Динамические системы, 2016, том 6(34), №3, 267–274

УДК 517.968.7

Задача Коши, порожденная колебаниями стратифицированного газа

Б. М. Вронский

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: bmw1960@mail.ru*

Аннотация. В работе рассмотрено решение эволюционной задачи, порожденной малыми движениями гидросистемы, состоящей из стратифицированной сжимаемой идеальной жидкостей в ограниченном сосуде. Исследование происходит путем сведения исходной спектральной задачи к исследованию задачи на собственные значения для дифференциального уравнения с начальными условиями в некотором функциональном гильбертовом пространстве. После изучения свойства соответствующих операторов и их спектра доказывается теорема о разрешимости задачи Коши и закон сохранения энергии.

Ключевые слова: сжимаемая стратифицированная жидкость, эволюционная задача, дифференциальное уравнение, теорема о разрешимости, закон сохранения энергии.

Cauchy problem generated by the oscillations of stratified gas.

B. M. Wronsky

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. The paper considers the solution of evolutionary problems generated by small movements of the hydraulic system consisting of an ideal compressible stratified liquid in a confined vessel. Research is done by reducing the original spectral problem to the study of the eigenvalue problem for a differential equation with the initial conditions in some functional Hilbert space. After studying the properties of the corresponding operators and their spectral theorem on the solvability of the Cauchy problem is proved. And the law of conservation of energy is proved.

Keywords: compressible stratified fluid, evolution problem, differential equation, solvability theorem, energy conservation law.

MSC 2010: 47D99

1. Постановка задачи

Пусть неподвижный сосуд целиком заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. Жидкость предполагается стратифицированной, то есть ее плотность в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Oz по закону $\rho_0 = \rho_0(z)$. Область, занятую жидкостью, обозначим через Ω, а ее границу (твердую стенку) — через S. Считаем, что система находится под действием силы тяжести с ускорением $\vec{g} = -g\vec{k}$, где $\vec{k}$ — орт оси Oz. Будем рассматривать случай устойчивой стратификации, она имеет место при выполнении условия (см. [1]):

$$0 < N_-^2 \le N^2(z) \le N_+^2 < \infty, \qquad (1.1)$$

$$N^2(z) := N_0^2(z) - (g/c)^2, \quad N_0^2(z) := -g(\ln \rho_0(z))'.$$

Величину $N^2(z)$ принято называть частотой плавучести или частотой Вяйсяля–Брента. Через c в (1.1) обозначена скорость звука в жидкости. Малые движения системы описываются уравнениями (см. [2]):

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial^2 t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - \frac{1}{\rho_0} g\rho\vec{k} \quad (\text{в } \Omega), \tag{1.2}$$

$$\rho + w_z\rho_0' + \rho_0 \mathrm{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \tag{1.3}$$

$$\rho + w_z\rho_0' = c^{-2}(p - gw_z\rho_0) \quad (\text{в } \Omega), \tag{1.4}$$

к которым надо присоединить равенство

$$\vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \tag{1.5}$$

выражающее условие непротекания на твердой стенке, и начальные условия:

$$\vec{w}(\vec{x}, 0) = \vec{w}^0(\vec{x}); \tag{1.6}$$

$$\frac{\vec{w}(\partial\vec{x}, 0)}{\partial t} = \vec{w}^1(\vec{x}). \tag{1.7}$$

Здесь приняты обозначения: $\vec{w} = \vec{w}(\vec{x}, t)$ — поле смещения частиц жидкости от состояния равновесия, $p = p(\vec{x}, t)$ — отклонение поля давления от равновесного, $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ — отклонение поля плотности от равновесного, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к S, $x = (x^1, x^2, z)$ — точка в $\mathbb{R}^3$.

2. Метод ортогонального проектирования

Введем в рассмотрение пространство вектор-функций $\overrightarrow{L_2}(\Omega, \rho_0)$ со скалярным произведением:

$$(\vec{v}, \vec{u})_{L_2} = \int_\Omega \rho_0(z)\vec{v}\cdot\overline{\vec{u}}\, d\Omega. \tag{2.1}$$

Норма, порожденная этим скалярным произведением, эквивалентна норме обычного пространства вектор-функций $\overrightarrow{L_2}(\Omega)$.

Пространство $\overrightarrow{L_2}(\Omega, \rho_0) L_2(\Omega, \rho_0)$ допускает ортогональное разложение:

$$\overrightarrow{L_2}(\Omega, \rho_0) = \overrightarrow{J}_0(\Omega) \oplus \overrightarrow{G}(\Omega, \rho_0). \tag{2.2}$$

Здесь: $\overrightarrow{J}_0(\Omega)$ — подпространство соленоидальных функций с нулевой нормальной компонентой на границе, а $\overrightarrow{G}(\Omega, \rho_0)$ — подпространство квазипотенциальных векторных полей. Любую вектор-функцию $\vec{w} \in \overrightarrow{L_2}(\Omega, \rho_0)$ будем искать в виде:

$$\vec{w} = \vec{u} + \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi, \quad \vec{u} \in \overrightarrow{J}_0(\Omega), \quad \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi \in \overrightarrow{G}(\Omega, \rho_0). \tag{2.3}$$

Спроектировав исходные уравнения на подпространства $\overrightarrow{J}_0(\Omega)$ и $\overrightarrow{G}(\Omega, \rho_0)$, можно привести первоначальную начально-краевую задачу (1.2)–(1.7) к следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + AU + BU = 0, \quad U(0) = U^0, U'(0) = U^1, \tag{2.4}$$

$$U := (\vec{u}, \Phi)^\tau \in H := \overrightarrow{J}_0(\Omega) \oplus H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z)).$$

Здесь операторы A и B порождены наличием стратификации и сжимаемости и определены следующим образом:

$$\begin{gathered}
A_{11}\vec{u} = P_0(N_0^2(z)u_z\vec{k}), \qquad A_{12}\Phi = P_0(\frac{N_0^2(z)}{\rho_0(z)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}) \\
A_{21}\vec{u} = \Psi_3, \qquad A_{22}\Phi = \Psi_2, \quad B_{11}\vec{u} = 0, \\
B_{12}\Phi = P_0(-g\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi\vec{k}), \qquad B_{21}\vec{u} = g\rho_0 u_z, \\
B_{22}\Phi = g\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \Psi_1, \\
B_0\Phi = -c^2\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi).
\end{gathered}$$

Здесь операторы A_{11} и A_{21} заданы на всем пространстве $\overrightarrow{J}_0(\Omega)$, а операторы A_{12} и A_{22} на всем $H^1(\Omega, \rho_0^{-1})$. Для неограниченных операторов B_{ij} выбраны области определения следующим образом:

$$\mathcal{D}(B_{21}) = \{\vec{u} \in \overrightarrow{J}_0(\Omega) : u_z \in H^1(\Omega)\},$$

$$\mathcal{D}(B_{12}) = H^1(\Omega, \rho_0^{-1}) \bigcap H^3(\Omega),$$

$$\mathcal{D}(B_{22}) = \mathcal{D}(B_{12})$$

$$\mathcal{D}(B_0) = H^1(\Omega, \rho_0^{-1}) \cap H^3(\Omega).$$

Скалярное произведение в пространстве H задается по формуле:

$$(U_1, U_2)_H = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{L_2} + (\Phi_1, \Phi_2)_{1,\Omega} = \int_\Omega (\rho_0(z)\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2^* + \rho_0^{-1}(z)\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2^*)\, d\Omega.$$

Операторы A и B из (2.4) имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} + B_0 \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующее утверждение о свойствах введённых выше операторов.

Лемма 1. *Оператор $A : H \to H$ ограниченный, неотрицательный, причем*

$$\|A\| = \max N_0^2(z) := N_0^2.$$

Доказательство. Состоит в составлении квадратичной формы $(AU, U)_H$, где $U \in H$ и использованием определений операторов $A_{ij}(i, j = 1, 2)$, векторов U и соответствующих скалярных произведений.

$$(AU, U)_H = \int\limits_{\Omega} \rho_0(z) N_0^2(z) |u_z + \rho_0^{-1}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z}|^2 \, d\Omega,$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Лемма 2. *Оператор B_0 — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор в пространстве $H^1(\Omega, \rho_0^{-1}(z))$, $\mathcal{D}(B_0) = \{\Phi \in H^3(\Omega) : \dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad$ (на S)$\}$.*

Доказательство. Составим квадратичную форму:

$$(B_0 \Phi, \Phi)_{1,\Omega} = c^2 \int\limits_{\Omega} \rho_0(z) |\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi)|^2 \, d\Omega.$$

Очевидно, что B_0 неотрицателен. Для доказательства его положительной определенности составим спектральную задачу на собственные значения для оператора B_0 и заметим, что она эквивалентна следующей:

$$-\rho_0(z) \mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi) = \lambda \Phi.$$

Про эту задачу известно, что ее спектр состоит из счетного множества конечнократных положительных собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности. Отсюда и следует положительная определенность оператора B_0. Это завершает доказательство леммы. □

Лемма 3. *Оператор $D := A + B$ неотрицателен.*

Доказательство. Снова составим квадратичную форму, на этот раз для оператора $D := A + B$. Она имеет вид

$$(DU, U) = \int\limits_{\Omega} \rho_0(z) (N^2(z) |u_z + \rho_0^{-1}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z}|^2 +$$

$$+ |g/c(u_z + \rho_0^{-1}(z) \frac{\partial \Phi}{\partial z}) - c\mathrm{div}(\rho_0^{-1}(z) \nabla \Phi)|^2) \, d\Omega,$$

то есть, оператор D — неотрицателен. □

В силу ограниченности снизу введенных операторов A, B и D они могут быть расширены до самосопряженных.

3. Решение эволюционной задачи

Перепишем задачу Коши (2.4) в виде:

$$\frac{d^2\widehat{w}}{dt^2}+\widetilde{D}\widehat{w}=\widehat{0},\widehat{w}(0)=\widehat{w}^0,\widehat{w}'(0)=\widehat{w}^1, \tag{3.1}$$

$$\widehat{w}=(\overline{u};\overline{v})^{\tau},\widetilde{D}=\widetilde{A}+\widetilde{B}\geq 0,\mathcal{D}(\widetilde{D})=\mathcal{D}(\widetilde{B}). \tag{3.2}$$

Здесь $\widetilde{}$ означает проведенную операцию расширения соответствующего оператора. Так как здесь $\widetilde{D}=\widetilde{D}^*$, то уравнение (3.1) является гиперболическим уравнением, которое рассматривается в гильбертовом пространстве $\overrightarrow{L_2}(\Omega,\rho_0)$.

Определение 1. Сильным решением задачи (3.1)–(3.2) на отрезке $[0;T]$ назовем такую функцию $\widehat{w}(t)$ со значениями в $\overrightarrow{L_2}(\Omega,\rho_0)$, для которой выполнены свойства

$$\widehat{w}\in C([0;T],\mathcal{D}(\widetilde{D}))\bigcap C^1([0;T];\mathcal{D}(\widetilde{D}^{1/2})\bigcap C^2([0;T];\overrightarrow{L_2}(\Omega,\rho_0), \tag{3.3}$$

при любом $t\in[0;T]$ справедливо уравнение (3.1), а при $t=0$ — начальные условия (3.2).

Теорема 1. *Пусть в исходной задаче (1.2)–(1.7) выполнены условия*

$$\overline{w}^0=\overline{u}^0+\overline{v}^0,\overline{u}^0\in\mathcal{D}(B_{21})\subset\overrightarrow{J}_0(\Omega,\rho_0)\bigcap\overrightarrow{J}{}^1_{0,S}(\Omega),$$

$$\overline{v}^0\in\mathcal{D}(B_0), \tag{3.4}$$

$$\overline{w}^1=\overline{u}^1+\overline{v}^1,\overline{u}^1\in\overrightarrow{J}_0(\Omega,\rho_0),\overline{v}^1\in\overrightarrow{G}(\Omega,\rho_0),\int\limits_{\Omega}\rho_0|div\overline{v}|^2\,d\Omega<\infty.$$

Тогда задача (3.1)–(3.2) имеет единственное сильное решение на любом отрезке $t\in\ [0;T]$.

Доказательство. Как известно, задача Коши (3.1)–(3.2) имеет единственное сильное решение(в приведенном выше смысле), если выполнены начальные условия

$$\overline{w}^0\in\mathcal{D}(\widetilde{D}),\quad \overline{w}^1\in\mathcal{D}(\widetilde{D}^{1/2}) \tag{3.5}$$

Однако, можно задать и условие $\overline{w}^0\in\mathcal{D}(D),\overline{w}^1\in\mathcal{D}(D^{1/2})$, то есть требования из набора (3.4), так как $\widetilde{D}$ является расширением D.

Далее, второе условие $\overline{w}^1\in\mathcal{D}(\widetilde{D}^{1/2})$ следует из того, что совпадают энергетические пространства операторов $\widetilde{D}$ и D, а также из формулы для квадратичной формы оператора D, задающей энергетическую норму в $\mathcal{D}(\widetilde{D}^{1/2})=\mathcal{D}(D^{1/2})$. Теорема доказана. □

Сильное решение задачи (3.1)–(3.2) может быть записано в виде формулы

$$\widehat{w}(t) = C(t)\widehat{w}^0 + S(t)\widehat{w}^1, \widehat{w}^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{D}), \quad \widehat{w}^1 \in \mathcal{D}(\widetilde{D}^{1/2}), \tag{3.6}$$

где $S(t)$ и $C(t)$ — операторные синус-функция и косинус-функция.

Определение 2. Обобщенным решением задачи (3.1)–(3.2) назовем функцию вида (3.6) при

$$\widehat{w}^0 \in \mathcal{D}(\widetilde{D}^{1/2}), \widehat{w}^1 \in \overrightarrow{L}_2(\Omega, \rho_0). \tag{3.7}$$

Теорема 2. *Пусть в исходной задаче (1.2)–(1.7) выполнены условия*

$$\overline{w}^0 = \overline{u}^0 + \overline{v}^0, \overline{u}^0 \in \overrightarrow{J}_0(\Omega, \rho_0), \overline{v}^0 \in \overrightarrow{G}(\Omega, \rho_0), \int\limits_\Omega \rho_0 |div\, \overline{v}^0|^2 \, d\Omega < \infty, \tag{3.8}$$

$$\overline{w}^1 = \overline{u}^1 + \overline{v}^1 \in \overrightarrow{L}_2(\Omega, \rho_0),$$

тогда задача (3.1)–(3.2) имеет единственное обобщенное решение $\widehat{w}(t)$ на любом отрезке $t \in [0;T]$.

3.1. О разрешимости исходной начально-краевой задачи

Сформулируем теперь дополнительные условия, при которых начально-краевая задача (1.2)–(1.7) будет иметь единственное решение.

Определение 3. Будем говорить, что сильное решение $\widehat{w}(t)$ задачи (3.1)–(3.2) обладает дополнительным свойством гладкости, если

$$\widehat{w}(t) \in C([0;T]; \mathcal{D}(D)) \bigcap C^1([0;T]; \mathcal{D}(D^{1/2})) \bigcap C^2([0;T]; \overrightarrow{L}_2(\Omega, \rho_0)). \tag{3.9}$$

Теорема 3. *Пусть решение $\widehat{w}(t)$ задачи (3.1)–(3.2) обладает дополнительными свойствами гладкости. Тогда исходная начально-краевая задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0;T]$, то есть такие функции $\overline{w}(t,x)$ со значениями в $\overrightarrow{L}_2(\Omega, \rho_0)$, $\nabla p(t,x)$ со значениями в $\overrightarrow{G}(\Omega, \rho_0)$ и $\rho(t,x)$ со значениями в пространстве скалярных функций $\mathcal{L}(\Omega; \rho_0)$, для которых выполнены уравнения, начальные и краевые условия (1.2)–(1.7). При этом в уравнении (1.2) все слагаемые являются элементами из пространства $C([0;T]; \overrightarrow{L}_2(\Omega, \rho_0))$, в уравнении (1.3) все слагаемые являются элементами из пространства $C^1([0;T]; \mathcal{L}(\Omega; \rho_0))$, в уравнении (1.4) также все слагаемые являются элементами из пространства $C^1([0;T]; \mathcal{L}(\Omega; \rho_0))$.*

Доказательство. Если для решения $\widehat{w}(t)$ задачи (3.1)–(3.2) выполнены дополнительные условия гладкости, то уравнение (3.1) можно переписать в виде

$$\frac{d^2\widehat{w}}{dt^2} + (A+B)\widehat{w} = \widehat{0}, \tag{3.10}$$

где оператор B определен формулами выше. Тогда взамен имеем задачу Коши (2.4), где все слагаемые являются непрерывными функциями от t со значениями в соответствующих подпространствах пространства $\overrightarrow{L}_2(\Omega,\rho_0)$. После этого можно с помощью соотношений для функций $\overline{w}(t,x)$, $\rho(t,x)$ и $p(t,x)$ вернуться к уравнению (1.2), где все слагаемые — непрерывные функции от t со значениями в пространстве $\overrightarrow{L}_2(\Omega,\rho_0)$.

Остальные утверждения теоремы, в силу связей между функциями $\overline{w}(t,x)$, $\rho(t,x)$ и $p(t,x)$, доказываются аналогично. □

3.2. О законе сохранения полной энергии гидросистемы

Опираясь на установленные выше факты о разрешимости начально-краевой задачи, сформулируем итоговые утверждения, связанные с законом сохранения полной энергии.

Теорема 4. *Пусть задача(3.1)–(3.2) имеет сильное решение $\widehat{w}(t)$ и обладает дополнительными свойствами гладкости. Тогда для этого решения выполнен закон сохранения полной энергии:*

$$\int\limits_{\Omega}\rho_0(z)\left|\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}\right|^2 d\Omega + c^{-2}\int\limits_{\Omega}\rho_0^{-1}(z)\left|p\right|^2 d\Omega + g^2\int\limits_{\Omega}\rho_0^{-1}N^{-2}(z)\left(c^{-2}p-\rho\right)^2 d\Omega = \quad (3.11)$$

$$= \int\limits_{\Omega}\rho_0(z)\left|\vec{w}^1\right|^2 d\Omega + c^{-2}\int\limits_{\Omega}\rho_0^{-1}(z)\left|p^0\right|^2 d\Omega + g^2\int\limits_{\Omega}\rho_0^{-1}N^{-2}(z)\left(c^{-2}p^0-\rho^0\right)^2 d\Omega,$$

где функции $p^0(x)$ и $\rho^0(x)$ определены из уравнений (1.2) и (1.3) при $t=0$.

Доказательство. полностью повторяет вывод закона сохранения полной энергии для классического решения задачи (1.2)–(1.7). □

Теорема 5. *Пусть задача(3.1)–(3.2)имеет сильное решение $\widehat{w}(t)$. Тогда для этого решения также выполнен закон сохранения полной энергии в форме (3.11).*

Доказательство. Для сильного решения из уравнения (**??**) выводится тождество

$$\frac{d}{dt}(||\frac{d\widehat{w}}{dt}||^2_{\overrightarrow{L}_2(\Omega,\rho_0)} + (\widetilde{D}\widehat{w},\widehat{w})_{\overrightarrow{L}_2(\Omega,\rho_0)}) = 0,$$

которое с помощью выражений для функций ρ и p после интегрирования по времени в промежутке от 0 до t, приводится к виду (3.11). □

Теорема 6. *В условиях теоремы 2 для обобщенного решения задачи (3.1)–(3.2) выполнен закон сохранения полной энергии в форме (3.11).*

Доказательство. Теорема доказывается с помощью предельного перехода в равенстве предыдущей теоремы и того факта, что $\mathcal{D}(\widetilde{D})$ плотна в $\mathcal{D}(\widetilde{D}^{1/2})$, а она, в свою очередь, плотна в $\overrightarrow{L}_2(\Omega, \rho_0)$. $\square$

Список цитируемых источников

1. *Kopachevsky, N. D., Krein, S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 1: Self – adjoint Problems for an Ideal Fluid. — Basel: Birkhauser Verlag, 2001.
2. *Kopachevsky, N. D., Padula, P., Vronsky, B. M.* Small motions and eigenoscillations of a system „fluid – gas" in a bounded region // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского серия Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2007. — Т. 20(59), №1. — С. 3-55.

   Kopachevsky, N. D., Padula, P., Vronsky, B. M. (2007). Small motions and eigenoscillations of a system „fluid–gas" in a bounded region. Uchenye zapiski TNU, ser. Matem. Mekh. Inform. & Cyber., 20(59), no.1, 3-55.

Получена 14.03.2016