*Динамические системы, 2016, том 6(34), №3, 245–266*

УДК 517.9+532

# Теорема существования сильного решения одной начально-краевой задачи

**Д. О. Цветков**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Симферополь, 295007, e-mail: *tsvetdo@gmail.com*

**Аннотация.** Изучается задача о малых движениях системы, состоящей из трех тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя и верхняя жидкости по отношению к действию силы тяжести считаются вязкими, а средняя — идеальной. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

**Ключевые слова:** стратифицированная жидкость, начально-краевая задача, метод ортогонального проектирования, дифференциально-операторное уравнение, задача Коши в гильбертовом пространстве, сильное решение.

# Theorem on the existence of a strong solution for an initial-boundary value problem

**D. O. Tsvetkov**

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** Let immovable container be completely filled with system of three nonmixing heavy stratified incompressible fluids. The lower fluid (with respect to gravity) is viscous, middle fluid is ideal, upper one is viscous. The problem on small oscillations is studied on the base of approach connected with application of so-called operator matrices theory with unbounded entries. The initial boundary value problem is reduced to the Cauchy problem in some Hilbert space. The theorem on strong solvability of initial boundary value problem is proved.

**Keywords:** stratification effect in viscous and ideal fluids, differential equation in Hilbert space, accretive operator, strong solution.

**MSC 2010:** 35P05, 47D03

## Введение

Задачи о колебаниях стратифицированной жидкости, заполняющей ограниченную область пространства, находят приложение в теории сейш, в теории колебаний нефти в танкерах, при изучении колебаний криогенных жидкостей в закрытых резервуарах. Известно, что наличие вертикальной стратификации жидкости по плотности порождает в таких гидросистемах весьма интересные физические явления, связанные с действием сил плавучести. Не приводя подробной библиографии, упомянем лишь монографии [1], [4], [6] и работу [3], где изучаются те или иные аспекты теории колебаний такой системы.

В данной работе изучается задача о малых движениях системы из трех тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд, что является обобщением ситуации, рассмотренной в работе [3]. Проведены дополнительные построения, позволяющие в исследуемой задаче получить аналог известного ортогонального разложения Вейля гильбертова пространства векторных полей скоростей. Путем проектирования уравнений движения и неразрывности на выделенные ортогональные подпространства и введения вспомогательных краевых задач и их операторов, исходная начально-краевая задача приведена к дифференциальному уравнению первого порядка в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{R}\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}y = f, \quad y(0) = y^0.$$

Оператор $\mathcal{R}$ самосопряжен, положительно определен и ограничен в $\mathcal{H}$. Оператор $\mathcal{A}$ — аккретивный, однако не является максимальным аккретивным оператором. Применение метода операторных блок-матриц, общей теории абстрактных дифференциально-операторных уравнений [5] позволило доказать теорему о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи.

## 1. Математическая формулировка задачи

Рассмотрим неподвижный сосуд, полностью заполненный системой из трех несмешивающихся жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми и в силу этого действие капиллярных сил в задаче не учитывается. Области $\Omega_1$ и $\Omega_3$, соответственно нижняя и верхняя по отношению к действию силы тяжести, заполнены вязкими стратифицированными несжимаемыми жидкостями с коэффициентами динамической вязкости $\mu_i = \text{const} > 0 \ \ (i = 1, 3)$. Средняя область $\Omega_2$ заполнена идеальной стратифицированной несжимаемой жидкостью. При этом плотности жидкостей $\rho_i \ \ (i = \overline{1, 3})$ в состоянии покоя изменяются вдоль вертикальной оси.

Обозначим через $\vec{n}_i \ (i = \overline{1, 3})$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_i \ (i = \overline{1, 3})$ и направленный вне $\Omega_i \ (i = \overline{1, 3})$. Через $S_i$ обозначим часть стенки сосуда, отвечающей области $\Omega_i \ (i = \overline{1, 3})$. Представим $\Gamma = \partial\Omega_2 \setminus \overline{S_2} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ — это нижняя и верхняя границы области $\Omega_2$ соответственно. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что ось $Ox_3$ направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на поверхности $\Gamma_1$.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкостей по плотностям $\rho_i = \rho_i(x_3) \ \ (i = \overline{1, 3})$:

$$0 < N^2_{i,\min} \leq N^2_i(x_3) \leq N^2_{i,\max} =: N^2_{0,i} < \infty, \quad N^2_i(x_3) := -\frac{g\rho_i'(x_3)}{\rho_i(x_3)}. \tag{1.1}$$

Рассмотрим малые движения изучаемой гидросистемы, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u}_i \ (i = \overline{1, 3})$ — поля скоростей в жидкостях, а $\zeta_i = \zeta_i(t, \hat{x}), \ \hat{x} \in \Gamma_i$ представляют собой отклонение свободно движущихся поверхностей жидкостей

$\Gamma_i(t)$ от $\Gamma_i$ $(i=1,2)$ по нормали $\vec{n}_i$; $p_i = p_i(t,x)$, $x \in \Omega_i$ $(i=\overline{1,3})$ — отклонение полей давлений от равновесных; $\widetilde{\rho}_i = \widetilde{\rho}_i(t,x)$, $x\in\Omega_i$ $(i=\overline{1,3})$ — отклонения полей плотности от исходных $\rho_i(x_3)$.

Линейная постановка начально-краевой задачи о колебаниях рассматриваемой гидросистемы выглядит следующим образом (см., например, [3]):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} = \rho_i^{-1}(x_3)(-\nabla p_i + \mu_i\Delta\vec{u}_i - \widetilde{\rho}_i g\vec{e}_3) + \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i,\ i=1,3),\\
&\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} = \rho_2^{-1}(x_3)(-\nabla p_2 - \widetilde{\rho}_2 g\vec{e}_3) + \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в}\, \Omega_2\,),\\
&\frac{\partial \widetilde{\rho}_i}{\partial t} + \nabla\rho_i\cdot\vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i,\ i=\overline{1,3}),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{u}_i = \vec{0} \quad (\text{на } S_i,\ i=1,3), \qquad \vec{u}_2\cdot\vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } S_2\,),\\
&\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \vec{u}_1\cdot\vec{n}_1 = \vec{u}_2\cdot\vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma_1\,), \qquad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \vec{u}_2\cdot\vec{n}_2 = \vec{u}_3\cdot\vec{n}_2 \quad (\text{на } \Gamma_2\,),\\
&\mu_1\left(\frac{\partial(u_1)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial(u_1)_3}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (k=1,2), \quad (\text{на } \Gamma_1\,),\\
&-p_1 + 2\mu_1\frac{\partial(u_1)_3}{\partial x_3} = -p_2 - g\Delta\rho_1\zeta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1\,), \quad \Delta\rho_1 := \rho_1(0)-\rho_2(0),
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_3\left(\frac{\partial(u_3)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial(u_3)_3}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (k=1,2), \quad (\text{на } \Gamma_2\,),\\
&-p_3 + 2\mu_3\frac{\partial(u_3)_3}{\partial x_3} = -p_3 + g\Delta\rho_3\zeta_2 \quad (\text{на } \Gamma_2\,), \quad \Delta\rho_3 := \rho_2(b)-\rho_3(b),
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{u}_i(0,x) = \vec{u}_i^0(x), \quad \widetilde{\rho}_i(0,x) = \widetilde{\rho}_i^0(x) \quad (\,x\in\Omega_i, \quad i=\overline{1,3}\,),\\
&\zeta_j(0,\hat{x}) = \zeta_j^0(\hat{x}) \quad (\,\hat{x}\in\Gamma_i, \quad j=1,2\,).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

## 2. Об ортогональном разложении гильбертова пространства вектор-функций

Пусть задана область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Граница области $\partial\Omega = \overline{S}\cup\Gamma$, где $\Gamma$ — связное множество с $\operatorname{mes}\Gamma > 0$. Введем пространство $H^1_\Gamma(\Omega,\rho)$ функций из $H^1(\Omega,\rho)$, имеющих средним значением по $\Gamma$ нуль, с нормой

$$\|p\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega,\rho)} = \int_\Omega \rho^{-1}|\nabla p|^2 d\Omega < \infty, \qquad \int\limits_\Gamma p\, d\Gamma = 0. \tag{2.1}$$

Как и при $\rho = \mathrm{const}$, для $H^1_\Gamma(\Omega,\rho)$ имеет место ортогональное разложение:

$$H^1_\Gamma(\Omega,\rho) = H^1_{h,S}(\Omega,\rho)\oplus H^1_{0,\Gamma}(\Omega,\rho), \tag{2.2}$$

где

$$H^1_{h,S}(\Omega,\rho) = \{\, p \in H^1_\Gamma(\Omega,\rho) \mid \quad \nabla\cdot(\rho^{-1}\nabla p) = 0 \quad (\text{в } \Omega\,),$$
$$\rho^{-1}\nabla p \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S\,), \quad \int\limits_\Gamma p\, d\Gamma = 0\,\},$$
$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega,\rho) = \{\, p \in H^1_\Gamma(\Omega,\rho) \mid \quad p = 0 \quad (\text{на } \Gamma\,)\,\},$$

причем ортогональность в (2.2) понимается относительно скалярного произведения, соответствующего норме (2.1).

Предположим теперь, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ — связные множества ненулевой меры, расположенные горизонтально.

Введем в рассмотрение множество

$$H^1_{\widehat{h,S}}(\Omega,\rho) := \{\, p \in H^1_\Gamma(\Omega,\rho) \mid \nabla\cdot(\rho^{-1}\nabla p) = 0 \ (\text{ в } \Omega\,), \quad \rho^{-1}\nabla p\cdot\vec{n} = 0 \ (\text{ на } S\,),$$
$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial p}{\partial n}\, d\Gamma_1 = 0, \quad \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial p}{\partial n}\, d\Gamma_2 = 0, \quad \int\limits_\Gamma p\, d\Gamma = 0\,\}. \tag{2.3}$$

В работе [3] доказана

**Лемма 1.** *Справедливо ортогональное разложение*

$$H^1_{h,S}(\Omega,\rho) = H^1_{\widehat{h,S}}(\Omega,\rho) \oplus \{\alpha\,\varphi_0\}, \tag{2.4}$$

*где* $\{\alpha\,\varphi_0\}$ *— одномерное подпространство, а функция* $\varphi_0$ *является решением следующей краевой задачи:*

$$\begin{gathered} \nabla\cdot(\rho^{-1}\nabla\varphi_0) = 0 \quad (\text{ в } \Omega\,), \quad \rho^{-1}\nabla\varphi_0\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{ на } S\,), \\ \varphi_0 = mes\,\Gamma_1 \quad (\text{ на } \Gamma_2\,), \quad \varphi_0 = -mes\,\Gamma_2 \quad (\text{ на } \Gamma_1\,). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Разложение (2.4) порождает разложение подпространства потенциальных полей $\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega,\rho) = \vec{G}_{\widehat{h,S}}(\Omega,\rho) \oplus \{\alpha\,\rho^{-1}\nabla\varphi_0\}. \tag{2.6}$$

## 3. Метод ортогонального проектирования

В этом пункте для исследования начально-краевой задачи (1.2) — (1.5) мы применим метод проектирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса на ортогональные подпространства гильбертовых пространств $\vec{L}_2(\Omega_i,\rho_i)$ $(i=\overline{1,3})$.

Для области $\Omega_i$ $(i = 1,3)$ введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_i,\rho_i)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{L}_2(\Omega_i,\rho_i) = \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_i) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i,\rho_i), \quad \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_i) = \vec{J}_0(\Omega_i,\rho_i) \oplus \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i,\rho_i),$$

где (для удобства $\Gamma_2$ переобозначим через $\Gamma_3$)

$$\begin{aligned}
\vec{J}_0(\Omega_i,\rho_i) &:= \{\, \vec{u}_i \mid \mathrm{div}\vec{u}_i = 0 \ (\text{в}\ \Omega_i),\ \vec{u}_i\cdot\vec{n}_i = 0 \ (\text{на}\ \partial\Omega_i),\ i=1,3 \,\},\\
\vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i,\rho_i) &:= \{\, \vec{v}_i \mid \vec{v}_i = \rho_i^{-1}(x_3)\nabla p_i,\ \vec{v}_i\cdot\vec{n}_i = 0 \ (\text{на}\ S_i),\\
&\qquad \nabla\cdot\vec{v}_i = 0 \ (\text{в}\ \Omega_i),\ \int\limits_{\Gamma_i} p_i\, d\Gamma_i = 0,\ i=1,3 \,\},\\
\vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i,\rho_i) &:= \{\, \vec{w}_i \mid \vec{w}_i = \rho_i^{-1}(x_3)\nabla\varphi_i,\ \varphi_i = 0 \ (\text{на}\ \Gamma_i),\ i=1,3 \,\}.
\end{aligned}$$

Здесь операции $\mathrm{div}\,\vec{u}$ и $(\vec{u}\cdot\vec{n})_{\partial\Omega}$ понимаются в смысле обобщенных функций (распределений), см. [2, с. 101 – 102].

Введем ортопроекторы $P_{0,S_i}$ и $P_{0,\Gamma_i}$ на подпространства $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_i)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i,\rho_i)$ $(i=1,3)$ соответственно. В силу условия соленоидальности и условия прилипания на $S_i$ для $\vec{u}_i$ $(i=1,3)$, считаем, что поле $\vec{u}_i$ принадлежит пространству $\vec{J}^1_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_i)$, которое плотно вложено в пространство $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_i)$ $(i=1,3)$ (см., например, [3]) . Подействуем введенными ортопроекторами $P_{0,S_i}$ и $P_{0,\Gamma_i}$ $(i=1,3)$ на уравнения для вязких жидкостей из (1.2), получим:

$$\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t} = -\,\rho_i^{-1}\nabla p_{i,1} + P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}\mu_i\Delta\vec{u}_i) - P_{0,S_i}(\rho_1^{-1}g\tilde{\rho}_i\vec{e}_3) + P_{0,S_i}\vec{f} \quad (\text{в}\ \Omega_i), \tag{3.1}$$

$$\vec{0} = -\,\rho_i^{-1}\nabla p_{i,2} + P_{0,\Gamma_i}(\rho_i^{-1}\mu_i\Delta\vec{u}_i) - P_{0,\Gamma_i}(\rho_i^{-1}g\widetilde{\rho}_i\vec{e}_3) + P_{0,\Gamma_i}\vec{f} \quad (\text{в}\ \Omega_i), \tag{3.2}$$

где $\rho_i^{-1}\nabla p_{i,1} := P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}\nabla p_i)$, $\quad \rho_i^{-1}\nabla p_{i,2} := P_{0,\Gamma_i}(\rho_i^{-1}\nabla p_i)$ $(i=1,3)$.

Из уравнений (3.2) при известных $\vec{u}_i$ и $\widetilde{\rho}_i$ составляющие $\rho_i^{-1}\nabla p_{i,2}$ $(i = 1,3)$ градиентов давлений из подпространств $\vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i,\rho_i)$ $(i=1,3)$ вычисляются непосредственно. Учитывая эти тривиальные соотношения, в дальнейшем будем рассматривать для вязких жидкостей основные уравнения (3.1).

Для области $\Omega_2$ введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_2,\rho_2)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{L}_2(\Omega_2,\rho_2) = \vec{J}_0(\Omega_2,\rho_2)\oplus\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2,\rho_2)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2,\rho_2). \tag{3.3}$$

Подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2,\rho_2)$ из (3.3) состоит из квазипотенциальных гармонических полей с нулевой нормальной составляющей на твердой стенке $S_2$, для которых также выполнено условие сохранения объема по всей границе $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$. В изучаемой задаче, в силу несжимаемости жидкостей, условие сохранения объема должно выполняться на каждой из границ $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ в отдельности. Отсюда следует, что подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2,\rho_2)$ шире, чем требуется. В связи с этим, воспользуемся разложением этого подпространства в ортогональную сумму двух подпространств см. (2.6), естественным образом приспособленных к данной задаче.

Учитывая (2.6) и (3.3), введем ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_2,\rho_2) = \vec{J}_0(\Omega_2,\rho_2)\oplus\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2,\rho_2)\oplus\{\alpha\,\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0\}\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2,\rho_2), \tag{3.4}$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Введем также ортопроекторы на соответствующие подпространства: $P_0,\ P_{\widehat{h,S_2}},\ P_\varphi,\ P_{0,\Gamma}$.

Основываясь на разложении (3.4), применим метод ортогонального проектирования к уравнению Эйлера из начально-краевой задачи (1.2). В силу условия соленоидальности и условия непротекания на твердой стенки $S_2$ считаем, что $\vec{u}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \oplus \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) =: \vec{J}_{\widehat{0,S_2}}(\Omega_2, \rho_2)$.

Поле $\rho_2^{-1}\nabla p_2$ квазипотенциально, поэтому

$$\rho_2^{-1}\nabla p_2 \in \vec{G}(\Omega_2, \rho_2) := \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) \oplus \{\alpha\rho_2^{-1}\,\nabla\varphi_0\} \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2, \rho_2).$$

Представим поля $\vec{u}_2$ и $\rho_2^{-1}\nabla p_2$ в виде:

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2, \qquad \rho_2^{-1}\nabla p_2 = \rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} + \rho_2^{-1}\nabla p_{2,2} + \alpha(t)\,\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0, \tag{3.5}$$

$$\text{где} \qquad \vec{v}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2), \qquad \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2 \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2),$$
$$\rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2), \qquad \rho_2^{-1}\nabla p_{2,2} \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2, \rho_2). \tag{3.6}$$

Подставим эти представления в уравнение движения для идеальной жидкости из (1.2) и применим к нему ортопроекторы, отвечающие разложению (3.4). Получим:

$$\frac{\partial\vec{v}_2}{\partial t} = -\,P_0(\rho_2^{-1}g\widetilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_0\vec{f}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) = -\,\rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} - P_{\widehat{h,S_2}}(\rho_2^{-1}g\widetilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f}, \tag{3.8}$$

$$\alpha(t)\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0 = -\,P_\varphi(\rho_2^{-1}g\widetilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_\varphi\vec{f}, \tag{3.9}$$

$$\rho_2^{-1}\nabla p_{2,2} = -\,P_{0,\Gamma}(\rho_2^{-1}g\widetilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_{0,\Gamma}\vec{f}. \tag{3.10}$$

Соотношения (3.9) и (3.10) показывают, что $\alpha\,\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0$ и $\rho_2^{-1}\nabla p_{2,2}$ могут быть найдены, если известно решение $\widetilde{\rho}_2$. В то же время эти поля не входят в (3.7) (3.8). Отметим также, что для элементов подпространства $\{\alpha\,\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0\}$ выполнены условия:

$$\nabla\cdot(\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0) = 0\ \ (\text{в } \Omega_2\,), \quad \rho_2^{-1}\nabla\varphi_0\cdot\vec{n} = 0\ \ (\text{на } S_2\,),$$
$$\varphi_0 = \alpha\,\mathrm{mes}\,\Gamma_1\ \ (\text{на } \Gamma_2), \quad \varphi_0 = -\alpha\,\mathrm{mes}\,\Gamma_2\ \ (\text{на } \Gamma_1\,),$$

поэтому из (3.9) находятся все коэффициенты $\alpha$, и тем самым составляющая $\{\alpha\rho_2^{-1}\nabla\varphi_0\}$.

Учитывая тривиальные соотношения (3.9), (3.10), в дальнейшем будем рассматривать для идеальной жидкости уравнения (3.7), (3.8).

## 4. Формулировка задачи после отделения тривиальных соотношений

Перейдем к окончательной формулировке задачи с учетом проведенных выше преобразований. Введем операторы $\gamma_i$ — операторы нормальных следов полей, заданных в $\Omega_i$, на границу $\Gamma_i$ $(i = 1, 3)$. Отметим здесь, что единичные векторы $\vec{n}_i$ нормальны к $\partial\Omega_i$ и направлены вне $\Omega_i$ $(i = 1, 3)$. Рассмотрим кинематические соотношения из (1.4). В силу представлений (3.5), (3.6) можем написать:

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = \gamma_1\vec{u}_1 = \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2\cdot\vec{n}_1 \ (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial\zeta_2}{\partial t} = \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2\cdot\vec{n}_2 = -\gamma_3\vec{u}_3 \ (\text{на } \Gamma_2).$$

После отделения тривиальных соотношений (3.2), (3.9) и (3.10) начально-краевая задача (1.2) — (1.5) формулируется следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t} = -\rho_i^{-1}\nabla p_{i,1} + P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}\mu_i\Delta\vec{u}_i) - \\ - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}g\widetilde{\rho}_i\vec{e}_3) + P_{0,S_i}\vec{f} \qquad (\text{в } \Omega_i,\ i = 1, 3), \end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\widetilde{\rho}_i}{\partial t} + \nabla\rho_i\cdot\vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i,\ i = 1, 3), \qquad \vec{u}_i = \vec{0} \quad (\text{на } S_i,\ i = 1, 3),$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) = -\rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} - P_{\widehat{h,S_2}}(\rho_2^{-1}g\widetilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \frac{\partial\vec{v}_2}{\partial t} = -P_0(\rho_2^{-1}g\widetilde{\rho}_2\vec{e}_3) + P_0\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2\cdot\vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } S_2), \qquad \vec{v}_2\cdot\vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega_2), \\ \frac{\partial\widetilde{\rho}_2}{\partial t} + \nabla\rho_2\cdot(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) + \nabla\rho_2\cdot\vec{v}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2),\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered}\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2\cdot\vec{n}_2 = -\gamma_1\vec{u}_1 = -\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2\cdot\vec{n}_2 = -\gamma_3\vec{u}_3 = \frac{\partial\zeta_2}{\partial t} \quad (\text{на } \Gamma_3),\end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}\mu_i\left(\frac{\partial(u_i)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial(u_i)_3}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (k = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma_i\ (i = 1, 3)), \\ -P_{\Gamma_1}p_{1,1} + 2\mu_1\frac{\partial(u_1)_3}{\partial x_3} = -g\Delta\rho_1\zeta_1 - P_{\Gamma_1}p_{2,1} \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ -P_{\Gamma_3}p_{3,1} + 2\mu_3\frac{\partial(u_3)_3}{\partial x_3} = g\Delta\rho_3\zeta_2 - P_{\Gamma_3}p_{2,1} \quad (\text{на } \Gamma_3),\end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered}\vec{u}_1(0,x) = P_{0,S_1}\vec{u}_1^0(x), \quad \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2(0,x) = P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x), \quad \vec{v}_2(0,x) = P_0\vec{u}_2^0(x), \\ \widetilde{\rho}_i(0,x) = \widetilde{\rho}_i^0(x) \quad (i = \overline{1,3}), \quad \zeta_j(0,\hat{x}) = \zeta_j^0(\hat{x}) \quad (j = 1, 2).\end{gathered} \tag{4.5}$$

Через $P_{\Gamma_i}$ обозначены ортопроекторы на $L_{2,\Gamma_i} := L_2(\Gamma_i)\ominus\{1_{\Gamma_i}\}$ $(i = 1, 3)$ , $\Gamma_2$ переобозначим через $\Gamma_3$.

## 5. Вспомогательные краевые задачи и их операторы

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

**Вспомогательная задача I.**

$$\rho_i^{-1}(x_3)\nabla p_i - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}\mu_i\Delta\vec{u}_i) = \vec{f}, \qquad \mathrm{div}\vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i,\ i = 1,3),$$
$$\vec{u}_i = \vec{0} \quad (\text{на } S_i,\ i = 1,3), \qquad -p_i + 2\mu_i\frac{\partial(u_i)_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_i,\ i = 1,3),$$
$$\mu_i\left(\frac{\partial(u_i)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial(u_i)_3}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (k = 1,2, \quad \text{на } \Gamma_i, \quad i = 1,3).$$

Это аналог первой вспомогательной задачи С.Г.Крейна (см. [2, с.116]). Она имеет единственное обобщенное решение $\vec{u}_i = \mu_i^{-1}A_i^{-1}\vec{f}$ для любого вектора $\vec{f}$ из $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_i)$ $(i = 1,3)$, где $A_i$ $(i = 1,3)$ — оператор задачи I. Оператор $A_i$ есть неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор с $\overline{\mathcal{D}(A_i)} = \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_i)$, при этом оператор $A_i^{-1}$ является положительным и компактным в $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_i)$ $(i = 1,3)$.

**Вспомогательная задача II.**

$$\nabla\cdot(\rho_i^{-1}\nabla p_i) = 0 \quad (\text{в } \Omega_i,\ i = 1,3), \quad \rho_i^{-1}\nabla p_i\cdot\vec{n}_i = 0 \quad (\text{на } S_i,\ i = 1,3),$$
$$\rho_i^{-1}p_i = \tau_i \quad (\text{на } \Gamma_i,\ i = 1,3), \quad \int\limits_{\Gamma_i}\tau_i\,d\Gamma_i = 0.$$

Это аналог известной задачи Зарембы (при $\rho_i = \mathrm{const}$, см. [2, с.45]). Она имеет единственное решение $p_i \in H^1_{\Gamma_i}(\Omega_i,\rho_i)$ при $\tau_i \in H^{\frac{1}{2}}_{\Gamma_i}$ $(i = 1,3)$.

**Вспомогательная задача III.**

$$\nabla\cdot(\rho_2^{-1}\nabla\Psi_1) = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } S_2),$$
$$\rho_2^{-1}(b)\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_3), \ \rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2 = \eta_1 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \int\limits_{\Gamma}\Psi_1\,d\Gamma = 0.$$

**Вспомогательная задача IV.**

$$\nabla\cdot(\rho_2^{-1}\nabla\Psi_2) = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \rho_2^{-1}\nabla\Psi_2\cdot\vec{n}_2 = 0 \quad (\text{на } S_2),$$
$$\rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_2\cdot\vec{n}_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \rho_2^{-1}(b)\nabla\Psi_2\cdot\vec{n}_2 = \eta_2 \ (\text{на } \Gamma_3), \ \int\limits_{\Gamma}\Psi_2\,d\Gamma = 0.$$

Задачи III и IV — это задачи Неймана. Если $\eta_1 \in H^{-\frac{1}{2}}_{\Gamma_1}$, то задача III имеет единственное решение $\Psi_1 \in H^1_{\Gamma}(\Omega_2,\rho_2)$, аналогично, если $\eta_2 \in H^{-\frac{1}{2}}_{\Gamma_3}$, то задача IV имеет единственное решение $\Psi_2 \in H^1_{\Gamma}(\Omega_2,\rho_2)$ (см. [2, с.45]).

Введем по решениям задач III и IV операторы:

$$\begin{aligned} &\rho_2^{-1}(0)P_{\Gamma_1}\Psi_1|_{\Gamma_1} =: S_{1,1}\eta_1, \quad \rho_2^{-1}(b)P_{\Gamma_3}\Psi_1|_{\Gamma_3} =: S_{2,1}\eta_1,\\ &\rho_2^{-1}(0)P_{\Gamma_1}\Psi_2|_{\Gamma_1} =: S_{1,2}\eta_2, \quad \rho_2^{-1}(b)P_{\Gamma_3}\Psi_2|_{\Gamma_3} =: S_{2,2}\eta_2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь следует отметить, что оператор $S_{1,1}$ — самосопряженный, положительный и компактный в $L_{2,\Gamma_1}$, а оператор $S_{2,2}$ — самосопряженный, положительный и компактный в $L_{2,\Gamma_3}$.

**Вспомогательная задача V.**

$$\nabla\cdot(\rho_1^{-1}\nabla w_{1,2}) = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \rho_1^{-1}\nabla w_{1,2}\cdot\vec{n}_1 = 0 \quad (\text{на } S_1),$$
$$\rho_1^{-1}(0)\nabla w_{1,2}\cdot\vec{n}_1 = \eta_0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \int\limits_{\Gamma_1} w_{1,2}\,d\Gamma_1 = 0.$$

Задача V — это задача Неймана. Если $\eta_0 \in H_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, то задача имеет единственное решение $w_{1,2} \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1, \rho_1)$. Введем по решению задачи V оператор:

$$\rho_1^{-1}(0)P_{\Gamma_1}w_{1,2}|_{\Gamma_1} =: S_0\eta_0,$$

оператор $S_0$ является самосопряженным, положительным и компактным в $L_{2,\Gamma_1}$.

## 6. Вывод системы операторных уравнений

Представим в (4.1) поле $\rho_1^{-1}\nabla p_{i,1}$ $(i = 1, 3)$ в виде $\rho_1^{-1}\nabla p_{i,1} = \rho_1^{-1}\nabla\widetilde{p}_{i,1} + \rho_1^{-1}\nabla\widehat{p}_{i,1}$ и подберем поле $\rho_1^{-1}\nabla\widetilde{p}_{i,1}$ таким образом, чтобы поле $\vec{u}_i$ $(i = 1, 3)$ являлось решением следующей краевой задачи:

$$\rho_i^{-1}\nabla\widetilde{p}_{i,1} - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}\mu_i\Delta\vec{u}_i) = -\rho_i^{-1}\nabla\widehat{p}_{i,1} - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}g\widetilde{\rho}_i\vec{e}_3) + P_{0,S_i}\vec{f} - \frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t},$$
$$\operatorname{div}\vec{u}_i = 0 \quad (\text{в } \Omega_i), \quad \vec{u}_i = \vec{0} \quad (\text{на } S_i),$$
$$\mu_i\left(\frac{\partial(u_i)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial(u_i)_3}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (k = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma_i),$$
$$-P_{\Gamma_i}\widetilde{p}_{i,1} + 2\mu_i\frac{\partial(u_i)_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_i), \qquad i = 1, 3.$$

Используя вспомогательную задачу I, заключаем, что последняя краевая задача имеет единственное обобщенное решение

$$\vec{u}_i = \mu_i^{-1}A_i^{-1}\left(P_{0,S_i}\vec{f} - \frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t} - \rho_i^{-1}\nabla\widehat{p}_{i,1} - P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}g\widetilde{\rho}_i\vec{e}_3)\right)$$

для правой части из $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ $(i = 1, 3)$. Свойства оператора $A_i$ описаны в предыдущем пункте. Итак, можно написать:

$$\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t} + \mu_iA_i\vec{u}_i + \rho_i^{-1}\nabla\widehat{p}_{i,1} + P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}g\widetilde{\rho}_i\vec{e}_3) = P_{0,S_i}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_i, \ i = 1, 3). \tag{6.1}$$

При расщеплении второго и третьего условия (4.4) для нормальных напряжений на границах вязкой жидкости остались условия

$$P_{\Gamma_1}\widehat{p}_{1,2} = g\Delta\rho_1\zeta_1 + P_{\Gamma_1}p_{2,1} \quad (\text{на}\,\Gamma_1\,),$$

$$P_{\Gamma_3}\widehat{p}_{3,2} = -g\Delta\rho_3\zeta_2 + P_{\Gamma_3}p_{2,1} \quad (\text{на}\,\Gamma_3\,).$$

Учитывая принадлежность $\rho_i^{-1}\nabla\widehat{p}_{i,2} \in \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i,\rho_i)$, приходим к выводу, что потенциал $P_{\Gamma_i}\widehat{p}_{i,2}$ удовлетворяет II вспомогательной задаче при $\tau_1 = \ g\Delta\rho_1\zeta_1 + P_{\Gamma_1}p_{2,1},\ \tau_2 = \ -g\Delta\rho_3\zeta_2 + P_{\Gamma_3}p_{2,1}$. Поэтому можно считать, что

$$\rho_1^{-1}\nabla\widehat{p}_{1,2} =: \rho_1^{-1}(0)G_1(g\Delta\rho_1\zeta_1 + P_{\Gamma_1}p_{2,1}), \tag{6.2}$$

$$\rho_3^{-1}\nabla\widehat{p}_{3,2} =: \rho_3^{-1}(b)G_3(-g\Delta\rho_3\zeta_2 + P_{\Gamma_3}p_{2,1}).$$

Оператор $G_i$ ограниченно действует из пространства $H_{\Gamma_i}^{\frac{1}{2}}$ в пространство $\vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i,\rho_i)$ $(i=1,3)$, что будет показано ниже.

Обозначим

$$P_{0,S_i}(\rho_i^{-1}g\widetilde{\rho}_i\vec{e}_3) =: \widetilde{C}_i\widetilde{\rho}_i, \quad -\nabla\rho_i\cdot\vec{u}_i =: \widetilde{C}_i^*\vec{u}_i \quad (i=1,3) \tag{6.3}$$

и введем гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega_i)$ $(i=1,3)$ скалярных функций со скалярным произведением:

$$(\varphi,\psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega_i)} := \int\limits_{\Omega_i} g^2\left[\rho_i(x_3)N_i^2(x_3)\right]^{-1}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,d\Omega_i.$$

**Лемма 2.** *Операторы* $\widetilde{C}_i : \mathfrak{L}_2(\Omega_i) \to \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_i)$ *и* $\widetilde{C}_i^* : \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_i) \to \mathfrak{L}_2(\Omega_i)$ $(i=1,3)$, *определенные соотношениями* (6.3), *взаимно сопряжены и*

$$\|\widetilde{C}_i\| = \|\widetilde{C}_i^*\| \le N_{0,i}. \tag{6.4}$$

*Доказательство.* Утверждение леммы непосредственно следует из тождества

$$(\widetilde{C}_i\widetilde{\rho}_i,\vec{u}_i) = (\widetilde{\rho}_i,\widetilde{C}_i^*\vec{u}_i)_{\mathfrak{L}_2(\Omega_i)} = g\int\limits_{\Omega_i}\widetilde{\rho}_i\,\overline{u_{i_3}}\,d\Omega_i$$

$$\forall\vec{u}_i \in \vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_i), \quad \forall\rho_i \in \mathfrak{L}_2(\Omega_i), \quad i=1,3.$$

□

С учетом (6.2) и (6.3) перепишем (6.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \mu_1A_1\vec{u}_1 + \rho_1^{-1}(0)g\Delta\rho_1G_1\zeta_1 + \rho_1^{-1}(0)G_1P_{\Gamma_1}p_{2,1} + \widetilde{C}_1\widetilde{\rho}_1 = P_{0,S_1}\vec{f},\\
&\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t} + \mu_3A_3\vec{u}_3 - \rho_3^{-1}(b)g\Delta\rho_3G_3\zeta_2 + \rho_3^{-1}(b)G_3P_{\Gamma_3}p_{2,1} + \widetilde{C}_3\widetilde{\rho}_3 = P_{0,S_3}\vec{f}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Рассмотрим уравнения для идеальной жидкости из (4.1).

Обозначим

$$\begin{aligned} &P_{\widehat{h,S_2}}(\rho_2^{-1} g\widetilde{\rho}_2\vec{e}_3) =: \widetilde{C}_{2,1}\widetilde{\rho}_2, \quad -\nabla\rho_2 \cdot (\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) = \widetilde{C}^*_{2,1}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2); \\ &P_0(\rho_2^{-1} g\widetilde{\rho}_2\vec{e}_3) =: \widetilde{C}_{2,0}\widetilde{\rho}_2, \quad -\nabla\rho_2 \cdot \vec{v}_2 = \widetilde{C}^*_{2,0}\vec{v}_2, \end{aligned} \tag{6.6}$$

и введем гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega_2)$ скалярных функций со скалярным произведением:

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega_2)} := \int\limits_{\Omega_2} g^2 \left[\rho_2(x_3)N_2^2(x_3)\right]^{-1} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, d\Omega_2.$$

**Лемма 3.** *Операторы, определенные соотношениями* (6.6),

$$\widetilde{C}_{2,1} : \mathfrak{L}_2(\Omega_2) \to \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) \quad \text{и} \quad \widetilde{C}^*_{2,1} : \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) \to \mathfrak{L}_2(\Omega_2),$$

$$\widetilde{C}_{2,0} : \mathfrak{L}_2(\Omega_2) \to \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \quad \text{и} \quad \widetilde{C}^*_{2,0} : \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_2) \to \mathfrak{L}_2(\Omega_2),$$

*взаимно сопряжены и*

$$\|\widetilde{C}_{2,1}\| = \|\widetilde{C}^*_{2,1}\| \le N_{0,2}, \quad \|\widetilde{C}_{2,0}\| = \|\widetilde{C}^*_{2,0}\| \le N_{0,2}. \tag{6.7}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2.

С учетом введенных операторов уравнения для идеальной жидкости из (4.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) + \rho_2^{-1}\nabla p_{2,1} + \widetilde{C}_{2,1}\widetilde{\rho}_2 = P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ &\frac{\partial\vec{v}_2}{\partial t} + \widetilde{C}_{2,0}\widetilde{\rho}_2 = P_0\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_2), \\ &\frac{\partial\widetilde{\rho}_2}{\partial t} - \widetilde{C}^*_{2,1}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) - \widetilde{C}^*_{2,0}\vec{v}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2). \end{aligned} \tag{6.8}$$

В силу принадлежности $\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2$ пространству $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2)$ и определения пространства $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2)$ потенциал $\Phi_2$, с помощью решений III и IV вспомогательных задач, можно представить в виде:

$$\Phi_2 = \Psi_1 + \Psi_3, \tag{6.9}$$

при этом считаем $\eta_1 = -\gamma_1\vec{u}_1$ ( на $\Gamma_1$ ), $\eta_2 = -\gamma_3\vec{u}_3$ ( на $\Gamma_3$ ).

Представление (6.9) оправдано тем, что поле $\rho_2^{-1}\nabla\Psi_i$ $(i = 1, 3)$ будет в дальнейшем выражено (см. лемму (4)) с помощью ограниченного оператора через $\vec{u}_i$ $(i = 1, 3)$. Исходя из сказанного, разложим пространство $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2)$ в виде следующей прямой суммы:

$$\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2, \rho_2) = \vec{G}_1(\Omega_2, \rho_2) \oplus \vec{G}_3(\Omega_2, \rho_2), \tag{6.10}$$

где

$$\vec{G}_1(\Omega_2,\rho_2) := \{\rho_2^{-1}\nabla p \mid \nabla\cdot(\rho_2^{-1}\nabla p) = 0 \text{ ( в } \Omega_2\text{ )},\quad \rho_2^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}_2 = 0 \text{ ( на } S_2\text{ )},$$
$$\rho_2^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}_2 = 0 \text{ ( на } \Gamma_3\text{ )},\quad \int_{\Gamma} p\,d\Gamma = 0\},$$
$$\vec{G}_3(\Omega_2,\rho_2) =: \{\rho_2^{-1}\nabla p \mid \nabla\cdot(\rho_2^{-1}\nabla p) = 0 \text{ ( в } \Omega_2\text{ )},\quad \rho_2^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}_2 = 0 \text{ ( на } S_2\text{ )},$$
$$\rho_2^{-1}\nabla p\cdot\vec{n}_2 = 0 \text{ ( на } \Gamma_1\text{ )},\quad \int_{\Gamma} p\,d\Gamma = 0\}.$$

**Лемма 4.** *Поля* $\rho_2^{-1}\nabla\Psi_i$ $(i=1,3)$ *выражаются с помощью ограниченных операторов* $D_i$ *через* $\vec{u}_i$ $(i=1,3)$*:*

$$D_i\vec{u}_i := \rho_2^{-1}\nabla\Psi_i \qquad (i=1,3). \tag{6.11}$$

*Доказательство.* Рассмотрим оператор $D_1$, для любого $\vec{u}_1 \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1,\rho_1)$, с учетом разложения

$$\vec{u}_1 = \vec{w}_{1,1} + \rho_1^{-1}(x_3)\nabla w_{1,2}, \tag{6.12}$$
$$\vec{w}_{1,1}\in\vec{J}_0(\Omega_1,\rho_1),\quad \rho_1^{-1}(x_3)\nabla w_{1,2}\in\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1,\rho_1),$$

а также свойств V вспомогательной задачи, имеем:

$$\|D_1\vec{u}_1\|^2_{\vec{G}_1(\Omega_2,\rho_2)} = \int_{\Omega_2}\rho_2^{-1}(x_3)|\nabla\Psi_1|^2\,d\Omega_2 = \int_{\Omega_2}\nabla\Psi_1\cdot\overline{(\rho_2^{-1}(x_3)\nabla\Psi_1)}\,d\Omega_2 =$$
$$= \int_{\partial\Omega_2}\Psi_1\cdot\overline{(\rho_2^{-1}\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2)}\,dS = \int_{\Gamma_1}P_{\Gamma_1}\Psi_1\cdot\overline{(\rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2)}\,d\Gamma_1 =$$
$$= \int_{\Gamma_1}\rho_2(0)S_{1,1}(\rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2)\overline{(\rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2)}\,d\Gamma_1 = \|S_{1,1}^{\frac12}(\rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2)\|^2_{H_1} \le$$

$$\le d\|S_0^{\frac12}(\rho_2^{-1}(0)\nabla\Psi_1\cdot\vec{n}_2)\|^2_{H_1} = d\|S_0^{\frac12}(-\rho_1^{-1}(0)\nabla w_{1,2}\cdot\vec{n}_1)\|^2_{H_1} =$$
$$= d\int_{\Gamma_1}\rho_1(0)S_0(\rho_1^{-1}(0)\nabla w_{1,2}\cdot\vec{n}_1)(\rho_1^{-1}(0)\nabla w_{1,2}\cdot\vec{n}_1)\,d\Gamma_1 =$$
$$= d\int_{\Gamma_1}P_{\Gamma_1}w_{1,2}\overline{(\rho_1^{-1}(0)\nabla w_{1,2}\cdot\vec{n}_1)}\,d\Gamma_1 = d\int_{\Omega_1}\rho_1^{-1}(x_3)|\nabla w_{1,2}|^2\,d\Omega_1 \le$$
$$\le d\int_{\Omega_1}\rho_1^{-1}(x_3)|\nabla w_{1,2}|^2\,d\Omega_1 + d\int_{\Omega_1}\rho_1(x_3)|\vec{w}_{1,1}|^2\,d\Omega_1 =$$
$$= d\int_{\Omega_1}\rho_1(x_3)|\vec{u}_1|^2\,d\Omega_1 = d\|\vec{u}_1\|^2_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1,\rho_1)},$$

где $d > 0$ — это константа из соотношений эквивалентности следующих норм:

$$\|\eta_0\|_{H^{-\frac{1}{2}}_{\Gamma_1},I} = \|S_0^{\frac{1}{2}}\eta_0\|_{L_{2,\Gamma_1}}, \qquad \|\eta_0\|_{H^{-\frac{1}{2}}_{\Gamma_1},II} = \|S_{1,1}^{\frac{1}{2}}\eta_0\|_{L_{2,\Gamma_1}}, \quad \eta_0 \in H^{-\frac{1}{2}}_{\Gamma_1}. \tag{6.13}$$

Доказательство ограниченности оператора $D_3$ проводится аналогично. □

Из первого уравнения (6.8) следует интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_2 + p_{2,1} + \Psi = F + C(t) \quad (\text{в } \Omega_2\,), \tag{6.14}$$

где $\widetilde{C}_{2,1}\widetilde{\rho}_2 =: \rho_2^{-1}\nabla\Psi$ и $P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f} =: \rho_2^{-1}\nabla F$. Спроектируем это уравнение на $L_{2,\Gamma_i}$ $(i = 1,3)$:

$$P_{\Gamma_i}p_{2,1} = -P_{\Gamma_i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_2 - P_{\Gamma_i}\Psi + P_{\Gamma_i}F \quad (\text{на } \Gamma_i,\ i = 1,3\,). \tag{6.15}$$

Выразим $P_{\Gamma_i}(\Phi_2|_{\Gamma_1})$, пользуясь представлением (6.9) и операторами $S_{i,j}$ (см. (5.1)):

$$P_{\Gamma_1}(\Phi_2|_{\Gamma_1}) = P_{\Gamma_1}(\Psi_1|_{\Gamma_1}) + P_{\Gamma_1}(\Psi_3|_{\Gamma_1}) = \rho_2(0)(-S_{1,1}\gamma_1\vec{u}_1 - S_{1,2}\gamma_3\vec{u}_3), \tag{6.16}$$

$$P_{\Gamma_3}(\Phi_2|_{\Gamma_3}) = P_{\Gamma_3}(\Psi_1|_{\Gamma_3}) + P_{\Gamma_3}(\Psi_3|_{\Gamma_3}) = \rho_2(b)(-S_{2,1}\gamma_1\vec{u}_1 - S_{2,2}\gamma_3\vec{u}_3). \tag{6.17}$$

Подставим выражения (6.15), (6.16) и (6.17) в уравнение (6.5):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} &+ \mu_1 A_1\vec{u}_1 + \rho_1^{-1}(0)g\Delta\rho_1 G_1\zeta_1 + \widetilde{C}_1\widetilde{\rho}_1 - \rho_1^{-1}(0)\rho_2(0)\frac{\partial}{\partial t}(-G_1S_{1,1}\gamma_1\vec{u}_1 - G_1S_{1,2}\gamma_3\vec{u}_3) - \\ &- \rho_1^{-1}(0)G_1P_{\Gamma_1}\Psi + \rho_1^{-1}(0)G_1P_{\Gamma_1}F = P_{0,S_1}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_1\,),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t} &+ \mu_3 A_3\vec{u}_3 - \rho_3^{-1}(b)g\Delta\rho_3 G_3\zeta_2 + \widetilde{C}_3\widetilde{\rho}_3 - \rho_3^{-1}(b)\rho_2(b)\frac{\partial}{\partial t}(-G_3S_{2,1}\gamma_1\vec{u}_1 - G_3S_{2,2}\gamma_3\vec{u}_3) - \\ &- \rho_3^{-1}(b)G_3P_{\Gamma_3}\Psi + \rho_3^{-1}(b)G_3P_{\Gamma_3}F = P_{0,S_3}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega_3\,).\end{aligned}$$

Итогом данного пункта является следующая лемма.

**Лемма 5.** *Классическое решение задачи* (4.1) — (4.5) *является решением следующей системы дифференциально-операторных уравнений:*

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(\vec{u}_1 + \rho_1^{-1}(0)\rho_2(0)(G_1S_{1,1}\gamma_1\vec{u}_1 + G_3S_{1,2}\gamma_3\vec{u}_3)\big) + \mu_1A_1\vec{u}_1 + \widetilde{C}_1\widetilde{\rho}_1 + \\ &\quad + \rho_1^{-1}(0)\left(g\Delta\rho_1G_1\zeta_1 - G_1P_{\Gamma_1}\Psi + G_1P_{\Gamma_1}F\right) = P_{0,S_1}\vec{f} \quad (\textit{в } \Omega_1\,), \\ &\frac{d}{dt}\big(\vec{u}_3 + \rho_3^{-1}(b)\rho_2(b)(G_3S_{2,1}\gamma_1\vec{u}_1 + G_3S_{2,2}\gamma_3\vec{u}_3)\big) + \mu_3A_3\vec{u}_3 + \widetilde{C}_3\widetilde{\rho}_3 + \\ &\quad + \rho_3^{-1}(b)\left(-g\Delta\rho_3G_3\zeta_2 - G_3P_{\Gamma_3}\Psi + G_3P_{\Gamma_3}F\right) = P_{0,S_3}\vec{f} \quad (\textit{в } \Omega_3\,), \\ &\frac{d}{dt}\vec{v}_2 + \widetilde{C}_{2,0}\widetilde{\rho}_2 = P_0\vec{f} \quad (\textit{в } \Omega_2\,), \\ &\rho_1^{-1}(0)g\Delta\rho_1\frac{d}{dt}\zeta_1 - \rho_1^{-1}(0)g\Delta\rho_1\gamma_1\vec{u}_1 = 0 \quad (\textit{на } \Gamma_1\,), \\ &\rho_3^{-1}(b)g\Delta\rho_3\frac{d}{dt}\zeta_2 + \rho_3^{-1}(b)g\Delta\rho_3\gamma_3\vec{u}_3 = 0 \quad (\textit{на } \Gamma_3\,),\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\widetilde{\rho}_1 - \widetilde{C}_1^*\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \qquad \frac{d}{dt}\widetilde{\rho}_3 - \widetilde{C}_3^*\vec{u}_3 = 0 \quad (\text{в } \Omega_3),\\
&\frac{d}{dt}\widetilde{\rho}_2 - \widetilde{C}_{2,1}^*\,(D_1\vec{u}_1 + D_3\vec{u}_3) - \widetilde{C}_{2,0}^*\vec{v}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2),\\
&\vec{u}_i(0,x) = P_{0,S_i}\vec{u}_i^0(x) \quad (i=1,3), \qquad \vec{v}_2(0,x) = P_0\vec{u}_2^0(x),\\
&\zeta_j(0,\hat{x}) = \zeta_j^0(\hat{x}) \quad (j=1,2), \qquad \widetilde{\rho}_i(0,x) = \widetilde{\rho}_i^0(x) \quad (i=1,3).
\end{aligned} \tag{6.19}
$$

*Для начальных данных, в силу разложения* (6.9), *должно выполняться следующее кинематическое условие:*

$$
\gamma_i P_{0,S_i}\vec{u}_i^0(x) = -\widetilde{\gamma}_i \Pi_i P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x) \quad (\text{на } \Gamma_i, \quad i=1,3). \tag{6.20}
$$

*В лемме через* $\Pi_i$ *обозначены проекторы на подпространства* $\vec{G}_i(\Omega_2,\rho_2)$ $(i = 1,3)$, *а через* $\widetilde{\gamma}_i$ *— операторы нормальных следов на границы* $\Gamma_i$ $(i = 1,3)$ *для полей, заданных в области* $\Omega_2$.

## 7. Приведение системы к дифференциально-операторному уравнению. Свойства операторных блоков

Систему (6.18) — (6.19) удобно записать в ортогональной сумме гильбертовых пространств

$$
\widetilde{H} := \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1,\rho_1) \oplus \vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3,\rho_3) \oplus H_1 \oplus H_3 \oplus \widetilde{H}^{(1)}
$$

в следующем виде:

$$
\begin{pmatrix}
\mu_1 A_1 & 0 & \rho_1^{-1} g\Delta\rho_1 G_1 & 0 & M_5\\
0 & \mu_3 A_3 & 0 & -\rho_3^{-1} g\Delta\rho_3 G_3 & M_4\\
-\rho_1^{-1} g\Delta\rho_1\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \rho_3^{-1} g\Delta\rho_3\gamma_3 & 0 & 0 & 0\\
M_1 & M_2 & 0 & 0 & M_3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\vec{u}_1\\ \vec{u}_3\\ \zeta_1\\ \zeta_2\\ v\end{pmatrix} +
$$

$$
+\begin{pmatrix}
K_1 & K_2 & 0 & 0 & 0\\
K_3 & K_4 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \rho_1^{-1} g\Delta\rho_1 I_{\Gamma_1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \rho_3^{-1} g\Delta\rho_3 I_{\Gamma_3} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & I_v
\end{pmatrix}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{u}_1\\ \vec{u}_3\\ \zeta_1\\ \zeta_2\\ v\end{pmatrix} =
\begin{pmatrix}\widehat{f}_1\\ \widehat{f}_3\\ 0\\ 0\\ \widehat{f}_v\end{pmatrix}, \tag{7.1}
$$

где $H_i = L_2(\Gamma_i) \ominus \{1_i\}$ $(i=1,3)$, $\widetilde{H}^{(1)} = \vec{J}_0(\Omega_2,\rho_2) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega_1) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega_2) \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega_3)$, $v = (\vec{v}_2; \widetilde{\rho}_1; \widetilde{\rho}_2; \widetilde{\rho}_3)^t$.

Опишем структуру операторов, входящих в (7.1).

$$
\begin{aligned}
&K_1 = I_1 + \rho_1^{-1}(0)\rho_2(0)G_1 S_{1,1}\gamma_1, \qquad && K_2 = \rho_1^{-1}(0)\rho_2(0)G_1 S_{1,2}\gamma_3,\\
&K_3 = \rho_1^{-1}(b)\rho_2(b)G_3 S_{2,1}\gamma_1, && K_4 = I_3 + \rho_1^{-1}(b)\rho_2(b)G_3 S_{2,2}\gamma_3.
\end{aligned}
$$

С учетом того, что $\widetilde{C}_{2,1}\tilde{\rho}_2 = \rho_2^{-1}\nabla\Psi$, введем оператор $B$ следующим образом $B\tilde{\rho}_2 := \Psi$, тогда

$$M_1 = (0; -\widetilde{C}_1^*; -\widetilde{C}_{2,1}^* D_1; 0)^t, \qquad M_2 = (0; 0; -\widetilde{C}_{2,1}^* D_3; -\widetilde{C}_3^*)^t, \tag{7.2}$$
$$M_4 = (0; 0; -\rho_1^{-1}(b) G_3 P_{\Gamma_3} B; \widetilde{C}_3), \qquad M_5 = (0; \widetilde{C}_1; -\rho_1^{-1}(0) G_1 P_{\Gamma_1} B; 0),$$
$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \widetilde{C}_{2,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\widetilde{C}_{2,0}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_v = \operatorname{diag}(I_0; I_{\mathfrak{L}_2(\Omega_1)}; I_{\mathfrak{L}_2(\Omega_2)}; I_{\mathfrak{L}_2(\Omega_3)}),$$

$I_i$, $I_{\Gamma_i}$ $(i = 1, 3)$, $I_{\mathfrak{L}_2(\Omega_j)}$ $(j = \overline{1,3})$ — единичные операторы в пространствах $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$, $H_i$ $(i = 1, 3)$, $\mathfrak{L}_2(\Omega_j)$ $(j = \overline{1,3})$ соответственно.

Правая часть в (7.1) имеет вид:

$$\widehat{f}_i := P_{0,S_i}\vec{f} - \rho_i^{-1} G_i P_{\Gamma_i} F \quad (i = 1, 3), \qquad \widehat{f}_v := (P_0\vec{f}; 0; 0; 0)^t.$$

Начальные условия (6.18) для уравнения (7.1) можно записать более кратко:

$$(\vec{u}_1^0; \vec{u}_3^0; \zeta_1^0; \zeta_2^0; v^0)^t =$$
$$= (P_{0,S_1}\vec{u}_1^0(x); P_{0,S_3}\vec{u}_3^0(x); \zeta_1^0(\widehat{x}); \zeta_2^0(\widehat{x}); P_0\vec{u}_2^0(x), \widetilde{\rho}_1^0(x), \widetilde{\rho}_2^0(x), \widetilde{\rho}_3^0(x))^t. \tag{7.3}$$

**Лемма 6.** *Операторные блоки в задаче* (7.1) *имеют следующие свойства*

*1. Оператор* $G_i$ $(i = 1, 3)$ *изометрически действует из пространства* $H_{\Gamma_i}^{\frac{1}{2}}$ *в пространство* $\vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ $(i = 1, 3)$.

*2. Операторы* $\gamma_1$ *и* $G_1$ *взаимно сопряженные.*

*При этом* $\gamma_1 : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1) \longrightarrow H_{\Gamma_1}^{-\frac{1}{2}}$, $\quad G_1 : H_{\Gamma_1}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1, \rho_1)$.

*3. Операторы* $\gamma_3$ *и* $G_3$ *взаимно сопряженные.*

*При этом* $\gamma_3 : \vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3, \rho_3) \longrightarrow H_{\Gamma_3}^{-\frac{1}{2}}$, $\quad G_3 : H_{\Gamma_3}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \vec{G}_{h,S_3}(\Omega_3, \rho_3)$.

*4. Оператор* $K = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix}$ *ограничен, самосопряженный в* $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, \rho_1) \oplus \vec{J}_{0,S_3}(\Omega_3, \rho_3)$, *положительно определенный.*

*5. Операторы* $M_i$ $(i = \overline{1,5})$, *введенные в* (7.2), *являются ограниченными в соответствующих пространствах, при этом* $-M_5^* = M_1$, $-M_4^* = M_2$.

Доказательство леммы аналогично доказательству соответствующих операторных блоков из работы [3].

Введем следующие обозначения: $y := (\vec{u}_1; \vec{u}_3; \zeta_1; \zeta_2; v)^t \quad f := (\widehat{f}_1; \widehat{f}_3; 0; 0; \widehat{f}_v)^t$,

$$\mathcal{R} := \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & 0 & 0 & 0 \\ K_3 & K_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1^{-1} g\Delta\rho_1 I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3^{-1} g\Delta\rho_3 I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} \mu_1 A_1 & 0 & \rho_1^{-1} g\Delta\rho_1 G_1 & 0 & M_5 \\ 0 & \mu_3 A_3 & 0 & -\rho_3^{-1} g\Delta\rho_3 G_3 & M_4 \\ -\rho_1^{-1} g\Delta\rho_1\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_3^{-1} g\Delta\rho_3\gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{D}(A_3) \oplus \mathcal{D}(G_1) \oplus \mathcal{D}(G_3) \oplus \widetilde{H}^{(1)}. \tag{7.4}$$

Тогда задача Коши (7.1), (7.3) запишется в виде

$$\mathcal{R}\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0 y = f, \quad y(0) = y^0. \tag{7.5}$$

**Определение 1.** Назовем сильным решением исходной начально-краевой задачи (1.2) – (1.5) такие функции $\vec{u}_i$, $\widetilde{\rho}_i$, $p_i$ $(i = \overline{1,3})$ и $\zeta_j$ $(j = 1, 2)$ для которых вектор $y(t) = (\vec{u}_1(t); \vec{u}_3(t); \zeta_1(t); \zeta_2(t); v(t))^t$ является сильным решением задачи Коши (7.5) и выполнены тривиальные соотношения (3.2), (3.9), (3.10) в смысле теории обобщенных функций (теории распределений) (см., например, [2]). В свою очередь сильным решением задачи Коши (7.5) назовем функцию $y(t)$ такую, что $y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ для любого t из промежутка $[0, T]$, $\mathcal{A}_0 y(t) \in C([0, T]; \widetilde{H})$, $y(t) \in C^1([0, T]; \widetilde{H})$ и для любого t из промежутка $[0, T]$ выполнено уравнение и начальное условие из (7.5).

Для доказательства теоремы существования сильного решения задачи Коши (7.5) осуществим следующие преобразования.

Произведем в уравнении (7.5) замену $y(t) = e^t y_1(t)$. В результате получим уравнение относительно $y_1$:

$$\mathcal{R}\frac{dy_1}{dt} + (\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P})y_1 + (\mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P})y_1 = e^{-t} f, \tag{7.6}$$

где число $\varepsilon > 0$ выбрано таким образом, что $\mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P} >> 0$. Это возможно, так как $\mathcal{R} >> 0$ в $\widetilde{H}$.

Область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P})$ оператора $\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P}$ совпадает с $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ из (7.4). На $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ оператор $\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P}$ является равномерно аккретивным, то есть

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P}) >> 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0).$$

Кроме того, оператор $(\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P})^+ := (\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P})^*|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)}$, как нетрудно проверить, также является равномерно аккретивным на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Однако он не является замкнутым из-за того, что оператор $\gamma_i$ $(i = 1, 3)$ неограничен в $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i, \rho_i)$ $(i = 1, 3)$ и $\mathcal{D}(\gamma_i) \supset \mathcal{D}(A_i)$ $(i = 1, 3)$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}_0 + \varepsilon\mathcal{P}$ не является максимальным аккретивным.

Обозначим $g\rho_i^{-1}\Delta\rho_i\gamma_i A_i^{-\frac{1}{2}} =: Q_i$, $\quad g\rho_i^{-1}\Delta\rho_i A_i^{-\frac{1}{2}} G_i =: Q_i^+ \quad (i = 1, 3)$. Имеет место $Q_i^+ \subset Q_i^*$, $Q_i^+ = Q_i^*|_{\mathcal{D}(G_i)}$, $\overline{Q_i^+} = Q_i^*$ $(i = 1, 3)$.

Оператор $\mathcal{A}_0+\varepsilon\mathcal{P}$ допускает замыкание (см. [5, с.109]) $\mathcal{A} := \overline{(\mathcal{A}_0+\varepsilon\mathcal{P})}$. В этом случае имеет место соотношение

$$\mathcal{A}+(\mathcal{R}-\varepsilon\mathcal{P}) = \overline{(\mathcal{A}_0+\varepsilon\mathcal{P})}+(\mathcal{R}-\varepsilon\mathcal{P}) = \overline{(\mathcal{A}_0+\varepsilon\mathcal{P})+(\mathcal{R}-\varepsilon\mathcal{P})},$$

так как оператор $\mathcal{R}-\varepsilon\mathcal{P}$ ограничен и задан на всем пространстве. Учитывая это обстоятельство, мы будем замыкать только оператор $\mathcal{A}_0+\varepsilon\mathcal{P}$.

**Лемма 7.** *Замыкание* $\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}_0+\varepsilon\mathcal{P}}$ *оператора* $\mathcal{A}_0+\varepsilon\mathcal{P}$ *есть максимальный аккретивный оператор. При этом*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\, (\vec{u}_1;\vec{u}_3;\zeta_1;\zeta_2;v)^t \,|\, \mu_1\vec{u}_1 + A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\zeta_1 \in \mathcal{D}(A_1),\ \mu_3\vec{u}_3 - A_3^{-\frac{1}{2}}Q_3^*\zeta_2 \in \mathcal{D}(A_3)\,\},$$
$$\mathcal{A} = \mathcal{T}_A\mathcal{Q}_A\mathcal{T}_A,$$

*где*

$$\mathcal{T}_A := \begin{pmatrix} A_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_A := \begin{pmatrix} \mu_1 I_1 & 0 & Q_1^* & 0 & F_1^* \\ 0 & \mu_3 I_3 & 0 & -Q_3^* & F_2^* \\ -Q_1 & 0 & \varepsilon I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & \varepsilon I_{\Gamma_3} & 0 \\ -F_1 & -F_2 & 0 & 0 & \varepsilon I_v + M_3 \end{pmatrix},$$

$$F_1 := M_5^* A^{-\frac{1}{2}}, \quad F_3 := M_4^* A^{-\frac{1}{2}}.$$

*Доказательство.* Нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{A}_0+\varepsilon\mathcal{P}$ представим в виде: $\mathcal{A}_0+\varepsilon\mathcal{P} = \mathcal{T}_A\mathcal{Q}_A^+\mathcal{T}_A$,

$$\mathcal{T}_A = \begin{pmatrix} A_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_A^+ := \begin{pmatrix} \mu_1 I_1 & 0 & Q_1^+ & 0 & F_1^* \\ 0 & \mu_3 I_3 & 0 & -Q_3^+ & F_2^* \\ -Q_1 & 0 & \varepsilon I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & \varepsilon I_{\Gamma_3} & 0 \\ -F_1 & -F_2 & 0 & 0 & \varepsilon I_v + M_3 \end{pmatrix}.$$

Замыкание $\mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}_0+\varepsilon\mathcal{P}$ состоит в замене в среднем блоке оператора $Q_i^+$ на $Q_i^*$ $(i=1,3)$. Действительно, после такого замыкания оператор $\mathcal{A}$ представлен в виде произведения $\mathcal{A} = T_1T_2T_1$ замкнутых операторов. При этом $T_1^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H})$, так как оператор $A_i^{-\frac{1}{2}}$ ограничен в $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i,\rho_i)$ $(i=1,3)$. Далее непосредственно проверяется, что все элементы обратной матрицы $T_2^{-1}$ являются ограниченными операторами, а значит $T_2^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H})$ и оператор $\mathcal{A}$ замкнут.

Найдем область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$. Прежде всего, из представления для оператора $\mathcal{A}$ следует, что $\vec{u}_i \in \mathcal{D}(A_i^{\frac{1}{2}})$ $(i=1,3)$. Далее

$$\begin{pmatrix} A_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\Gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 A_1^{\frac{1}{2}}\vec{u}_1 + Q_1^*\zeta_1 + F_1^* v \\ \mu_3 A_3^{\frac{1}{2}}\vec{u}_3 - Q_3^*\zeta_2 + F_2^* v \\ -Q_1 A_1^{\frac{1}{2}}\vec{u}_1 + \varepsilon\zeta_1 \\ Q_3 A_3^{\frac{1}{2}}\vec{u}_1 + \varepsilon\zeta_2 \\ -F_1 A_1^{\frac{1}{2}}\vec{u}_1 - F_2 A_3^{\frac{1}{2}}\vec{u}_3 + (\varepsilon I_v + M_3)v \end{pmatrix},$$

то есть $\mu_1 A_1^{\frac{1}{2}}\vec{u}_1 + Q_1^*\zeta_1 + F_1^* v \in \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$, $\mu_3 A_3^{\frac{1}{2}}\vec{u}_3 - Q_3^*\zeta_2 + F_2^* v \in \mathcal{D}(A_3^{\frac{1}{2}})$ или

$$\mu_1\vec{u}_1 + A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\zeta_1 + A_1^{-1}M_5 v \in \mathcal{D}(A_1), \quad \mu_3\vec{u}_3 - A_3^{-\frac{1}{2}}Q_3^*\zeta_2 + A_3^{-1}M_4 v \in \mathcal{D}(A_3).$$

Таким образом заключаем, что

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\, (\vec{u}_1;\vec{u}_3;\zeta_1;\zeta_2;v)^t \,|\, \mu_1\vec{u}_1 + A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\zeta_1 \in \mathcal{D}(A_1),\ \mu_3\vec{u}_3 - A_3^{-\frac{1}{2}}Q_3^*\zeta_2 \in \mathcal{D}(A_3)\,\}.$$

Заметим, что условие $\vec{u}_1 \in \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$ следует из условия $\mu_1\vec{u}_1 + A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\zeta_1 \in \mathcal{D}(A_1)$. Действительно, так как $\mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$ и $A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\zeta_1 \in \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$ для любого $\zeta_1 \in H_1$, то $\vec{u}_1$ также принадлежит $\mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$. Лемма доказана. □

Рассмотрим теперь уравнение с замкнутым оператором

$$\mathcal{R}\frac{dy_1}{dt} + \mathcal{A}y_1 + (\mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P})y_1 = e^{-t}f. \tag{7.7}$$

Здесь оператор $\mathcal{A}+\mathcal{R}-\varepsilon\mathcal{P}$ уже максимальный аккретивный. Оператор $\mathcal{R}$ самосопряженный, положительно определенный и ограниченный в $\widetilde{H}$, значит, для него существует оператор $\mathcal{R}^{-1}$, обладающий теми же свойствами. Преобразуем (7.7) к виду

$$\frac{dy_1}{dt} = -\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A}+\mathcal{R}-\varepsilon\mathcal{P})y_1 + \mathcal{R}^{-1}e^{-t}f, \quad y_1(0) = y^0. \tag{7.8}$$

Введем в $\widetilde{H}$ эквивалентную норму по формуле

$$\langle y_1, y_1\rangle := (\mathcal{R}y_1, y_1)_{\widetilde{H}^{(1)}} = (\mathcal{R}^{\frac{1}{2}}y_1, \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}y_1)_{\widetilde{H}^{(1)}}.$$

Эквивалентность этой нормы старой норме следует из свойств оператора $\mathcal{R}$.

Легко проверить, что оператор $-\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A}+\mathcal{R}-\varepsilon\mathcal{P})$ будет максимальным диссипативным в новом скалярном произведении и, значит, задача Коши (7.8) будет равномерно корректной (см. [5, с.166]), а оператор $-\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A}+\mathcal{R}-\varepsilon\mathcal{P})$ порождает сжимающую в новом скалярном произведении полугруппу операторов $\mathcal{U}(t) := \exp\,(-t\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A}+\mathcal{R}-\varepsilon\mathcal{P}))$ и справедлива следующая

**Теорема 1.** *Задача Коши* (7.8) *имеет единственное сильное решение на промежутке* $[0,T]$, *выражаемое формулой*

$$y_1(t) = \mathcal{U}(t)y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)\mathcal{R}^{-1}e^{-\tau}f(\tau)\,d\tau,$$

*если выполнены следующие условия:* $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad f(t) \in C^1\left([0,T];\widetilde{H}\right).$

Таким образом, мы получили, что задача Коши

$$\mathcal{R}\frac{dy_1}{dt} + \mathcal{A}y_1 + (\mathcal{R} - \varepsilon\mathcal{P})y_1 = e^{-t}f, \quad y_1(0) = y^0$$

имеет единственное сильное решение, если $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $f(t) \in C^1([0,T];\widetilde{H})$, в частности, если $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. Если обозначить $y_1 =: (\vec{u}_{11};\vec{u}_{3,1};\zeta_{11};\zeta_{21};v_1)^t$, то уравнение (7.7) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} K_1\dfrac{d\vec{u}_{11}}{dt} + K_2\dfrac{d\vec{u}_{31}}{dt} + A_1(\mu_1\vec{u}_{11} + A_1^{-\frac12}Q_1^*\zeta_{11}) + M_5v_1 \\ \qquad\qquad\qquad + K_1\vec{u}_{11} + K_2\vec{u}_{31} = e^{-t}\widehat{f}_1, \\ K_3\dfrac{d\vec{u}_{11}}{dt} + K_4\dfrac{d\vec{u}_{31}}{dt} + A_3(\mu_3\vec{u}_{31} - A_3^{-\frac12}Q_3^*\zeta_{21}) + M_4v_1 \\ \qquad\qquad\qquad + K_3\vec{u}_{11} + K_4\vec{u}_{31} = e^{-t}\widehat{f}_2, \\ g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1\dfrac{d\zeta_{11}}{dt} - Q_1A_1^{\frac12}\vec{u}_{11} + \varepsilon\zeta_{11} + (g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1 - \varepsilon)\zeta_{11} = 0, \\ g\rho_3^{-1}(b)\Delta\rho_3\dfrac{d\zeta_{21}}{dt} + Q_3A_3^{\frac12}\vec{u}_{31} + \varepsilon\zeta_{21} + (g\rho_3^{-1}(b)\Delta\rho_3 - \varepsilon)\zeta_{21} = 0, \\ \dfrac{dv_1}{dt} + M_1\vec{u}_{11} + M_2\vec{u}_{31} + (\varepsilon I_v + M_3)v_1 + (1-\varepsilon)v_1 = e^{-t}\widehat{f}_3, \end{cases} \tag{7.9}$$

$$(\vec{u}_{11};\vec{u}_{31};\zeta_{11};\zeta_2;v_1)^t(0) = (\vec{u}_{11};\vec{u}_{31};\zeta_{11};\zeta_2;v_1)^{0t}. \tag{7.10}$$

Заметим, что скобки в первых двух уравнениях раскрыть пока нельзя, так как каждое слагаемое в скобках может принадлежать $\mathcal{D}(A_i^{\frac12})$ и только сумма попадает в $\mathcal{D}(A_i)$ $(i = 1,3)$.

Для обратного перехода от задачи (7.8) к задаче (7.6) умножим третье уравнение системы на $e^t$, тогда

$$g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1\frac{d}{dt}(e^t\zeta_{11}) = e^tQ_1A_1^{\frac12}\vec{u}_{11}.$$

Отсюда получим, что $\zeta_{11}(t)$ выражается по формуле

$$\zeta_{11}(t) = \frac{1}{g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1}\int_0^t e^{-(t-s)}Q_1A_1^{\frac12}\vec{u}_{11}(s)\,ds + e^{-t}\zeta_1^0. \tag{7.11}$$

Подставляя функцию (7.11) в первое уравнение системы (7.9), получим

$$K_1\frac{d\vec{u}_{11}}{dt} + K_2\frac{d\vec{u}_{31}}{dt} + A_1\Bigg(\mu_1\vec{u}_{11} + e^{-t}A_1^{-\frac12}Q_1^*\zeta_1^0 + \\ + \frac{1}{g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1}A_1^{-\frac12}Q_1^*\int_0^t e^{-(t-s)}Q_1A_1^{\frac12}\vec{u}_{11}(s)\,ds\Bigg) + K_1\vec{u}_{11} + K_2\vec{u}_{31} = e^{-t}\widehat{f}_1, \tag{7.12}$$

Из теоремы 1 следует, что функция

$$\mu_1\vec{u}_{11} + e^{-t}A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\zeta_1^0 + \frac{1}{g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1}A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\int\limits_0^t e^{-(t-s)}Q_1A_1^{\frac{1}{2}}\vec{u}_{11}(s)\,ds =: \vec{v}^1(t) \qquad (7.13)$$

принадлежит $\mathcal{D}(A_1)$ для любого $t \in [0,T]$ и $\vec{v}^1(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A_1))$. Если $\zeta_1^0 \in \mathcal{D}(G_1)$, тогда

$$Q_1^*\zeta_1^0 = Q_1^+\zeta_1^0 = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1A_1^{-\frac{1}{2}}G_1\zeta_1^0$$

и поэтому

$$A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\zeta_1^0 = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1A_1^{-1}G_1\zeta_1^0 \in \mathcal{D}(A_1).$$

Рассмотрим оператор $\mathfrak{K} := A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*Q_1A_1^{\frac{1}{2}} = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\gamma_1$.

Введем $\mathcal{D}(A_1)$ как гильбертово пространство с нормой графика

$$\|\vec{v}\|_{\mathcal{D}(A_1)} := \|A_1\vec{v}\|. \qquad (7.14)$$

Тогда сужение $\mathfrak{K}^1 := \mathfrak{K}|_{\mathcal{D}(A_1)}$ есть линейный ограниченный оператор, действующий в $\mathcal{D}(A_1)$. Действительно, если $\vec{u}_{11} \in \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}}) = \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1,\rho_1)$, тогда $\gamma_1\vec{u}_{11} \in H^{\frac{1}{2}}_{\Gamma_1} = \mathcal{D}(G_1)$, $\mathfrak{K}^1\vec{u}_{11} = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\gamma_1\vec{u}_{11} = g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^+\gamma_1\vec{u}_{11} = (g\rho_1^{-1}(0)\Delta\rho_1)^2A_1^{-1}G_1\gamma_1\vec{u}_{11} \in \mathcal{D}(A_1)$. Так как оператор $G_1\gamma_1$ ограниченно действует из $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1,\rho_1) = \mathcal{D}(A_1^{\frac{1}{2}})$ в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1,\rho_1)$, то $\mathfrak{K}^1 : \mathcal{D}(A_1) \to \mathcal{D}(A_1)$ есть ограниченный оператор. Доказанный факт позволяет рассмотреть соотношение (7.13) как интегральное уравнение Вольтера второго рода в пространстве $\mathcal{D}(A_1)$ (с нормой графика (7.14)). Здесь функция $\vec{v}^1(t) - e^{-t}A_1^{-\frac{1}{2}}Q_1^*\zeta_1^0 \in C([0,T];\mathcal{D}(A_1))$ и ядро $\mathfrak{K}^1e^{-(t-s)}$ интегрального оператора непрерывно по $t$, $s$ на $\mathcal{D}(A_1)$. Поэтому задача (7.13) имеет единственное решение $\vec{u}_{11} \in C([0,T];\mathcal{D}(A_1))$ и каждое слагаемое в (7.13) есть элемент из $C([0,T];\mathcal{D}(A_1))$. Таким образом, в уравнении (7.12) и в первом уравнении (7.9) можем раскрыть скобки. Аналогичные рассуждения позволяют раскрыть скобки и во втором уравнении (7.9). Тем самым получим, что (7.6) выполнено для функции $y_1(t) = (\vec{u}_{11};\vec{u}_{31};\zeta_{11};\zeta_2;v_1)^t$. Осуществляя в уравнении (7.6) обратную замену $y_1(t) = e^{-t}y(t)$, получим, что для задачи Коши

$$\mathcal{R}\frac{dy}{dt} + \mathcal{A}_0y = f, \quad y(0) = y^0 \qquad (7.15)$$

имеет место следующая

**Теорема 2.** *Задача Коши* (7.15) *имеет единственное сильное решение на промежутке* $[0,T]$, *если выполнены следующие условия*

$$y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \quad f(t) \in C^1\left([0,T];\widetilde{H}\right).$$

В теореме 2 содержится результат о существовании и единственности сильного решения задачи Коши (7.15). Переформулируем результат для задачи (1.2) — (1.5).

**Теорема 3.** *Начально-краевая задача* (1.2) — (1.5) *имеет единственное сильное решение на промежутке* $[0,T]$, *если выполнены условия:*

$$\begin{aligned} &1^0 \quad \vec{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A_1), \quad \vec{u}_3^0 \in \mathcal{D}(A_3), \quad P_0\vec{u}_2^0 \in \vec{J}_0(\Omega_2,\rho_2),\\ &\quad\;\; \zeta_j^0 \in H_{\Gamma_j}^{\frac{1}{2}} \quad (j=1,2), \quad \widetilde{\rho}_i^0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega_i) \quad (i=\overline{1,3}),\\ \textit{причем} &\quad \gamma_i P_{0,S_i}\vec{u}_i^0(x) = -\widetilde{\gamma}_i \Pi_i P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x) \quad (\textit{ на } \Gamma_i, \quad i=1,3).\\ &2^0 \quad \vec{f}(t) \in C^1([0,T];\vec{L}_2(\Omega,\rho)) \quad (\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2). \end{aligned}$$

## 8. Заключение

Изучена задача о малых движениях системы, состоящей из трех тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя и верхняя жидкости по отношению к действию силы тяжести считаются вязкими, а средняя – идеальной. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы. Дальнейшее исследование представляет собой изучение соответствующей спектральной задачи: получения утверждения о локализации спектра, асимптотическом поведении ветвей собственных значений, утверждения о наличии существенного спектра задачи.

### Список цитируемых источников

1. *Габов, С. А., Свешников, А. Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. — М.: Наука, 1986. — 288 с.

   Gabov, S. A., Sveshnikov, A. G. (1986). Problems of dynamics of stratified fluids (in Russian). Moscow: Nauka.

2. *Копачевский, Н. Д., Крейн, С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   Kopachevsky, N.D., Krein, S.G., Ngo Zuy Can. (1989). Operator methods are in linear hydrodynamics: evolution and spectral problems (in Russian). Moscow: Nauka.

3. *Копачевский, Н. Д., Цветков, Д. О.* Колебания стратифицированных жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т. 29. — С. 103–130.

   Kopachevsky, N. D., Tsvetkov, D. O. (2010). Oscillations of stratificated fluids. Journal of Math Sciences 4, 574–602.

4. *Краусс, В. К.* Внутренние волны. — Л.: Гидрометеоиздат, 1968. — 272 с.

   Krauss, V. K. (1968). Internal waves (in Russian). Leningrad: Gidrometeoizdat.

5. *Крейн, С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

KREIN, S.G. (1967) Linear differential equations are in Banach spaces (in Russian). Moscow: Nauka.

6. *Миропольский, Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981. — 302 с.

Mitropol'sky, Yu. Z. (1981). Dynamics of internal gravitational waves in the ocean (in Russian). Leningrad: Gidrometeoizdat.

*Получена 01.06.2016*