнения для идеальной жидкости из (4.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) + \rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} + \tilde{C}_{2,1}\tilde{\rho}_2 &= P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \frac{\partial\vec{v}_2}{\partial t} + \tilde{C}_{2,0}\tilde{\rho}_2 &= P_0\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \frac{\partial\tilde{\rho}_2}{\partial t} - \tilde{C}_{2,1}^*(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) - \tilde{C}_{2,0}^*\vec{v}_2 &= 0 \quad (\text{в } \Omega_2). \end{aligned} \tag{6.8}$$

В силу принадлежности $\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2$ пространству $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2)$ и определения пространства $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2)$ потенциал Φ_2 , с помощью решений III и IV вспомогательных задач, можно представить в виде:

$$\Phi_2 = \Psi_1 + \Psi_3, \tag{6.9}$$

при этом считаем $\eta_1 = -\gamma_1\vec{u}_1$ (на Γ_1), $\eta_2 = -\gamma_3\vec{u}_3$ (на Γ_3).

Представление (6.9) оправдано тем, что поле $\rho_2^{-1}\nabla\Psi_i$ ($i = 1, 3$) будет в дальнейшем выражено (см. лемму (4)) с помощью ограниченного оператора через \vec{u}_i ($i = 1, 3$). Исходя из сказанного, разложим пространство $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2)$ в виде следующей прямой суммы:

$$\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) = \vec{G}_1(\Omega_2, \rho_2) \oplus \vec{G}_3(\Omega_2, \rho_2), \tag{6.10}$$

где

$$\begin{aligned}\vec{G}_1(\Omega_2, \rho_2) &:= \{\rho_2^{-1}\nabla p \mid \nabla \cdot (\rho_2^{-1}\nabla p) = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla p \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ (на } S_2), \\ &\quad \rho_2^{-1}\nabla p \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \quad \int_{\Gamma} p \, d\Gamma = 0\}, \\ \vec{G}_3(\Omega_2, \rho_2) &:= \{\rho_2^{-1}\nabla p \mid \nabla \cdot (\rho_2^{-1}\nabla p) = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla p \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ (на } S_2), \\ &\quad \rho_2^{-1}\nabla p \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \int_{\Gamma} p \, d\Gamma = 0\}.\end{aligned}$$

Лемма 4. Поля $\rho_2^{-1}\nabla\Psi_i$ ($i = 1, 3$) выражаются с помощью ограниченных операторов D_i через \vec{u}_i ($i = 1, 3$):

$$D_i\vec{u}_i := \rho_2^{-1}\nabla\Psi_i \quad (i = 1, 3). \quad (6.11)$$

Доказательство. Рассмотрим оператор D_1 , для любого $\vec{u}_1 \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$, с учетом разложения

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{w}_{1,1} + \rho_1^{-1}(x_3)\nabla w_{1,2}, \\ \vec{w}_{1,1} \in \vec{J}_0(\Omega_1, \rho_1), \quad \rho_1^{-1}(x_3)\nabla w_{1,2} &\in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_1),\end{aligned} \quad (6.12)$$

а также свойств V вспомогательной задачи, имеем:

$$\begin{aligned}\|D_1\vec{u}_1\|_{\vec{G}_1(\Omega_2, \rho_2)}^2 &= \int_{\Omega_2} \rho_2^{-1}(x_3)|\nabla\Psi_1|^2 \, d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} \nabla\Psi_1 \cdot \overline{(\rho_2^{-1}(x_3)\nabla\Psi_1)} \, d\Omega_2 = \\ &= \int_{\partial\Omega_2} \Psi_1 \cdot \overline{(\rho_2^{-1}\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_2)} \, dS = \int_{\Gamma_1} P_{\Gamma_1}\Psi_1 \cdot \overline{(\rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_2)} \, d\Gamma_1 = \\ &= \int_{\Gamma_1} \rho_2(0)S_{1,1}(\rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_2)\overline{(\rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_2)} \, d\Gamma_1 = \|S_{1,1}^{\frac{1}{2}}(\rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_2)\|_{H_1}^2 \leq \\ &\leq d\|S_0^{\frac{1}{2}}(\rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_2)\|_{H_1}^2 = d\|S_0^{\frac{1}{2}}(-\rho_1^{-1}(0)\nabla w_{1,2} \cdot \vec{n}_1)\|_{H_1}^2 = \\ &= d \int_{\Gamma_1} \rho_1(0)S_0(\rho_1^{-1}(0)\nabla w_{1,2} \cdot \vec{n}_1)\overline{(\rho_1^{-1}(0)\nabla w_{1,2} \cdot \vec{n}_1)} \, d\Gamma_1 = \\ &= d \int_{\Gamma_1} P_{\Gamma_1}w_{1,2}\overline{(\rho_1^{-1}(0)\nabla w_{1,2} \cdot \vec{n}_1)} \, d\Gamma_1 = d \int_{\Omega_1} \rho_1^{-1}(x_3)|\nabla w_{1,2}|^2 \, d\Omega_1 \leq \\ &\leq d \int_{\Omega_1} \rho_1^{-1}(x_3)|\nabla w_{1,2}|^2 \, d\Omega_1 + d \int_{\Omega_1} \rho_1(x_3)|\vec{w}_{1,1}|^2 \, d\Omega_1 = \\ &= d \int_{\Omega_1} \rho_1(x_3)|\vec{u}_1|^2 \, d\Omega_1 = d\|\vec{u}_1\|_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1)}^2,\end{aligned}$$

где $d > 0$ — это константа из соотношений эквивалентности следующих норм:

$$\|\eta_0\|_{H_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2},I}} = \|S_0^{\frac{1}{2}}\eta_0\|_{L_2,\Gamma_1}, \quad \|\eta_0\|_{H_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2},II}} = \|S_{1,1}^{\frac{1}{2}}\eta_0\|_{L_2,\Gamma_1}, \quad \eta_0 \in H_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.13)$$

Доказательство ограниченности оператора D_3 проводится аналогично. \square

Из первого уравнения (6.8) следует интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_2 + p_{2,1} + \Psi = F + C(t) \quad (\text{в } \Omega_2), \quad (6.14)$$

где $\tilde{C}_{2,1}\tilde{\rho}_2 =: \rho_2^{-1}\nabla\Psi$ и $P_{\tilde{h},S_2}\tilde{f} =: \rho_2^{-1}\nabla F$. Спроектируем это уравнение на L_{2,Γ_i} ($i = 1, 3$):

$$P_{\Gamma_i}p_{2,1} = -P_{\Gamma_i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_2 - P_{\Gamma_i}\Psi + P_{\Gamma_i}F \quad (\text{на } \Gamma_i, i = 1, 3). \quad (6.15)$$

Выразим $P_{\Gamma_i}(\Phi_2|_{\Gamma_1})$, пользуясь представлением (6.9) и операторами $S_{i,j}$ (см. (5.1)):

$$P_{\Gamma_1}(\Phi_2|_{\Gamma_1}) = P_{\Gamma_1}(\Psi_1|_{\Gamma_1}) + P_{\Gamma_1}(\Psi_3|_{\Gamma_1}) = \rho_2(0)(-S_{1,1}\gamma_1\vec{u}_1 - S_{1,2}\gamma_3\vec{u}_3), \quad (6.16)$$

$$P_{\Gamma_3}(\Phi_2|_{\Gamma_3}) = P_{\Gamma_3}(\Psi_1|_{\Gamma_3}) + P_{\Gamma_3}(\Psi_3|_{\Gamma_3}) = \rho_2(b)(-S_{2,1}\gamma_1\vec{u}_1 - S_{2,2}\gamma_3\vec{u}_3). \quad (6.17)$$

Подставим выражения (6.15), (6.16) и (6.17) в уравнение (6.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1 A_1\vec{u}_1 + \rho_1^{-1}(0)g\Delta\rho_1 G_1\zeta_1 + \tilde{C}_1\tilde{\rho}_1 - \rho_1^{-1}(0)\rho_2(0)\frac{\partial}{\partial t}(-G_1 S_{1,1}\gamma_1\vec{u}_1 - G_1 S_{1,2}\gamma_3\vec{u}_3) - \\ - \rho_1^{-1}(0)G_1 P_{\Gamma_1}\Psi + \rho_1^{-1}(0)G_1 P_{\Gamma_1}F = P_{0,S_1}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t} + \mu_3 A_3\vec{u}_3 - \rho_3^{-1}(b)g\Delta\rho_3 G_3\zeta_2 + \tilde{C}_3\tilde{\rho}_3 - \rho_3^{-1}(b)\rho_2(b)\frac{\partial}{\partial t}(-G_3 S_{2,1}\gamma_1\vec{u}_1 - G_3 S_{2,2}\gamma_3\vec{u}_3) - \\ - \rho_3^{-1}(b)G_3 P_{\Gamma_3}\Psi + \rho_3^{-1}(b)G_3 P_{\Gamma_3}F = P_{0,S_3}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_3). \end{aligned}$$

Итогом данного пункта является следующая лемма.

Лемма 5. *Классическое решение задачи (4.1) – (4.5) является решением следующей системы дифференциально-операторных уравнений:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{u}_1 + \rho_1^{-1}(0)\rho_2(0)(G_1 S_{1,1}\gamma_1\vec{u}_1 + G_3 S_{1,2}\gamma_3\vec{u}_3)) + \mu_1 A_1\vec{u}_1 + \tilde{C}_1\tilde{\rho}_1 + \\ + \rho_1^{-1}(0)(g\Delta\rho_1 G_1\zeta_1 - G_1 P_{\Gamma_1}\Psi + G_1 P_{\Gamma_1}F) = P_{0,S_1}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_1), \\ \frac{d}{dt}(\vec{u}_3 + \rho_3^{-1}(b)\rho_2(b)(G_3 S_{2,1}\gamma_1\vec{u}_1 + G_3 S_{2,2}\gamma_3\vec{u}_3)) + \mu_3 A_3\vec{u}_3 + \tilde{C}_3\tilde{\rho}_3 + \\ + \rho_3^{-1}(b)(-g\Delta\rho_3 G_3\zeta_2 - G_3 P_{\Gamma_3}\Psi + G_3 P_{\Gamma_3}F) = P_{0,S_3}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_3), \\ \frac{d}{dt}\vec{v}_2 + \tilde{C}_{2,0}\tilde{\rho}_2 = P_0\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \rho_1^{-1}(0)g\Delta\rho_1\frac{d}{dt}\zeta_1 - \rho_1^{-1}(0)g\Delta\rho_1\gamma_1\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ \rho_3^{-1}(b)g\Delta\rho_3\frac{d}{dt}\zeta_2 + \rho_3^{-1}(b)g\Delta\rho_3\gamma_3\vec{u}_3 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_3), \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_1 - \tilde{C}_1^* \tilde{u}_1 &= 0 \quad (\text{в } \Omega_1), & \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_3 - \tilde{C}_3^* \tilde{u}_3 &= 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \\ \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_2 - \tilde{C}_{2,1}^* (D_1 \tilde{u}_1 + D_3 \tilde{u}_3) - \tilde{C}_{2,0}^* \tilde{v}_2 &= 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \tilde{u}_i(0, x) &= P_{0,S_i} \tilde{u}_i^0(x) \quad (i = 1, 3), & \tilde{v}_2(0, x) &= P_0 \tilde{u}_2^0(x), \\ \zeta_j(0, \hat{x}) &= \zeta_j^0(\hat{x}) \quad (j = 1, 2), & \tilde{\rho}_i(0, x) &= \tilde{\rho}_i^0(x) \quad (i = 1, 3). \end{aligned} \tag{6.19}$$

Для начальных данных, в силу разложения (6.9), должно выполняться следующее кинематическое условие:

$$\gamma_i P_{0,S_i} \tilde{u}_i^0(x) = -\tilde{\gamma}_i \Pi_i P_{\widehat{h,S_2}} \tilde{u}_2^0(x) \quad (\text{на } \Gamma_i, \quad i = 1, 3). \tag{6.20}$$

В лемме через Π_i обозначены проекторы на подпространства $\vec{G}_i(\Omega_2, \rho_2)$ ($i = 1, 3$), а через $\tilde{\gamma}_i$ — операторы нормальных следов на границы Γ_i ($i = 1, 3$) для полей, заданных в области Ω_2 .

7. Приведение системы к дифференциально-операторному уравнению. Свойства операторных блоков

Систему (6.18) — (6.19) удобно записать в ортогональной сумме гильбертовых пространств

$$\tilde{H} := \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1) \oplus \vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3, \rho_3) \oplus H_1 \oplus H_3 \oplus \tilde{H}^{(1)}$$

в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mu_1 A_1 & 0 & \rho_1^{-1} g \Delta \rho_1 G_1 & 0 & M_5 \\ 0 & \mu_3 A_3 & 0 & -\rho_3^{-1} g \Delta \rho_3 G_3 & M_4 \\ -\rho_1^{-1} g \Delta \rho_1 \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_3^{-1} g \Delta \rho_3 \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_3 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ v \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & 0 & 0 & 0 \\ K_3 & K_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1^{-1} g \Delta \rho_1 I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3^{-1} g \Delta \rho_3 I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_3 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_3 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{f}_v \end{pmatrix}, \tag{7.1} \end{aligned}$$

где $H_i = L_2(\Gamma_i) \ominus \{1_i\}$ ($i = 1, 3$), $\tilde{H}^{(1)} = \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega_1) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega_2) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega_3)$, $v = (\tilde{v}_2; \tilde{\rho}_1; \tilde{\rho}_2; \tilde{\rho}_3)^t$.

Опишем структуру операторов, входящих в (7.1).

$$\begin{aligned} K_1 &= I_1 + \rho_1^{-1}(0) \rho_2(0) G_1 S_{1,1} \gamma_1, & K_2 &= \rho_1^{-1}(0) \rho_2(0) G_1 S_{1,2} \gamma_3, \\ K_3 &= \rho_1^{-1}(b) \rho_2(b) G_3 S_{2,1} \gamma_1, & K_4 &= I_3 + \rho_1^{-1}(b) \rho_2(b) G_3 S_{2,2} \gamma_3. \end{aligned}$$

С учетом того, что $\tilde{C}_{2,1}\tilde{\rho}_2 = \rho_2^{-1}\nabla\Psi$, введем оператор B следующим образом $B\tilde{\rho}_2 := \Psi$, тогда

$$\begin{aligned} M_1 &= (0; -\tilde{C}_1^*; -\tilde{C}_{2,1}^*D_1; 0)^t, & M_2 &= (0; 0; -\tilde{C}_{2,1}^*D_3; -\tilde{C}_3^*)^t, \\ M_4 &= (0; 0; -\rho_1^{-1}(b)G_3P_{\Gamma_3}B; \tilde{C}_3), & M_5 &= (0; \tilde{C}_1; -\rho_1^{-1}(0)G_1P_{\Gamma_1}B; 0), \\ M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{C}_{2,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{C}_{2,0}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & I_v &= \text{diag}(I_0; I_{\mathfrak{L}_2(\Omega_1)}; I_{\mathfrak{L}_2(\Omega_2)}; I_{\mathfrak{L}_2(\Omega_3)}), \end{aligned} \tag{7.2}$$

I_i, I_{Γ_i} ($i = 1, 3$), $I_{\mathfrak{L}_2(\Omega_j)}$ ($j = \overline{1, 3}$) — единичные операторы в пространствах $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$, H_i ($i = 1, 3$), $\mathfrak{L}_2(\Omega_j)$ ($j = \overline{1, 3}$) соответственно.

Правая часть в (7.1) имеет вид:

$$\hat{f}_i := P_{0,S_i}\vec{f} - \rho_i^{-1}G_iP_{\Gamma_i}F \quad (i = 1, 3), \quad \hat{f}_v := (P_0\vec{f}; 0; 0; 0)^t.$$

Начальные условия (6.18) для уравнения (7.1) можно записать более кратко:

$$\begin{aligned} &(\vec{u}_1^0; \vec{u}_3^0; \zeta_1^0; \zeta_2^0; v^0)^t = \\ &= (P_{0,S_1}\vec{u}_1^0(x); P_{0,S_3}\vec{u}_3^0(x); \zeta_1^0(\hat{x}); \zeta_2^0(\hat{x}); P_0\vec{u}_2^0(x), \tilde{\rho}_1^0(x), \tilde{\rho}_2^0(x), \tilde{\rho}_3^0(x))^t. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Лемма 6. *Операторные блоки в задаче (7.1) имеют следующие свойства*

1. Оператор G_i ($i = 1, 3$) изометрически действует из пространства $H_{\Gamma_i}^{\frac{1}{2}}$ в пространство $\vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$).

2. Операторы γ_1 и G_1 взаимно сопряженные.

При этом $\gamma_1 : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1) \rightarrow H_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, $G_1 : H_{\Gamma_1}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$.

3. Операторы γ_3 и G_3 взаимно сопряженные.

При этом $\gamma_3 : \vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3, \rho_3) \rightarrow H_{\Gamma_3}^{-\frac{1}{2}}$, $G_3 : H_{\Gamma_3}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \vec{G}_{h,S_3}(\Omega_3, \rho_3)$.

4. Оператор $K = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix}$ ограничен, самосопряженный в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1) \oplus \vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3, \rho_3)$, положительно определенный.

5. Операторы M_i ($i = \overline{1, 5}$), введенные в (7.2), являются ограниченными в соответствующих пространствах, при этом $-M_5^* = M_1$, $-M_4^* = M_2$.

Доказательство леммы аналогично доказательству соответствующих операторных блоков из работы [3].

Введем следующие обозначения: $y := (\vec{u}_1; \vec{u}_3; \zeta_1; \zeta_2; v)^t$ $f := (\hat{f}_1; \hat{f}_3; 0; 0; \hat{f}_v)^t$,

$$\mathcal{R} := \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & 0 & 0 & 0 \\ K_3 & K_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1^{-1}g\Delta\rho_1I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3^{-1}g\Delta\rho_3I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} \mu_1 A_1 & 0 & \rho_1^{-1} g \Delta \rho_1 G_1 & 0 & M_5 \\ 0 & \mu_3 A_3 & 0 & -\rho_3^{-1} g \Delta \rho_3 G_3 & M_4 \\ -\rho_1^{-1} g \Delta \rho_1 \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_3^{-1} g \Delta \rho_3 \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_3) \oplus \mathcal{D}(G_1) \oplus \mathcal{D}(G_3) \oplus \tilde{H}^{(1)}. \quad (7.4)$$

Тогда задача Коши (7.1), (7.3) запишется в виде

$$\mathcal{R} \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y = f, \quad y(0) = y^0. \quad (7.5)$$

Определение 1. Назовем сильным решением исходной начально-краевой задачи (1.2) – (1.5) такие функции $\vec{u}_i, \tilde{\rho}_i, p_i$ ($i = \overline{1, 3}$) и ζ_j ($j = 1, 2$) для которых вектор $y(t) = (\vec{u}_1(t); \vec{u}_3(t); \zeta_1(t); \zeta_2(t); v(t))^t$ является сильным решением задачи Коши (7.5) и выполнены тривиальные соотношения (3.2), (3.9), (3.10) в смысле теории обобщенных функций (теории распределений) (см., например, [2]). В свою очередь сильным решением задачи Коши (7.5) назовем функцию $y(t)$ такую, что $y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ для любого t из промежутка $[0, T]$, $\mathcal{A}_0 y(t) \in C([0, T]; \tilde{H})$, $y(t) \in C^1([0, T]; \tilde{H})$ и для любого t из промежутка $[0, T]$ выполнено уравнение и начальное условие из (7.5).

Для доказательства теоремы существования сильного решения задачи Коши (7.5) осуществим следующие преобразования.

Произведем в уравнении (7.5) замену $y(t) = e^t y_1(t)$. В результате получим уравнение относительно y_1 :

$$\mathcal{R} \frac{dy_1}{dt} + (\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}) y_1 + (\mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P}) y_1 = e^{-t} f, \quad (7.6)$$

где число $\varepsilon > 0$ выбрано таким образом, что $\mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P} \gg 0$. Это возможно, так как $\mathcal{R} \gg 0$ в \tilde{H} .

Область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P})$ оператора $\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}$ совпадает с $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ из (7.4). На $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ оператор $\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}$ является равномерно аккретивным, то есть

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}) \gg 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0).$$

Кроме того, оператор $(\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P})^+ := (\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P})^*|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)}$, как нетрудно проверить, также является равномерно аккретивным на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Однако он не является замкнутым из-за того, что оператор γ_i ($i = 1, 3$) неограничен в $\vec{J}_{0, S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$) и $\mathcal{D}(\gamma_i) \supset \mathcal{D}(A_i)$ ($i = 1, 3$). Таким образом, оператор $\mathcal{A}_0 + \varepsilon \mathcal{P}$ не является максимальным аккретивным.

Обозначим $g \rho_i^{-1} \Delta \rho_i \gamma_i A_i^{-\frac{1}{2}} =: Q_i$, $g \rho_i^{-1} \Delta \rho_i A_i^{-\frac{1}{2}} G_i =: Q_i^+$ ($i = 1, 3$). Имеет место $Q_i^+ \subset Q_i^*$, $Q_i^+ = Q_i^*|_{\mathcal{D}(G_i)}$, $Q_i^+ = Q_i^*$ ($i = 1, 3$).

Оператор $\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P}$ допускает замыкание (см. [5, с.109]) $\mathcal{A} := \overline{(\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P})}$. В этом случае имеет место соотношение

$$\mathcal{A} + (\mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P}) = \overline{(\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P})} + (\mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P}) = \overline{(\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P}) + (\mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P})},$$

так как оператор $\mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P}$ ограничен и задан на всем пространстве. Учитывая это обстоятельство, мы будем замыкать только оператор $\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P}$.

Лемма 7. *Замыкание $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P}}$ оператора $\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P}$ есть максимальный аккретивный оператор. При этом*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ (\vec{u}_1; \vec{u}_3; \zeta_1; \zeta_2; v)^t \mid \mu_1 \vec{u}_1 + A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1 \in \mathcal{D}(A_1), \mu_3 \vec{u}_3 - A_3^{-\frac{1}{2}} Q_3^* \zeta_2 \in \mathcal{D}(A_3) \},$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{T}_A \mathcal{Q}_A \mathcal{T}_A,$$

где

$$\mathcal{T}_A := \begin{pmatrix} A_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_A := \begin{pmatrix} \mu_1 I_1 & 0 & Q_1^* & 0 & F_1^* \\ 0 & \mu_3 I_3 & 0 & -Q_3^* & F_2^* \\ -Q_1 & 0 & \varepsilon I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & \varepsilon I_{\Gamma_3} & 0 \\ -F_1 & -F_2 & 0 & 0 & \varepsilon I_v + M_3 \end{pmatrix},$$

$$F_1 := M_5^* A^{-\frac{1}{2}}, \quad F_3 := M_4^* A^{-\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P}$ представим в виде: $\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P} = \mathcal{T}_A \mathcal{Q}_A^+ \mathcal{T}_A$,

$$\mathcal{T}_A = \begin{pmatrix} A_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_A^+ := \begin{pmatrix} \mu_1 I_1 & 0 & Q_1^+ & 0 & F_1^* \\ 0 & \mu_3 I_3 & 0 & -Q_3^+ & F_2^* \\ -Q_1 & 0 & \varepsilon I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & \varepsilon I_{\Gamma_3} & 0 \\ -F_1 & -F_2 & 0 & 0 & \varepsilon I_v + M_3 \end{pmatrix}.$$

Замыкание \mathcal{A} оператора $\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P}$ состоит в замене в среднем блоке оператора Q_i^+ на Q_i^* ($i = 1, 3$). Действительно, после такого замыкания оператор \mathcal{A} представлен в виде произведения $\mathcal{A} = T_1 T_2 T_1$ замкнутых операторов. При этом $T_1^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{H})$, так как оператор $A_i^{-\frac{1}{2}}$ ограничен в $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ ($i = 1, 3$). Далее непосредственно проверяется, что все элементы обратной матрицы T_2^{-1} являются ограниченными операторами, а значит $T_2^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{H})$ и оператор \mathcal{A} замкнут.

Найдем область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ оператора \mathcal{A} . Прежде всего, из представления для оператора \mathcal{A} следует, что $\vec{u}_i \in \mathcal{D}(A_i^{\frac{1}{2}})$ ($i = 1, 3$). Далее

$$\begin{pmatrix} A_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 A_1^{\frac{1}{2}} \vec{u}_1 + Q_1^* \zeta_1 + F_1^* v \\ \mu_3 A_3^{\frac{1}{2}} \vec{u}_3 - Q_3^* \zeta_2 + F_2^* v \\ -Q_1 A_1^{\frac{1}{2}} \vec{u}_1 + \varepsilon \zeta_1 \\ Q_3 A_3^{\frac{1}{2}} \vec{u}_1 + \varepsilon \zeta_2 \\ -F_1 A_1^{\frac{1}{2}} \vec{u}_1 - F_2 A_3^{\frac{1}{2}} \vec{u}_3 + (\varepsilon I_v + M_3) v \end{pmatrix},$$

то есть $\mu_1 A_1^{\frac{1}{2}} \vec{u}_1 + Q_1^* \zeta_1 + F_1^* v \in \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$, $\mu_3 A_3^{\frac{1}{2}} \vec{u}_3 - Q_3^* \zeta_2 + F_2^* v \in \mathcal{D}(A_3^{\frac{1}{2}})$ или

$$\mu_1 \vec{u}_1 + A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1 + A_1^{-1} M_5 v \in \mathcal{D}(A_1), \quad \mu_3 \vec{u}_3 - A_3^{-\frac{1}{2}} Q_3^* \zeta_2 + A_3^{-1} M_4 v \in \mathcal{D}(A_3).$$

Таким образом заключаем, что

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ (\vec{u}_1; \vec{u}_3; \zeta_1; \zeta_2; v)^t \mid \mu_1 \vec{u}_1 + A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1 \in \mathcal{D}(A_1), \mu_3 \vec{u}_3 - A_3^{-\frac{1}{2}} Q_3^* \zeta_2 \in \mathcal{D}(A_3) \}.$$

Заметим, что условие $\vec{u}_1 \in \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$ следует из условия $\mu_1 \vec{u}_1 + A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1 \in \mathcal{D}(A_1)$. Действительно, так как $\mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$ и $A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1 \in \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$ для любого $\zeta_1 \in H_1$, то \vec{u}_1 также принадлежит $\mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$. Лемма доказана. \square

Рассмотрим теперь уравнение с замкнутым оператором

$$\mathcal{R} \frac{dy_1}{dt} + \mathcal{A} y_1 + (\mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P}) y_1 = e^{-t} f. \quad (7.7)$$

Здесь оператор $\mathcal{A} + \mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P}$ уже максимальный аккретивный. Оператор \mathcal{R} самосопряженный, положительно определенный и ограниченный в \tilde{H} , значит, для него существует оператор \mathcal{R}^{-1} , обладающий теми же свойствами. Преобразуем (7.7) к виду

$$\frac{dy_1}{dt} = -\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P}) y_1 + \mathcal{R}^{-1} e^{-t} f, \quad y_1(0) = y^0. \quad (7.8)$$

Введем в \tilde{H} эквивалентную норму по формуле

$$\langle y_1, y_1 \rangle := (\mathcal{R} y_1, y_1)_{\tilde{H}(1)} = (\mathcal{R}^{\frac{1}{2}} y_1, \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} y_1)_{\tilde{H}(1)}.$$

Эквивалентность этой нормы старой норме следует из свойств оператора \mathcal{R} .

Легко проверить, что оператор $-\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P})$ будет максимальным диссипативным в новом скалярном произведении и, значит, задача Коши (7.8) будет равномерно корректной (см. [5, с.166]), а оператор $-\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P})$ порождает сжимающую в новом скалярном произведении полугруппу операторов $\mathcal{U}(t) := \exp(-t \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{R} - \varepsilon \mathcal{P}))$ и справедлива следующая

Теорема 1. *Задача Коши (7.8) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0, T]$, выражаемое формулой*

$$y_1(t) = \mathcal{U}(t) y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t - \tau) \mathcal{R}^{-1} e^{-\tau} f(\tau) d\tau,$$

если выполнены следующие условия: $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $f(t) \in C^1([0, T]; \tilde{H})$.

Из теоремы 1 следует, что функция

$$\mu_1 \vec{u}_{11} + e^{-t} A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1^0 + \frac{1}{g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1} A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \int_0^t e^{-(t-s)} Q_1 A_1^{\frac{1}{2}} \vec{u}_{11}(s) ds =: \vec{v}^1(t) \quad (7.13)$$

принадлежит $\mathcal{D}(A_1)$ для любого $t \in [0, T]$ и $\vec{v}^1(t) \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$. Если $\zeta_1^0 \in \mathcal{D}(G_1)$, тогда

$$Q_1^* \zeta_1^0 = Q_1^+ \zeta_1^0 = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 A_1^{-\frac{1}{2}} G_1 \zeta_1^0$$

и поэтому

$$A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1^0 = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 A_1^{-1} G_1 \zeta_1^0 \in \mathcal{D}(A_1).$$

Рассмотрим оператор $\mathfrak{K} := A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* Q_1 A_1^{\frac{1}{2}} = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \gamma_1$.

Введем $\mathcal{D}(A_1)$ как гильбертово пространство с нормой графика

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{D}(A_1)} := \|A_1 \vec{v}\|. \quad (7.14)$$

Тогда сужение $\mathfrak{K}^1 := \mathfrak{K}|_{\mathcal{D}(A_1)}$ есть линейный ограниченный оператор, действующий в $\mathcal{D}(A_1)$. Действительно, если $\vec{u}_{11} \in \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}}) = \vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1, \rho_1)$, тогда $\gamma_1 \vec{u}_{11} \in H_{\Gamma_1}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}(G_1)$, $\mathfrak{K}^1 \vec{u}_{11} = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \gamma_1 \vec{u}_{11} = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^+ \gamma_1 \vec{u}_{11} = (g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1)^2 A_1^{-1} G_1 \gamma_1 \vec{u}_{11} \in \mathcal{D}(A_1)$. Так как оператор $G_1 \gamma_1$ ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1, \rho_1) = \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$ в $\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1, \rho_1)$, то $\mathfrak{K}^1 : \mathcal{D}(A_1) \rightarrow \mathcal{D}(A_1)$ есть ограниченный оператор. Доказанный факт позволяет рассмотреть соотношение (7.13) как интегральное уравнение Вольтера второго рода в пространстве $\mathcal{D}(A_1)$ (с нормой графика (7.14)). Здесь функция $\vec{v}^1(t) - e^{-t} A_1^{-\frac{1}{2}} Q_1^* \zeta_1^0 \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$ и ядро $\mathfrak{K}^1 e^{-(t-s)}$ интегрального оператора непрерывно по t, s на $\mathcal{D}(A_1)$. Поэтому задача (7.13) имеет единственное решение $\vec{u}_{11} \in C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$ и каждое слагаемое в (7.13) есть элемент из $C([0, T]; \mathcal{D}(A_1))$. Таким образом, в уравнении (7.12) и в первом уравнении (7.9) можем раскрыть скобки. Аналогичные рассуждения позволяют раскрыть скобки и во втором уравнении (7.9). Тем самым получим, что (7.6) выполнено для функции $y_1(t) = (\vec{u}_{11}; \vec{u}_{31}; \zeta_{11}; \zeta_2; v_1)^t$. Осуществляя в уравнении (7.6) обратную замену $y_1(t) = e^{-t} y(t)$, получим, что для задачи Коши

$$\mathcal{R} \frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y = f, \quad y(0) = y^0 \quad (7.15)$$

имеет место следующая

Теорема 2. *Задача Коши (7.15) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0, T]$, если выполнены следующие условия*

$$y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \quad f(t) \in C^1([0, T]; \tilde{H}).$$

В теореме 2 содержится результат о существовании и единственности сильного решения задачи Коши (7.15). Переформулируем результат для задачи (1.2) — (1.5).

Теорема 3. *Начально-краевая задача (1.2) — (1.5) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0, T]$, если выполнены условия:*

$$\begin{aligned} 1^0 \quad & \vec{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A_1), \quad \vec{u}_3^0 \in \mathcal{D}(A_3), \quad P_0 \vec{u}_2^0 \in \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2), \\ & \zeta_j^0 \in H_{\Gamma_j}^{\frac{1}{2}} \quad (j = 1, 2), \quad \tilde{\rho}_i^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega_i) \quad (i = \overline{1, 3}), \\ \text{причем} \quad & \gamma_i P_{0,S_i} \vec{u}_i^0(x) = -\tilde{\gamma}_i \Pi_i P_{h,S_2} \vec{u}_2^0(x) \quad (\text{на } \Gamma_i, \quad i = 1, 3). \\ 2^0 \quad & \vec{f}(t) \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho)) \quad (\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2). \end{aligned}$$

8. Заключение

Изучена задача о малых движениях системы, состоящей из трех тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя и верхняя жидкости по отношению к действию силы тяжести считаются вязкими, а средняя — идеальной. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы. Дальнейшее исследование представляет собой изучение соответствующей спектральной задачи: получения утверждения о локализации спектра, асимптотическом поведении ветвей собственных значений, утверждения о наличии существенного спектра задачи.

Список цитируемых источников

1. *Габов, С. А., Свешников, А. Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. — М.: Наука, 1986. — 288 с.
Gabov, S. A., Sveshnikov, A. G. (1986). Problems of dynamics of stratified fluids (in Russian). Moscow: Nauka.
2. *Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуи Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
Korachevsky, N. D., Krein, S. G., Ngo Zuy Can. (1989). Operator methods are in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems (in Russian). Moscow: Nauka.
3. *Копачевский, Н. Д., Цветков, Д. О.* Колебания стратифицированных жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т. 29. — С. 103–130.
Korachevsky, N. D., Tsvetkov, D. O. (2010). Oscillations of stratified fluids. Journal of Math Sciences 4, 574–602.
4. *Краусс, В. К.* Внутренние волны. — Л.: Гидрометеиздат, 1968. — 272 с.
Krauss, V. K. (1968). Internal waves (in Russian). Leningrad: Gidrometeoizdat.

5. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
KREIN, S.G. (1967) Linear differential equations are in Banach spaces (in Russian). Moscow: Nauka.
6. Миропольский, Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. — Л.: Гидрометеоздат, 1981. — 302 с.
Mitropol'sky, Yu. Z. (1981). Dynamics of internal gravitational waves in the ocean (in Russian). Leningrad: Gidrometeoizdat.

Получена 01.06.2016

УДК 517.968.7

Задача Коши, порожденная колебаниями стратифицированного газа

Б. М. Вронский

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. E-mail: *bmw1960@mail.ru*

Аннотация. В работе рассмотрено решение эволюционной задачи, порожденной малыми движениями гидросистемы, состоящей из стратифицированной сжимаемой идеальной жидкостей в ограниченном сосуде. Исследование происходит путем сведения исходной спектральной задачи к исследованию задачи на собственные значения для дифференциального уравнения с начальными условиями в некотором функциональном гильбертовом пространстве. После изучения свойства соответствующих операторов и их спектра доказывается теорема о разрешимости задачи Коши и закон сохранения энергии.

Ключевые слова: сжимаемая стратифицированная жидкость, эволюционная задача, дифференциальное уравнение, теорема о разрешимости, закон сохранения энергии.

Cauchy problem generated by the oscillations of stratified gas.

B. M. Wronsky

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. The paper considers the solution of evolutionary problems generated by small movements of the hydraulic system consisting of an ideal compressible stratified liquid in a confined vessel. Research is done by reducing the original spectral problem to the study of the eigenvalue problem for a differential equation with the initial conditions in some functional Hilbert space. After studying the properties of the corresponding operators and their spectral theorem on the solvability of the Cauchy problem is proved. And the law of conservation of energy is proved.

Keywords: compressible stratified fluid, evolution problem, differential equation, solvability theorem, energy conservation law.

MSC 2010: 47D99

1. Постановка задачи

Пусть неподвижный сосуд целиком заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. Жидкость предполагается стратифицированной, то есть ее плотность в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Oz по закону $\rho_0 = \rho_0(z)$. Область, занятую жидкостью, обозначим через Ω , а ее границу (твердую стенку) — через S . Считаем, что система находится под действием силы тяжести с ускорением $\vec{g} = -g\vec{k}$, где \vec{k} — орт оси Oz . Будем рассматривать случай устойчивой стратификации, она имеет место при выполнении условия (см. [1]):

$$0 < N_-^2 \leq N^2(z) \leq N_+^2 < \infty, \quad (1.1)$$

$$N^2(z) := N_0^2(z) - (g/c)^2, \quad N_0^2(z) := -g(\ln \rho_0(z))'.$$

Величину $N^2(z)$ принято называть частотой плавучести или частотой Вэйсяля–Брента. Через c в (1.1) обозначена скорость звука в жидкости. Малые движения системы описываются уравнениями (см. [2]):

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{\rho_0} g \rho \vec{k} \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.2)$$

$$\rho + w_z \rho'_0 + \rho_0 \operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.3)$$

$$\rho + w_z \rho'_0 = c^{-2}(p - g w_z \rho_0) \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.4)$$

к которым надо присоединить равенство

$$\vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad (1.5)$$

выражающее условие непротекания на твердой стенке, и начальные условия:

$$\vec{w}(\vec{x}, 0) = \vec{w}^0(\vec{x}); \quad (1.6)$$

$$\frac{\vec{w}(\partial \vec{x}, 0)}{\partial t} = \vec{w}^1(\vec{x}). \quad (1.7)$$

Здесь приняты обозначения: $\vec{w} = \vec{w}(\vec{x}, t)$ — поле смещения частиц жидкости от состояния равновесия, $p = p(\vec{x}, t)$ — отклонение поля давления от равновесного, $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ — отклонение поля плотности от равновесного, \vec{n} — внешняя нормаль к S , $x = (x^1, x^2, z)$ — точка в \mathbb{R}^3 .

2. Метод ортогонального проектирования

Введем в рассмотрение пространство вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ со скалярным произведением:

$$(\vec{v}, \vec{u})_{L_2} = \int_{\Omega} \rho_0(z) \vec{v} \cdot \vec{u} \, d\Omega. \quad (2.1)$$

Норма, порожденная этим скалярным произведением, эквивалентна норме обычного пространства вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$.

Пространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) L_2(\Omega, \rho_0)$ допускает ортогональное разложение:

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega, \rho_0). \quad (2.2)$$

Здесь: $\vec{J}_0(\Omega)$ — подпространство соленоидальных функций с нулевой нормальной компонентой на границе, а $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$ — подпространство квазипотенциальных векторных полей. Любую вектор-функцию $\vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ будем искать в виде:

$$\vec{w} = \vec{u} + \rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi, \quad \vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega), \quad \rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi \in \vec{G}(\Omega, \rho_0). \quad (2.3)$$

Спроектировав исходные уравнения на подпространства $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$, можно привести первоначальную начально-краевую задачу (1.2)–(1.7) к следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + AU + BU = 0, \quad U(0) = U^0, U'(0) = U^1, \quad (2.4)$$

$$U := (\vec{u}, \Phi)^T \in H := \vec{J}_0(\Omega) \oplus H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z)).$$

Здесь операторы A и B порождены наличием стратификации и сжимаемости и определены следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{11}\vec{u} &= P_0(N_0^2(z)u_z\vec{k}), & A_{12}\Phi &= P_0\left(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right) \\ A_{21}\vec{u} &= \Psi_3, & A_{22}\Phi &= \Psi_2, \quad B_{11}\vec{u} = 0, \\ B_{12}\Phi &= P_0(-g\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi\vec{k})), & B_{21}\vec{u} &= g\rho_0u_z, \\ B_{22}\Phi &= g\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \Psi_1, \\ B_0\Phi &= -c^2\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi). \end{aligned}$$

Здесь операторы A_{11} и A_{21} заданы на всем пространстве $\vec{J}_0(\Omega)$, а операторы A_{12} и A_{22} на всем $H^1(\Omega, \rho_0^{-1})$. Для неограниченных операторов B_{ij} выбраны области определения следующим образом:

$$\mathcal{D}(B_{21}) = \{\vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega) : u_z \in H^1(\Omega)\},$$

$$\mathcal{D}(B_{12}) = H^1(\Omega, \rho_0^{-1}) \cap H^3(\Omega),$$

$$\mathcal{D}(B_{22}) = \mathcal{D}(B_{12})$$

$$\mathcal{D}(B_0) = H^1(\Omega, \rho_0^{-1}) \cap H^3(\Omega).$$

Скалярное произведение в пространстве H задается по формуле:

$$\begin{aligned} (U_1, U_2)_H &= (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{L_2} + (\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} (\rho_0(z)\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2^* + \\ &+ \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2^*) d\Omega. \end{aligned}$$

Операторы A и B из (2.4) имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} + B_0 \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующее утверждение о свойствах введенных выше операторов.

Лемма 1. *Оператор $A : H \rightarrow H$ ограниченный, неотрицательный, причем*

$$\|A\| = \max N_0^2(z) := N_0^2.$$

Доказательство. Состоит в составлении квадратичной формы $(AU, U)_H$, где $U \in H$ и использованием определений операторов A_{ij} ($i, j = 1, 2$), векторов U и соответствующих скалярных произведений.

$$(AU, U)_H = \int_{\Omega} \rho_0(z) N_0^2(z) |u_z + \rho_0^{-1}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z}|^2 d\Omega,$$

откуда и следует утверждение леммы. \square

Лемма 2. *Оператор B_0 — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор в пространстве $H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$, $\mathcal{D}(B_0) = \{\Phi \in H^3(\Omega) : \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } S)\}$.*

Доказательство. Составим квадратичную форму:

$$(B_0\Phi, \Phi)_{1,\Omega} = c^2 \int_{\Omega} \rho_0(z) |\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)|^2 d\Omega.$$

Очевидно, что B_0 неотрицателен. Для доказательства его положительной определенности составим спектральную задачу на собственные значения для оператора B_0 и заметим, что она эквивалентна следующей:

$$-\rho_0(z)\operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi) = \lambda\Phi.$$

Про эту задачу известно, что ее спектр состоит из счетного множества конечно-кратных положительных собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности. Отсюда и следует положительная определенность оператора B_0 . Это завершает доказательство леммы. \square

Лемма 3. *Оператор $D := A + B$ неотрицателен.*

Доказательство. Снова составим квадратичную форму, на этот раз для оператора $D := A + B$. Она имеет вид

$$(DU, U) = \int_{\Omega} \rho_0(z) (N^2(z) |u_z + \rho_0^{-1}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z}|^2 + |g/c(u_z + \rho_0^{-1}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z}) - c \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi)|^2) d\Omega,$$

то есть, оператор D — неотрицателен. \square

В силу ограниченности снизу введенных операторов A , B и D они могут быть расширены до самосопряженных.

3. Решение эволюционной задачи

Перепишем задачу Коши (2.4) в виде:

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dt^2} + \tilde{D} \hat{w} = \hat{0}, \hat{w}(0) = \hat{w}^0, \hat{w}'(0) = \hat{w}^1, \quad (3.1)$$

$$\hat{w} = (\bar{u}; \bar{v})^\tau, \tilde{D} = \tilde{A} + \tilde{B} \geq 0, \mathcal{D}(\tilde{D}) = \mathcal{D}(\tilde{B}). \quad (3.2)$$

Здесь $\tilde{}$ означает проведенную операцию расширения соответствующего оператора. Так как здесь $\tilde{D} = \tilde{D}^*$, то уравнение (3.1) является гиперболическим уравнением, которое рассматривается в гильбертовом пространстве $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Определение 1. Сильным решением задачи (3.1)–(3.2) на отрезке $[0; T]$ назовем такую функцию $\hat{w}(t)$ со значениями в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, для которой выполнены свойства

$$\hat{w} \in C([0; T], \mathcal{D}(\tilde{D})) \cap C^1([0; T]; \mathcal{D}(\tilde{D}^{1/2})) \cap C^2([0; T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)), \quad (3.3)$$

при любом $t \in [0; T]$ справедливо уравнение (3.1), а при $t = 0$ — начальные условия (3.2).

Теорема 1. Пусть в исходной задаче (1.2)–(1.7) выполнены условия

$$\begin{aligned} \bar{w}^0 &= \bar{u}^0 + \bar{v}^0, \bar{u}^0 \in \mathcal{D}(B_{21}) \subset \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \cap \vec{J}_{0,S}^1(\Omega), \\ \bar{v}^0 &\in \mathcal{D}(B_0), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\bar{w}^1 = \bar{u}^1 + \bar{v}^1, \bar{u}^1 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \bar{v}^1 \in \vec{G}(\Omega, \rho_0), \int_{\Omega} \rho_0 |\operatorname{div} \bar{v}|^2 d\Omega < \infty.$$

Тогда задача (3.1)–(3.2) имеет единственное сильное решение на любом отрезке $t \in [0; T]$.

Доказательство. Как известно, задача Коши (3.1)–(3.2) имеет единственное сильное решение (в приведенном выше смысле), если выполнены начальные условия

$$\bar{w}^0 \in \mathcal{D}(\tilde{D}), \quad \bar{w}^1 \in \mathcal{D}(\tilde{D}^{1/2}) \quad (3.5)$$

Однако, можно задать и условие $\bar{w}^0 \in \mathcal{D}(D), \bar{w}^1 \in \mathcal{D}(D^{1/2})$, то есть требования из набора (3.4), так как \tilde{D} является расширением D .

Далее, второе условие $\bar{w}^1 \in \mathcal{D}(\tilde{D}^{1/2})$ следует из того, что совпадают энергетические пространства операторов \tilde{D} и D , а также из формулы для квадратичной формы оператора D , задающей энергетическую норму в $\mathcal{D}(\tilde{D}^{1/2}) = \mathcal{D}(D^{1/2})$. Теорема доказана. \square

Сильное решение задачи (3.1)–(3.2) может быть записано в виде формулы

$$\widehat{w}(t) = C(t)\widehat{w}^0 + S(t)\widehat{w}^1, \widehat{w}^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{D}), \quad \widehat{w}^1 \in \mathcal{D}(\widetilde{D}^{1/2}), \quad (3.6)$$

где $S(t)$ и $C(t)$ — операторные синус-функция и косинус-функция.

Определение 2. Обобщенным решением задачи (3.1)–(3.2) назовем функцию вида (3.6) при

$$\widehat{w}^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{D}^{1/2}), \widehat{w}^1 \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0). \quad (3.7)$$

Теорема 2. Пусть в исходной задаче (1.2)–(1.7) выполнены условия

$$\bar{w}^0 = \bar{u}^0 + \bar{v}^0, \bar{u}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \bar{v}^0 \in \vec{G}(\Omega, \rho_0), \int_{\Omega} \rho_0 |\operatorname{div} \bar{v}^0|^2 d\Omega < \infty, \quad (3.8)$$

$$\bar{w}^1 = \bar{u}^1 + \bar{v}^1 \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0),$$

тогда задача (3.1)–(3.2) имеет единственное обобщенное решение $\widehat{w}(t)$ на любом отрезке $t \in [0; T]$.

3.1. О разрешимости исходной начально-краевой задачи

Сформулируем теперь дополнительные условия, при которых начально-краевая задача (1.2)–(1.7) будет иметь единственное решение.

Определение 3. Будем говорить, что сильное решение $\widehat{w}(t)$ задачи (3.1)–(3.2) обладает дополнительным свойством гладкости, если

$$\widehat{w}(t) \in C([0; T]; \mathcal{D}(D)) \cap C^1([0; T]; \mathcal{D}(D^{1/2})) \cap C^2([0; T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)). \quad (3.9)$$

Теорема 3. Пусть решение $\widehat{w}(t)$ задачи (3.1)–(3.2) обладает дополнительными свойствами гладкости. Тогда исходная начально-краевая задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0; T]$, то есть такие функции $\bar{w}(t, x)$ со значениями в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, $\nabla p(t, x)$ со значениями в $\vec{G}(\Omega, \rho_0)$ и $\rho(t, x)$ со значениями в пространстве скалярных функций $\mathcal{L}(\Omega; \rho_0)$, для которых выполнены уравнения, начальные и краевые условия (1.2)–(1.7). При этом в уравнении (1.2) все слагаемые являются элементами из пространства $C([0; T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0))$, в уравнении (1.3) все слагаемые являются элементами из пространства $C^1([0; T]; \mathcal{L}(\Omega; \rho_0))$, в уравнении (1.4) также все слагаемые являются элементами из пространства $C^1([0; T]; \mathcal{L}(\Omega; \rho_0))$.

Доказательство. Если для решения $\widehat{w}(t)$ задачи (3.1)–(3.2) выполнены дополнительные условия гладкости, то уравнение (3.1) можно переписать в виде

$$\frac{d^2 \widehat{w}}{dt^2} + (A + B)\widehat{w} = \widehat{0}, \quad (3.10)$$

где оператор B определен формулами выше. Тогда взамен имеем задачу Коши (2.4), где все слагаемые являются непрерывными функциями от t со значениями в соответствующих подпространствах пространства $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$. После этого можно с помощью соотношений для функций $\bar{w}(t, x)$, $\rho(t, x)$ и $p(t, x)$ вернуться к уравнению (1.2), где все слагаемые — непрерывные функции от t со значениями в пространстве $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Остальные утверждения теоремы, в силу связей между функциями $\bar{w}(t, x)$, $\rho(t, x)$ и $p(t, x)$, доказываются аналогично. \square

3.2. О законе сохранения полной энергии гидросистемы

Опираясь на установленные выше факты о разрешимости начально-краевой задачи, сформулируем итоговые утверждения, связанные с законом сохранения полной энергии.

Теорема 4. Пусть задача (3.1)–(3.2) имеет сильное решение $\hat{w}(t)$ и обладает дополнительными свойствами гладкости. Тогда для этого решения выполнен закон сохранения полной энергии:

$$\int_{\Omega} \rho_0(z) \left| \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \right|^2 d\Omega + c^{-2} \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) |p|^2 d\Omega + g^2 \int_{\Omega} \rho_0^{-1} N^{-2}(z) (c^{-2} p - \rho)^2 d\Omega = \quad (3.11)$$

$$= \int_{\Omega} \rho_0(z) |\vec{w}^1|^2 d\Omega + c^{-2} \int_{\Omega} \rho_0^{-1}(z) |p^0|^2 d\Omega + g^2 \int_{\Omega} \rho_0^{-1} N^{-2}(z) (c^{-2} p^0 - \rho^0)^2 d\Omega,$$

где функции $p^0(x)$ и $\rho^0(x)$ определены из уравнений (1.2) и (1.3) при $t = 0$.

Доказательство. полностью повторяет вывод закона сохранения полной энергии для классического решения задачи (1.2)–(1.7). \square

Теорема 5. Пусть задача (3.1)–(3.2) имеет сильное решение $\hat{w}(t)$. Тогда для этого решения также выполнен закон сохранения полной энергии в форме (3.11).

Доказательство. Для сильного решения из уравнения (??) выводится тождество

$$\frac{d}{dt} \left(\left\| \frac{d\hat{w}}{dt} \right\|_{\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)}^2 + (\tilde{D}\hat{w}, \hat{w})_{\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)} \right) = 0,$$

которое с помощью выражений для функций ρ и p после интегрирования по времени в промежутке от 0 до t , приводится к виду (3.11). \square

Теорема 6. В условиях теоремы 2 для обобщенного решения задачи (3.1)–(3.2) выполнен закон сохранения полной энергии в форме (3.11).

Доказательство. Теорема доказывается с помощью предельного перехода в равенстве предыдущей теоремы и того факта, что $\mathcal{D}(\tilde{D})$ плотна в $\mathcal{D}(\tilde{D}^{1/2})$, а она, в свою очередь, плотна в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$. \square

Список цитируемых источников

1. *Kopachevsky, N. D., Krein, S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 1: Self – adjoint Problems for an Ideal Fluid. — Basel: Birkhauser Verlag, 2001.
2. *Kopachevsky, N. D., Padula, P., Vronsky, B. M.* Small motions and eigenoscillations of a system „fluid – gas” in a bounded region // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского серия Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2007. — Т. 20(59), №1. — С. 3-55.

Kopachevsky, N. D., Padula, P., Vronsky, B. M. (2007). Small motions and eigenoscillations of a system „fluid–gas” in a bounded region. Uchenye zapiski TNU, ser. Matem. Mekh. Inform. & Cyber., 20(59), no.1, 3-55.

Получена 14.03.2016

УДК 621.396.96

Двухполосный метод оценки полного электронного содержания ионосферы по сигналам широкополосной РЛС

А. Г. Виноградов, А. Н. Теохаров

Московский физико-технический институт (университет),
Долгопрудный 141701. *E-mail: a.vino@mail.ru, teo-haro@mail.ru*

Аннотация. Дан анализ дисперсионных искажений широкополосных радиолокационных сигналов при их распространении через ионосферу Земли. Разработан двухполосный метод, позволяющий путем специальной обработки принятого широкополосного сигнала оценивать полное электронное содержание ионосферы вдоль луча радиолокатора. Приведена спектральная характеристика согласованного фильтра, компенсирующего дисперсионные искажения. На основе компьютерного моделирования показана принципиальная возможность прямого измерения полного электронного содержания ионосферы двухполосным методом.

Ключевые слова: полное электронное содержание ионосферы, дисперсионные искажения, широкополосный радиолокационный сигнал, согласованная фильтрация, радиолокация.

Two-sideband method for estimating complete electron content of the ionosphere using signals of wideband radar.

A. G. Vinogradov, A. N. Teokharov

Moscow Institute of Physics and Techonogy (State University), Dolgoprudny 141701.

Abstract. Analysis of dispersion distortions of wideband radar signals through earth's ionosphere is given. Two-sideband method of evaluating the complete electron content of the ionosphere along the radar beam is developed. This method uses special processing of the received wideband signal. The spectral function of the matched filter mitigating dispersion distortions is given. On the basis of computer simulation, the in-principle possibility of direct measuring the complete electron content of ionosphere with the two-sideband method is demonstrated.

Keywords: complete electron content of ionosphere, dispersion distortions, wideband radar signal, matched filtering, radiolocation.

MSC 2010: 78A50, 78A55, 35Q60, 35J15

Введение

Одной из сравнительно новых задач радиолокации является задача построения радиоизображений с разрешающей способностью порядка десятков сантиметров, что является достаточным для распознавания типа лоцируемого объекта. Как известно, разрешающая способность по дальности обратно пропорциональна ширине

полосы частот сигнала, и для такого «сверхразрешения» необходимо использовать достаточно широкополосные сигналы. Например, для достижения разрешающей способности по дальности ΔR порядка 0,75 м требуется сигнал с шириной полосы ΔF порядка 200 МГц.

При распространении столь широкополосного сигнала через ионосферу необходимо учитывать дисперсионные искажения сигнала, связанные с частотной зависимостью диэлектрической проницаемости ионосферы [4].

В [1] дисперсионные искажения в ионосфере исследованы на примере сигналов с линейной модуляцией частоты (ЛЧМ сигналов) с большой базой и показано, что основным искажающим фактором является частотно-зависимый набег фазы каждой спектральной составляющей сигнала, который пропорционален полному электронному содержанию ионосферы ТЕС (total electron content) вдоль траектории сигнала. При зондировании под малыми углами места влияние этих искажений может полностью разрушить сигнал при его обычной согласованной обработке (со спектральной функцией, пропорциональной комплексно сопряженной спектральной функции излученного сигнала).

При известном значении ТЕС вдоль траектории сигнала можно модифицировать обработку, согласовав её не с излученным, а с ожидаемым сигналом путем коррекции фазы каждой гармоники согласованного фильтра.

Ранее предлагалось проводить оценку ТЕС на основе измерений параметров ионосферы с помощью разнородных средств (ионозондов, датчиков навигационных систем (GPS, ГЛОНАСС), РЛС некогерентного рассеяния) и оперативной обработки измеренных и модельных данных. Такие оценки требуют тонкой настройки измерительных средств и больших ресурсов при обработке в реальном времени.

В работе [2] для оценки ТЕС предлагается обрабатывать принимаемый сигнал в линейке согласованных фильтров, настроенных на последовательность значений ТЕС с определенным шагом вблизи выбранного начального значения. Недостатком предложенного метода является использование большого числа модифицированных согласованных фильтров для обработки широкополосного сигнала, что затрудняет оценку ТЕС и дальнейшую обработку принятого сигнала в реальном времени.

В данной работе для прямой оценки ТЕС по принимаемому радиолокационному сигналу предлагается использовать методику, обобщающую известный двухчастотный метод оценки ТЕС [4] на сверхширокополосные сигналы и названную нами двухполосным методом. Для этого формируются фильтры, согласованные с «высокочастотным» и «низкочастотным» участками спектра, и ТЕС определяется по отличию задержек откликов таких фильтров.

В разделе 1 приводится оценка дисперсионных искажений сигналов в ионосфере; в разделе 2 описано их влияние на согласованную обработку принятого сигнала и построен оптимальный фильтр, согласованный с ионосферными искажениями; раздел 3 содержит описание двухполосного метода прямой оценки ТЕС и условий его применимости; в разделе 4 приведены результаты численного моделирования.

В заключении сделаны основные выводы и поставлены дальнейшие задачи.

1. Оценка дисперсионных искажений

Будем считать, что излученный сигнал можно представить в виде

$$s(t) = A(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad (1)$$

где выделена несущая частота $\omega_0 = 2\pi F_0$,

$$A(t) = \int g(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega \quad (2)$$

— комплексная огибающая сигнала, которая описывается спектром $g(\Omega)$, Ω — девиация частоты, при этом $g(\Omega) \approx 0$ при $|\Omega| > \Omega_m$ ($\Omega_m \sim \pi\Delta F$ — полуширина спектра огибающей). Диэлектрическая проницаемость земной атмосферы отличается от единицы:

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = n^2(\mathbf{r}, \omega) = 1 + \nu(\mathbf{r}, \omega), \quad (3)$$

где $n(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}$ — показатель преломления в среде, а $\nu(\mathbf{r}, \omega)$ — малая поправка, зависящая от координат и частоты электромагнитного поля:

$$\nu \ll 1. \quad (4)$$

С другой стороны полагаем, что диэлектрическая проницаемость меняется достаточно медленно в масштабе длины волны $\lambda = c/F = 2\pi c/\omega = 2\pi/k$ ($k = \omega/c$ — волновое число, c — скорость света в вакууме):

$$\mu = \lambda |\nabla\varepsilon|/\varepsilon \ll 1. \quad (5)$$

При этих условиях для вывода основных соотношений воспользуемся известным коротковолновым методом расчета распространения сигнала — методом геометрической оптики. Приведем краткий вывод уравнений в скалярном варианте [4].

Решение уравнения Гельмгольца для волнового поля $\Delta u(\mathbf{r}) + k^2\varepsilon(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) = 0$ будем искать в виде почти плоской волны

$$u(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{ik\phi(\mathbf{r})}, \quad (6)$$

где амплитуда $A(\mathbf{r})$ и эйконал $\phi(\mathbf{r})$ — медленно меняющиеся функции координат. Амплитуду будем искать в виде ряда по степеням малого параметра μ (см. (5)), что формально соответствует разложению по степеням $(ik)^{-1} = \lambda/(2\pi i)$:

$$A(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}) + (ik)^{-1}A_1(\mathbf{r}) + (ik)^{-2}A_2(\mathbf{r}) + \dots$$

Подставляя эти разложения в уравнение Гельмгольца и приравнявая группы членов одного порядка, получаем систему уравнений, включающую уравнение эйконала

$$[\nabla\phi(\mathbf{r})]^2 = \varepsilon(\mathbf{r}) = n^2(\mathbf{r}) \quad (7)$$

и рекуррентную цепочку уравнений переноса для амплитуд $A_0(\mathbf{r}), A_1(\mathbf{r}), A_2(\mathbf{r}), \dots$

$$A_0 \Delta \phi + 2 \nabla A_0 \cdot \nabla \phi = 0, \quad A_m \Delta \phi + 2 \nabla A_m \cdot \nabla \phi = \Delta A_{m-1}, \quad (m \geq 1). \quad (8)$$

Уравнения переноса описывают расходимость сигнального пучка в неоднородной среде (что для наших целей несущественно), и далее мы не будем на них останавливаться.

Характеристики уравнения эйконала (7) являются лучами, вдоль которых распространяется сигнал в геометрооптическом приближении; приведем лучевые уравнения в гамильтоновой форме, используя в качестве независимого параметра текущий путь s , пройденный сигналом вдоль луча в атмосфере:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} &= \frac{\mathbf{p}(\mathbf{r}(s))}{n(\mathbf{r}(s))} \equiv \mathbf{e}(s), \\ \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{r}(s))}{ds} &= \nabla n(\mathbf{r}(s)), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathbf{p}(\mathbf{r}(s)) \equiv \nabla \phi(\mathbf{r}(s))$, а $\mathbf{e}(s)$ — единичный вектор вдоль луча. Первое из уравнений (9) фактически описывает направление касательной к лучу, тогда как второе описывает поворот луча из-за неоднородности среды распространения.

Решая уравнение эйконала (7), находим, что при распространении вдоль луча в атмосфере фаза каждой гармоники этого сигнала (на частоте $\omega = \omega_0 + \Omega$) приобретает дополнительный сдвиг [4]

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega}{c} L(\omega), \quad (10)$$

где $L(\omega) \equiv \phi(\mathbf{r}(\sigma)) - \phi(\mathbf{r}(0)) - \sigma = \int_0^\sigma [n(\mathbf{r}(s), \omega) - 1] ds$ — дополнительный фазовый путь, интегрирование ведется вдоль луча $\mathbf{r}(s)$ от РЛС до лоцируемого объекта, σ — длина луча.

При условиях (4) и (5) в соответствии с (3) интегрирование можно провести вдоль спрямленного луча РЛС–лоцируемый объект, направление которого задается единичным вектором $\mathbf{l} = \mathbf{R}/R$ (\mathbf{R} — радиус-вектор объекта, $R = |\mathbf{R}| = \sigma$):

$$L(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^R \nu(\mathbf{l}\sigma, \omega) d\sigma. \quad (11)$$

Рассеянный объектом сигнал приобретает такой же фазовый сдвиг¹. В результате поправка к фазе каждой гармоники сигнала, принимаемого РЛС, равна $2\varphi(\omega)$, а полная фаза этой гармоники есть

$$\Phi(\omega) = 2 \frac{\omega}{c} R + 2\varphi(\omega). \quad (12)$$

¹Здесь мы пренебрегаем доплеровским сдвигом частоты, возникающим при рассеянии на движущихся объектах, а также частотной зависимостью рассеяния на объекте в полосе частот ΔF .

В земной ионосфере для ультракоротких радиоволн ($\lambda \leq 10$ м) основное влияние на распространение сигнала оказывают продольные ленгмюровские колебания ионосферной плазмы и поправка к диэлектрической проницаемости прямо пропорциональна электронной концентрации $N(\mathbf{r})$ и обратно пропорциональна квадрату частоты ω [3]:

$$\nu(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{4\pi e^2 N(\mathbf{r})}{m\omega^2}, \quad (13)$$

где m и e — масса и заряд электрона, соответственно. Для удобства запишем (13) в виде

$$\nu(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{80,8}{F^2} 10^{-12} N(\mathbf{r}), \quad (14)$$

где частота $F = \omega/(2\pi)$ измеряется в МГц, а электронная концентрация $N(\mathbf{r})$ — в эл/м³.

Фазовый путь $L(\omega)$ тоже обратно пропорционален квадрату частоты, так что его можно представить в виде

$$L(\omega_0 + \Omega) = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0 + \Omega)^2} L(\omega_0), \quad (15)$$

где $L(\omega_0)$ — фазовый путь в ионосфере на несущей частоте,

$$L(\omega_0) = -\frac{40,4}{F_0^2} 10^{-12} \cdot \text{TEC}, \quad (16)$$

где $\text{TEC} = \int_0^R N(\mathbf{l}\sigma) d\sigma$ — полное электронное содержание ионосферы в эл/м², а несущая частота $F_0 = \omega_0/2\pi$ — в МГц; при этом фазовый путь измеряется в метрах. Обычно полное электронное содержание измеряют в так называемых единицах TEC — TECU (total electron content units), 1 TECU = 10¹⁶ эл/м². В этих единицах формула (16) примет вид

$$L(\omega_0) [\text{M}] = -\frac{40,4}{F_0^2 [\text{МГц}^2]} 10^4 \cdot \text{TEC} [\text{TECU}]. \quad (17)$$

Ионосферная фазовая поправка в соответствии с (10) обратно пропорциональна частоте:

$$\varphi(\omega_0 + \Omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0 + \Omega} \frac{\omega_0}{c} L(\omega_0). \quad (18)$$

Удобно представить ее в виде трех слагаемых (выделив постоянный и линейный по девиации частоты Ω члены)

$$\varphi(\omega_0 + \Omega) = \frac{\omega_0}{c} L(\omega_0) - \frac{\Omega}{c} L(\omega_0) + \frac{\Omega^2}{\omega_0(\omega_0 + \Omega)} \frac{\omega_0}{c} L(\omega_0). \quad (19)$$

Первое слагаемое представляет собой поправку к фазе сигнала на несущей частоте, второе соответствует групповой задержке комплексной огибающей, а третье описывает искажение формы комплексной огибающей.

Действительно, в случае квазимонохроматической радиолокации, когда спектр сигнала достаточно узок, последним слагаемым в разложении фазовой поправки (19) можно пренебречь, и мы получаем после подстановки (12) в (1), (2)

$$s(t) = \exp\left(2i\frac{\omega_0}{c}[R + L(\omega_0)] - i\omega_0 t\right) A\left(t - 2\frac{R - L(\omega_0)}{c}\right). \quad (20)$$

Очевидно, это можно сделать, если

$$\frac{2\Omega_m^2}{\omega_0(\omega_0 + \Omega_m)} \frac{\omega_0}{c} L(\omega_0) < \frac{\pi}{8}, \quad (21)$$

где Ω_m — полуширина спектра огибающей. Введя относительную полуширину спектра $\Delta = \Omega_m/\omega_0$ и используя (17), получим

$$\frac{\Delta^2}{1 + \Delta} < \frac{3}{64640} \frac{F_0 [\text{МГц}]}{\text{ТЕС} [\text{TECU}]}. \quad (22)$$

Рассчитанная по неравенству (22) максимальная полоса сигнала ΔF_0 , при которой дисперсионными искажениями формы сигнала можно пренебречь, приведена на рис. 1 для несущих частот от 150 до 4000 МГц. Числа у кривых указывают величину ТЕС, для которой данная кривая рассчитана.

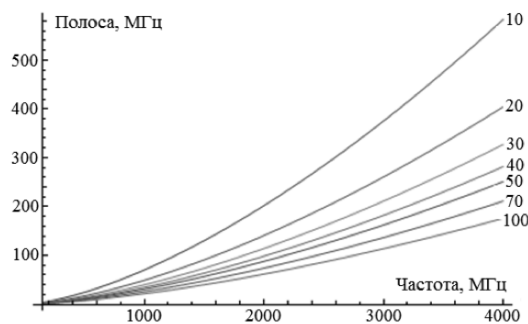


Рис. 1. Допустимая полоса сигнала в зависимости от несущей

2. Влияние дисперсионных искажений на согласованную обработку и формирование оптимального фильтра

Принимаемый сигнал с учетом дисперсионных искажений в ионосфере в соответствии с (1), (2), (12) и (19) описывается формулой

$$s(t) = \exp\left(2i\frac{\omega_0}{c}[R + L(\omega_0)] - i\omega_0 t\right) \times \\ \times \int g(\Omega) \exp\left(2i\frac{\Omega}{c}[R - L(\omega_0)] - i\Omega t\right) \exp\left(2i\frac{\Omega^2}{\omega_0(\omega_0 + \Omega)} \frac{\omega_0}{c} L(\omega_0)\right) d\Omega. \quad (23)$$

Известно, что оптимальная обработка принимаемого сигнала состоит в его фильтрации в согласованном фильтре, частотная характеристика которого совпадает с комплексно сопряженным спектром сигнала [7, 8]².

Обычно предполагается, что спектр принимаемого сигнала близок к спектру излученного сигнала, и частотная характеристика фильтра $G(\Omega)$ согласуется с комплексно сопряженным спектром излученного сигнала: $G(\Omega) = g^*(\Omega)$. При таком подходе сигнал на выходе согласованного фильтра будет описываться формулой (23), в которой спектр сигнала $g(\Omega)$ нужно заменить его квадратом модуля $|g(\Omega)|^2$.

Для оценки влияния ионосферных искажений применим последнее выражение к ЛЧМ сигналу и фазоманипулированному (ФМн) шумоподобному сигналу (ШПС) с параметрами, при которых явно сказываются рассматриваемые эффекты, например, длительностью $T = 5$ мкс, несущей частотой $F_0 = \omega_0/(2\pi) = 1300$ МГц и шириной спектра $\Delta F = \Delta\omega/(2\pi) = 200$ МГц. Амплитуда сигнала на выходе согласованного фильтра, рассчитанная относительно момента времени $t = 2R/c$ (в этом случае сигнал должен быть максимален), для разных значений ТЕС показана на рис. 2.

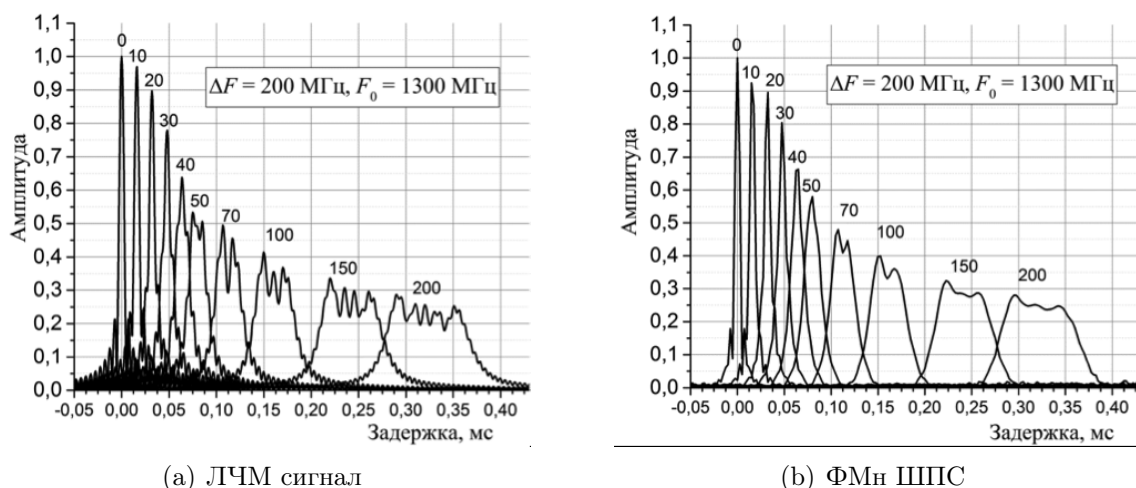


Рис. 2. Амплитуда сигнала на выходе согласованного фильтра для ТЕС = 0, 10, 20, 30, 40, 50, 70, 100, 150 и 200 ТЕСУ).

Графики амплитуд на выходе согласованных фильтров показывают, что с увеличением ТЕС увеличивается задержка сигнала, снижается максимальное значение его амплитуды и увеличивается ширина отклика. Разрешающая способность сигнала по задержке ухудшается вдвое уже при ТЕС = 20 ТЕСУ, и, следовательно, традиционная обработка столь широкополосного сигнала становится бессмыслен-

²Согласованная обработка приводит к максимальному отношению сигнал/шум на выходе фильтра при условии равномерной дельта-коррелированной мощности шума в полосе частот радиолокационного сигнала

ной и возникает потребность в разработке фильтра, согласованного с ожидаемым сигналом.

Спектральная функция оптимального фильтра, учитывающего ионосферные искажения сигнала, в соответствии с выражением (23) равна

$$G(\Omega) = g^*(\Omega) \exp \left[2i \frac{\Omega}{c} L(\omega_0) \right] \exp \left[-2i \frac{\Omega^2}{\omega_0(\omega_0 + \Omega)} \frac{\omega_0}{c} L(\omega_0) \right]. \quad (24)$$

Она учитывает как групповое смещение (первый экспоненциальный множитель), так и уширение отклика (второй экспоненциальный множитель).

Для построения спектральной функции (24) необходимо знать фазовый путь в ионосфере на несущей частоте $L(\omega_0)$, который в свою очередь зависит от ТЕС. Такая коррекция требует знания ТЕС ионосферы, измерение и оценка которого является непростой задачей. Например, измерения ТЕС двухчастотным методом с использованием сигналов от искусственных спутников навигационных систем (GPS, ГЛОНАСС) требует точной калибровки фаз, измерения параметров ионосферы ионозондами дают фрагментарные оценки значений ТЕС на направлениях, формируемых конфигурацией расположения передатчиков и приемников ионозондов, радиотомографические методы [5] для устойчивой оценки должны использовать большой объем оперативных данных от измерительных средств (ионозондов, датчиков навигационных систем, ...) и требуют больших ресурсов при обработке в реальном времени.

3. Методика прямой оценки ТЕС (двухполосный метод)

Для построения спектральной функции (24) необходимо знать задержку сигнала, вносимую ионосферой (здесь задержка измеряется в мксек):

$$\Delta t = \frac{2L(\omega_0)}{c} = \frac{8080}{3} \cdot \frac{\text{ТЕС}}{F_0^2}. \quad (25)$$

Эта задержка фактически зависит от двух параметров — значения полного электронного содержания ионосферы ТЕС, характеризующего степень ионосферного возмущения, и значения несущей частоты сигнала F_0 .

В данной работе для прямой оценки ТЕС по принимаемому радиолокационному сигналу предлагается использовать методику, обобщающую известный двухчастотный метод оценки ТЕС [4] на сверхширокополосные сигналы и названную нами двухполосным методом. Этот метод основан на зависимости «ионосферной» задержки принятого сигнала от частоты (25). Если сигнал имеет достаточно широкую полосу частот ΔF (сверхширокополосный сигнал), то можно использовать спектральные компоненты сигнала на краях полосы, которые будут испытывать разные задержки, поскольку «несущие» этих крайних компонент будут разными. Указанная методика ранее успешно применялась в декаметровом диапазоне при оценке параметров частотной дисперсии ионосферного радиоканала с помощью фазоманипулированных шумоподобных сигналов [6].

Аргументом использования предложенной методики является то обстоятельство, что «крайние» спектральные компоненты сами по себе могут иметь ширину полосы значительно меньшую, чем у исходного широкополосного сигнала, и потому существенно меньше подвержены ионосферным искажениям и допускают согласованную обработку без компенсации ионосферных искажений. С другой стороны, уменьшение ширины полосы приводит к уширению главного пика на выходе согласованного фильтра и снижению точности оценки задержки. Поэтому при выборе оптимального формирования «крайних» спектральных компонент необходим компромисс.

На рис. 3 схематично показан график модуля спектра сигнала $|g(F)|$ с несущей F_0 и полосой ΔF . «Левая» или «низкочастотная» компонента сигнала формируется полосовым фильтром из части спектра с частотами, меньшими фиксированной частоты $F_{\text{л}}$ ($F < F_{\text{л}}$) и имеет несущую $F_{0\text{л}} < F_0$, тогда как «правая» или «высокочастотная» компонента — из правой части спектра с частотами, большими, чем фиксированная частота $F_{\text{п}}$ ($F > F_{\text{п}}$) с несущей $F_{0\text{п}} > F_0$.

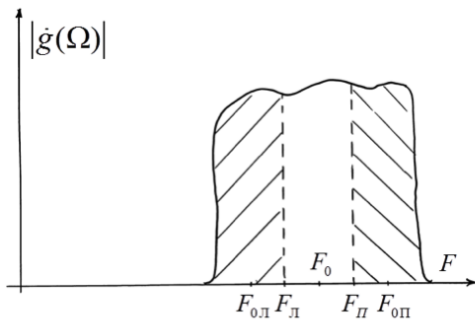


Рис. 3. К выбору «низкочастотной» и «высокочастотной» компонент сигнала.

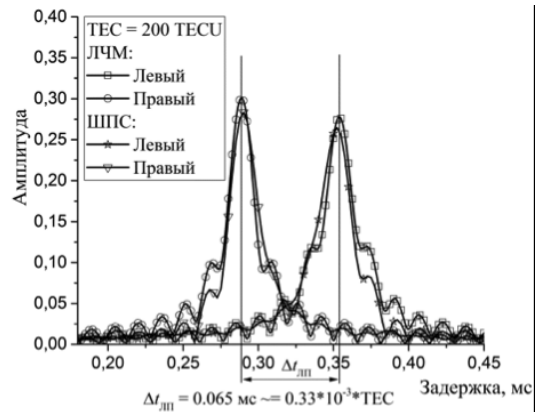


Рис. 4. Задержки сигналов, сформированных «левой» и «правой» частями полного спектра сигнала.

При независимой обработке «правого» и «левого» сигнала и измерения соответствующих «ионосферных» задержек $\Delta t_{\text{л}}$ и $\Delta t_{\text{п}}$ согласно (25) можно получить оценку ТЕС по разности задержек $\Delta t_{\text{лп}} = \Delta t_{\text{л}} - \Delta t_{\text{п}}$:

$$\text{ТЕС} = \frac{3}{8080} \cdot \Delta t_{\text{лп}} \cdot \left(\frac{1}{F_{0\text{л}}^2} - \frac{1}{F_{0\text{п}}^2} \right)^{-1}. \tag{26}$$

Оценим возможность реализации предложенной методики прямой оценки ТЕС. Для определенности разделим спектр исходного сигнала на 3 интервала примерно одинаковой ширины $\approx \Delta F/3$. Тогда $F_{0\text{л}} \approx F_0 - \Delta F/3$ и $F_{0\text{п}} \approx F_0 + \Delta F/3$. Для модельных значений $F_0 = 1300$ МГц и $\Delta F = 200$ МГц выражение (26) приводит к оценке $\Delta t_{\text{лп}} \approx 0,33 \cdot 10^{-3} \cdot \text{ТЕС}$.

Для возмущенной ионосферы с $TEC = 50$ имеем $\Delta t_{\text{лп}} \approx 0,016$ мкс, что приблизительно совпадает с шириной пика функции отклика при обработке сигнала «левым» и «правым» фильтрами с полосой $\Delta F/3 = 67$ МГц; $\Delta \tau_{\text{л}} - \Delta \tau_{\text{п}} \approx 0,015$ мкс. Это приблизительно соответствует критерию Рэлея для разрешающей способности и дает возможность с достаточной точностью определить разность задержек и провести прямую оценку TEC по формуле (26).

На рис. 4 приведены сигналы с выхода фильтров, согласованных с «левой» и «правой» частями спектра исходного сигнала. Измеренное значение разницы задержки распространения соответствует расчетному для $TEC = 200$ TECU.

Блок-схема алгоритма, реализующего предложенную методику прямой оценки TEC , приведена на рис. 5. Здесь использовано обозначение для ступенчатой функции $\theta(f) = 1$ при $f > 0$ и $\theta(f) = 0$ при $f < 0$.

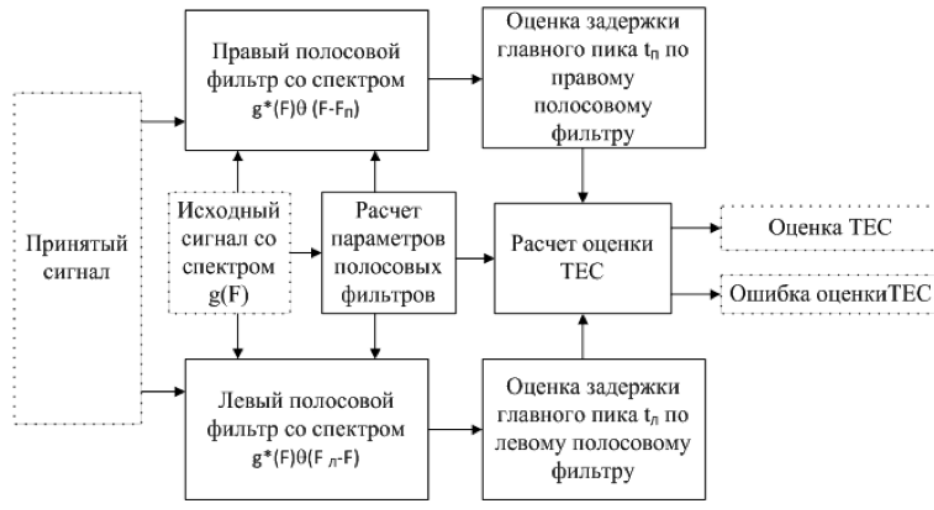


Рис. 5. Блок-схема алгоритма прямой оценки TEC .

4. Результаты моделирования

Для оценки возможности определения полного электронного содержания ионосферы предложенным методом была разработана компьютерная программа.

В качестве примера на рисунках ниже приведены результаты моделирования оценки TEC для ЛЧМ сигнала длительностью 10 мкс и полосой 250 МГц с центральной несущей частотой 1,3 ГГц, статистическая выборка для каждой оценки составляла 1000 измерений.

Оценки TEC приведены для заданных значений возмущений ионосферы: $TEC = 20$ (слабо возмущенная ионосфера), $TEC = 50$ (возмущенная ионосфера) и $TEC = 100$ TECU (сильно возмущенная ионосфера).

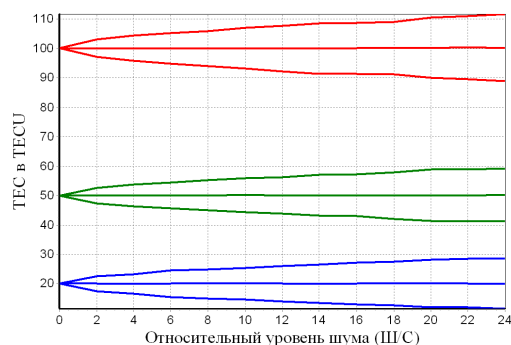


Рис. 6. Статистика прямой оценки ТЕС в зависимости от отношения шум/сигнал.

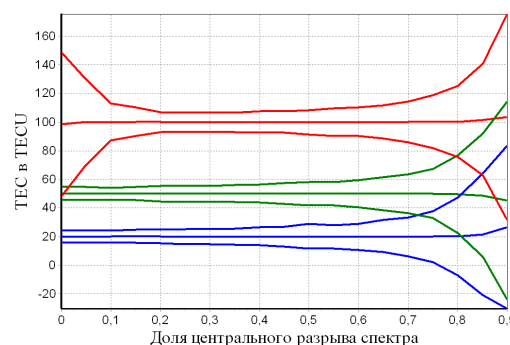


Рис. 7. Статистика прямой оценки ТЕС в зависимости от разрыва спектра.

На рис. 6 приведены графики оценки ТЕС с расширениями $\pm 3\sigma$ в зависимости от относительного уровня шума (отношения шум/сигнал по амплитуде) при доле вырезания центральной части спектра, равной 0,33. Здесь σ — среднеквадратичное отклонение оценки ТЕС по ансамблю.

С ростом шумовой компоненты разброс оценок ТЕС растет, хотя вплоть до отношения шум/сигнал = 24 оценка оказывается более чем удовлетворительной для многих приложений. При отношении шум/сигнал > 25 моделирование показывает значительный рост выбросов на статистическом ансамбле и, по нашему мнению, такая оценка оказывается неприемлемой, поскольку в реальных условиях мы должны ориентироваться на ограниченное число выборок принятого сигнала (в идеале — на одну реализацию сигнала на приеме).

При умеренных отношениях шум/сигнал < 25 моделирование показало, что статистическое распределение оценок ТЕС близко к гауссовскому (эксцесс менее 0,1, а отношение 4-го момента ко 2-му близко к 3).

На рис. 7 приведены графики оценки ТЕС с расширениями $\pm 3\sigma$ в зависимости от доли вырезания центральной части спектра при формировании фильтров для достаточно высокого отношения шум/сигнал, равного 20.

Видно, что существует оптимальная область для формирования крайних фильтров с вырезанием примерно 1/3 части спектра сигнала в районе несущей частоты, по крайней мере для сильно возмущенной ионосферы. В этом случае разброс оценок оказывается приемлемым для многих приложений. Для области сильного «вырезания центра спектра» (> 0,7) крайние фильтры оказываются узкополосными, что приводит к значительному уширению главных пиков откликов и соответственно к ухудшению разрешения. Кроме того, сужение полос крайних фильтров приводит к уменьшению полезной мощности «сигналов», используемых для оценки ТЕС, из-за чего уменьшается отношение сигнал/шум. В другой области слабого «вырезания» (< 0,15) или даже перекрытия спектров фильтров (< 0) сказывается сближение эффективных несущих, что ухудшает характеристики оценки разности задержек в крайних фильтрах.

Кроме того, при слабом вырезании парциальные сигналы становятся сверх-

широкополосными и заметно искажаются при распространении через ионосферу (особенно для сильно возмущенной ионосферы), что также ухудшает оценку разности задержек.

Выводы

1. Показана принципиальная возможность прямого измерения полного электронного содержания ионосферы (ТЕС) по данным зондирования сверхширокополосным сигналом в реальном времени.

2. Предложенный двухполосный метод дает возможность оценивать ТЕС по единичному отклику принятого зондирующего сигнала без дополнительного лоцирования и без использования дополнительных измерительных средств (таких как ионозонды, датчики навигационных систем, станции некогерентного рассеяния).

3. Предложенный метод не зависит от вида сверхширокополосного сигнала; показано, что он работает для ЛЧМ сигналов и шумоподобных ФМн сигналов.

4. Предложенный метод удовлетворительно работает при малых отношениях сигнал/шум на входе приемника — вплоть до -13 дБ (зависит от базы сигнала).

5. Показано, что существуют оптимальные параметры формирования парциальных фильтров.

6. Оценка ТЕС непосредственно по принимаемому сигналу позволяет синтезировать адаптивные следящие фильтры, оптимизирующие собственную частотную характеристику при изменении ТЕС вдоль радиолинии в течение сеанса связи (например, во время связи с низкоорбитальным искусственным спутником Земли при движении его по орбите). Корректировка дисперсионных искажений принимаемого сигнала позволит повысить помехоустойчивость радиолинии.

7. Статистическое распределение оценок ТЕС близко к гауссову (эксцесс менее 0,1, а отношение 4-го момента ко 2-му близко к 3).

8. Необходимо продолжить работу по дальнейшему исследованию и совершенствованию предложенного метода, в частности, по выбору оптимальных параметров обработки в зависимости от излученного сигнала и по особенностям оценки ТЕС в условиях отражения от сложного объекта. Необходимо также учесть движение объекта, приводящее к доплеровскому сдвигу гармоник принимаемого сигнала.

9. Необходимо рассмотреть варианты применения предложенного метода в перспективных и разрабатываемых локаторах, использующих сверхширокополосные сигналы в задачах дистанционного зондирования и в связных задачах, с целью построения оптимальной обработки принятых сигналов в условиях их искажения в каналах распространения.

Список цитируемых источников

1. *Виноградов А. Г., Лучин А. А., Теохаров А. Н.* Обработка сверхширокополосных сигналов и формирования радиолокационных изображений в РЛС дальнего обнаружения L-диапазона. // *Наукоемкие технологии* — 2013. — Т. 14, №9. — С. 32–36.

- Vinogradov A. G., Luchin A. A., Teokharov, A. N. (2013). Problems of Processing Very Broadband Signals and Constructing Radar Images in Long-Range Radars of L-Range (in Russian). *Naukoemkie tekhnologii* 14:9, 32–36.
2. *Виноградов А. Г., Теохаров А. Н.* Прямая оценка полного электронного содержания ионосферы (ТЕС) по искажениям широкополосного радиолокационного сигнала. // Тезисы докладов на международной конференции «Метод функций Ляпунова и его приложения». — Алушта — 2014, 15-20 сент. — С. 80.
- Vinogradov A. G., Teokharov, A. N. (2014). Direct Estimation of the Total Electron Content (TEC) of the Ionosphere from Distortion of a Broadband Radar Signal (in Russian). In Proceedings of the International Conference «Lyapunov Function Method and its Application», Alushta, Sept. 15–20, 80.
3. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
- Ginzburg V. L. (1970). The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas. — Oxford-New York: Pergamon Press.
4. *Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И., Виноградов А. Г.* Прохождение радиоволн через атмосферу Земли. — М.: Радио и связь, 1983. — 224 с.
- Kravtsov Yu. A., Feizulin Z. I., Vinogradov A. G. (1983). Propagation of Radio Waves through the Earth Atmosphere. — Moscow: Radio i svyaz.
5. *Кунитсын В. Е., Терещенко Е. Д., Андреева Е. С., Нестеров И. А.* Спутниковое радиозондирование и радиотомография ионосферы. // Успехи физических наук. — 2010. — Т. 180, № 5, С. 548–553.
- Kunitsyn V. E., Tereshchenko E. D., Andreeva E. S., Nesterov I. A. (2010). Satellite Radio Probing and the Radio Tomography of the Ionosphere. *Phys. Usp.* 53, 523–528.
6. *Лобов Е. М., Кандауров Н. А., Косилов И. С., Елсуков Б. А.* Методика оценки параметров частотной дисперсии ионосферного канала с помощью широкополосного фазоманипулированного сигнала. // Т-Comm — Телекоммуникации и транспорт. — 2014. — №9. — С. 49–53.
- Lobov E. M., Kandaurov N. A., Kosilov I. S., Elsukov B. A. (2014). Method of Estimating the Parameters of the Frequency Dispersion of Ionospheric Channel via Wideband BPSK (in Russian). *T-Comm — Telecommunications and Transport* 9, 49–53.
7. *Сосулин Ю. Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. // — М.: Радио и связь, 1992. — 304 с.
- Sosulin Yu. G. (1992). Theoretical Backgrounds of Radiolocation and Radionavigation (in Russian). — Moscow: Radio i svyaz.
8. Теоретические основы радиолокации. / Под ред. Я. Д. Ширмана. — М.: Советское радио, 1970. — 560 с.
- Shirman Ya. D. (Ed.) (1970). Theoretical Backgrounds of Radiolocation (in Russian). Moscow.: Sovetskoe radio.

Получена 25.09.2016

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.9

В. А. ЛУКЪЯНЕНКО, А. И. ПЕСЧАНСКИЙ. **Юрий Иосифович Черский — ученый, учитель...** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №3. — С. 187–208.

Профессор Юрий Иосифович Черский (1929-2015) — видный советский математик, один из создателей теории интегральных уравнений типа свертки, краевых задач теории аналитических функций и их приложений, основатель научных школ в Ростовском, Одесском, Симферопольском университетах и Институте прикладных проблем механики и математики АН УССР. В статье научные результаты Ю.И. Черского изложены в соответствии его жизненному пути. Предложены возможные направления развития.

Ключевые слова: биография, список публикаций, уравнение типа свертки, краевые задачи теории аналитических функций.

Библиогр. 23 назв.

УДК 517:957

Е. П. БЕЛАН. **Динамика бегущих волн в параболической задаче с преобразованием поворота пространственной переменной** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №3. — С. 209–243.

В статье предложен новый подход по исследованию бегущих волн в параболических задачах на окружности с малой диффузией и преобразованием сдвига пространственной переменной, которые ответвляются от пространственно однородного стационарного решения. Доказано, что бегущие волны взаимодействуют по принципу 1:2. Получен новый критерий устойчивости бегущих волн в соответствии с этим принципом. Согласно этому результату число устойчивых бегущих волн возрастает при условии, что коэффициент диффузии стремится к нулю.

Ключевые слова: параболическая задача, малая диффузия, поворот переменной, бегущая волна, устойчивость, бифуркация, взаимодействие

Библиогр. 49 назв.

УДК 517.9+532

Д. О. ЦВЕТКОВ. **Теорема существования сильного решения одной начально-краевой задачи** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №3. — С. 245–266.

Изучается задача о малых движениях системы, состоящей из трех тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя и верхняя жидкости по отношению к действию силы тяжести считаются вязкими, а средняя — идеальной. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, дифференциально-операторное уравнение, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.968.7

Б. М. ВРОНСКИЙ. **Задача Коши, порожденная колебаниями стратифицированного газа** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №3. — С. 267–274.

В работе рассмотрено решение эволюционной задачи, порожденной малыми движениями гидросистемы, состоящей из стратифицированной сжимаемой идеальной жидкостей в ограниченном сосуде. Исследование происходит путем сведения исходной спектральной задачи к исследованию задачи на собственные значения для дифференциального уравнения с начальными

условиями в некотором функциональном гильбертовом пространстве. После изучения свойства соответствующих операторов и их спектра доказывается теорема о разрешимости задачи Коши и закон сохранения энергии.

Ключевые слова: сжимаемая стратифицированная жидкость, эволюционная задача, дифференциальное уравнение, теорема о разрешимости, закон сохранения энергии.

Библиогр. 2 назв.

УДК 621.396.96

А. Г. ВИНОГРАДОВ, А. Н. ТЕОХАРОВ. **Двухполосный метод оценки полного электронного содержания ионосферы по сигналам широкополосной РЛС** (русский) // *Динамические системы*, 2016. — Том 6(34), №3. — С. 275–287.

Дан анализ дисперсионных искажений широкополосных радиолокационных сигналов при их распространении через ионосферу Земли. Разработан двухполосный метод, позволяющий путем специальной обработки принятого широкополосного сигнала оценивать полное электронное содержание ионосферы вдоль луча радиолокатора. Приведена спектральная характеристика согласованного фильтра, компенсирующего дисперсионные искажения. На основе компьютерного моделирования показана принципиальная возможность прямого измерения полного электронного содержания ионосферы двухполосным методом.

Ключевые слова: полное электронное содержание ионосферы, дисперсионные искажения, широкополосный радиолокационный сигнал, согласованная фильтрация, радиолокация.

Ил. 7. Библиогр. 8 назв.

ABSTRACTS

MSC 2010: 01A70, 45E10

V. A. LUKIANENKO, A. I. PESCHANSKY. **Yu. I. Chersky — scientist, teacher...** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.3, 187–208 (2016).

Professor Yuri Iosifovich Chersky (1929-2015) — a prominent Soviet mathematician, one of the creators of the theory of integral equations of convolution type and boundary value problems in the theory of analytic functions and their applications, the founder of scientific schools in Rostov, Odessa, Simferopol universities and the Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. In the article the scientific results of Yu. I. Chersky are set out in accordance with his life path. Possible development directions are suggested.

Keywords: biography, bibliography, equation of convolution type, boundary value problems in the theory of analytic functions.

Ref. 23.

MSC 2010: 35K20, 35K59, 35Q60, 78A05, 37L10, 35R10, 35B32, 35B10, 35B35, 35C07, 35C20

E. P. BELAN. **Traveling wave dynamics in a nonlinear parabolic equation with rotation of spatial arguments** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.3, 209–243 (2016).

In this paper, we develop a new approach to study the behavior of traveling wave solutions in a nonlinear parabolic equation on a circle with a small diffusion and rotation of spatial arguments, that bifurcate from a spatial homogenies stationary solution. We prove that the traveling waves interaction satisfies to 1:2 principle. From this, it is followed the new criterion of the traveling wave stability. In according this result, a number of stable traveling waves increases when the diffusion coefficient tends to zero.

Keywords: parabolic equation, small diffusion, rotation arguments, traveling wave, stability, bifurcations, interaction

Ref. 49.

MSC 2010: 35P05, 47D03

D. O. TSVETKOV. **Theorem on the existence of a strong solution for an initial-boundary value problem** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.3, 245–266 (2016).

Let immovable container be completely filled with system of three nonmixing heavy stratified incompressible fluids. The lower fluid (with respect to gravity) is viscous, middle fluid is ideal, upper one is viscous. The problem on small oscillations is studied on the base of approach connected with application of so-called operator matrices theory with unbounded entries. The initial boundary value problem is reduced to the Cauchy problem in some Hilbert space. The theorem on strong solvability of initial boundary value problem is proved.

Keywords: stratification effect in viscous and ideal fluids, differential equation in Hilbert space, accretive operator, strong solution.

Ref. 6.

MSC 2010: 47D99

B. M. WRONSKY. **Cauchy problem generated by the oscillations of stratified gas.** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.3, 267–274 (2016).

The paper considers the solution of evolutionary problems generated by small movements of the hydraulic system consisting of an ideal compressible stratified liquid in a confined vessel. Research is

done by reducing the original spectral problem to the study of the eigenvalue problem for a differential equation with the initial conditions in some functional Hilbert space. After studying the properties of the corresponding operators and their spectral theorem on the solvability of the Cauchy problem is proved. And the law of conservation of energy is proved.

Keywords: compressible stratified fluid, evolution problem, differential equation, solvability theorem, energy conservation law.

Ref. 2.

MSC 2010: 78A50, 78A55, 35Q60, 35J15

A. G. VINOGRADOV, A. N. TEOKHAROV. **Two-sideband method for estimating complete electron content of the ionosphere using signals of wideband radar.** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.3, 275–287 (2016).

Analysis of dispersion distortions of wideband radar signals through earth's ionosphere is given. Two-sideband method of evaluating the complete electron content of the ionosphere along the radar beam is developed. This method uses special processing of the received wideband signal. The spectral function of the matched filter mitigating dispersion distortions is given. On the basis of computer simulation, the in-principle possibility of direct measuring the complete electron content of ionosphere with the two-sideband method is demonstrated.

Keywords: complete electron content of ionosphere, dispersion distortions, wideband radar signal, matched filtering, radiolocation.

Fig. 7. Ref. 8.

Динамические системы

Том 6(34) №3

2016

Содержание

В. А. ЛУКЪЯНЕНКО, А. И. ПЕСЧАНСКИЙ. Юрий Иосифович Черский — ученый, учитель...	187
Е. П. БЕЛАН. Динамика бегущих волн в параболической задаче с преобразо- ванием поворота пространственной переменной	209
Д. О. ЦВЕТКОВ. Теорема существования сильного решения одной началь- но-краевой задачи	245
Б. М. ВРОНСКИЙ. Задача Коши, порожденная колебаниями стратифициро- ванного газа	267
А. Г. ВИНОГРАДОВ, А. Н. ТЕОХАРОВ. Двухполосный метод оценки полного электронного содержания ионосферы по сигналам широкополосной РЛС	275

Dinamicheskie sistemy (Dynamical Systems)

Volume 6(34) no.3

2016

Table of Contents

V. A. LUKIANENKO, A. I. PESCHANSKY. Yu.I. Chersky — scientist, teacher...	187
E. P. BELAN. Traveling wave dynamics in a nonlinear parabolic equation with rotation of spatial arguments	209
D. O. TSVETKOV. Theorem on the existence of a strong solution for an initial-boundary value problem	245
B. M. WRONSKY. Cauchy problem generated by the oscillations of stratified gas.	267
A. G. VINOGRADOV, A. N. TEOKHAROV. Two-sideband method for estimating complete electron content of the ionosphere using signals of wideband radar.	275