Динамические системы, 2016, том 6(34), №4, 311–322

УДК 517.957

Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности

А. А. Корнута

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: korn_57@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается параболическое функционально-дифференциальное уравнение на окружности с преобразованием поворота пространственной переменной. Используя метод центральных многообразий, доказывается теорема о существовании стационарных пространственно неоднородных решений, бифурцирующих из пространственно однородного решения при изменении бифуркационного параметра. Теорема носит локальный характер. А также исследуется асимптотическая форма указанных решений при отходе параметра от бифуркационного значения.

Ключевые слова: бифуркация, стационарные структуры, метод центральных многообразий

Stationary structures in a parabolic problem with a rotation transformation on a circle

A. A. Kornuta

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. We considered a parabolic functional differential equation on a circle with rotation transformation of a spatial variable. Using the method of central manifolds, we proved a theorem on the existence of stationary spatially inhomogeneous solutions that bifurcate from a spatially homogeneous solution when the bifurcation parameter changes. The theorem has a local character. We also studied the asymptotic form of these solutions for the departure of the parameter from the bifurcation value.

Keywords: bifurcation, stationary structures, the method of central manifolds.

MSC 2010: 35B32, 35B35, 35K20

1. Введение

Одной из самых популярных нелинейных оптических систем является система, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура двумерной обратной связи. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, которое выполняется призмами, линзами и другими устройствами. Нелинейный интерферометр — одна из наиболее простых оптических систем, в которой реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей. Моделирование динамики нелинейных оптических систем с нелокальными взаимодействиями в контуре обратной связи [1, 10] приводит к параболическим функционально-дифференциальные уравнения с преобразованием пространственной переменной искомой функции. В [11] рассмотрены методы построения периодических решений для произвольной области и невырожденного гладкого преобразования. При построении стационарных структур и анализе их устойчивости для параболического уравнения на отрезке с преобразованием отражения в [12] применялась локальная теория бифуркаций. В [6] экспериментально установлено многообразие оптических структур, показана зависимость их количества и форм от коэффициента диффузии.

В [2, 4] для исследования бифурцирующих структур в кольце и круге использован метод центральных многообразий. В [7] на основе теории нормальных форм изучаются качественные свойства периодических структур, описываемых полулинейным параболическим уравнением с поворотом пространственного аргумента.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается функционально-дифференциальное уравнение на окружности $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, описывающее динамику фазовой модуляции $u = u\,(x,t)$ световой волны прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа в оптической системе с преобразованием поворота на угол h в контуре обратной связи [1, 10]:

$$\begin{aligned} &\partial_t u + u = \mu\Delta u + K\left(1+\gamma\cos Q_h u\right), t>0, \\ &u\,(x+2\pi,t) = u\,(x,t)\,, \quad u\,(x,0) = u_0\,(x)\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где Δ — одномерный оператор Лапласа, $Q_h u\,(x,t) = u\,(x+h,t)$, $\mu > 0-$коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, h — угол поворота поля, коэффициент $K > 0$ пропорционален интенсивности входного поля, $0 < \gamma < 1-$ видность (контрастность) интерференционной картины.

Пусть $H = L_2\left[\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\right]$. Обозначим $H^s, s \in Z_+$, шкалу пространств, порожденную оператором Δ при граничных условиях $u\,(x+2\pi,t) = u\,(x,t)$. Норма в пространстве $H^s, s \in Z_+$ определяется формулой $\|u\|_s^2 =< (-\Delta)^s > + < u, u >$, здесь $< *, * > -$ скалярное произведение в гильбертовом пространстве H.

В работе рассматриваются вопросы существования, формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений, бифурцирующих из пространственно однородных стационарных решений (2.1) $u\,(x,t) = \omega$, которые определяются уравнением

$$\omega = K\left(1+\gamma\cos\omega\right). \tag{2.2}$$

При увеличении K количество одновременно существующих корней этого уравнения неограниченно растет, причем при $K \to \infty$ их состав постоянно обновляется: рождаются новые состояния равновесия и исчезают старые. Фиксируем гладкую ветвь решений

$$\omega = \omega\,(K)\,, 1 + K\gamma\sin\omega\,(K) \neq 0 \tag{2.3}$$

уравнения (2.1). Уравнение (2.1), линеаризованное в окрестности решения $\omega(K)$, представим в виде

$$\partial_t u = Au, \tag{2.4}$$

где $Au = -u + \mu\Delta u - LQ_h u$, $L = -K\gamma \sin\omega$ [12], Q_h−самосопряжённый оператор в H, определяемый равенством $Q_h u(x,t) = u(x+h,t)$.

Далее будем считать, что $h = \pi$, параметр μ принимается в качестве бифуркационного параметра.

Методом Фурье устанавливается

Лемма 1. *Оператор A, рассматриваемый в гильбертовом пространстве $H = L_2[\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}]$ с областью определения $H^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, имеет полную ортогональную систему собственных функций $\cos kx$, $\sin kx$, $k = 1, 2, \ldots$, соответствующих собственным значениям*

$$\lambda_k = -\mu k^2 - 1 + (-1)^k L, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

Согласно теореме 5.1.1 [13] и лемме 1, если $L > 1$, то решение (2.3) уравнения (2.1) неустойчиво для любого значения параметра μ. Если $-1 < L < 1$, то решение (2.3) уравнения (2.1) является асимптотически устойчивым для любого значения параметра μ. Интерес представляет случай $L < -1$. Выберем теперь K так, чтобы выполнялось следующее условие.

Условие 1.

$$L = L(K) < -1.$$

Реализуемость этого условия исследована в [8].

Пусть $\mu_k = (-1 - L)/k^2, k = 1, 2, \ldots$. Если $\mu > \mu_1$, то согласно лемме 1 решение (2.3) уравнения (2.1) является устойчивым. При убывании параметра μ и его прохождении через значение μ_1 решение (2.3) теряет устойчивость.

Если $\mu_2 < \mu < \mu_1$, то индекс неустойчивости решение (2.3) равен 1. При уменьшении μ и его прохождении через μ_k, $k = 2, 3, \ldots$ индекс неустойчивости решение (2.3) каждый раз увеличивается на единицу.

3. Теорема о существовании и устойчивости

Преобразование $u = v + \omega$ приводит уравнение (2.1) к виду

$$\begin{gathered}\partial_t v + v = \mu\partial_{xx} v + L\left(\mathrm{Q}_h v + \frac{1}{2}(\mathrm{Q}_h v)^2 \operatorname{ctg}\omega - \frac{1}{6}(\mathrm{Q}_h v)^3 + O\left(v^4\right)\right), t > 0, \\ v(x + 2\pi, t) = v(x,t), v(x,0) = v_0(x).\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $L = -K\gamma\sin\omega$ [12].

Опуская слагаемые порядка $O(v^4)$ и выполняя замену $\left(-\frac{L}{6}\right)^{1/2} v = U$, получаем уравнение:

$$\begin{gathered}\partial_t U + U = \mu\partial_{xx} U + L\mathrm{Q}_\pi U + \Lambda \mathrm{Q}_\pi U^2 + \mathrm{Q}_\pi U^3, t > 0, \\ U(x + 2\pi, t) = U(x,t), \quad U(x,0) = U_0(x),\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\Lambda = -\sqrt{\frac{3|L|}{2}} ctg\omega$.

Множество стационарных решений E_μ уравнения (3.2), а следовательно, решений краевой задачи

$$\begin{gathered}\mu\partial_{xx}U - U + L\mathrm{Q}_\pi U + \Lambda\mathrm{Q}_\pi U^2 + \mathrm{Q}_\pi U^3 = 0, \quad t > 0,\\ U\left(x+2\pi, t\right) = U\left(x, t\right),\end{gathered} \tag{3.3}$$

зависит от параметров L и μ.

Для случая $\cos u = 0$ в [9] в окрестности бифуркационного значения параметра μ доказана теорема о существовании, устойчивости и асимптотической форме стационарных пространственно неоднородных решений задачи (2.4), построена иерархия упрощенных моделей и установлено существование медленно меняющихся решений.

Далее будем считать, что выполняется следующее условие.

Условие 2.

$$\cos u \neq 0.$$

Имеет место теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1 и 2. При $h = \pi$, $L < -1$, существует $\delta > 0$ такое, что для любых значений параметра μ, удовлетворяющих неравенству*

$$-L - 1 - \delta < \mu < -1 - L, \tag{3.4}$$

существует решение $\varphi_1(x,\mu)$ уравнения (3.2), определяемое равенством

$$\begin{gathered}\varphi_1(x,\mu) = (z\cos x + z^2\sigma_2(x,\mu) + z^3\sigma_3(x,\mu) + z^4\sigma_4(x,\mu) +\\ + z^5\sigma_5(x,\mu) + r(z,x,\mu))\,|_{z=z(\mu)},\end{gathered} \tag{3.5}$$

где

$$\sigma_2 = \frac{\Lambda}{2}\left(-\frac{1}{L-1-2\lambda_1} + \frac{1}{2\lambda_1-\lambda_2}\right)\cos 2x, \tag{3.6}$$

$$\sigma_3 = \frac{-2\Lambda^2 - 2\lambda_1 + \lambda_2}{4\left(2\lambda_1-\lambda_2\right)\left(3\lambda_1-\lambda_3\right)}\cos 3x, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\sigma_4 = \frac{\Lambda}{2}\Bigg[&\frac{1}{L-1-4\lambda_1}\Bigg(\frac{3}{L-1-2\lambda_1} - \frac{3}{4\left(2\lambda_1-\lambda_2\right)} - \frac{5\Lambda^2}{2\left(L-1-2\lambda_1\right)^2} -\\ &- \frac{\Lambda^2}{4\left(2\lambda_1-\lambda_2\right)^2} + \frac{\Lambda^2}{\left(L-1-2\lambda_1\right)\left(2\lambda_1-\lambda_2\right)}\Bigg)\\ &- \frac{1}{\left(4\lambda_1-\lambda_2\right)}\Bigg(\frac{3}{2\left(L-1-2\lambda_1\right)} + \frac{3}{\left(2\lambda_1-\lambda_2\right)} + \frac{1}{2\left(3\lambda_1-\lambda_3\right)} - \frac{\Lambda^2}{\left(2\lambda_1-\lambda_2\right)^2} +\\ &- \frac{3\Lambda^2}{\left(L-1-2\lambda_1\right)\left(2\lambda_1-\lambda_2\right)} + \frac{\Lambda^2}{\left(2\lambda_1-\lambda_2\right)\left(3\lambda_1-\lambda_3\right)}\Bigg)\cos 2x +\\ &+ \frac{1}{\left(2\lambda_1-\lambda_2\right)\left(4\lambda_1-\lambda_4\right)}\Bigg(-\frac{3}{4} - \frac{2\lambda_1-\lambda_2-\Lambda^2}{3\lambda_1-\lambda_3} + \frac{\Lambda^2}{4\left(2\lambda_1-\lambda_2\right)}\Bigg)\cos 4x\Bigg],\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_5 = \frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_3}\Bigg[\Bigg(- \frac{3}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\Lambda^2}{2}\Bigg(\frac{3}{2\,(L-1-2\lambda_1)\,(4\lambda_1-\lambda_2)} - \\
- \frac{3}{8\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2} + + \frac{3}{2\,(L-1-2\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{3}{(2\lambda_1-\lambda_2)\,(4\lambda_1-\lambda_2)} - \\
- \frac{3}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{1}{(L-1-2\lambda_1)\,(3\lambda_1-\lambda_3)} + \\
+ \frac{1}{2\,(4\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)} - - \frac{3}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)} \\
- \frac{3}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)\,(4\lambda_1-\lambda_4)} + \frac{1}{2\,(3\lambda_1-\lambda_3)\,(4\lambda_1-\lambda_4)}\Bigg) + + \\
+ \frac{\Lambda^4}{2}\Bigg(- \frac{1}{(4\lambda_1-\lambda_2)\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2} - \frac{3}{(L-1-2\lambda_1)\,(4\lambda_1-\lambda_2)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} + \\
+ \frac{1}{(L-1-2\lambda_1)\,(4\lambda_1-\lambda_3)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{3}{(4\lambda_1-\lambda_2)\,(2\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)} - \\
- \frac{3}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2\,(3\lambda_1-\lambda_3)} - \frac{1}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2\,(4\lambda_1-\lambda_4)} + \\
+ \frac{1}{(2\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)\,(4\lambda_1-\lambda_4)}\Bigg)\Bigg)\cos 3x + \\
+ \frac{1}{(5\lambda_1-\lambda_5)}\Bigg(\frac{3}{4\,(3\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{\Lambda^2}{4}\Bigg(\frac{3}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2} + \frac{3}{2\,(3\lambda_1-\lambda_3)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} + \\
+ \frac{1}{2\,(3\lambda_1-\lambda_3)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{3}{2\,(4\lambda_1-\lambda_4)\,(3\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{1}{(3\lambda_1-\lambda_3)\,(4\lambda_1-\lambda_4)}\Bigg) + \\
+ \frac{\Lambda^4}{2}\Bigg(\frac{1}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2\,(3\lambda_1-\lambda_3)} - \frac{1}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2\,(4\lambda_1-\lambda_4)} + \\
+ \frac{1}{(3\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)\,(4\lambda_1-\lambda_4)}\Bigg)\Bigg)\cos 5x\Bigg]
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

здесь $r(z,x,\mu) = O(|z|^5)$, $z(\mu) > 0$ — *непрерывная ветвь стационарных точек* *уравнения*

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + \left[-\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{L-1-2\lambda_1} - \frac{\Lambda^2}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)}\right] z^3 +$$
$$+\Bigg[\frac{3}{16\,(3\lambda_1-\lambda_3)} + \Lambda^2\Bigg(- \frac{3}{4\,(L-1-2\lambda_1)^2} - \frac{3}{(L-1-2\lambda_1)\,(L-1-4\lambda_1)} +$$
$$+\frac{3}{4\,(L-1-2\lambda_1)\,(4\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{3}{8\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2} + \frac{3}{4\,(L-1-2\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} +$$
$$+\frac{3}{4\,(L-1-4\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{3}{2\,(4\lambda_1-\lambda_2)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} +$$
$$+\frac{1}{4\,(3\lambda_1-\lambda_3)\,(4\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg) +$$
$$+\Lambda^4\Bigg(\frac{5}{2\,(L-1-2\lambda_1)^2\,(L-1-4\lambda_1)} - \frac{1}{4\,(L-1-4\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2} -$$
$$-\frac{1}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2\,(4\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{1}{(L-1-2\lambda_1)\,(L-1-4\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} +$$
$$+\frac{3}{2\,(L-1-\lambda_2)\,(4\lambda_1-\lambda_2)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)\,(4\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)} +$$
$$+\frac{1}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2\,(3\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg)\Bigg] z^5$$

Решение $\varphi_1(x,\mu)$ — экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся методом центральных многообразий [13]. Существование в окрестности бифуркационного значения параметра μ_1 центрального многообразия уравнения (3.3) доказывается как в [3]. В окрестности $U = 0$, $\mu = -1-L$ центральное многообразие представим в виде

$$\varphi_1(x,\mu) = z\cos x + z^2\sigma_2(x,\mu) + z^3\sigma_3(x,\mu) + z^4\sigma_4(x,\mu) + z^5\sigma_5(x,\mu) + \dots \tag{3.10}$$

где $\sigma_k(x,\mu)$, $k = 2,3,\dots$ функции из пространства $H_0^1[0,2\pi]$. На многообразии (3.10) уравнение (2.4) принимает вид

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + C_2z^2 + C_3z^3 + C_4z^4 + C_5z^5 + \dots \tag{3.11}$$

Найдём коэффициенты разложений (3.10) и (3.11). Для этого подставим (3.10) и (3.11) в уравнение (3.2).

$$\begin{gathered}
\big(\lambda_1(\mu)z + C_2z^2 + C_3z^3 + C_4z^4 + C_5z^5 + \ldots\big)\,\big(\cos x + 2z\sigma_2(x,\mu)+ \\
+3z^2\sigma_3(x,\mu) + 4z^3\sigma_4(x,\mu) + 5z^4\sigma_5(x,\mu) + \ldots\big) + z\cos x + z^2\sigma_2(x,\mu)+ \\
+z^3\sigma_3(x,\mu) + z^4\sigma_4(x,\mu) + z^5\sigma_5(x,\mu) + \ldots = \\
= \mu\bigg(- z\cos x + z^2\frac{\partial^2\sigma_2(x,\mu)}{\partial x^2} + z^3\frac{\partial^2\sigma_3(x,\mu)}{\partial x^2} + z^4\frac{\partial^2\sigma_4(x,\mu)}{\partial x^2}+ \\
+z^5\frac{\partial^2\sigma_5(x,\mu)}{\partial x^2} + \ldots\bigg) + L\big(- z\cos x + z^2\sigma_2(x+\pi,\mu) + z^3\sigma_3(x+\pi,\mu)+ \\
+z^4\sigma_4(x+\pi,\mu) + z^5\sigma_5(x+\pi,\mu) + \ldots\big) + \Lambda\big(- z\cos x + z^2\sigma_2(x+\pi,\mu)+ \\
+z^3\sigma_3(x+\pi,\mu) + z^4\sigma_4(x+\pi,\mu) + z^5\sigma_5(x+\pi,\mu) + \ldots\big)^2 + \big(- z\cos x+ \\
+z^2\sigma_2(x+\pi,\mu) + z^3\sigma_3(x+\pi,\mu) + z^4\sigma_4(x+\pi,\mu) + z^5\sigma_5(x+\pi,\mu) + \ldots\big)^3.
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Из равенства коэффициентов при z^2 в (3.12) получаем уравнение:

$$\mu\frac{\partial^2\sigma_2(x,\mu)}{\partial x^2} - (1+2\lambda_1)\,\sigma_2(x,\mu) + L\sigma_2(x+\pi,\mu) = C_2\cos x - \frac{\Lambda}{2}\,(1+\cos 2x)\,. \tag{3.13}$$

Из условия разрешимости (3.13) в пространстве $H_0^1\,[0,2\pi]$ в классе гладких по параметру μ функций следует, что $C_2 = 0$. Тогда решением уравнения (3.13) в указанном классе является функция, определяемая равенством (3.6).

Приравняем коэффициенты при z^3. Учитывая (3.13) и $C_2 = 0$, получаем уравнение

$$\begin{gathered}
\mu\frac{\partial^2\sigma_3(x,\mu)}{\partial x^2} - (1+3\lambda_1)\,\sigma_3(x,\mu) + L\sigma_3(x+\pi,\mu) = \\
= \left(C_3 + \frac{3}{4} - \frac{\Lambda^2}{L-1-2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)}\right)\cos x+ \\
+\left(\frac{1}{4} - \frac{\Lambda^2}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)}\right)\cos 3x.
\end{gathered} \tag{3.14}$$

Из условия разрешимости уравнения (3.14) в классе гладких по параметру μ функций находим

$$C_3 = -\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{L-1-2\lambda_1} - \frac{\Lambda^2}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)}. \tag{3.15}$$

Тогда решением уравнения (3.14) является функция, удовлетворяющая равенству (3.7).

Учитывая найденные ранее C_2, C_3, σ_2 , σ_3 и приравнивая коэффициенты при z^4

в уравнении (3.12), получим уравнение

$$
\begin{gathered}
\mu\frac{\partial^2\sigma_4(x,\mu)}{\partial x^2}-(1+4\lambda_1)\,\sigma_4(x,\mu)+L\sigma_4(x+\pi,\mu)=\\
=C^4\cos x+\frac{\Lambda}{2}\Bigg[\frac{3}{L-1-2\lambda_1}-\frac{3\Lambda}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)}-\frac{5\Lambda^2}{2\,(L-1-2\lambda_1)^2}-\\
-\frac{\Lambda^2}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2}+\frac{\Lambda^2}{(L-1-2\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)}+\Bigg(\frac{3}{(L-1-2\lambda_1)}-\\
-\frac{3}{(2\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{1}{2\,(3\lambda_1-\lambda_3)}-\frac{\Lambda^2}{(2\lambda_1-\lambda_2)^2}+\\
+\frac{3\Lambda^2}{(L-1-2\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{\Lambda^2}{(2\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg)\cos 2x+\\
+\Bigg(-\frac{3}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{1}{2\,(3\lambda_1-\lambda_3)}-\frac{\Lambda^2}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2}+\\
+\frac{\Lambda^2}{(2\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg)\cos 4x\Bigg]
\end{gathered}
\tag{3.16}
$$

Из условия разрешимости уравнения (3.16), следует, что

$$
\begin{gathered}
C_5=\frac{3}{16\,(3\lambda_1-\lambda_3)}+\Lambda^2\Bigg(-\frac{3}{4\,(L-1-2\lambda_1)^2}-\\
-\frac{3}{(L-1-2\lambda_1)\,(L-1-4\lambda_1)}+\frac{3}{4\,(L-1-2\lambda_1)\,(4\lambda_1-\lambda_2)}+\\
+\frac{3}{4\,(L-1-2\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{3}{4\,(L-1-4\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)}-\\
-\frac{3}{2\,(4\lambda_1-\lambda_2)\,(2\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{1}{4\,(3\lambda_1-\lambda_3)\,(4\lambda_1-\lambda_2)}-\\
-\frac{3}{8\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2}+\frac{1}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg)+\\
+\Lambda^4\Bigg(\frac{5}{2\,(L-1-2\lambda_1)^2\,(L-1-4\lambda_1)}-\frac{1}{4\,(L-1-4\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2}-\\
-\frac{1}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2\,(4\lambda_1-\lambda_2)}-\frac{1}{(L-1-2\lambda_1)\,(L-1-4\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)}+\\
+\frac{3}{2\,(L-1-\lambda_2)\,(4\lambda_1-\lambda_2)\,(2\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{1}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)\,(4\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)}+\\
+\frac{1}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2\,(3\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg)
\end{gathered}
\tag{3.17}
$$

При этом уравнению (3.16) удовлетворяет функция, определяемая равенством (3.9).

Процесс последовательного построения коэффициентов разложений (3.10) и (3.11) неограниченно продолжим. Получающиеся в результате разложения являются асимптотически сходящимся в окрестности $\mu = -1 - L$. При $\mu < \mu_1$ коэффициент $C_3(\mu) < 0$, следовательно, в уравнении (3.11) при $\mu = \mu_1$ имеет место суперкритическая бифуркация и из нулевого устойчивого стационарного решения ответвляются две устойчивые непрерывные по параметру μ ветви стационарных точек [13]. $\square$

Заметим, что утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости $\varphi_1(x,\mu)$ носят локальный по параметру μ характер. Однако, анализ построения инвариантного многообразия (3.10) даёт основание для следующего утверждения: в достаточно широком диапазона изменения параметра μ справедливо приближённое равенство

$$\varphi_1(x,\mu) \approx z\cos x + z^2\sigma_2(x,\mu) + z^3\sigma_3(x,\mu) + z^4\sigma_4(x,\mu) + z^5\sigma_5(x,\mu), \tag{3.18}$$

где $z(\mu) > 0$ — непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\begin{gathered}
\dot z = \lambda_1(\mu)z + \left[-\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{L-1-2\lambda_1} - \frac{\Lambda^2}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)}\right]z^3 + \\
+\left[\frac{3}{16\,(3\lambda_1-\lambda_3)} + \Lambda^2\left(-\frac{3}{4\,(L-1-2\lambda_1)^2} - \frac{3}{(L-1-2\lambda_1)\,(L-1-4\lambda_1)} + \right.\right. \\
+\frac{3}{4\,(L-1-2\lambda_1)\,(4\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{3}{8\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2} + \frac{3}{4\,(L-1-2\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} + \\
\left. +\frac{1}{4\,(3\lambda_1-\lambda_3)\,(4\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)}\right) + \\
+\Lambda^4\left(\frac{5}{2\,(L-1-2\lambda_1)^2\,(L-1-4\lambda_1)} - \frac{1}{4\,(L-1-4\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2} - \right. \\
-\frac{1}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2\,(4\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{1}{(L-1-2\lambda_1)\,(L-1-4\lambda_1)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} + \\
+\frac{3}{2\,(L-1-\lambda_2)\,(4\lambda_1-\lambda_2)\,(2\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{1}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)\,(4\lambda_1-\lambda_2)\,(3\lambda_1-\lambda_3)} + \\
\left.\left. +\frac{1}{4\,(2\lambda_1-\lambda_2)^2\,(3\lambda_1-\lambda_3)}\right)\right]z^5.
\end{gathered} \tag{3.19}$$

На основании выполненного выше анализа никаких выводов об устойчивости $\varphi_1(x,\mu)$ при углублении μ в область надкритичности сделать нельзя. Однако, приближённое равенство (3.18) позволяет исследовать устойчивость стационарной точки $\varphi_1(x,\mu)$ при отходе параметра μ от бифуркационного значения.

Рассмотрим поведение $\varphi_1(x,\mu)$ при уменьшении параметра μ. С этой целью воспользуемся приближенным равенством (3.18). Численные расчеты проводились для случая $L = -\frac{3}{2}$. В качестве иллюстрации на Рис. 1 приведены графики функции $\varphi_1(x,\mu)$ для $\mu = 0.49, \mu = 0.4, \mu = 0.2, \mu = 0.1, \mu = 0.01$.

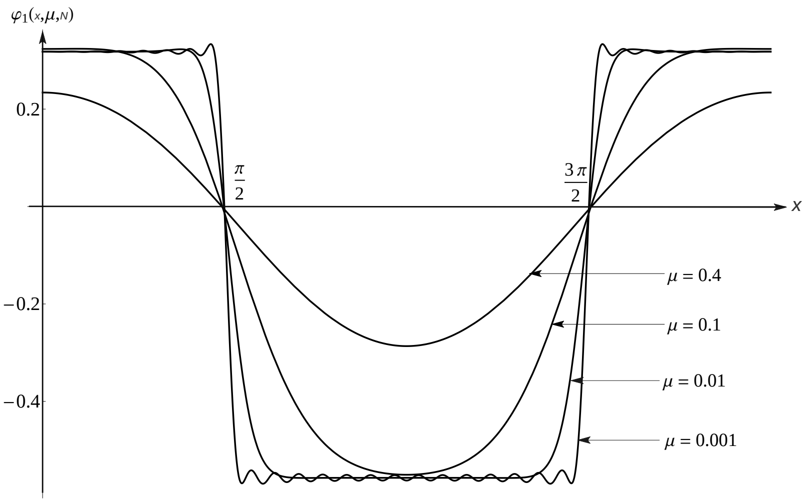

Рис. 1. Приближённое решение (3.18) уравнения (2.5) при $L = -1.5$, $\mu = 0.49; 0.4; 0.2; 0.1; 0.01$.

Вблизи значения параметра μ_1 график функции φ_1 имеет квазигармоническую форму с малой амплитудой. При уменьшении параметра μ амплитуда функции $\varphi_1(x,\mu)$ возрастает. При этом $\varphi_1(x,\mu)$ функции принимает экстремальные значения в точках 0, π и 2π. Затем рост её амплитуды прекращается. При дальнейшем уменьшение параметра μ увеличиваются промежутки, примыкающие к $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, на которых функция $\varphi_1(x,\mu)$ принимает почти постоянные значения. При достижении μ некоторого значения, функция $\varphi_1(x,\mu)$ начинает колебаться, т. е. проявляется явление Гиббса. При μ близких к нулю $\varphi_1(x,\mu)$ является функцией типа внутреннего переходного слоя [5] с двумя точками перехода $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$.

При уменьшении параметра μ и прохождении значений $\mu_k = \sqrt{-1-L}/(2k-1)$, $k = 1, 2, \ldots$ от $U = 0$ каждый раз ответвляется пара $\varphi_k(x,\mu), \varphi_k^*(x,\mu)$ пространственно неоднородных стационарных решений задачи (3.2).

Для нахождения $\varphi_k(x,\mu)$ используется принцип подобия

$$\varphi_k(x,\mu) = \varphi_1(kx; k\mu), \quad k = 2, 3, \ldots$$

4. Заключение

В работе, используя метод центральных многообразий, доказана теорема о существовании, форме и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений параболического функционально-дифференциального уравнения с преобразованием поворота пространственной переменной на окружности.

Список цитируемых источников

1. *Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов, В.Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических анало-

гов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации./Под ред. С. А. Ахманова, М. А. Воронцова. — М.: Наука, 1990. — С. 263-325.

Akhmanov, S A., Vorontsov, M A., & Ivanov, V. Ju. (1990) Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback: on the way toward the creation of nonlinear-optical analogs of neuron nets. In S. A. Akhmanov, & M A. Vorontsov (Eds.), New Physical Principles of Optical Processing of Information (pp. 263–325). Moscow: Nauka. (in Russian)

2. *Белан Е. П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — Т. 46, №5. —С. 99-111.

Belan, E. P. (2010). Dynamics of stationary structures in a parabilic problem with reflected spatial argument. Cybernetics and systems analysis, 46:5, 772-783.

3. *Белан Е. П.* (2004). О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении //Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40. №5. — С. 645–654.

Belan E. P. (2004). On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation. Differ. Equ., 40:5, 692–702.

4. *Белан Е. П.* Двумерные стационарные структуры в параболическом уравнении с отражением пространственных переменных // Кибернетика и системный анализ — 2011. — Т. 47. №3. — С.33–41.

Belan E. P. (2011). Two-dimensional stationary structures in a parabolic equation with an inversion transformation of its spatial arguments. Cybernetics and systems analysis 47, No.3, 360–367.

5. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений — М: Высшая школа, — 1990. — 208 с.

Vasil'eva, A.B., Butuzov, V.F. (1990). Asymptotic Methods in the Theory of Singular Perturbations. Moscow: Vysshaya Shkola. (in Russian)

6. *Воронцов, М.А., Железных, Н.И.* Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью // Матем. моделирование — 1990. —Т.2, №2. — С. 31–38.

Vorontsov M. A., Zheleznykh N. I. (1990). Transverse bistability and multistability in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback. Matem. Mod. 2, No.2, 31–38. (in Russian)

7. *Кащенко С. А.* Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1991. — Т.31, №3. — С. 467-–473.

Kashchenko, S. A. (1991). Asymptotic form of spatially non-uniform structures in coherent nonlinear optical systems. Comput. Math. Math. Phys. 31, No.3, 97-102.

8. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения. // Теор. и матем. физика. — 2004. — Т. 140, №1. — С. 14–28.

Kolesov, A. Yu.& Rozov, N. H. (2004). Optical buffering and mechanisms for its occurence. Theoret. and Math. Phys. 140, No.1, 905–917.

9. *Корнута А. А.* Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении на окружности с поворотом пространственной переменной // Динамические системы. — 2014. — Т.4(32), №1-2. — С. 59–75.

Kornuta A A. (2014). Metastable structures in a parabolic equation on a circle with rotation of a space variable. Dinamicheskie sistemy 4(32), No.1-2, 59–75. (in Russian)

10. *Разгулин А. В.* Нелинейные модели оптической синергетики. — М.: МАКС Пресс, 2008. — С. 201.

Razgulin, A. V. (2008). Nonlinear models of optical synergetics. Moscow: MAX-Press. (in Russian)

11. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения. // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, №10. — С. 1394–1401.

Skubachevskij, A. L. (1998). The Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional-differential equation. Differ. Equations 34, No.10, 1395-1402.

12. *Чушкин В. А., Разгулин А. В.* Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отражением пространственного аргумента // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная Математика и кибернетика. — 2003. — №2. — С. 13–20.

Chushkin, V. A, Razgulin, A. V (2003). Steady-state structures in a functional-differential diffusion equation with reflection of the spatial argument. Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15: Vychisl. Mat. Kibern., 2, 4-12.

13. *Хенри, Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир. — 1985. — 376 с.

Henry, D. (1981). Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

Получена 14.08.2016