Динамические системы, 2016, том 6(34), №4, 337–354

УДК 517.97:517.98

Задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума

И. В. Баран

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: matemain@mail.ru*

Аннотация. В работе формулируется и исследуется задача поиска направления оптимального перехода (по диаметру) через точку минимума. Эта задача близка по духу, с одной стороны, к хорошо известной в современном анализе задаче поиска направления наискорейшего (радиального) спуска к точке минимума, а с другой стороны, к известному методу Гельфанда (диаметрального) перехода через точку минимума. Оказалось, что для исследования такой задачи удобно использовать симметрические, а не центрированные характеристики (симметрические дифференциалы, либо, в более общем случае, симметрические субдифференциалы первого и второго порядка). Подробно исследован случай вариационных функционалов, рассмотрен класс примеров.

Ключевые слова: симметрическая производная, симметрический субдифференциал, локальная асимметрия, локальный эксцесс, локальная суб-асимметрия, локальный суб-эксцесс.

The problem of finding the direction of the optimal transition through the extremum point

I. V. Baran

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. Well-known problem in the analysis of the theory of symmetric derivatives has found extensive applications in harmonic analysis and other areas of mathematics. However, in a nonsmooth analysis, the possibility of a transition from a symmetric derivative to a symmetric subdifferential was not study. In our papers a general apparatus of the theory of symmetric differentials and subdifferentials of the first and higher orders in infinite-dimensional spaces is constructed. Their main properties are described, up to the mean-value theorem and Taylor's formula, symmetric variations and subvariations of one-dimensional variational functionals are calculated.

As an application, we formulate and investigate the problem of finding the direction of the optimal transition (in diameter) through the minimum point. This problem is close in spirit, on the one hand, to the problem of finding the direction of the steepest (radial) descent to the minimum point, well known in modern analysis, and, on the other hand, to the known Gelfand (diametrical) transition through the minimum point. It turned out that to study such a problem it is convenient to use symmetric rather than centered characteristics (symmetric differentials, or, in the more general case, symmetric subdifferentials of the first and second order).

The concepts of local asymmetry and local excess of a functional at a given point of a local extremum are introduced. The problems of determining the direction of the minimum asymmetry and the minimal excess are formulated. In a more general case, an analogous investigation of local sub-asymmetry and local sub-excess on the basis of the previously constructed symmetric subdifferential calculus is carried out. A class of examples for variational functionals with a nonsmooth integrand is considered.

Keywords: symmetric derivatives, symmetric subdifferential, local asymmetry, local excess, local sub-asymmetry, local sub-excess.

MSC 2010: 46G05, 49J52

Введение

В современном анализе хорошо известна задача поиска направления наискорейшего спуска (по радиусу) к точке минимума функционала, подразумевая исследования как в гладком, так и в негладком случае (см. [2]-[4], [6]). В настоящей работе ставится близкая по духу задача поиска наискорейшего перехода (по диаметру) через точку экстремума. Оказывается, что для исследования такой задачи удобно использовать симметрические, а не центрированные характеристики (симметрические дифференциалы, либо, в более общем случае, симметрические субдифференциалы первого и второго порядка ([7], [11]).

Симметрические производные первого и второго порядков определяются через пределы соответствующих разностных отношений:

$$f^{[\prime]}(y) = \lim_{h\to+0} \frac{\Delta^1 f(y,h)}{2h} = \lim_{h\to+0} \frac{f(y+h)-f(y-h)}{2h},$$

$$f^{[\prime\prime]}(y) = \lim_{h\to+0} \frac{\Delta^2 f(y,2h)}{4h^2} = \lim_{h\to+0} \frac{f(y+2h)-2f(y)+f(y-2h)}{4h^2}.$$

Отметим, что с симметрическими производными второго порядка связан классический метод Римана-Шварца суммирования рядов Фурье [1].

В работе рассматривается обобщение симметрической производной на случай банаховых пространств, а именно — симметрические субдифференциалы Фреше первого и высшего порядков (см. [7]). Так, под сильным симметрическим субдифференциалом первого порядка мы понимаем субпредел ([7]-[9]):

$$\partial^{[\prime]}_{sub} f(y,h) = \operatorname*{sublim}_{t\to+0}\ \overline{co} \left\{ \frac{f(y+th)-f(y-th)}{2t} \,\middle|\, 0<t<\delta \right\}$$

при том условии, что $\partial^{[\prime]}_{sub} f(y,\cdot)$ — сублинейный ограниченный оператор по h с компактными выпуклыми значениями.

Далее, по аналогии с теорией сильных центрированных субдифференциалов ([8], [9], [12]), мы рассматриваем удобное достаточное условие симметрической субдифференцируемости — симметрическую субгладкость. В частности, для функционалов симметрическая субгладкость первого порядка сводится к полунепрерывности сверху (снизу), соответственно, верхних (нижних) симметрических производных. Это позволяет ввести понятие и получить оценки симметрических субвариаций первого и высшего порядков для вариационных функционалов (см. [7]).

Применение построенного аппарата к экстремальным вариационным задачам мы строим на идее сочетания центрированных и симметрических характеристик вариационного функционала. А именно:

a) с помощью центрированных характеристик (с помощью первой и второй центрированных субвариаций $\partial_{sub}\Phi(y)h$ и $\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2$) находится точка экстремума;

б) в уже найденной точке экстремума мы исследуем следующую задачу: найти оптимальный путь перехода через точку экстремума с помощью симметрических характеристик (первой и второй симметрической субвариаций $\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h$ и $\partial^{[\prime\prime]}_{sub}\Phi(y)(h)^2$).

Понятие оптимальности мы связываем с двумя локальными характеристиками функционала, которые являются локальными аналогами известных в теории вероятности понятий асимметрии и эксцесса распределения случайной величины [5].

Работа состоит из пяти разделов. В первом разделе рассматривается применение аппарата симметрического субдифференциального исчисления к оценке первой субвариации одномерного вариационного функционала. Во втором разделе на базе теории симметрических субдифференциалов высших порядков получена оценка второй субвариации симметрического субдифференциала вариационного функционала. Рассмотрен частный пример.

В третьем разделе рассматривается задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума функционала. С этой целью введены понятия локальной асимметрии и локального эксцесса. В четвертом разделе рассматривается многозначная версия исследования, использующая, соответственно, первой симметрический субдифференциал (либо суб-асимметрию), либо второй симметрический субдифференциал (либо суб-эксцесс). В заключительном разделе рассмотрен достаточно обширный класс примеров.

1. Первая симметрическая вариация одномерного вариационного функционала

В работе [8] было показано, что одномерный вариационный функционал с C^1_{sub}-гладким интегрантом

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1_{sub}([a;b]\times\mathbb{R}^2), u = f(x,y,z)) \tag{1.1}$$

допускает следующую оценку первой сильной субвариации:

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset$$

$$\subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx\,;\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx\right]. \tag{1.2}$$

Оценка (1.2) поддается обобщению на случай симметрической субгладкости интегранта. При этом симметрическая оценка оказывается, вообще говоря, более точной.

Теорема 1. *Пусть для одномерного вариационного функционала интегрант* f *является* $C^{[\prime]}_{sub}$-субгладким*:* $f \in C^{[\prime]}_{sub}([a;b] \times \mathbb{R}^2)$*. Тогда* $\Phi(y)$ *симметрически субдифференцируем всюду в* $C^1[a;b]$*, причем справедлива оценка первой симметрической субвариации* $(\forall h \in C^1[a;b])$*:*

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h \subset \left[\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial y}}h + \frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial z}}h'\right) dx\,; \int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial y}h + \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial z}h'\right) dx\right]. \tag{1.3}$$

Отметим частный случай оценки (1.3), когда интегрант образован внешней композицией симметрически субгладкой функции с гладкой функцией $f(x, y, y')$.

Теорема 2. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b \varphi\left[f(x, y, y')\right] dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1([a;b] \times \mathbb{R}^2), \varphi \in C^{[\prime]}_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка $(\forall h \in C^1[a;b])$*:*

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h \subset \Bigg[\int\limits_a^b \underline{\varphi^{[\prime]}}\,(f(x,y,y')) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right) dx\,;$$

$$\int\limits_a^b \overline{\varphi^{[\prime]}}\,(f(x,y,y')) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right) dx\Bigg]. \tag{1.4}$$

Еще один существенный частный случай представляет внутренняя композиция симметрически субгладкой функции с гладкой функцией. Здесь для простоты мы рассмотрим композицию только по третьей переменной.

Теорема 3. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, \varphi(y'))dx \quad (f \in C^1([a;b] \times \mathbb{R}^2), y \in C^1[a;b], \varphi \in C^{[\prime]}_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка $(\forall h \in C^1[a;b])$*:*

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h \subset \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'))hdx +$$

$$+\left[\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y')) \cdot \underline{\varphi^{[\prime]}}(y')h'dx; \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y')) \cdot \overline{\varphi^{[\prime]}}(y')h'dx\right]. \tag{1.5}$$

Отметим конкретные примеры оценок (1.4) и (1.5) связанные с модулированием.

Пример 1. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b |f(x,y,y')|dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1([a;b]\times\mathbb{R}^2)).$$

Здесь оценка (1.4) принимает вид точного равенства:

$$\partial_{sub}^{[\prime]}\Phi(y)h = \partial^{[\prime]}\Phi(y)h = \int_a^b sign\, f(x,y,y')\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx. \quad (1.6)$$

Заметим, что вычисление центрированного субдифференциала (см. [8]) приводит к оценке (в краткой записи):

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \int\limits_{f(x,y,y')\neq 0} sign\, f(x,y,y')\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h'\right)dx +$$
$$+ [-1;1]\cdot\int\limits_{(f(x,y,y')=0)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h'\right)dx.$$

При этом только в частном случае $mes\,(f(x,y,y')=0)=0$ последняя оценка переходит в точное равенство (1.6) для классической первой вариации $\partial\Phi(y)h$. Таким образом, в случае $mes\,(f(x,y,y')=0)=0$ имеет место точное равенство $\partial_{sub}^{[\prime]}\Phi(y)h = \partial\Phi(y)h$.

Пример 2. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,|y'|)dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1([a;b]\times\mathbb{R}^2)). \quad (1.7)$$

Здесь оценка (1.4) принимает вид точного равенства:

$$\partial_{sub}^{[\prime]}\Phi(y)h = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|)hdx + \int\limits_{y'\neq 0}(sign\, y')\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)h'dx.$$

Заметим, что вычисление центрированного субдифференциала (см. [8]) приводит к оценке (в краткой записи):

$$\partial_{sub}\Phi(y)h \subset \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|)hdx + \int\limits_{y'\neq 0}(sign\, y')\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)h'dx +$$
$$+ [-1;1]\cdot\int\limits_{(y'=0)}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)h'dx.$$

При этом только в частном случае $mes\,(y'=0)=0$ последняя оценка переходит в точное равенство для классической первой вариации $\partial\Phi(y)h$. Таким образом, в случае $mes\,(y'=0)=0$ имеет место точное равенство:

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Phi(y)h=\partial\Phi(y)h=\int\limits_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|)h+(sign\,y')\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)h'\right]dx.$$

2. Вторая симметрическая субвариация одномерного вариационного функционала

В работе [8] было показано, что одномерный вариационный функционал с C^2_{sub}-гладким интегрантом

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,y')dx\quad(f\in C^2_{sub}([a;b]\times\mathbb{R}^2),y\in C^1[a;b]).$$

допускает следующую оценку второй сильной субвариации:

$$\partial^2_{sub}\Phi(y)(h)^2\subset\left[\int\limits_a^b\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}h^2+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}hh'\right)dx\,;\int\limits_a^b\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}h^2+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}hh'\right)dx\right]+$$

$$+\left[\int\limits_a^b\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}hh'+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}h'^2\right)dx\,;\int\limits_a^b\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}hh'+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}h'^2\right)dx\right].\qquad(2.1)$$

Мы получим симметрический аналог оценки (2.1) в случае интегранта класса $C^{[\prime\prime]}_{sub}$. При этом симметрическая оценка оказывается более точной. Далее, учитывая включение $C^{[\prime\prime]}_{sub}\supset C^1$, мы примем следующие обозначения:

$$\underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\partial y\partial z}}=\underline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial z}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\partial y\partial z}}=\overline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial z}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\partial z\partial y}}=\underline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial y}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right),\ \overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\partial z\partial y}}=\overline{\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial y}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Теорема 4. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,y')dx\quad(f\in C^{[\prime\prime]}_{sub}([a;b]\times\mathbb{R}^2),y\in C^1[a;b]).\qquad(2.2)$$

Тогда вторая симметрическая вариация $\Phi(y)$ допускает оценку:

$$\partial^{[\prime\prime]}_{sub}\Phi(y)(h)^2\subset\left[\int\limits_a^b\left(\underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\partial y^2}}h^2+\underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\partial y\partial z}}hh'\right)dx\,;\int\limits_a^b\left(\overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\partial y^2}}h^2+\overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\partial y\partial z}}hh'\right)dx\right]+$$

$$+\Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z \partial y}} hh' + \underline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z^2}} h'^2\right) dx\,;\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z \partial y}} hh' + \overline{\frac{\partial^{[\prime\prime]} f}{\partial z^2}} h'^2\right) dx\Bigg]. \qquad (2.3)$$

Доказательство. Так как $(f \in C^{[\prime\prime]}_{sub}([a;b]\times\mathbb{R}^2)) \Rightarrow (f \in C^1([a;b]\times\mathbb{R}^2))$, то Φ имеет обычную первую вариацию

$$\partial\Phi(y)h = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right) dx =: \Psi(y)h,$$

и, следовательно, $\partial^{[\prime\prime]}_{sub}\Phi(y)(h)^2 = \partial^{[\prime]}_{sub}(\Psi)(y)(h)^2$.
Введем вспомогательный линейный оператор (очевидно, непрерывный):

$$(Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)),\ A:\ C^1[a,b] \longrightarrow [a;b]\times C^1[a,b]\times C[a,b].$$

Далее, введем нелинейный оператор композиции:

$$B(w) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(w),\ \frac{\partial f}{\partial z}(w)\right) = (B_1(w),\ B_2(w)), \qquad (w:[a;b]\to[a;b]\times\mathbb{R}^2)$$

и билинейный функциональный оператор:

$$D(u,v) = \int\limits_a^b [u(x)h(x) + v(x)h'(x)]dx, \qquad D: C^{[\prime]}_{sub}[a,b]\times C^{[\prime]}_{sub}[a,b] \longrightarrow (C^1[a,b])^*.$$

Теперь вариационный функциональный оператор Ψ можно представить в виде композиции:

$$\Psi(y)h = D(B_1(Ay), B_2(Ay))h = D(B(Ay))h. \qquad (2.4)$$

Применяя к композиции (2.4) теорему об s–субдифференцировании композиции (см. [7]), имеем:

$$\partial^{[\prime]}_{sub}(\Psi(y)h)(h) = \partial^{[\prime]}_{sub}(D(B(Ay))h)h \subset$$
$$\subset \left[\partial^{[\prime]}_{sub}D(B(Ay))h\cdot\left[\partial^{[\prime]}_{sub}B(Ay)\cdot\partial^{[\prime]}_{sub}A(y)\right]\right]h. \qquad (2.5)$$

Теперь рассмотрим в отдельности компоненты справа в (2.5).

1) Так как A — линейный непрерывный оператор, то он дифференцируем по Фреше, причем $A'(y)\equiv A$. Следовательно,

$$\partial^{[\prime]}_{sub}(Ay)(x) = A'(y)(x) = (Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)).$$

2) Для оператора B, используя теорему о покоординатной s–субдифференцируемости (см. [7]), откуда находим:

$$\partial^{[\prime]}_{sub}B(Ay)h \subset (\partial^{[\prime]}_{sub}B_1(Ay)h) \times (\partial^{[\prime]}_{sub}B_2(Ay)h) \subset$$

$$\subset \left[\frac{\partial^{[\prime]}}{\underline{\partial y}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)h + \frac{\partial^{[\prime]}}{\underline{\partial z}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)h'\,;\, \frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)h + \frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial z}(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)h'\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\partial^{[\prime]}}{\underline{\partial y}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)h + \frac{\partial^{[\prime]}}{\underline{\partial z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)h'\,;\, \frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)h + \frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)h'\right].$$

3) Так как D — линейный непрерывный функционал, то он дифференцируем по Фреше, причем $D'(u,v)(k,l) = D(k,v) + D(u,l)$. Отсюда находим:

$$\partial^{[\prime]}_{sub}\Psi(y)(h)^2 = \int_a^b \left(\left[\frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\underline{\partial y^2}}h + \frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\underline{\partial y\partial z}}h'\,;\; \frac{\overline{\partial^{[\prime\prime]}f}}{\partial y^2}h + \frac{\overline{\partial^{[\prime\prime]}f}}{\partial y\partial z}h\right]\cdot h +\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\underline{\partial z\partial y}}h + \frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\underline{\partial z^2}}h'\,;\; \frac{\overline{\partial^{[\prime\prime]}f}}{\partial z\partial y}h + \frac{\overline{\partial^{[\prime\prime]}f}}{\partial z^2}h'\right]\cdot h'\right)dx =$$

$$= \left[\int_a^b \left(\frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\underline{\partial y^2}}h^2 + \frac{\partial^{[\prime\prime]}}{\underline{\partial y\partial z}}hh'\right)dx\,;\int_a^b\left(\frac{\overline{\partial^{[\prime\prime]}f}}{\partial y^2}h^2 + \frac{\overline{\partial^{[\prime\prime]}f}}{\partial y\partial z}hh'\right)dx\right]+$$

$$+\left[\int_a^b \left(\frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\underline{\partial z\partial y}}hh' + \frac{\partial^{[\prime\prime]}f}{\underline{\partial z^2}}h'^2\right)dx\,;\int_a^b\left(\frac{\overline{\partial^{[\prime\prime]}f}}{\partial z\partial y}hh' + \frac{\overline{\partial^{[\prime\prime]}f}}{\partial z^2}h'^2\right)dx\right]. \tag{2.6}$$

□

Здесь, как и при оценке первой симметрической субвариации, мы выделим случай интегранта, образованного внешней композицией s-субгладкой (теперь уже класса $C^{[\prime\prime]}_{sub}$) функции с гладкой.

Теорема 5. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right]dx \quad (\varphi \in C^{[\prime\prime]}_{sub}(\mathbb{R}), f \in C^2([a;b]\times\mathbb{R}^2), y \in C^1[a;b]).$$

Тогда вторая симметрическая субвариация Φ допускает оценку (в краткой записи):

$$\partial^{[\prime\prime]}_{sub}\Phi(y)(h)^2 \subset \int_a^b \varphi'(f)\cdot\left(\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial y}h + \frac{\partial^{[\prime]}}{\partial z}h'\right)^2\cdot f dx +$$

$$+\left[\int\limits_a^b \underline{\varphi^{[\prime\prime]}}(f)\cdot\left((f_y)^2h^2+f_{yz}hh'\right)dx\,;\int\limits_a^b \overline{\varphi^{[\prime\prime]}}(f)\cdot\left((f_y)^2h^2+f_{yz}hh'\right)dx\right]+$$

$$+\left[\int\limits_a^b \underline{\varphi^{[\prime\prime]}}(f)\cdot\left(f_{yz}hh'+(f_z)^2h'^2\right)dx\,;\int\limits_a^b \overline{\varphi^{[\prime\prime]}}(f)\cdot\left(f_{yz}hh'+(f_z)^2h'^2\right)dx\right]. \qquad (2.7)$$

Доказательство. Непосредственные преобразования. □

В качестве конкретного класса примеров рассмотрим функционалы с интегрантами вида $f|f|$.

Теорема 6. *Пусть*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,y')\cdot|f(x,y,y')|dx \quad (f\in C^2([a;b]\times\mathbb{R}^2), y\in C^1[a;b]).$$

Тогда справедлива оценка (в краткой записи):

$$\partial^{[\prime\prime]}_{sub}\Phi(y)(h)^2\subset\int\limits_a^b |f|\cdot\left(\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial y}h+\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial z}h'\right)^2\cdot f dx+2\int\limits_{(f\neq 0)} sign\, f\cdot\left(f_y\cdot h+f_z\cdot h'\right)^2dx+$$

$$+[-2;2]\cdot\int\limits_{(f=0)}\left(f_{yz}\cdot h^2+f_{yz}\cdot hh'\right)dx+[-2;2]\cdot\int\limits_{(f=0)}\left(f_{yz}\cdot hh'+f_{z^2}\cdot h'^2\right)dx. \qquad (2.8)$$

В частности, если $mes(f(x,y,y')=0)=0$, *то оценка* (2.8) *переходит в точное равенство:*

$$\partial^{[\prime\prime]}_{sub}\Phi(y)(h)^2=\partial^{[\prime\prime]}\Phi(y)(h)^2=\int\limits_a^b |f|\cdot\left(\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial y}h+\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial z}h'\right)^2\cdot f dx+$$

$$+2\int\limits_a^b sign\ f\cdot\left(f_y\cdot h+f_z\cdot h'\right)^2dx.$$

Рассмотрим частный пример.

Пример 3. Пусть

$$f(x)=\int\limits_0^z dt\int\limits_0^t \sin\frac{1}{s^2}ds.$$

Вычисления показывают:

$$\begin{cases} \text{при} \;\; z \neq 0: & f^{[\prime\prime]}(z) = f''(z) = \sin \dfrac{1}{z^2}; \\ \text{при} \;\; z = 0: & f^{[\prime\prime]}(0) = 0;\; \partial^2_{sub} f(0) = [-1; 1]. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(y')dx \quad (\text{здесь } f \in C^{[\prime\prime]}_{sub}([a;b] \times \mathbb{R}^2), \text{ но } f \notin C^2_{sub}([a;b] \times \mathbb{R}^2)).$$

Из теоремы 4 следует:

$$\partial^{[\prime\prime]}_{sub} \Phi(y)(h)^2 = \partial^{[\prime\prime]} \Phi(y)(h)^2 = \int\limits_a^b \sin \frac{1}{y'^2} \cdot (h')^2 dx.$$

В то же время теорема об оценке второй центрированной субвариации (см. [8]) здесь неприменима.

3. Локальные характеристики фукнкционалов: локальная асимметрия и локальный эксцесс

Напомним определение направления наискорейшего спуска, введенного и исследованного в работах В. Ф. Демьянова [2]-[4]. Далее E — вещественное банахово пространство, $U(y)$ – некоторая окрестность точки $y \in E$, функционал $\Phi : E \supset U(y) \to \mathbb{R}$ достигает локального минимума в точке y и дифференцируем в этой точке по любому направлению $h \in E$ ($\|h\| = 1$).

Определение 1. Направление h^* называется *направлением наискорейшего спуска* функции Φ в точке y, если

$$\partial \Phi(y, h^*) = \min_{\|h\|=1} \partial \Phi(y, h).$$

При этом $\partial \Phi(y, h^*)$ называется *скоростью наискорейшего спуска.*

В гладком случае, в силу леммы Ферма, $\partial \Phi(y, h^*) \equiv 0$ для любого направления $h \in E$. В негладком случае для нахождения h^* применяются методы квазидифференцируемого исчисления, развитого в работах В. Ф. Демьянова, А. М. Рубинова, В. Н. Малоземова и их учеников [2]-[4].

Наша цель — ввести и исследовать физически адекватное понятие *«направления наискорейшего перехода»* через точку минимума, которое будет определяться уже парой взаимно противоположных направлений $(h, -h)$. Другими словами, вместо радиального спуска к точке минимума мы будем рассматривать диаметральный «переход» через точку x — от абсциссы $(x - h)$ к абсциссе $(x + h)$. В этом случае среднее время перехода будет определяться уже *симметрическим разностным отношением* $\dfrac{\Phi(y+th)-\Phi(y-th)}{2t}$, а предельное время перехода через y есть *первая симметрическая производная* ([1], [7], [10], [11]) по направлению h:

$$\partial^{[\prime]}\Phi(y,h)=\lim_{t\to+0}\frac{\Phi(y+th)-\Phi(y-th)}{2t}.$$

Поэтому естественным является следующее определение.

Определение 2. Направление $h^*\in E$ назовем *направлением наискорейшего перехода* (через точку y), если

$$|\partial^{[\prime]}\Phi(y,h^*)|=\min_{h\in E}|\partial^{[\prime]}\Phi(y,h)|.$$

При этом $|\partial^{[\prime]}\Phi(y,h^*)|$ назовем *временем наискорейшего перехода.*

В случае отсутствия симметрической дифференцируемости мы вводим более общее определение наискорейшего перехода, вводя локальный аналог известного в теории вероятностей понятия асимметрии (см. [5]).

Определение 3. Назовем *локальной асимметрией* функционала Φ в точке y по направлению h следующий предел:

$$A\Phi(y,h)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau}\right).$$

Связь локальной асимметрии с определением 2 вытекает из следующего простого факта.

Теорема 7. *Если Φ симметрически дифференцируем в точке y по направлению h, то*

$$A\Phi(y,h)=\partial^{[\prime]}\Phi(y,h).$$

Доказательство. Имеем:

$$\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau}=\frac{1}{2t}\left(\int\limits_{0}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau}-\int\limits_{0}^{t}\frac{\Phi(y-\tau h)d\tau}{\tau}\right)=$$

$$=\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}\frac{(\Phi(y+\tau h)-\Phi(y-\tau h))d\tau}{2\tau}.$$

По теореме о среднем при $0<\theta<t$:

$$\frac{\Phi(y+\theta h)-\Phi(y-\theta h)}{2\theta}\to\Phi^{[\prime]}(y,h).$$

□

Таким образом, мы можем заменить определение 2 более общим.

Определение 4. Направление $h^* \in E$ назовем *направлением наискорейшего перехода* (через точку y), если

$$|A\Phi(y,h^*)| = \min_{h\in E} |A\Phi(y,h)|.$$

Вернемся теперь к исходной задаче с точки зрения минимального расхода энергии по направлению «спуска-подъема». Поскольку работа на спуске и подъеме отличается знаком, то средняя эффективность работы по переходу через экстремум будет определяться уже *вторым симметрическим разностным отношением*

$$\frac{1}{2t}\left(\frac{\Phi(y+th)-\Phi(y)}{t} - \frac{\Phi(y)-\Phi(y-th)}{t}\right) = \frac{\Phi(y+th)-2\Phi(y)+\Phi(y-th)}{2t^2},$$

а предельная эффективность работы по переходу через точку минимума есть *вторая симметрическая производная* Φ в точке y по направлению h ([1], [7], [10], [11]):

$$\partial^{[\prime\prime]}\Phi(y)(h)^2 = \lim_{t\to+0} \frac{\Phi(y+th)-2\Phi(y)+\Phi(y-th)}{2t^2}.$$

Поэтому естественным является следующее определение.

Определение 5. Направление $h^* \in E$ назовем *направлением максимально эффективного перехода* (через точку y), если

$$|\partial^{[\prime\prime]}\Phi(y)(h^*)^2| = \min_{h\in E} |\partial^{[\prime\prime]}\Phi(y)(h)^2|.$$

При этом $|\partial^{[\prime\prime]}\Phi(y)(h^*)^2|$ назовем *дефектом эффективности перехода* через точку y.

Здесь также, в случае отсутствия симметрической дифференцируемости второго порядка, можно ввести более общее определение наиболее эффективного перехода мы вводим локальный аналог известного в теории вероятностей понятия эксцесса (см. [5]).

Определение 6. Назовем *локальным эксцессом* функционала Φ в точке y по направлению h следующий предел:

$$E\Phi(y)(h)^2 = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t} \frac{\Phi(y+\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2} d\tau\right).$$

Связь локального эксцесса с определением 5 вытекает из следующего утверждения.

Теорема 8. *Если Φ дважды симметрически дифференцируем в точке y по направлению h, то*

$$E\Phi(y)(h)^2 = \partial^{[\prime\prime]}\Phi(y)(h)^2.$$

Доказательство. Имеем:

$$\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2t}\int\limits_{0}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2}d\tau + \frac{1}{2t}\int\limits_{t}^{0}\frac{\Phi(y-\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2}(-d\tau) =$$

$$= \frac{1}{2t}\int\limits_{0}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)-2\Phi(y)+\Phi(y-\tau h)}{\tau^2}d\tau = \frac{\Delta_2\Phi(y,\theta h)}{2\theta^2}, \quad \text{где} \ \ \theta \in [0;t].$$

Отсюда, при $t \to 0$:

$$\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2}d\tau \to \Phi^{[\prime\prime]}(y)(h)^2.$$

$\square$

Таким образом, мы можем заменить определение 5 более общим.

Определение 7. Направление $h^* \in E$ назовем *направлением максимальной эффективности* перехода через точку y, если

$$|E\Phi(y)(h^*)^2| = \min_{h\in E}|E\Phi(y)(h)^2|.$$

4. Многозначные аналоги асимметрии и эксцесса

Здесь мы опираемся на понятие многозначного *субпредела*, введенное и изученное в работах [7]-[9]. Для простоты, приведем определение только в случае функционалов. Далее $\Psi : E \supset \underline{U(y)} \to \mathbb{R}$, E – банахово пространство, h — направление в E, символы $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$ обозначает, соответственно, нижний и верхний пределы.

Определение 8. Зададим *субпредел* функционала Ψ в точке y по направлению h равенством

$$\operatorname*{sublim}_{t\to+0}\Psi(y+th) = \left[\varliminf_{t\to+0}\Psi(y+th); \varlimsup_{t\to+0}\Psi(y+th)\right], \tag{4.1}$$

при условии, что оба предела справа в (4.1) конечны. Субпредел (4.1) назовем *сильным*, если он является сублинейным по h ограниченным суб-функционалом (см. [7], [8]), и сходимость в (4.1) равномерна по $\|h\| \in 1$.

Заменяя теперь в определениях 3 и 6 пределы на субпределы, мы приходим к требуемым понятиям.

Определение 9. Назовем *локальной суб-асимметрией* функционала Φ в точке y по направлению h следующий субпредел:

$$A_{sub}\Phi(y,h)=\operatorname*{sublim}_{t\to+0}\left(\frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)d\tau}{\tau}\right).$$

Соответственно, назовем *локальным суб-эксцессом* функционала Φ в точке y по направлению h следующий субпредел:

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2=\operatorname*{sublim}_{t\to+0}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\Phi(y+\tau h)-\Phi(y)}{\tau^2}d\tau\right).$$

Из определения 9 и предыдущих результатов вытекает следующая теорема.

Теорема 9. *Справедливы оценки:*

$$A_{sub}\Phi(y,h)\subset[\underline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h),\overline{\partial^{[\prime]}}\Phi(y,h)];$$

$$E_{sub}\Phi(y)(h)^2\subset[\underline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2;\overline{\partial^{[\prime\prime]}}\Phi(y)(h)^2].$$

5. Класс примеров

Рассмотрим достаточно обширный класс примеров.

Пример 4. Пусть

$$\Phi(y)=\int\limits_{-a}^{a}\varphi\left(\frac{y'+y}{\alpha}\right)dx;\quad \left(f(x,y,z)=\varphi_1\left(\frac{y+z}{\alpha}\right)+\varphi_2\left(\frac{y+z}{\alpha}\right),\ \varphi\in C^2_{sub}\right),$$

где

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t),$$

$$\varphi_1(t)=\int\limits_0^t s\sin\frac{1}{s}ds,\qquad \varphi_2(t)=-\frac{t|t|}{4},$$

$$\varphi(t)=\int\limits_0^t s\sin\frac{1}{s}ds-\frac{t|t|}{4}.$$

Тогда

$$\varphi'(t)=\begin{cases} t\sin\dfrac{1}{t}-\dfrac{|t|}{2},\ t\neq 0;\\ 0,\ t=0.\end{cases}$$

$$f_y(x,y,z) = f_z(x,y,z) = \begin{cases} \psi(x,y,z) = \dfrac{1}{\alpha}\cdot\varphi'\Big(\dfrac{y+z}{\alpha}\Big), \ y+z\neq 0; \\ 0, \ y+z=0. \end{cases}$$

Уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{r} \psi(x,y,y') - \dfrac{d}{dx}(\psi(x,y,y')) = 0, \ y+y'\neq 0\,; \\ y+y'=0\,. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} \psi(x,y,y') = c\cdot e^x\,; \\ y+y'=0\,. \end{array}\right.$$

Положим $c=0$:

$$\left[\begin{array}{c} \varphi'\Big(\dfrac{y+y'}{\alpha}\Big) = 0\,; \\ y+y'=0\,. \end{array}\right.$$

Рассмотрим уравнение $\varphi'(t)=0$, т.е.

$$\left[\begin{array}{r} \sin\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2}sign\ t, \ t\neq 0\,; \\ t=0\,. \end{array}\right. \tag{5.1}$$

При $t>0$ первое уравнение системы имеет, в частности, решения $t_k = \dfrac{1}{\frac{\pi}{6}+2k\pi}$ $(k\in\mathbb{N})$. Таким образом, система (5.1) имеет решения t_k $(k\in\mathbb{N}_0)$:

$$t_k = \frac{1}{\frac{\pi}{6}+2k\pi}\ (k>0), \ t_0=0.$$

Тогда систему (5.1) можно записать в виде:

$$y'+y = t_k\cdot\alpha\ (\alpha\in\mathbb{N}_0).$$

Рассмотрим класс экстремалей вида y_{ij} $(i,\ j\in\mathbb{N}_0)$, удовлетворяющих условию:

$$y_{ij}(x): \left[\begin{array}{c} y'+y = t_i\cdot\alpha \quad (-a<x<0); \\ y'+y = t_j\cdot\alpha \quad (0<x<a). \end{array}\right. \tag{5.2}$$

Легко проверить условие «C^1-склеивания» в нуле (при $i\neq j$) для системы (5.2): $\alpha(0)=\alpha'(0)=0$. Перейдем к условиям второго порядка:

$$\left[\begin{array}{r} \varphi''(t) = \sin\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t}\cos\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2}sign\ t, \ t\neq 0\,; \\ \varphi''_{sub}(0) = [-2;2], \ t=0\,. \end{array}\right.$$

Условие Лежандра на экстремалях $y_{ij}(\cdot)$ (при $i \neq j$) принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} f_{z^2}(x,y,y') = \dfrac{1}{\alpha^2}\cdot\varphi''\Big(\dfrac{y+z}{\alpha}\Big) \quad y+z\neq 0; \\ \Big(f_{z^2}\Big)_{sub}(x,y,y') = [-2;2], \quad y+z=0; \end{array}\right.$$

$$f_{z^2}(x,y,y') = \left[\begin{array}{r} (f_{z^2}(x,y,y'))|_{y_{ij}} = \dfrac{1}{\alpha^2}\cdot\varphi''(t_i) < 0,\ -a<x<0; \\ (f_{z^2}(x,y,y'))|_{y_{ij}} = \dfrac{1}{\alpha^2}\cdot\varphi''(t_j) < 0,\ 0<x<a; \end{array}\right.$$

при $i, j \neq 0$.

Таким образом, $f_{z^2}(x,y,y')|_{y_{ij}} < 0\ \ (y+y'\neq 0)$.

Поскольку, в силу (5.2), $y_{ij} + y'_{ij} > 0$ при $x \neq 0$, то суб-условие Лежандра выполнено для макисмума при $x \neq 0$.

Достижение максимума в точках y_{ij} для Φ можно проверить непосредственно:

$$\varphi\Big(\frac{y+y'}{\alpha}\Big)\bigg|_{y_{ij}} = \left[\begin{array}{r} (f_{z^2}(x,y,y'))|_{y_{ij}} = \varphi(t_i),\ -a<x<0; \\ (f_{z^2}(x,y,y'))|_{y_{ij}} = \varphi(t_j),\ 0<x<a; \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\Phi(y_{ij}) = a\cdot(\varphi(t_i)+\varphi(t_j)).$$

При этом, поскольку $\varphi'(t_i) = \varphi'(t_j) = 0$ и $\varphi''(t_i), \varphi''(t_j) < 0$, то $t_i,\ t_j$ – точки максимума φ.

Следовательно, для малой $\|y - y_{ij}\|_{C^1}$ будет равномерно малым и отклонение $\left|\dfrac{y+y'}{\alpha} - t_i\right|$ $(x>0)$, $\left|\dfrac{y+y'}{\alpha} - t_j\right|$ $(x>0)$, откуда $\varphi\Big(\dfrac{y+y'}{\alpha}\Big) < \varphi\Big(\dfrac{y+y'}{\alpha}\Big)\bigg|_{y_{ij}}$, т. е. $\Phi \mapsto \max$ в точках y_{ij}.

Вычисление асимметрии.

Так как $\varphi \in C^1$, следовательно, $\Phi \in C^1$, то

$$A\Phi(y_{ij})h = \partial^{[\prime]}\Phi(y_{ij})h = \partial\Phi(y_{ij})h = 0.$$

Таким образом, во всех точках экстремума вида y_{ij} асимметрия по любому направлению h равна нулю.

Вычисление эксцесса.

Так как φ нечетна, то

$$\varphi^{[\prime\prime]}(t) = \begin{cases} \varphi''(t) = \sin\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t}\cos\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2} sign\, t,\ t\neq 0; \\ 0,\ t=0. \end{cases}$$

Отсюда (при $i, j \neq 0$):

$$f_{y^2}^{[\prime\prime]}(x,y,y') = f_{z^2}^{[\prime\prime]}(x,y,y') = f_{yz}^{[\prime\prime]}(x,y,y') = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^2}\varphi''\Big(\dfrac{y+y'}{\alpha}\Big),\ y+y' \neq 0; \\ 0,\ y+y'=0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f_{y^2}^{[\prime\prime]}(x,y,y')\Big|_{y_{ij}} = f_{yz}^{[\prime\prime]}(x,y,y')\Big|_{y_{ij}} = f_{z^2}^{[\prime\prime]}(x,y,y')\Big|_{y_{ij}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^2}\cdot\varphi''(t_i),\ -a<x<0; \\ \dfrac{1}{\alpha^2}\cdot\varphi''(t_j),\ 0<x<a. \end{cases}$$

Тогда

$$\big|E\Phi(y_{ij})(h)^2\big| = \left|\int\limits_{-a}^{0}\varphi''(t_i)(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2} + \int\limits_{0}^{a}\varphi''(t_j)(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}\right| =$$

$$= \Big(\frac{\pi}{6}+2\pi i\Big)\int\limits_{-a}^{0}(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2} + \Big(\frac{\pi}{6}+2\pi j\Big)\int\limits_{0}^{a}(h+h')^2\frac{dx}{\alpha^2}.$$

Таким образом, минимальное значение эксцесса достигается по направлениям h: $h+h'=0$ ($E\Phi(y_{ij})(h)^2=0$).

Заключение

В работе исследована задача поиска направления оптимального перехода через точку экстремума функционала. Показано, что задача сводится к поиску направления, минимизирующего, соответственно первый, либо второй симметрический дифференциал, а в более общем случае — направления, минимизирующего, соответственно, локальную асимметрию либо локальный эксцесс. Рассмотрена также многозначная версия исследования, использующая, соответственно, первой симметрический субдифференциал (либо суб-асимметрию), либо второй симметрический субдифференциал (либо суб-эксцесса). Рассмотрен класс примеров исследования задачи для вариационных функционалов с негладкими интегрантом.

Автор выражает благодарность профессору Орлову И. В. за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список цитируемых источников

1. *Бари, Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматлит, 1961. — 936 с.

   Bari, N. K. (1967). Trigonometric Series. New York: Holt, Rinehart and Winston.

2. *Демьянов, В. Ф., Малозёмов, В. Н.* Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 368 с.

   Demyanov, V. F., Malozyomov, V. N. (1972). Introduction to minimax (in Russian). Moscow: Nauka.

3. *Демьянов, В. Ф., Рубинов, А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990. — 431 с.

   Demyanov, V. F., Rubinov, A. M. (1990). Fundamentals of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus (in Russian). Moscow: Nauka.

4. *Демьянов, В. Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. — М.: Высшая школа, 2005. — 335 с.

   Demyanov, V. F. (2005). Extremum conditions and the calculus of variations (in Russian). Moscow: Vyisshaya shkola.

5. *Крамер, Г.* Математические методы статистики. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 648 с.

   Cramer, H. (1962). Mathematical Methods of Statistics. Princeton: Princeton University Press.

6. *Нестеров, Ю. Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. — М.: МЦНМО, 2010. — 262 с.

   Nesterov, Yu. E. (2010). Introduction to convex optimization (in Russian). Moscow: MCNMO.

7. *Орлов, И .В., Баран, И. В.* Введение в сублинейный анализ – 2: симметрический вариант. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2015. — Т. 57. — С. 108–161.

   Orlov, I. V., Baran, I. V. (2017). Introduction to Sublinear Analysis — 2: Symmetric Case. Journal of Mathematical Sciences, 225, 265-321.

8. *Орлов, И. В.* Введение в сублинейный анализ. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2014. — Т. 53. — С. 64–132.

   Orlov, I. V. (2016). Introduction to sublinear analysis. Journal of Mathematical Sciences, 218, 430-502.

9. *Орлов, И. В., Стонякин, Ф. С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты. // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — Т. 34. — С. 121–138.

   Orlov, I. V., Stonyakin, F. S. (2010). Compact subdifferentials: the formula of finite increments and related topics. Journal of Mathematical Sciences 170, 251–269.

10. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2001. — 616 с.

    Fikhtengolts, G. M. (2001). Course of differential and integral calculus (in Russian). Moscow: Fizmatlit.

11. *Orlov, I. V., Baran, I. V.* (2017). Adjoint extremal problem for non-smooth functionals. 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 1-4.

12. *Orlov, I. V.* (2017). Subdifferentials via sub-operators. 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 1-4.

Получена 31.08.2016