

УДК 517.957

Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке

С. П. Плышевская

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. E-mail: *splyshevskaya@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается скалярное параболическое уравнение на отрезке с условием Неймана. Методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений рассматриваемого уравнения. Эти решения ответвляются от нулевого решения при увеличении индекса неустойчивости нуля в результате уменьшения коэффициента диффузии и прохождения его через бифуркационное значение 1. Получены приближённые представления для пространственно-неоднородных решений в достаточно широком диапазоне изменения бифуркационного параметра. Эти приближённые представления соответствуют результатам численных расчётов. С помощью метода Галёркина получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений, стационарным точкам которых отвечают приближённые стационарные решения исходной задачи.

Ключевые слова: параболическая задача, центральное многообразие, устойчивость, внутренний переходный слой, стационарное решение, метод Галёркина, градиентная система, бифуркация.

Dynamics of stationary structures in the parabolic problem at a segment

S. P. Plyshevskaya

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. The scalar parabolic equation at a segment with the Neumann's condition is considered. We prove the theorem on the existence and stability of spatially inhomogeneous stationary solutions of the equation by using the method of central manifolds. These solutions are branched from the zero solution when the instability index of zero increases (each time) by an order of magnitude and the coefficient of diffusion decreases and passes through the bifurcation value 1. We obtain approximate representation for the spatially inhomogeneous solutions in a fairly wide range of variation of the bifurcation parameter. These approximate representation correspond to the results of numerical computations. Using the Galerkin method, systems of ordinary differential equations were obtained whose stationary points correspond to approximate stationary solutions of the original problem.

Keywords: parabolic problem, central manifold, stability, internal shock layer, stationary solution, Galerkin's method, gradient system, bifurcation.

MSC 2010: 35B32, 35B35, 35K20, 35K55

Введение

На отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + \Lambda u^2 - u^3, \quad t > 0 \quad (0.1)$$

с краевыми условиями второго рода:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0 \quad (0.2)$$

и начальными условиями:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (0.3)$$

где $\mu > 0$ и Λ - параметры.

Уравнение (0.1) при $\Lambda = 0$ является ярким представителем общего класса скалярных параболических уравнений типа реакция-диффузия. Этот класс является одним из наиболее исследованных примеров в глобальной, геометрической теории параболических уравнений [6].

Множество стационарных решений E_μ уравнения (0.1), т.е. решений краевой задачи

$$\mu u_{xx} + u + \Lambda u^2 - u^3 = 0, \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0, \quad (0.4)$$

зависит от параметров μ и Λ .

В работе [2] рассмотрен сценарий возникновения и динамика по параметру μ метаустойчивых структур уравнения (0.1) при $\Lambda = 0$ с краевыми условиями (0.2). Для решения этой задачи построен и проведен анализ иерархии упрощенных моделей уравнения (0.1) при $\Lambda = 0$ с краевыми условиями (0.2) — галёркинских аппроксимаций средних размерностей. Оказалось, что в галёркинских аппроксимациях задачи (0.1)–(0.2) средних (20 - 30) размерностей реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций. Непрерывным ветвям стационарных точек систем обыкновенных дифференциальных уравнений, рожденных в результате седло-узловых бифуркаций, отвечают непрерывные ветви приближенных стационарных решений задачи (0.1)–(0.2). Множество приближенных стационарных решений задачи (0.1)–(0.2) типа переходного слоя с одной и двумя точками перехода правильно отражает характер эволюции метаустойчивых структур с одной и двумя точками перехода при увеличении t и при средних значениях параметра μ . Установлено, что для решения задачи (0.1)–(0.2) при средних значениях параметра μ применение метода Галёркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

В работе [5] методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений $\varphi_1(x, \mu)$, $\varphi_1(\pi - x, \mu)$ задачи (0.1)–(0.2) при $\Lambda = 0$, ответвляющихся от нулевого решения при $\mu = 1$. Утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости носят локальный по параметру μ характер. Отметим, что полученное в теореме

асимптотическое разложение решения $\varphi_1(x, \mu)$ в окрестности $\mu = 1$ является приближённым решением рассматриваемой задачи на достаточно широком интервале изменения параметра μ .

Данная работа посвящена построению стационарных структур канонической параболической задачи (0.1)–(0.2) ($\Lambda \neq 0$) при уменьшении положительного бифуркационного параметра μ с помощью метода центральных многообразий и метода Галёркина. Причём нас будет интересовать случай, когда $\mu \rightarrow 0$.

1. Бифуркационный анализ

Задачу (0.1)–(0.2) в соболевском пространстве $H^1(0, \pi)$ представим в виде:

$$\dot{u} + Bu = g(u), \quad (1.1)$$

где

$$B = B(\mu) = \mu A - I, \quad Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ g(u) = \Lambda u^2 - u^3. \quad (1.2)$$

Оператор B , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве $L_2[0, \pi]$, имеет полную ортогональную систему собственных функций

$$\cos kx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

соответствующих собственным значениям

$$-\lambda_k = -1 + k^2\mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < 1 - \mu < \delta$ уравнение (1.1) имеет два стационарных решения*

$$u_1 = \varphi_1(x, \mu), \quad u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu), \quad (1.4)$$

где функция $\varphi_1(x, \mu)$ удовлетворяет равенству

$$\varphi_1(x, \mu) = (z \cos x + z^2 p_2(x, \mu) + z^3 p_3(x, \mu) + z^4 p_4(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu) + r(z, x, \mu)) |_{z=z(\mu)},$$

$r(z, x, \mu) = O(|z|^6)$, а $z(\mu) > 0$ - непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + \left(-\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{-1 + 2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \right) z^3 + c_5 z^5 + \dots, \quad (1.5)$$

где

$$p_2 = \frac{\Lambda}{2(-1 + 2\lambda_1)} + \frac{\Lambda}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \cos 2x, \quad (1.6)$$

$$p_3 = \frac{2\Lambda^2 - 2\lambda_1 + \lambda_2}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x, \quad (1.7)$$

$$p_4 = -\frac{3\Lambda^3}{4(-1 + 2\lambda_1)^2(-1 + 4\lambda_1)} - \frac{\Lambda^3}{2(-1 + 2\lambda_1)(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} -$$

$$-\frac{3\Lambda}{8(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\Lambda^3}{8(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{3\Lambda}{4(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)} \cos 2x -$$

$$(1.8)$$

$$-\frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_2)} \cos 2x - \frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(-1 + 2\lambda_1)} \cos 2x +$$

$$+\frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 2x - \frac{\Lambda}{4(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 2x +$$

$$+\frac{\Lambda^3}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 4x - \frac{3\Lambda}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 4x +$$

$$+\frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 4x - \frac{\Lambda}{4(4\lambda_1 - \lambda_4)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 4x,$$

$$p_5 = \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left(-\frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_3} \cos 3x + \frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_5} \cos 5x \right) -$$

$$-\frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \frac{\Lambda^2}{4(3\lambda_1 - \lambda_3)(4\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x +$$

$$(1.9)$$

$$+\frac{\Lambda^2}{2(-1 + 2\lambda_1)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x + \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x -$$

$$-\frac{\Lambda^2}{4(4\lambda_1 - \lambda_4)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \frac{3\Lambda^2}{16(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x -$$

$$-\frac{\Lambda^4}{2(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x -$$

$$-\frac{\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x +$$

$$+\frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x -$$

$$-\frac{\Lambda^4}{(-1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x +$$

$$+\frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x -$$

$$-\frac{3\Lambda^4}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x + \frac{\Lambda^4}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_4)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x -$$

$$(1.10)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x + \\
& + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)(5\lambda_1 - \lambda_3)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{16(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_5)} \cos 5x - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_5)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 5x + \\
& + \frac{\Lambda^4}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_5)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 5x + \frac{\Lambda^4}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_5)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 5x - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_5)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 5x + \\
& + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_5)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 5x - \\
& - \frac{\Lambda^2}{4(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_5)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 5x - \frac{\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_5)} \cos 5x, \\
c_5 = & \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{4(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)^2} - \frac{3\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)^2(-1 + 4\lambda_1)} - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)} - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{\Lambda^4}{2(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \\
& - \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 2\lambda_1)(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
& + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\Lambda^4}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)}. \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Стационарные точки $u_1 = \varphi_1(x, \mu)$, $u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu)$ неустойчивы с индексом неустойчивости 1.

Доказательство. В окрестности $u = 0$, $\mu = 1$ существует центральное многообразие [6] надстроенной системы

$$\dot{u} + B(\mu)u = g(u), \quad \dot{\mu} = 0, \tag{1.12}$$

представимое в виде:

$$u = z \cos x + p_2(x, \mu)z^2 + p_3(x, \mu)z^3 + p_4(x, \mu)z^4 + p_5(x, \mu)z^5 + \dots, \tag{1.13}$$

где $p_2(x, \mu)$, $p_3(x, \mu)$, $p_4(x, \mu)$, $p_5(x, \mu)$, ... функции из пространства $H^1[0, \pi]$. На многообразии (1.13) уравнение (1.12) принимает вид:

$$\dot{z} = \lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots \tag{1.14}$$

Найдем коэффициенты разложений (1.13), (1.14). С этой целью подставим (1.13), (1.14) в уравнение (1.12):

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots) \cos x + 2z(\lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \\
 & + c_5 z^5 + \dots)p_2 + 3z^2(\lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots)p_3 + 4z^3(\lambda_1 z + c_2 z^2 + \\
 & + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots)p_4 + 5z^4(\lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots)p_5 + \\
 & + \dots + B(z \cos x + p_2(x, \mu)z^2 + p_3(x, \mu)z^3 + p_4(x, \mu)z^4 + p_5(x, \mu)z^5 + \dots) = g(z \cos x + \\
 & + p_2(x, \mu)z^2 + p_3(x, \mu)z^3 + p_4(x, \mu)z^4 + p_5(x, \mu)z^5 + \dots).
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Отметим, что коэффициент при z в левой и правой частях этого равенства совпадают. Приравняв коэффициент при z^2 , получим уравнение:

$$c_2 \cos x + (B + 2\lambda_1)p_2 = \frac{\Lambda}{2}(1 + \cos 2x). \tag{1.16}$$

Из условия его разрешимости в пространстве $H^1[0, \pi]$ в классе гладких по параметру μ функций следует, что $c_2 = 0$. При этом его решением в указанном классе является определенная в (1.6) функция.

Приравняв теперь в равенстве (1.15) коэффициент при z^3 и используя (1.2), получим уравнение:

$$c_3 \cos x + (B + 3\lambda_1)p_3 = -\frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x + (2\Lambda \cos x - 2c_2)p_2. \tag{1.17}$$

Из его условия разрешимости находим

$$c_3 = -\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{-1 + 2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

При этом его решением в указанном классе является определенная в (1.7) функция.

Приравняв теперь в равенстве (1.15) коэффициент при z^4 и используя (1.2), приходим к уравнению:

$$c_4 \cos x + (B + 4\lambda_1)p_4 = -\frac{3}{2}(1 + \cos 2x + 2c_3)p_2 + \Lambda p_2^2 + (2\Lambda \cos x - 3c_2)p_3. \tag{1.18}$$

Из его условия разрешимости находим $c_4 = 0$. При этом его решением в указанном классе является определенная в (1.8) функция.

Приравняв теперь в равенстве (1.15) коэффициент при z^5 и используя (1.2), приходим к уравнению:

$$\begin{aligned}
 c_5 \cos x + (B + 5\lambda_1)p_5 = & -2c_4 p_2 - 3 \cos x p_2^2 - \frac{3}{2}(1 + \cos 2x + 3c_3)p_3 + 2\Lambda p_2 p_3 + \\
 & + (2\Lambda \cos x - 4c_2)p_4.
 \end{aligned}$$

Из его условия разрешимости находим

$$\begin{aligned}
 c_5 = & \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{4(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \\
 & - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)^2} - \frac{3\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)^2(-1 + 4\lambda_1)} - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)} - \\
 & - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{\Lambda^4}{2(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \\
 & - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \\
 & - \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 2\lambda_1)(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
 & + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\Lambda^4}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)}.
 \end{aligned}$$

Затем, как и выше, убеждаемся, что этому уравнению удовлетворяет функция, удовлетворяющая равенству (1.9).

Процесс последовательного построения коэффициентов разложений (1.13), (1.14) неограниченно продолжим. Получающийся в результате ряд (1.13) допускает представление в виде степенного ряда по степеням $z, 1 - \mu$. Указанный ряд, как известно [6], является асимптотически сходящимся в окрестности $z = 0, \mu = 1$.

Переходим теперь к анализу уравнения (1.5). Его нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при $\mu > 1$. При уменьшении параметра μ и его прохождении через 1 от нуля ответвляются две непрерывные ветви неустойчивых стационарных точек. Отсюда в силу принципа сведения [6] следует справедливость теоремы.

Подчеркнём, что утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости носят локальный по параметру μ характер. Отметим, что в разложениях (1.5), (1.6), (1.8), (1.9), (1.11) знаменатели обращаются в нуль при $\mu = \frac{3}{4}$ и $\mu = \frac{1}{2}$. Поэтому анализ построения инвариантного многообразия (1.13) даёт основания для следующего утверждения: на интервале $(\frac{3}{4}, 1)$ изменения параметра μ справедливо следующее приближенное равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx (z \cos x + z^2 p_2(x, \mu) + z^3 p_3(x, \mu) + z^4 p_4(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu)) |_{z=z(\mu)}. \quad (1.19)$$

Очевидно, для $\varphi_1(\pi - x, \mu)$ справедливо аналогичное приближённое равенство:

$$\varphi_1(\pi - x, \mu) \approx (-z \cos x + z^2 p_2(x, \mu) - z^3 p_3(x, \mu) + z^4 p_4(x, \mu) - z^5 p_5(x, \mu)) |_{z=z(\mu)}. \quad (1.20)$$

В равенстве (1.19) $z(\mu) > 0$ — непрерывная ветвь неподвижных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + \left(-\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{-1 + 2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \right) z^3 + c_5 z^5,$$

где c_5 удовлетворяет равенству (1.11).

□

На рис. 1 изображены графики функции $\varphi_1(x, \mu)$, определяемые правой частью (1.19), при $\Lambda = 0.001$ и различных значениях параметра μ .

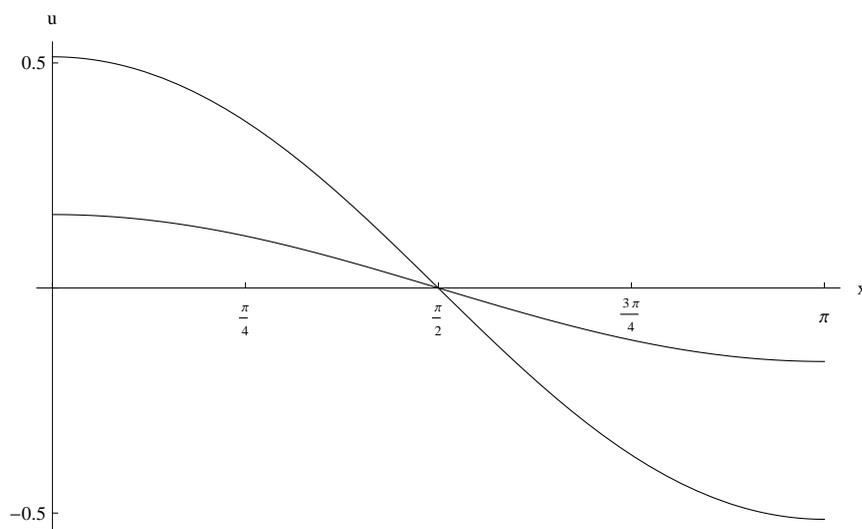


Рис. 1. Функция $\varphi_1(x, \mu)$ при $\Lambda = 0.001$, $\mu = 0.98$, $\mu = 0.8$

2. Аппроксимации уравнения (0.1)

В данной работе переходим к построению и анализу галёркинских аппроксимаций (1.1).

В работе [2] строился и проводился анализ иерархии упрощенных моделей [1] задачи (0.1)–(0.2) — галёркинских аппроксимаций (0.1)–(0.2) средних размерностей при $\Lambda = 0$.

Рассмотрим галёркинскую аппроксимацию уравнения (0.1) в виде:

$$u = z_0 + \sum_{k=1}^N z_k \cos kx. \quad (2.1)$$

Подставим (2.1) в (0.1) и приравняем затем коэффициенты при $\cos kx$, $k = 0, \dots, N$. В результате приходим к системам уравнений, правые части которых представляют собой полиномы степени 3.

Например, при $N = 2$ система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= z_0 + \Lambda z_0^2 + \frac{1}{2}\Lambda z_1^2 + \frac{1}{2}\Lambda z_2^2 - \frac{3}{2}z_0 z_1^2 - \frac{3}{4}z_1^2 z_2 - \frac{3}{2}z_0 z_2^2 - z_0^3, \\ \dot{z}_1 &= (1 - \mu)z_1 + 2\Lambda z_0 z_1 + \Lambda z_1 z_2 - 3z_0^2 z_1 - 3z_0 z_1 z_2 - \frac{3}{2}z_1 z_2^2 - \frac{3}{4}z_1^3, \\ \dot{z}_2 &= (1 - 4\mu)z_2 + \frac{1}{2}\Lambda z_1^2 + 2\Lambda z_0 z_2 - \frac{3}{2}z_0 z_1^2 - 3z_0^2 z_2 - \frac{3}{2}z_1^2 z_2 - \frac{3}{4}z_2^3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В системе (2.2), как и в системах порядка $N + 1$, нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при $\mu > 1$, а решения $(\frac{\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 + 4}}{2}, 0, 0)$ устойчивы для $\mu > 0$. При переходе параметра μ через 1 индекс неустойчивости (размерность неустойчивого многообразия) нуля увеличивается на порядок. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две ветви неподвижных точек $z^{1,1}(\mu, N)$ и $z^{1,2}(\mu, N)$, определённые на $[0, 1)$. Все компоненты $z_k^{1,1}(\mu, N)$, $k = 1, \dots, N$, отличны от 0. Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx z_0^{1,1} + \sum_{k=1}^N z_k^{1,1}(\mu, N) \cos kx. \quad (2.3)$$

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости φ_1 и $\varphi_1(\pi - x, \mu)$. Эта пара решений (0.1) рождается неустойчивой с индексом неустойчивости равным 1. Характер устойчивости φ_1 сохраняется на промежутке $(0, 1)$ изменения параметра μ .

Рассмотрим здесь задачу о поведении максимального собственного значения решения $\varphi_1(x, \mu)$ при средних значениях параметра μ . Обратимся в этой связи к вопросу о динамике по параметру μ максимального собственного значения $\lambda_1(\mu, N, 1)$ неподвижных точек $z^{1,1}(\mu, N)$ системы (2.2). Спектр устойчивости $z^{1,1}(\mu, N)$ лежит на вещественной оси, а его максимальная точка $\lambda_1 = \lambda_1(\mu, N, 1)$ при малых $1 - \mu > 0$ принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра неподвижной точки $z^{1,1}(\mu, N)$ для всех $0 < \mu < 1$ лежат на отрицательной полуоси и при убывании μ сближаются: максимальная точка убывает, минимальная возрастает. Согласно численному анализу λ_1 убывает при убывании μ для любого $30 < N < 40$. При приближении λ_1 к нулю скорость изменения λ_1 уменьшается. При этом выделяется интервал $(\mu_1(N), \mu_2(N))$ изменения μ , на которых $\lambda_1(\mu, N, 1)$ медленно меняется вблизи нуля. Процесс медленной эволюции λ_1 на интервале $(\mu_1(N), \mu_2(N))$, на котором λ_1 принимает малые положительные значения, переходит в стадию медленного монотонного возрастания при уменьшении μ от $\mu_1(N)$. Отметим, что возрастание N приводит к возрастанию $(\mu_2(N) - \mu_1(N))$ и убыванию $\mu_1(N)$. Есть основание полагать, что указанное здесь поведение λ_1 имеет место для любого фиксированного $N > 40$.

Приведём иллюстрирующие примеры при $\Lambda = 0.001$: $\mu_1(32) \approx 0.011$, $\mu_2(32) \approx 0.2$; $\lambda_1(0.2, 32, 1) = 0.005$, $\lambda_1(0.011, 32, 1) = 0.0021$, $\lambda_1(0.01, 32, 1) =$

0.0029; $\mu_1(34) \approx 0.01$, $\mu_2(34) \approx 0.2$; $\lambda_1(0.2, 34, 1) = 0.005$, $\lambda_1(0.01, 34, 1) = 0.0017$, $\lambda_1(0.009, 34, 1) = 0.0023$.

На рис. 2 представлены графики функции $\varphi_1(x, \mu)$ при различных значениях параметра μ .

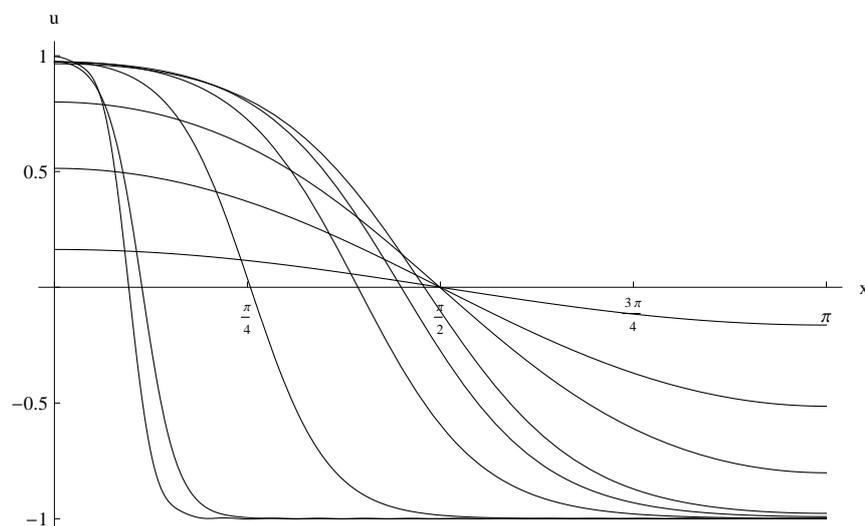


Рис. 2. Функция $\varphi_1(x, \mu)$ для $\mu = 0.98, 0.8, 0.5, 0.15, 0.1, 0.05, 0.03, 0.01, 0.005$, $\Lambda = 0.001$, $N = 33$

Построим численно решение задачи (0.1)–(0.3) при $\mu = 0.01$, $\Lambda = 0.001$. В качестве начальной функции (0.3) возьмём функцию $\varphi_1(x, \mu)$, удовлетворяющую приближённому равенству (2.3) ($N = 33$).

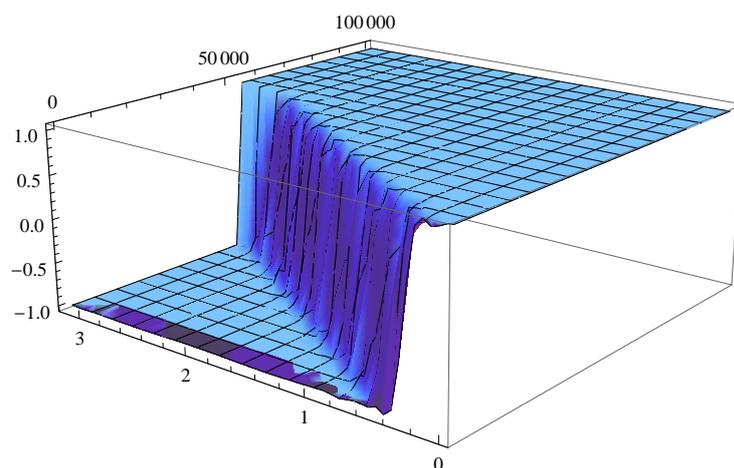


Рис. 3. Решение задачи (0.1)–(0.3), $\varphi(x) = \varphi_1(x, \mu)$, $\mu = 0.01$, $\Lambda = 0.001$

Для построения решения воспользуемся пакетом "Mathematica". В работе [5] при $\Lambda = 0$ решение задачи (0.1)–(0.3) не меняется в течение достаточно долго-

го времени $\approx 10^{19}$, то есть порождает метаустойчивые структуры. В данной же работе решение не меняется в течение времени $\approx 10^5$.

Следуя [4], с помощью принципа подобия можно построить, опираясь на $\varphi_1(x, \mu)$, решения $\varphi_k(x, \mu)$, $k = 2, 3, \dots$, краевой задачи (0.4). Пусть $\varphi(x, \mu)$ — отличное от нуля решение (0.4), определенное для всех $0 < \mu < a$. Продолжим функцию $\varphi(x, \mu)$ на промежуток $[-\pi, 0)$ чётным образом, а затем на всю ось x по периодичности с периодом 2π . Тогда при любом натуральном k функция $\varphi(kx, k^2\mu)$ будет удовлетворять краевой задаче (0.4) для всех $0 < \mu < \frac{a}{k^2}$. Отсюда вытекает, что на промежутке $0 < \mu < \frac{1}{k^2}$ справедливо равенство:

$$\varphi_k(x, \mu) = \varphi_1(kx, k^2\mu), \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Переход параметра μ через 4^{-1} приводит к увеличению на порядок индекса неустойчивости тривиального решения. В результате от нуля ответвляются две непрерывные по μ ветви пространственно-неоднородных $\varphi_2(x, \mu)$ и $\varphi_2(\pi - x, \mu)$ стационарных точек с индексом неустойчивости 2.

Динамика $\varphi_2(x, \mu)$ при уменьшении μ от критического значения 4^{-1} следует из равенств (2.4) и (1.19). На рис. 4 представлены графики функции $\varphi_2(x, \mu)$ при различных значениях параметра μ .

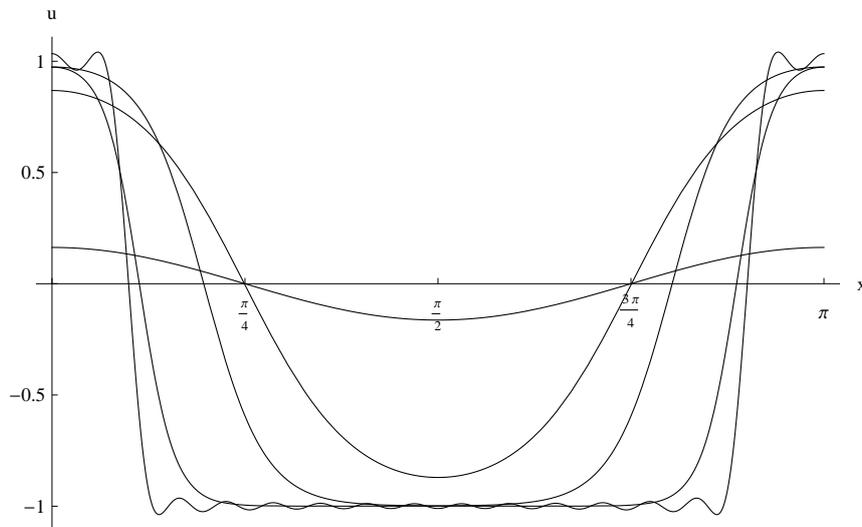


Рис. 4. Функция $\varphi_2(x, \mu)$ при $\Lambda = 0.001$, $\mu = 0.245, 0.1, 0.03, 0.01, 0.001$, $N = 33$

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости стационарных решений $\varphi_2(x, \mu)$ и $\varphi_2(\pi - x, \mu)$. Эта пара решений (0.1) рождается при $\mu = 4^{-1}$ неустойчивой с индексом неустойчивости равным 2.

Для анализа поведения спектра решения (0.1) $\varphi_2(x, \mu)$ при средних значениях параметра μ обратимся вновь к системе (2.2). Для каждого N в системе (2.2) при уменьшении параметра μ и его переходе через значение 4^{-1} индекс неустойчивости

нуля увеличивается на 1. В результате этой бифуркации от нулевого решения ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек $z^{2,1}(\mu, N)$ и $z^{2,2}(\mu, N)$, определённые на $[0, 2^{-2})$.

Все нечётные компоненты $z_{2k+1}^{2,1}(\mu, N)$, $k = 0, 1, \dots$, равны 0. Нулевая и чётные компоненты $z_{2k}^{2,1}(\mu, N)$, $k = 0, 1, \dots$, отличны от нуля. Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_2(x, \mu) \approx z_0^{2,1} + \sum_{k=1}^m z_{2k}^{2,1}(\mu, N) \cos(2k)x, \quad (2.5)$$

$m + 1 = N$, если N — нечётно, $m = N$, если N — чётно.

Переходим к анализу спектра неподвижных точек $z^{2,1}(\mu, N)$. Точки $z^{2,1}(\mu, N)$ рождаются неустойчивыми с индексом неустойчивости 2: две точки спектра $\lambda_1(\mu, N, 2) > \lambda_2(\mu, N, 2) > 0$, а остальные точки принадлежат отрицательной полуоси. При уменьшении параметра μ отрицательные точки спектра сближаются: максимальная точка убывает, а минимальная возрастает. Значительный интерес представляет вопрос о поведении $\lambda_k(\mu, N, 2)$, $k = 1, 2$. Приведем здесь результаты анализа о поведении $\lambda_k(\mu, N, 2)$, $k = 1, 2$ для $30 < N < 40$. При уменьшении параметра μ функции $\lambda_k(\mu, N, 2)$, $k = 1, 2$, монотонно убывают и приближаются к нулю. При подходе этих функций к нулю скорость их изменения становится малой. При этом наблюдались интервалы изменения μ , на которых $\lambda_k(\mu, N, 2)$, $k = 1, 2$, медленно меняются вблизи нуля. Указанные интервалы зависят от N . При условии уменьшения μ и выхода из соответствующего интервала медленной эволюции имеет место монотонное возрастание $\lambda_k(\mu, N, 2)$, $k = 1, 2$.

В качестве иллюстрации указанного поведения спектра приведём четыре наибольшие точки спектра при $N = 34$:

$$\begin{aligned} \mu = 0.050, & \quad \{-1.465, -1.414, 0.0050, 0.0035\}; \\ \mu = 0.030, & \quad \{-1.459, -1.455, 0.0020, 0.0020\}; \\ \mu = 0.010, & \quad \{-1.457, -1.457, 0.0018, 0.0017\}; \\ \mu = 0.009, & \quad \{-1.456, -1.455, 0.0025, 0.0025\}; \\ \mu = 0.005, & \quad \{-1.504, -1.501, 0.0075, 0.0061\}. \end{aligned}$$

Заключение

Методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений $\varphi_1(x, \mu)$, $\varphi_1(\pi - x, \mu)$, ответвляющихся от нулевого решения при $\mu = 1$. Утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости носят локальный по параметру μ характер. Проведённые численные расчёты позволяют утверждать, что полученные в теореме асимптотические разложения (1.19) и (1.20) решений

$\varphi_1(x, \mu)$, $\varphi_1(\pi - x, \mu)$ в окрестности $\mu = 1$ являются приближенными решениями рассматриваемой задачи на достаточно широком интервале изменения параметра μ .

С помощью принципа подобия (2.4) найдено решение $\varphi_2(x, \mu)$, которое отвечает от нуля при прохождении μ через значение $\frac{1}{4}$.

Методом Галёркина получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений, стационарным точкам которых отвечают приближённые стационарные решения исходной задачи.

Построено решение задачи (0.1)–(0.3) при $\mu = 0.01$, $\Lambda = 0.001$, где качестве начальной функции (0.3) взята функция $\varphi_1(x, \mu)$, удовлетворяющая приближённому равенству (2.3) ($N = 33$).

Отметим, что асимптотическое представление пространственно-неоднородных стационарных решений задачи (0.1)–(0.2) при малых μ можно построить, используя методы, развитые в [3]. Здесь же мы строили указанные решения в достаточно широком диапазоне изменения μ .

Таким образом, в работе построены стационарные структуры рассматриваемой задачи (0.1)–(0.2) ($\Lambda \neq 0$) при уменьшении положительного бифуркационного параметра μ методом центральных многообразий и методом Галёркина.

Список цитируемых источников

1. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. — М.: Физматлит, 2007. — 488 с.
Akhromeeva, T. S., Kurdyumov, S. P., Malinetskiy, G. G., Samarskiy, A. A. (2007). Structures and chaos in nonlinear media. Moscow: Fizmatlit. (in Russian)
2. *Белан Е. П., Плышевская С. П.* Метаустойчивые структуры скалярного уравнения Гинзбурга-Ландау // *Динамические системы*. — 2014. — Т. 4(32), №1-2. — С. 27–42.
Belan, E. P., Plyshevskaya, S. P. (2014). Metastable structure of the scalar Ginzburg-Landau equation. *Dinamicheskie sistemy*, 4(32), 27-42. (in Russian)
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990. — 208 с.
Vasil'eva, A. B., Butuzov, V. F. (1990). Asymptotic methods in the theory of singular perturbations. M.: Vysshaya Shkola. (in Russian)
4. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.
Mischenko, Ye. F., Sadovnichiy, V. A., Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. (2005). Processes in nonlinear media with diffusion. Moskva: Fizmatlit. (in Russian)
5. *Плышевская С. П.* Динамика стационарных структур в канонической параболической задаче // *Таврический вестник информатики и математики*. — 2015. — №4(29). — С. 66–76.
Plyshevskaya, S. P. (2015). Dynamics of stationary structures in the canonical parabolic problem. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki*, 4(29), 66-76. (in Russian)

6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

Henry, D. (1981). Geometric theory of semilinear parabolic equations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

Получена 04.10.2016