*Динамические системы, 2016, том 6(34), №3, 209–243*

УДК 517:957

# Динамика бегущих волн в параболической задаче с преобразованием поворота пространственной переменной

**Е. П. Белан**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: belan@crimea.edu*

**Аннотация.** В статье предложен новый подход по исследованию бегущих волн в параболических задачах на окружности с малой диффузией и преобразованием сдвига пространственной переменной, которые ответвляются от пространственно однородного стационарного решения. Доказано, что бегущие волны взаимодействуют по принципу 1:2. Получен новый критерий устойчивости бегущих волн в соответствии с этим принципом. Согласно этому результату число устойчивых бегущих волн возрастает при условии, что коэффициент диффузии стремится к нулю.

**Ключевые слова:** параболическая задача, малая диффузия, поворот переменной, бегущая волна, устойчивость, бифуркация, взаимодействие

# Traveling wave dynamics in a nonlinear parabolic equation with rotation of spatial arguments

**E. P. Belan**

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** In this paper, we develop a new approach to study the behavior of traveling wave solutions in a nonlinear parabolic equation on a circle with a small diffusion and rotation of spatial arguments, that bifurcate from a spatial homogenies stationary solution. We prove that the traveling waves interaction satisfies to 1:2 principle. From this, it is followed the new criterion of the traveling wave stability. In according this result, a number of stable traveling waves increases when the diffusion coefficient tends to zero.

**Keywords:** parabolic equation, small diffusion, rotation arguments, traveling wave, stability, bifurcations, interaction

**MSC 2010:** 35K20, 35K59, 35Q60, 78A05, 37L10, 35R10, 35B32, 35B10, 35B35, 35C07, 35C20

## Введение

Как известно [18], [25], [2], одним из основных предметов исследования в нелинейной динамике являются устойчивые пространственно-временные структуры. Широкие возможности исследования процессов зарождения и развития диссипативных структур демонстрируют оптические системы с двумерной обратной связью [1]. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами. Экспериментально показано [1], что использование даже простейших типов преобразований (отражение, поворот) позволяет реализовать широкий спектр самоорганизации светового поля.

Нелинейный интерферометр с гладким преобразованием поля в двумерной обратной связи является одной из наиболее простых оптических систем, в которых реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей. В этом случае экспериментально установлено многообразие оптических структур, выявлена зависимость их форм и количества от коэффициента диффузии [49], [38].

Математической моделью оптических систем с двумерной обратной связью являются квазилинейные параболические уравнения с преобразованиями пространственных переменных. Фазовая модуляцией световой волны на апертуре $S \in \mathbb{R}^2$ описывается функцией $u(x,t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\partial u/\partial t + u = D\Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \; x \in S, \quad t > 0, \tag{0.1}$$

и краевым условиям на $\partial S$. Здесь $\Delta$ — двумерный оператор Лапласа, $Qu(t,x) = u(t,q(x))$, $q(x)$ — гладкое обратимое преобразование пространственных переменных, $D > 0$ — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $0 < \gamma \leq 1$ — видность интерференционной картины, $K > 0$ — коэффициент нелинейности, зависящий от интенсивности входного поля.

Бегущие волны, ротационные волны, движущиеся фронты, стационарные пространственно-неоднородные структуры представляют значительный интерес при исследовании процессов, описываемых нелинейными параболическими уравнениями. Бегущие волны на окружности для параболического уравнения на окружности и преобразованием поворота пространственной переменной исследовались в работах [20], [26], [27], [42]. Построению асимптотической формы и анализу устойчивости ротационных волн для параболического уравнения на круге с преобразованием поворота пространственной переменной посвящены работы [28], [6], [9]. В работах [20], [42], рассмотрены вопросы существования, асимптотической формы и устойчивости медленно меняющихся бегущих волн на окружности с преобразованием поворота пространственной переменной. Задача о взаимодействии бегущих волн на окружности (Хопф-Хопф бифуркация [44]) с преобразованием поворота пространственной переменной в регулярном случае и бифуркация рождения 2-х частотного тора решений рассматривалась в [20], [42], [7]. Взаимодействию вращающихся волн на круге с преобразованием поворота пространственной переменной в регулярном случае и бифуркация рождения 2-х частотного тора решений посвящены работы [6]. Задача о бифуркации рождения вращающихся структур для параболического уравнения на круге с преобразованием поворота и радиального сжатия пространственных переменных рассматривалась в [8], [9]. Бифуркация рождения периодических решений в (0.1) на гладкой области $S$ с условиями Неймана на $S$ и гладким обратимым преобразование $q$ исследована в [34, 4].

Согласно натурных экспериментов и численных расчетов в оптических системах с двумерной обратной связью и их математических моделях (0.1) наблюдались пространственно-неоднородные стационарные структуры [49, 38]. В работах [20], [42] методом квазинормальных форм исследованы вопросы существования, формы и устойчивости медленно меняющихся решений в параболической задаче на окружности с малой диффузией и преобразованием поворота близкого к рационально соизмеримому $\pi$. В случае параболической задаче на симметричном относительно нуля отрезке и преобразования отражения бифуркационному анализу рождения из пространственно однородного стационарного решения пространственно неоднородных стационарных решений посвящена работа [37]. В отличие от [37] указанная задача исследовалась [11], [12], [13] построением иерархии упрощенных моделей — галеркинских аппроксимаций исходной задачи. Задача о построении стационарных структур в случае параболической задачи на прямоугольнике и преобразование отражения пространственных переменных рассматривалась в [14]. Подчеркнем теперь, что в параболических задачах с малой диффузией при определенных условиях возникают метаустойчивые структуры — медленно меняющиеся решения [16], [23]. Фундаментальные результаты по исследованию метаустойчивых структур в параболической задаче Неймана на отрезке и малой диффузией принадлежат авторам работ [43], [41].

При учете запаздывания в двумерной обратной связи функция $u(x,t)$ удовлетворяет параболическому уравнению с преобразованиями пространственных переменных и запаздыванием. Как отмечено в [42] наличие запаздывания существенно усложняет анализ пространственно-временных структур. Даже при $D=0$ фазовое пространство соответствующего дифференциального уравнения с запаздывание является бесконечномерным и согласно проведенным экспериментам в этом случае наблюдались хаотические режимы [45], [46]. Исследование (0.1) при учете запаздывания начало развиваться недавно. Полученные здесь результаты и библиография представлены в публикациях [29], [31], [30]. В работе [39] рассмотрен случай дифракции с учетом запаздывания в двумерной обратной связи. Оказалось, что интересно, тогда в случае отсутствия поворота при одних и тех же параметрах существуют вправо-влево вращающиеся волны и их суперпозиция — стоячая волна. Этот эффект проанализирован в [40] для случая вырожденной бифуркации Андронова-Хопфа, возникающей при O(2) симметрии задачи с учетом дифракции и запаздывания.

Особый интерес представляет исследование динамики структур в параболической задаче с преобразованием пространственной переменной и малой диффузией. Экспериментально установлено [1], что в этом случае имеет место явление распада оптических структур (оптическая турбулентность). Для случая окружности с преобразованием сдвига, близкого к рационально соизмеримому с $\pi$, в статьях [20, 42] методом квазинормальных форм получено асимптотическое представление бегущих волн и установлено, что при малом коэффициенте диффузии имеет место их мультистабильность. В работах [21], [25] доказано, что в указанной выше задаче реализуется явление буферности [21], [25]. Буферность, как показано [21], [25], при определенных условиях носит высокомодовый характер.

Настоящая статья носит обзорный характер. В ней отражены результаты работы [10], которой предшествовали исследования, изложенные в [5].

В соответствии с общим взглядом на процессы установления той или иной структуры в диссипативных динамических системах [18], в работе автора [10] было установлено, что устойчивость выделенной бегущей волны определяется воздействиями на неё вполне определенных пар бегущих волн. Следует отметить, что реализуются два сценария динамики бегущих волн:

— родившаяся устойчивой бегущая волна сохраняет устойчивость при уменьшении коэффициента диффузии;

— родившаяся устойчивой бегущая волна устойчивость теряет, при этом индекс её неустойчивости возрастает с уменьшением коэффициента диффузии.

В первом случае каждая родившееся неустойчивой бегущая волна, преодолевая последовательно давление определенных пар бегущих волн, обретает устойчивость, сохраняя ее при дальнейшем уменьшении коэффициента диффузии. Во втором случае каждая родившееся неустойчивой бегущая волна, преодолевая последовательно давление определенных пар бегущих волн, обретает устойчивость при уменьшении коэффициента диффузии, теряя её под давлением вполне определенных пар бегущих волн. Индекс же её неустойчивости возрастает с уменьшением коэффициента диффузии. Результаты в [10] дополнены численными расчетами по исследованию спектров бегущих волн, что позволяет оценить степень влияния на выделенную бегущую волну воздействующих на неё пар бегущих волн.

## 1. Основные предположения

На окружности $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ рассмотрим уравнение

$$\dot{u} + u = \mu\Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \tag{1.1}$$

где $0 < \mu \ll 1$, $Qu(\theta, t) = u(\theta + h, t)$, $\Delta$ — одномерный оператор Лапласа.

Будем исследовать вопросы существования, асимптотической формы и устойчивости решений типа бегущих волн уравнения (1.1), бифурцирующих при изменении $K$ или $h$ из пространственно однородных стационарных состояний.

Обозначим через $H = L_2(S^1)$ гильбертово пространство измеримых на $S^1$ функций. Норму в пространстве $H$ будем обозначать $\|\cdot\|$. Обозначим через $H^l(S^1)$, $l \in \mathbb{Z}_+$, пространство Соболева измеримых на $S^1$ функций. Скалярное произведение в $H^l(S)$, $l \in \mathbb{Z}_+$ определяется стандартно. Норму в пространстве $H^l(S)$ обозначим $\|\cdot\|_l$. В качестве фазового пространства рассматриваемой задачи возьмем соболевское пространство $H^1(S^1)$.

Далее будем интересоваться вопросами о существовании и устойчивости (в метрике $H^1$) бегущих волн уравнения (1.1), бифурцирующих при увеличении параметра $K$ из пространственно однородных состояний равновесия, т. е. решений уравнения

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \tag{1.2}$$

В связи с тем, что с ростом $K$ количество сосуществующих корней уравнения (1.2) растет, возникает проблема выбора подходящего решения, т. е. такого, которое колебательным образом теряет устойчивость при увеличении $K$.

Итак, фиксируем какую-либо непрерывную ветвь решений уравнения (1.2)

$$w = w(K), \quad 1 + K\gamma \sin w(K) \neq 0. \tag{1.3}$$

Затем линеаризуем уравнение (1.1) в окрестности состояния равновесия (1.3) и применим к полученному на $S^1$ уравнению

$$\dot{u} = \mu \Delta u - u + \Lambda(K) Q u,$$

где $\Lambda(K) = -K\gamma \sin w(K)$, метод Фурье по системе функций $\exp(im\theta)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В результате убеждаемся, что спектр устойчивости рассматриваемого состояния равновесия состоит из собственных значений

$$-1 - \mu m^2 + \Lambda(K)\exp(imh), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{1.4}$$

Согласно (1.3) либо $\Lambda(K) > -1$, либо $\Lambda(K) < -1$. Если $\Lambda(K) \in (-1, 1)$, то $w = w(K)$ — экспоненциально устойчивое стационарное решение (1.1) для любого $\mu > 0$. Если же $\Lambda(K) > 1$, то оно, очевидно, неустойчиво. При $\Lambda(K) = -1$ изменение устойчивости носит апериодический характер. В этой связи предполагается,что

$$\Lambda(K) < -1.$$

Проблема реализуемости этого условия решена в [21].

Остановимся на выборе фигурирующего в (1.1) параметра $h$. Из формул (1.4) следует, что при иррациональном отношении $\pi/h$ спектр устойчивости любого состояния равновесия при $m \to \infty$, $\mu \to 0$ фактически меняется непрерывно. В этой связи будем предполагать, что

$$h = 2\pi p/q, \tag{1.5}$$

где натуральные числа $p, q$ взаимно просты, а $q \geq 3$ — нечетное. Тогда среди натуральных чисел $k = 1, \ldots, q-1$ найдутся ровно два значения $m^+ < m^-$, $m^+ + m^- = q$, такие, что справедливо равенство [21]

$$\min_{0 \leq k \leq q} \cos(kh) = \cos(m^{\pm} h) = -\cos \pi/q. \tag{1.6}$$

Теперь осуществим выбор бифуркационного значения параметра $K$ из условия

$$-1 + \Lambda(K)\cos(m^+ h) = 0. \tag{1.7}$$

Согласно [21] существует счетная последовательность $\widehat{K}_r, r = 1, 2, \dots$, корней уравнения (1.7) такая, что $\widehat{K}_r \to \infty$ при $r \to \infty$, причем

$$\Lambda'(\widehat{K}_r) < 0.$$

Выберем некоторое $\widehat{K}_r$ (с целью упрощения записи нижний индекс опустим). Легко видеть, что в окрестности нуля существует аналитическая функция $\kappa(\nu)$, $\kappa(0) = 0$ такая, что

$$\Lambda(\widehat{K} + \kappa) = \widehat{\Lambda} - \nu. \tag{1.8}$$

Здесь $\widehat{\Lambda} = \Lambda(\widehat{K})$.

Выполним теперь в уравнении (1.1) замену

$$u = v + w(\nu),$$

где $w(\nu) = w(\widehat{K} + \kappa(\nu))$, и представим полученное уравнение в виде

$$\dot{v} = \mathfrak{L}(\mu, \nu)v + \mathfrak{R}(Qv, \nu), \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mu, \nu)v &= \mu\Delta v - v + (\widehat{\Lambda} - \nu)Qv, \\ \mathfrak{R}(v, \nu) &= (\widehat{K} + \kappa(\nu))\gamma[\cos(w(\nu) + v) - \cos w(\nu) + v \sin w(\nu)]. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Очевидно,

$$\mathfrak{L}(\mu, \nu)\exp(im\theta) = \lambda_m(\mu, \nu)\exp(im\theta), \tag{1.11}$$

где

$$\lambda_m(\mu, \nu) = -1 - \mu m^2 + (\widehat{\Lambda} - \nu)\exp(imh) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \tag{1.12}$$

Для уравнения (1.9) в фазовом пространстве $H$ реализуется критический случай устойчивости бесконечной размерности. Действительно, согласно (1.4) — (1.8), (1.12)

$$\lambda_{s^\pm}(0, 0) = \pm i\omega_0, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\omega_0 = \widehat{\Lambda}\sin m^+ h \neq 0$, $s^\pm = m^\pm + sq$, $s = 0, 1, 2, \dots$. В силу (1.4), (1.6),(1.7), (1.11)

$$\operatorname{Re}\lambda_{s^\pm}(\mu, \nu) = -\mu(m^\pm + sq)^2 - \widehat{\Lambda}^{-1}\nu. \tag{1.13}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}\lambda_{0^+}(\mu, \nu) > \operatorname{Re}\lambda_{0^-}(\mu, \nu) > \operatorname{Re}\lambda_{1^+}(\mu, \nu) > \dots, \quad \mu > 0. \tag{1.14}$$

Эти неравенства используются ниже при анализе устойчивости бегущих волн уравнения (1.9).

## 2. Асимптотические разложения бегущих волн

Исходя из равенства (1.13), в качестве бифуркационного параметра в уравнении (1.9) примем $\varepsilon = \dfrac{\mu}{\nu}$. Тогда при уменьшении параметра $\varepsilon$ и прохождении его через значения

$$(-\Lambda)^{-1}(m^{\pm} + sq)^{-2}, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

каждый раз в результате бифуркации Андронова-Хопфа от нулевого решения уравнения (1.9) ответвляется бегущая волна.

Бегущая волна, бифурцирующая из устойчивого тривиального решения при прохождении $\varepsilon$ через значение $(-\Lambda)^{-1}(m^{+})^{-2}$, рождается устойчивой.

Бегущая волна, которая ответвляется от потерявшего устойчивость нулевого решения в точке $(-\Lambda)^{-2}(m^{-})^{-2}$, рождается неустойчивой с двумерным неустойчивым многообразием. При прохождении параметра $\varepsilon$ через значения $(-\Lambda)^{-1}(m^{+} + sq)^{-2}$, $(-\Lambda)^{-1}(m^{-} + sq)^{-2}$ от нуля ответвляется бегущая волна с $4s$ и $4s+2$-мерным неустойчивым многообразием, соответственно.

Таким образом, уменьшение параметра $\varepsilon$ (при фиксированном $\nu$) приводит к увеличению числа бегущих волн. Рассмотрим далее вопрос о взаимодействии бегущих волн, следуя общему представлению о взаимодействии структур в диссипативных системах [18].

При ответе на последний вопрос здесь используется формализм метода построения центральных многообразий в виде разложения в асимптотически сходящиеся ряды [35], [36, гл. 5] в случае симметрии относительно группы вращения окружности. С этой целью найдем представление бегущей волны, которая ответвляется от нулевого решения уравнения (1.9) при прохождении параметра $\varepsilon$ через значения $(-\Lambda)^{-1}(m^{+} + sq)^{-2}$.

Будем искать двухпараметрическое семейство решений уравнения (1.9) в виде

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(z \exp{(i(m^{+} + sq)\theta)}, \text{к.с.}, \mu, \nu). \tag{2.1}$$

Здесь $\sigma_1(z, \overline{z}, \mu, \nu) = z + \overline{z}$, $\sigma_k(z, \overline{z}, \mu, \nu)$, $k = 2, 3 \dots$, — форма $k$-ой степени относительно $z, \overline{z}$, а переменная $z$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = z(\lambda_{s^{+}} + c_1|z|^2 + c_2|z|^4 + \dots), \tag{2.2}$$

где $c_k = c_k(\mu, \nu)$, $k = 1, 2, \dots$. Комплексно сопряженная переменная $\overline{z}$ удовлетворяет комплексно сопряженному дифференциальному уравнению. Подставим (2.1), (2.2) в уравнение (1.9). Выполним замену $z \exp{(i(m^{+} + sq)\theta)} \to z$ и приравняем формы одинаковых степеней относительно переменных $z, \overline{z}$ в левой и правой частях полученного равенства. В результате получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений

$$B_{s^{+}}(\mu, \nu)\sigma_k = f_k(z, \overline{z}, \nu), \quad k = 2, 3 \dots, \tag{2.3}$$

где $B_{s^+}(\mu,\nu)$ оператор, определенный на пространстве многочленов относительно $z,\overline{z}$ следующем образом:

$$\begin{gathered}B_{s^+}(\mu,\nu)\sigma=\frac{\partial\sigma}{\partial z}\lambda_{s^+}z+\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}\overline{\lambda_{s^+}}\overline{z}+\\ +\mu(m^++sq)^2(\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}z^2-2\frac{\partial^2\sigma}{\partial z}\partial\overline{z}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial\overline{z}^2}+\frac{\partial\sigma}{\partial z}z+\frac{\partial\sigma}{\partial\overline{z}}\overline{z})+\\ +\sigma-(\widehat{\Lambda}-\nu)\widehat{Q}\sigma,\\ \widehat{Q}\sigma(z,\overline{z})=\sigma(z\exp{(i(m^+h)},\overline{z}\exp{(i(m^+h))}\end{gathered}\tag{2.4}$$

Ясно, оператор $B_{s^+}(\mu,\nu)$ является диагональным оператором, причем имеют место следующие равенства

$$B_{s^+}(\mu,\nu)z^\alpha\overline{z}^\beta=(\lambda_{s^+}\alpha+\overline{\lambda_{s^+}}\beta-\lambda_{s^+(\alpha-\beta)})z^\alpha\overline{z}^\beta.\tag{2.5}$$

Отсюда, в частности, следует в силу (1), что

$$B_{s^+}(0,0)z^\alpha\overline{z}^\beta=(i\omega_0(\alpha-\beta)-\lambda_{s^+(\alpha-\beta)}(0,0))z^\alpha\overline{z}^\beta,\tag{2.6}$$

В силу (1.10)

$$f_2(z,\overline{z},0,0)=-\frac{1}{2}\widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}(z\exp{(im^+h)}+\overline{z}\exp{(-im^+h)})^2.$$

Обозначим

$$b=2i\omega_0+1-\widehat{\Lambda}\exp{(2im^+h)}.\tag{2.7}$$

Из уравнения (2.3) при $k=2$, $\mu=0$, $\nu=0$ в силу (2.6) находим $\sigma_2=\sigma_2(z,\overline{z},0,0)$:

$$\sigma_2=\frac{\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}}{2}(b^{-1}\exp{(im^+h)}z^2+\text{к.с.}+2(1-\widehat{\Lambda})^{-1}z\overline{z}).\tag{2.8}$$

Переходим теперь к уравнению (2.3) при $k=3$, $\mu=0$, $\nu=0$. Опираясь на формулу (2.9) для $\sigma_2$ и привлекая тейлоровское разложение $\mathfrak{R}(v,0)$, приходим к неоднородности

$$f_3(z,\overline{z})=((\widehat{Q}(\frac{1}{2}\widehat{\Lambda}(z+\overline{z})^2\sigma_2(z,\overline{z})+\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}(z+\overline{z})^3)-c(z^2\overline{z}+z\overline{z}^2),\tag{2.9}$$

$c_1(0,0)=c$. Согласно (2.6) для разрешимости уравнения (2.3) при $k=3$, $\mu=0$, $\nu=0$ необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при $z^2\overline{z}$, $z\overline{z}^2$ в $f_3(z,\overline{z})$ были равны нулю. Из этого условия однозначно находим

$$\begin{gathered}c=\frac{1}{2}\exp{(im^+h)}\big(-\widehat{\Lambda}+(\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^2\times\\ \times(2(1-\widehat{\Lambda})^{-1}+\exp{(2im^+h)}b^{-1})).\end{gathered}\tag{2.10}$$

Затем находим $\sigma_3$ из уравнения (2.3) при $k=3$, $\mu=0$, $\nu=0$ в той же форме, что и его неоднородность.

Заметим, что уравнение (2.3) при $k=2$ имеет аналитическое относительно $\mu,\nu$ в окрестности нуля решение $\sigma_2=\sigma_2(\cdot,\mu,\nu)$. Это же уравнение при $k=3$ имеет решение $c_1(\mu,\nu)$ и $\sigma_3(\cdot,\mu,\nu)$. Эти функции являются аналитическими функциями $\mu,\nu$ в окрестности нуля. Отметим, что процесс последовательного построения $c_k(\mu,\nu)$, $\sigma_k(\cdot,\mu,\nu)$ в пространстве аналитических по $\mu,\nu$ в окрестности нуля функций неограниченно продолжим.

Формальные разложения (2.1), (2.2) позволяют построить приближенные разложения. Примем, в частности, в качестве первого приближения

$$v=\sum_{k=1}^{2}\sigma_k(z\exp\left(i(m^{+}+sq)\theta\right),\text{к.с},0,0), \tag{2.11}$$

в котором переменная $z$ удовлетворяет уравнению

$$\dot z=z(\lambda_{s^+}+c|z|^2). \tag{2.12}$$

Рассмотрим теперь вопрос о периодических решениях уравнений (2.12). Бифуркационный анализ этих уравнений опирается на следующую лемму.

**Лемма 1.** *$Re\, c<0$.*

*Доказательство.* Согласно (2.10) достаточно установить неравенство

$$\mathrm{Re}\left(\exp\left(3im^{+}h\right)(2i\hat\omega_0+1-\widehat\Lambda\exp\left(2im^{+}h\right))^{-1}\right)\le 0. \tag{2.13}$$

Учитывая вытекающее из (1.7) и определения $\omega_0$ равенство

$$\widehat\Lambda\exp\left(im^{+}h\right)=1+i\omega_0,$$

убеждаемся, что (2.13) эквивалентно условию

$$(\widehat\Lambda-1)(\widehat\Lambda+2)(-2\widehat\Lambda^2+\widehat\Lambda+2)\ge 0.$$

Последнее справедливо, так как $\widehat\Lambda\in(-1,-2]$. Лемма доказана. □

Доказанная лемма позволяет решить вопрос о бифурцирующих из нуля периодических решениях уравнения (2.12). Таким решением уравнения (2.12) при $\mathrm{Re}\,\lambda_{s^+}(\mu,\nu)>0$ является

$$z=\rho_{s^+}^{1/2}\exp\left(i\hat\omega_{s^+}t\right), \tag{2.14}$$

где

$$\begin{aligned}\rho_{s^+}&=\frac{\mathrm{Re}\,\lambda_{s^+}(\mu,\nu)}{-\mathrm{Re}\,c},\\ \hat\omega_{s^+}&=\mathrm{Im}\,\lambda_{s^+}(\mu,\nu)+\mathrm{Im}\,c\rho_{s^+}(\mu,\nu).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Следовательно, в силу (2.9), (2.11) уравнение (1.9) имеет приближенное по невязке порядка $\|(\mu,\nu)\|^{3/2}$ периодическое по $t$ решение

$$\begin{aligned}\widehat{v}_{s^+} = \rho_{s^+}^{1/2} 2\cos\eta + \widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}\rho_{s^+}((1-\widehat{\Lambda})^{-1}+ \\ +\mathrm{Re}\,(b\exp{(2i(\eta+m^+h))})),\end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$\eta = \hat{\omega}_{s^+}(\mu,\nu)t + (m^+ + sq)\theta.$$

Ясно, что решение $\widehat{v}_{s^-}$ уравнения (1.9) с волновым числом $m^- + sq$ можно получить из $\widehat{v}_{s^+}$ заменой $s^+$, $c$ на $s^-$, $\overline{c}$ соответственно.

Согласно проведенному выше анализу квазигармоническая форма рождающегося из нуля периодического по времени решения сохраняется при $\varepsilon \to 0$. Причина этого явления ясна — бегущие волны уравнения (1.9) имеют различные фазовые скорости.

**Устойчивость приближенных решений $\widehat{v}_{0^+}$, $\widehat{v}_{0^-}$.** Решение поставленной в предыдущем разделе задачи о характере взаимодействия бегущих волн уравнения (1.9) начнем для случая, когда их число не превосходит четырех. Естественно, что этот случай представляет и самостоятельный интерес в связи с анализом начального этапа самоорганизации системы в окрестности потерявшего устойчивость нулевого решения. Для решения указанной задачи воспользуемся формализмом метода построения разложения центральных многообразий, предположив, что размерность критического пространства равна восьми. Итак, будем искать приближенные решения уравнения (1.9) в виде

$$\begin{aligned}v = \sum_{k=1}^{3}\sigma_k(z_1\exp{(i(m^+)\theta)}, z_2\exp{(i(m^-)\theta)}, \\ z_3\exp{(i(m^+ + q)\theta)}, z_4\exp{(i(m^- + q)\theta)}, \text{к.с.}),\end{aligned} \tag{2.17}$$

где $\sigma_1(z,\overline{z}) = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \text{к.с.}$, $\sigma_s(z,\overline{z})$, $s = 2,3$ — форма $s$-ой степени относительно $z,\overline{z}$, $z = (z_1,z_2,z_3,z_4)$, а переменная $z_k$, $k = 1,2,3,4$, удовлетворяет уравнению

$$\dot{z}_k = \hat{\lambda}_k(\mu,\nu)z_k + a_k(z,\overline{z}), \quad k = 1,2,3,4. \tag{2.18}$$

Здесь $\hat{\lambda}_1 = \lambda_{0^+}$, $\hat{\lambda}_2 = \lambda_{0^-}$, $\hat{\lambda}_3 = \lambda_{1^+}$, $\hat{\lambda}_4 = \lambda_{1^-}$, а $a_k(z,\overline{z})$, $k = 1,2,3,4$, — формы третьей степени относительно $z,\overline{z}$. Мы осуществим выбор форм $a_k(z,\overline{z})$, $k = 1,2,3,4$, согласно следующих условий $S^1$ эквивариантности

$$a_k(z,\text{к.с.})\exp{(im(k)\theta)} = a_k(z\exp{(im(\cdot)\theta)},\text{к.с.}), \tag{2.19}$$

где $m(1) = m^+$, $m(2) = m^-$, $m(3) = m^+ + q$, $m(4) = m^- + q$, а

$$\begin{aligned}z\exp{(im(\cdot)\theta)} =& (z_1\exp{(i(m^+)\theta)}, z_2\exp{(i(m^-)\theta)}, \\ & z_3\exp{(i(m^+ + q)\theta)}, z_4\exp{(i(m^- + q)\theta)}).\end{aligned}$$

Подставим (2.17), (2.18) в уравнение (1.9). Затем, выполнив замену $z\exp(im(\cdot)\theta)\to z$, приравняем формы соответственно второй и третьей степени в левой и правой частях полученного равенства. В результате, полагая $\mu=0$, $\nu=0$, получим следующее уравнение относительно $\sigma_2$:

$$B_2\sigma_2=\frac{\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}}{2}((z_1+z_3)\exp(im^+h))+ \\ +(z_2+z_4)\exp(im^-h)+\text{к.с.})^2. \tag{2.20}$$

Рассуждая, как и выше, приходим к заключению, что $B_2$ диагональный оператор, определенный на пространстве многочленов относительно $z,\overline{z}$, и, кроме того, имеют место равенства

$$B_2z^\alpha\overline{z}^\beta=(i\omega_0(\alpha-\beta,e_1)-\lambda_m(0,0))z^\alpha\overline{z}^\beta, \tag{2.21}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ – целочисленные векторы с неотрицательными компонентами, $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}z_3^{\alpha_3}z_4^{\alpha_4}$, $m=(\alpha-\beta,e_1)m^++(\alpha-\beta,e_2)q$, $e_1=(1,-1,1,-1)$, $e_2=(0,1,1,2)$, $(a,b)=\sum\limits_1^4 a_kb_k$. Согласно (2.21) уравнение (2.20) имеет решение того же вида, что и его неоднородность.

Рассмотрим теперь уравнение относительно $\sigma_3$:

$$B_2\sigma_3=f_3(z,\overline{z}). \tag{2.22}$$

Выберем формы $a_k$, $k=1,2,3,4$ так, чтобы мономы $z^\alpha\overline{z}^\beta$ в правой части этого уравнения, которые удовлетворяют одному из условий (2.19), имели нулевые коэффициенты. В результате однозначно находим формы $a_k$, $k=1,2,3,4$, удовлетворяющие условию (2.19). Согласно методу Галеркина опустим в правой части уравнения (2.22) оставшиеся резонансные мономы, т.е. мономы $z^\alpha\overline{z}^\beta$ такие, что $(\alpha-\beta,e_1)^2=1$. Получившееся в результате уравнение имеет решение того же вида, что и его свободный член. Итак, поставленная выше задача разрешима в восьмимодовой аппроксимации Галеркина. Подставим полученные выражения для $a_k$, $k=1,2,3,4$, в систему (2.18). В результате получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot z_1&=z_1(\lambda_{0^+}+c(|z_1|^2+2|z_2|^2+2|z_3|^2+2|z_4|^2))+c\overline{z_2}^2z_4,\\
\dot z_2&=z_2(\lambda_{0^-}+\overline{c}(2|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_3|^2+2|z_4|^2))+\overline{c}\overline{z_1}^2z_3,\\
\dot z_3&=z_3(\lambda_{1^+}+c(2|z_1|^2+2|z_2|^2+|z_3|^2+2|z_4|^2))+cz_1^2z_2,\\
\dot z_4&=z_4(\lambda_{1^-}+\overline{c}(2|z_1|^2+2|z_2|^2+2|z_3|^2+|z_4|^2))+\overline{c}z_1z_2^2.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Эта система инвариантна относительно группы преобразований

$$\{z_k\to\exp((-1)^{k+1}ig)z_k,\quad k=1,2,3,4,\quad g\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\},$$

которая является унитарным представлением в пространстве $\mathbb{C}^4$ группы вращений окружности.

Бегущей волне $\widehat{v}_{0+}$ уравнения (1.9) соответствует периодическое решение

$$\varphi_{0+}(t,\mu,\nu) = \rho_{0+}^{1/2}(\exp(i\hat{\omega}_{0+}t), \exp(-i\hat{\omega}_{0+}t), 0, \ldots, 0)^T$$

системы (2.23). Исследуем теперь на устойчивость это периодическое решение системы (2.23). С этой целью линеаризуем систему (2.23) на решении $\varphi_{0+}$. Полученная в результате система с периодическими коэффициентами заменой

$$z_k \to \exp(-1^{k+1}\hat{\omega}_{0+}t)z_k, \;\; k = 1, 2, 3, 4$$

приводится к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, матрица коэффициентов которой является блочно-диагональной.

Одним из её блоков является матрица

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} + i\mathrm{Im}\,c\rho_{0+} & -\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} + i\mathrm{Im}\,c\rho_{0+} \\ -\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - i\mathrm{Im}\,c\rho_{0+} & -\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - i\mathrm{Im}\,c\rho_{0+} \end{pmatrix}$$

с собственными значениями 0 и $-2\mathrm{Re}\,\lambda_{0+}$, что, разумеется, естественно, так как (2.23) — периодическое решение системы (2.23). Блоками указанной матрицы являются матрицы $A_{0+,0^-} = A_{0+,0^-}(\mu,\nu)$ и ей сопряженная $A^*_{0+,0^-}$, где

$$A_{0+,0^-} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda_{0^-} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - i\chi\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} & \bar{c}\rho_{0+} \\ c\rho_{0+} & \mathrm{Re}\,\lambda_{1+} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} + \chi\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} \end{pmatrix},$$

$\chi = \mathrm{Im}\,c/ - \mathrm{Re}\,c$, ее одномерными блоками $-\mathrm{Re}\,\lambda_{1^-} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - 2i\mathrm{Im}\,c\rho_{0+}$ и ей комплексно сопряженная величина.

Итак, орбитальная устойчивость решения $\varphi_{0+}$ определяется матрицей $\mathrm{diag}(A_{0+,0^-}(\mu,\nu), A^*_{0+,0^-}(\mu,\nu))$ с характеристическим многочленом

$$\lambda^4 + 2a\lambda^3 + (a^2+2b)\lambda^2 + 2ab\lambda + b^2 + d^2. \tag{2.24}$$

Здесь

$$a = a_{0+,0^-}(\mu,\nu) = 4\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{0^-} - \mathrm{Re}\,\lambda_{1+}, \tag{2.25}$$

$$b = b_{0+,0^-}(\mu,\nu) = (2\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{0^-})(2\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{1+}) + (\chi^2-1)\mathrm{Re}\,\lambda_{0+}^2, \tag{2.26}$$

$$d = d_{0+,0^-}(\mu,\nu = 2\chi\mathrm{Re}\,\lambda_{0+}(\mathrm{Re}\,\lambda_{0^-} - \mathrm{Re}\,\lambda_{1+}). \tag{2.27}$$

В силу (1.14) $a_{0+,0^-} > 0, b_{0+,0^-} > 0$. Согласно критерию Рауса-Гурвица для устойчивости многочлена (2.24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$2a(a^2+2b) - 2ab > 0,$$
$$2a(a^2+2b)2ab - (2ab)^2 - (2a)^2(b^2+d^2) > 0$$

Первое из этих условий, очевидно, выполняется. Второе же эквивалентно неравенству

$$ba^2 - b^2 + d^2 > 0. \tag{2.28}$$

С точностью порядка $\varepsilon$ левая часть этого неравенства равна $4\Lambda^{-4}\chi^2$. Так как в рассматриваемом случае $\chi > 0$, то условие устойчивости многочлена (4.11) выполняется. Итак, бифурцирующее из нуля периодическое решение $\varphi_{0^+}$ уравнения (1.9) является экспоненциально орбитально устойчивым на промежутке $(0, (-\Lambda)^{-1}(m^+)^{-2})$ изменения бифуркационного параметра $\varepsilon$.

В силу равенств (1.13), (2.15) справедливо следующее представление

$$A_{0^+,0^-}(\mu,\nu) = -\widehat{\Lambda}^{-1}\nu\widehat{A}_{0^+,0^-}(\varepsilon). \tag{2.29}$$

Обозначим $\lambda_k^{\pm}(\varepsilon)$, $k = 1, 2$, корни характеристического многочлена, отвечающие матрице $\mathrm{diag}(\widehat{A}_{0^+,0^-}(\varepsilon), \widehat{A}^*_{0^+,0^-}(\varepsilon))$ такие, что $\mathrm{Re}\,\lambda_1 < \mathrm{Re}\,\lambda_2$. Умножая корни указанного характеристического многочлена на $-\widehat{\Lambda}^{-1}\nu$, получим согласно (2.29) корни многочлена (4.11).

Приведем теперь ряд иллюстрирующих численных расчетов, в которых принято $h = 2\pi/3$, $L = -2$. Отметим, что именно случай $h = 2\pi/3$ рассматривался в [42]. Результаты численного анализа, выполненных с использованием пакета Mathematica, приводятся далее по следующей схеме: $(\widehat{K}, \gamma, w, \varepsilon, c, \lambda_1^{\pm}(\varepsilon), \lambda_2^{\pm}(\varepsilon))$:

*Пример* 1.

$$1)(2.266, 0.906, 1.8, 0.01, -0.5362 \pm 0.9498i, -0.79849 \pm 2.12667i, -0.3615 \pm 0.9746i)$$
$$2)(., ., ., ., 0.001, -0.536287 \pm 0.949827, -0.775353 \pm 1.47329i, -0.240647 \pm 0.457363)$$
$$3)(., ., ., ., 3.196, 0.7165, 2.08, 0.01, -0.70780 \pm 1.34594i, -0.7844 \pm 2.23249i,$$
$$- 0.3755 \pm 1.0804i),$$
$$4)(., ., ., ., 2.08, -0.70780 \pm 1.34594i, 0.001, -0.66407 \pm 1.141493, -0.351928 \pm 1.14569).$$

Здесь, как и далее, точками обозначены приведенные выше первые четыре значения из предыдущего примера. Согласно приведенным здесь примерам $c$ имеет отрицательную вещественную часть. Собственные значения матриц $\mathrm{diag}(\widehat{A}_{0^+,0^-}(\varepsilon), \widehat{A}^*_{0^+,0^-}(\varepsilon))$ для значений $w = 1.8, 2.08$ принадлежат левой комплексной полуплоскости.

Перейдем теперь к вопросу о характере устойчивости приближенного решения $\widehat{v}_{0^-}$ уравнения (1.9). Как уже отмечалось, решение $\widehat{v}_{0^-}$ рождается неустойчивым с индексом неустойчивости 2. Этому решению соответствует периодическое решение

$$\varphi_{0^-}(t,\mu,\nu) = \rho_{0^-}^{1/2}(0, 0, \exp(i\hat{\omega}_{0^-}t), \exp(-i\hat{\omega}_{0^-}t), 0, \ldots, 0)^T$$

системы (2.23). Рассуждая, как и выше, приходим к заключению, что устойчивость периодического решения $\widehat{v}_{0^-}$ определяется матрицей

$$A_{0^-,0^+}(\mu,\nu) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda_{0^+} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{0^-} + i\mathrm{Im}\,c\rho_{0^-} & c\rho_{0^-} \\ \bar{c}\rho_{0^-} & \mathrm{Re}\,\lambda_{1^-} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{0^-} - i\mathrm{Im}\,c\rho_{0^-} \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся равенством

$$A_{0^-,0^+}(\mu,\nu) = -\widehat{\Lambda}^{-1}\nu\widehat{A}_{0^-,0^+}(\varepsilon).$$

Очевидно, два собственных значения матрицы $\mathrm{diag}(\widehat{A}_{0-,0+}(\varepsilon), \widehat{A}^*_{0-,0+}(\varepsilon))$ имеют вблизи бифуркационного значения $\varepsilon$ положительные вещественные значения. При углублении в область надкритичности, т. е. при уменьшении $\varepsilon$, вещественные части указанной пары убывают и проходят через мнимую ось. Приведем далее иллюстрирующие результаты численных расчетов корней характеристического многочлена матрицы $\mathrm{diag}(\widehat{A}_{0-,0+}(\varepsilon), \widehat{A}^*_{0-,0+}(\varepsilon))$.

*Пример* 2.

$$
\begin{aligned}
&5)(.,.,1.8, 0.067, -1.66956 \pm 0.424581, -0.000440221 \pm 0.424581)\\
&6)(.,.,1.8, 0.01, -0.536287 \pm 0.949827i, -0.695606 \pm 0.720168i,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -0.404394 \pm -0.404394i),\\
&7)(.,.,1.8, 0.001, -0.536287 \pm 0.949827i, -0.712479 \pm 1.73441i,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -0.297521 \pm 0.724753i),\\
&8)(.,.,2.08, 0.0672, -1.67752 \pm 0.421305i, 0.000744531 \pm 0.000744531i),\\
&9)(.,.,2.08, 0.001, -0.519656 \pm 0.771467i, -0.490344 \pm 0.771467i),\\
&10)(.,.,2.5, 0.0626, -1.62603 \pm 1.63653, 0.0000292246 \pm 0.185641i),\\
&11)(.,.,2.5, 0.001, -0.550958 \pm 1.01441i, -0.459042 \pm 0.938943i).
\end{aligned}
$$

Согласно 5) при переходе $\varepsilon$ через значение $\approx 0.067$ пара чисто мнимых корней указанного характеристического многочлена для $w = 1.8$ переходит через мнимую ось из правой в левую полуплоскость. При дальнейшем уменьшении $\varepsilon$ от указанного критического значения $\varepsilon$ собственные значения матрицы $\mathrm{diag}(\widehat{A}_{0-,0+}(\varepsilon), \widehat{A}^*_{0-,0+}(\varepsilon))$ остаются в устойчивой полуплоскости, что иллюстрируют, в частности, результаты в 6), 7). В случае $w = 2.08$, $w = 2.5$ критическими значениями $\varepsilon$ собственных значений матрицы $\mathrm{diag}(\widehat{A}_{0-,0+}(\varepsilon), \widehat{A}^*_{0-,0+}(\varepsilon))$ являются $\approx 0.0672$, $\approx 0.0626$ соответственно ( см. 8), 10)). Динамика собственных значений при уменьшении $\varepsilon$ от критических значений такова, как и в случае $w = 1.8$.

Обратимся теперь к вопросу о взаимодействии бегущих волн $\widehat{v}_{k+}$, $\widehat{v}_{k-}$, $k = 0, 1, 2$ уравнения (1.9). Учитывая вид матрицы $A_{0+,0-}$, заключаем о давлении на $\widehat{v}_{0+}$ пары бегущих волн решений $\widehat{v}_{0-}$, $\widehat{v}_{1+}$. Воздействие же на $\widehat{v}_{0+}$ указанной пары решений уравнения (1.9) описывается как совместное воздействие на периодическое решение $\varphi_{0+}$ системы (2.23) пары периодических решений $\varphi_{0-}$, $\varphi_{1+}$. Это воздействие, очевидно, можно описать шестимерной системой уравнений, положив в системе (2.23) $z_4 = \overline{z}_4 = 0$. Аналогичные рассуждения приводят к заключению, что воздействие на бегущую волн $\widehat{v}_{0-}$ пары бегущих волн $\widehat{v}_{0+}$, $\widehat{v}_{1-}$ уравнения (1.9) описывается системой (2.23) как соответствующее воздействие на $\varphi_{0-}$ пары периодических решений $\varphi_{0+}$, $\varphi_{1-}$. Характер этого воздействия вполне описывается шестимерной системой уравнений. Полагая в системе (2.23) $z_3 = \overline{z}_3 = 0$, получим указанную систему.

Подчеркнем теперь, что давление на периодическое решение $\varphi_{0+}$ системы (2.23) пары периодических решений $\varphi_{0-}$, $\varphi_{1+}$ не приводит, согласно проведенному выше анализу, к изменению характера устойчивости $\varphi_{0+}$ при уменьшении параметра $\varepsilon$ и его приближения к нулю. Неустойчивое периодическое решение $\varphi_{0^-}$, преодолевая совместное воздействие периодических решений $\varphi_{0^+}$, $\varphi_{1^-}$, при некотором значении параметра $\varepsilon$ обретает устойчивость и сохраняет его при дальнейшем уменьшении $\varepsilon$.

Ниже будет установлено соответствие в характере устойчивости периодического режима $\widehat{v}_{0^-}$ уравнения (1.9) и периодического решения $\varphi_{0^-}$ системы (2.23).

## 3. Основной результат

Выполненный выше анализ приводит к целесообразности рассмотрения вопроса о воздействии на выделенную бегущую волну упорядоченных пар бегущих волн. В качестве такой волны возьмем $\hat{v}_{k^+}$ и рассмотрим воздействие на нее бегущих волн $\hat{v}_{s^-}$, $\hat{v}_{l^+}$, $l = 2k + s + 1$. С этой целью построим приближенные решения уравнения (1.9) в виде

$$v = \sum_{k=1}^{3} \sigma_k(z_1 \exp(ik^+\theta), z_2 \exp(is^-\theta), z_3 \exp(il^+\theta), \text{к.с}), \tag{3.1}$$

где $\sigma_1(z, \overline{z}) = z_1 + z_2 + z_3 + \text{к.с}$, а $\sigma_2(z, \overline{z})$, $\sigma_3(z, \overline{z})$ — формы второй, третьей степени соответственно относительно $z, \overline{z}$, $z = (z_1, z_2, z_3)$. Рассуждая, как и выше, получаем $G$-эквивариантную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_1(\lambda_{k^+} + c(|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2)),\\
\dot{z}_2 &= z_2(\lambda_{s^-} + \overline{c}(2|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2)) + \overline{c z_1}^2 z_3,\\
\dot{z}_3 &= z_3(\lambda_{l^+} + c(2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + |z_3|^2)) + c {z_1}^2 z_2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Следовательно, устойчивость периодического решения

$$\varphi_{k^+}(t, \mu, \nu) = \rho_{k^+}^{\frac{1}{2}}(\exp(i\hat{\omega}_{k^+}t), \exp(-i\hat{\omega}_{k^+}t), 0, \ldots, 0)^T$$

системы (3.2) определяется матрицей

$$A_{k^+,s^-} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda_{s^-} - 2\operatorname{Re}\lambda_{k^+} - i\operatorname{Im} c\rho_{k^+} & \overline{c}\rho_{k^+} \\ c\rho_{k^+} & \operatorname{Re}\lambda_{l^+} - 2\operatorname{Re}\lambda_{k^+} + i\operatorname{Im} c\rho_{k^+} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем теперь матрицу $A_{k^+,s^-}$, заменив в ней $\lambda_{k^+}$, $\lambda_{s^-}$, $\lambda_{l^-}$, $\rho_{k^+}$ на $\lambda_{k^-}$, $\lambda_{s^+}$, $\lambda_{l^+}$, $\rho_{k^+}$, соответственно. Полученную указанным образом матрицу обозначим $A_{k^-,s^+}$.

Рассмотрим теперь вопрос о воздействии на бегущую волну $\hat{v}_{k^+}$ бегущих волн $\hat{v}_{s^+}$, $\hat{v}_{n^+}$, где $s < k$, $n = 2k - s$. Построим с этой целью приближенные решения уравнения (1.9) в виде

$$v = \sum_{k=1}^{3} \sigma_k(z_1 \exp(ik^+\theta), z_2 \exp(is^+\theta), z_3 \exp(in^+\theta), \text{к.с.}), \tag{3.3}$$

где $\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3 +$ к.с., а $\sigma_2(z,\overline{z})$, $\sigma_3(z,\overline{z})$ удовлетворяют тем же требованиям, что и в рассмотренном выше случае. Относительно $z_k$, $k = 1,2,3$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_1(\lambda_{k^+} + c(|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2)),\\ \dot z_2 &= z_2(\lambda_{s^+} + c(2|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2)) + c{z_1}^2\overline{z}_3,\\ \dot z_3 &= z_3(\lambda_{n^+} + c(2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + |z_3|^2)) + c{z_1}^2\overline{z}_2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Характер устойчивости периодического решения

$$\rho_{k^+}^{\frac{1}{2}}(\exp{(i\hat\omega_{k^+}t)}, \exp{(-i\hat\omega_{k^+}t)}, 0, \dots, 0)^T$$

системы (3.4) определяется матрицей $A_{k^+,s^+}$, которая равна матрице

$$A_{k^+,s^+} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda_{s^+} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} - i\chi\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} & \overline{c}\rho_{k^+} \\ c\rho_{k^+} & \mathrm{Re}\,\lambda_{n^+} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} + i\chi\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем теперь матрицу $A_{k^+,s^+}$, заменив в ней $\lambda_{k^+}$, $\lambda_{s^+}$, $\lambda_{l^+}$, $\rho_{k^+}$ на $\lambda_{k^-}$, $\lambda_{s^-}$, $\lambda_{l^-}$, $\rho_{k^-}$, соответственно. Полученную указанным образом матрицу обозначим $A_{k^-,s^-}$.

Итак, воздействие на бегущую волну $\hat v_{k^+}$ бегущих волн $\hat v_{s^-}$, $\hat v_{l^+}$, $l = 2k + s + 1$, описывается системой дифференциальных уравнений (3.2). Воздействие же на $\hat v_{k^+}$ бегущих волн $\hat v_{s^+}$, $\hat v_{(2k-s)^+}$, $s < k$ описывается системой дифференциальных уравнений (3.4). В первом случае это воздействие порождает матрицу $A_{k^+,s^-}$, во втором – матрицу $A_{k^+,s^+}$. Очевидно, что для устойчивости решения $\hat v_{k^+}$ уравнения (1.9) необходима гурвицевость указанных матриц. Эти условия обеспечивают, как доказано ниже, орбитальную устойчивость приближенного решения $\hat v_{k^+}$. Аналогичные утверждения имеют место, разумеется, и относительно воздействий на бегущую волну $\hat v_{k^-}$ соответствующих пар бегущих волн. В частности, для устойчивости решения $\hat v_{k^-}$ уравнения (1.9) необходима гурвицевость матриц $A_{k^-,s^+}$, $A_{k^-,s^-}$.

Прежде чем сформулировать соответствующий результат обозначим

$$\mathfrak{D}_{k^\pm} = \{(\mu,\nu) : \mu > 0, \nu > 0, \mathrm{Re}\,\lambda_{k^\pm}(\mu,\nu) > 0\},$$

**Теорема 1.** *Существует $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $(\mu,\nu) \in \mathfrak{D}_{k^+}$, $\|(\mu,\nu)\| < \delta_0$, уравнение* (1.9) *имеет периодическое по $t$ решение $v_{k^+}(\eta,\mu,\nu)$, $(v_{k^-}(\eta,\mu,\nu))$, $\eta = \omega_{k^+}(\mu,\nu)t + (m^+ + kq)\theta$, $(\eta = \omega_{k^+}(\mu,\nu)t + (m^+ + kq)\theta)$. С точностью порядка $\|(\mu,\nu)\|^{3/2}$ имеют место следующие равенства*

$$v_{k^\pm} = \rho_{k^\pm}^{1/2} 2\cos\eta + \widehat\Lambda \,\mathrm{ctg}\, \widehat w \rho_{k^\pm}((1-\widehat\Lambda)^{-1} + Re\,(b\exp{(2i(\eta + m^\pm h))}),$$

*где*

$$\begin{aligned} \rho_{k^\pm} &= \frac{Re\,\lambda_{k^\pm}(\mu,\nu)}{-Re\,c},\\ \omega_{k^\pm}(\mu,\nu) &= Im\,\lambda_{k^\pm}(\mu,\nu) + Im\,c\rho_{k^\pm}, \end{aligned}$$

*а постоянная $b$ удовлетворяет равенству* (2.7).

*Решение $v_{k^+}(\mu,\nu)$ ( $(v_{k^-}(\mu,\nu))$) — экспоненциально орбитально устойчиво в пространстве $H^1$ тогда и только тогда, когда:*

*i) для любого $s \geq 0$ матрица $A_{k^+,s^-}(\mu,\nu)$ $((A_{k^-,s^+}(\mu,\nu)))$ устойчива;*

*ii) для любого $\leq s < k$ матрица $A_{k^+,s^+}(\mu,\nu)$ $((A_{k^-,s^-}(\mu,\nu)))$ устойчива.*

*Доказательство.* Ограничимся доказательством утверждений теоремы относительно периодического решения $v_{k^+}(\eta,\mu,\nu)$ уравнения (1.9). Аналогично доказываются и утверждения теоремы относительно периодического решения $v_{k^-}(\eta,\mu,\nu)$.

Центральный момент доказательства состоит в исследовании свойств устойчивости в пространстве $H^1$ уравнения

$$\dot{\xi} = \mathfrak{L}(\mu,\nu)\xi + \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{R}(Q\hat{v}_{k^+},\nu)Q\xi, \tag{3.5}$$

полученного линеаризацией уравнения (1.9) на приближенном решении $\hat{v}_{k^+}$. Введем в пространстве $H$ ортопроектор $P$ :

$$P\xi = \sum_{-k_0}^{k_0} P_s\xi, \quad P_s\xi = \xi_s \exp{(is\theta)}, \quad \xi_s = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \xi \exp{(-is\theta)}\, d\theta,$$

где выбор $k_0$ осуществим позже. Воспользуемся представлением $\xi = h + w$, $h = P\xi$, $w = (I-P)v$, где $I$ — тождественный оператор. В полученной относительно $h, w$ системе уравнений положим $w = 0$. В результате получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\dot{h}_n = \lambda_n h_n + P_n\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{R}(Q\hat{v}_{k^+},\nu)Q\sum_{-k_0}^{k_0} h_s \exp{(is\theta)}. \tag{3.6}$$

Здесь $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm k_0$, $h_{-n} = \overline{h}_n$. Очевидно, эта система является $2k_0+1$-модовой галеркинской аппроксимацией уравнения (3.5). Для исследования устойчивости этой системы воспользуемся принципом сведения. В системе (3.6) будем различать критические и некритические переменные. Выделим из (3.6) уравнения относительно критических переменных. Используя равенство

$$\frac{\partial\mathfrak{R}(u,0)}{\partial u} = \widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w})u - \frac{1}{2}\widehat{\Lambda}u^2 + o(u^2),$$

получим

$$\begin{aligned}
&\dot{h}_{l^+} = \lambda_{l^+}h_{l^+} + \rho_{k^+}^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}(\exp{(i(\hat{\omega}_{k^+}t + m^+h))}h_{(l-k)q} + \\
&+ \exp{(-i(\hat{\omega}_{k^+}t + m^+h))}h_{2m^+ + (l+k)q}) + \\
&+ \rho_{k^+}((\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^2(1-\widehat{\Lambda})^{-1}\exp{(im^+h)}h_{l^+} + \\
&+ (-\widehat{\Lambda}/2 + (\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^2 b\exp{(2im^+h)}\times \\
&\times \exp{(i(2\hat{\omega}_{k^+}t + m^+h))}h_{(l-2k-1)_-}) + \ldots,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где $l \geq 0$, $m^+ + lq \leq k_0$ , $2m^+ + (l+k)q \leq k_0$. Здесь многоточие обозначает члены порядка $\rho_{k^+}$, содержащие некритические переменные, и слагаемые порядка $\rho_{k^+}^{3/2}$. Точно так же имеем

$$\begin{aligned}
&\dot{h}_{l^-} = \lambda_{l^-} h_{l^-} + \rho_{k^+}^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} (\exp(i(\hat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{m^- - m^+ + (l-k)q} + \\
&+ \exp(-i(\hat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{(l+k+1)q}) + \\
&+ \rho_{k^+}((\widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w})^2 (1 - \widehat{\Lambda})^{-1} \exp(-im^+ h) h_{l^-} + \\
&+ (-\widehat{\Lambda}/2 + (\widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w})^2 \overline{b} \exp(-2im^+ h) \times \\
&\times \exp(-i(2\hat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{(2k+l+1)+}) + \ldots,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где $l \geq 0$, $m^- + lq \leq k_0$ , $2m^+ + (l+k)q \leq k_0$, а многоточие имеет тот же смысл, что и выше. Заметим, что если $l \geq 0$, $m^- + lq \leq k_0$, но $2m^+ + (l+k)q > k_0$, то в правой части уравнения (3.7) следует опустить слагаемое, пропорциональное $h_{2m^+ + (l+k)q}$. Аналогично поступаем и со слагаемым в правой части уравнения (3.8), пропорциональным $h_{(2k+l+1)q}$, если $(2k+l+1)q > k_0$. Уравнения относительно $h_{-l^+} = \overline{h}_{l^+}$, $h_{-l^-} = \overline{h}_{l^-}$, $l \geq 0$, получаются соответственно из уравнений (3.7), (3.8) операцией комплексного сопряжения.

В соответствии с уравнениями (3.7), (3.8) выделим из системы (3.6) следующие уравнения относительно некритических переменных

$$\begin{aligned}
&\dot{h}_{sq} = \lambda_{sq} h_{sq} + \rho_{k^+}^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} (\exp(i\hat{\omega}_{k^+} t) h_{(s-k-1)-} + \\
&+ \exp(-i\hat{\omega}_{k^+} t) h_{(s+k)^+}) + \ldots, \\
&\dot{h}_{2m^+ + sq} = \lambda_{2m^+ + sq} h_{2m^+ + sq} + \\
&+ \rho_{k^+}^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} \exp(i(\hat{\omega}_{k^+} t + 2m^+ h)) h_{(s-k)^+} + \ldots, \\
&\dot{h}_{m^- - m^+ + sq} = \lambda_{m^- - m^+ + sq} h_{m^- - m^+ + sq} + \\
&+ \rho_{k^+}^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} \exp(i\hat{\omega}_{k^+} t) h_{(s+k)^+} \ldots,
\end{aligned}$$

где многоточие означает члены порядка $\rho_{k^+}^{1/2}$, содержащие некритические переменные, и слагаемые порядка $\rho_{k^+}$.

Выполним теперь в системе (3.6) преобразование

$$\begin{aligned}
&h_{l^+} \to h_{l^+} - \rho_{k^+}^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} (\exp(i(\hat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{(l-k)q} + \\
&+ b \exp(i(-\hat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{2m^+ + (l-k)q}), \quad 2m^+ + (l+k+1)q \leq k_0, \\
&h_{l^-} \to h_{l^-} - \rho_{k^+}^{1/2} \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w} (\exp(-i(\hat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{(l+k+1)q} + \\
&+ b \exp(i(\hat{\omega}_{k^+} t + m^+ h)) h_{m^- - m^+ + (l-k)q}), \quad (l+k+1)q \leq k_0.
\end{aligned}$$

Если $2m^+ + (l+k)q > k_0$, то в этом преобразовании опустим слагаемые, содержащие $h_{2m^+ + (l+k)q}$. Аналогично поступим со слагаемым, пропорциональным $h_{(2k+l+1)q}$, если $(2k+l+1)q > k_0$. В результате получим систему относительно критических переменных, которая членами $o(\rho_{k^+})$ отличается от системы

$$\begin{aligned}
\dot h_{l^+} &= (\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+})h_{l^+} + c\rho_{k^+}\exp{(2i\hat\omega_{k^+}t)}h_{(l-2k-1)^-},\\
\dot h_{l^-} &= (\lambda_{l^-} + 2\overline{c}\rho_{k^+})h_{l^+} + \overline{c}\rho_{k^+}\exp{(-2i\hat\omega_{k^+}t)}h_{(l+2k+1)^+},\\
\dot h_{l^-} &= (\lambda_{l^-} + 2\overline{c}\rho_{k^+})h_{l^+}, \quad (l+2k+1)^+ > k_0.
\end{aligned}$$

Ясно, что эта система с точностью $o(\rho_{k^+})$ представляет систему (3.6) на критическом инвариантном многообразии.

Замена

$$h_{l^+} \to \exp{(i\hat\omega_{k^+}t)}h_{l^+}, \quad h_{l^-} \to \exp{(-i\hat\omega_{k^+}t)}h_{l^-}.$$

приводит эту систему уравнений к виду

$$\begin{aligned}
\dot h_{l^+} &= (\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+} - i\hat\omega_{k^+})h_{l^+} + c\rho_{k^+}h_{(l-2k-1)^-},\\
\dot h_{l^-} &= (\lambda_{l^-} + 2\overline{c}\rho_{k^+} + i\hat\omega_{k^+})h_{l^-} + \overline{c}\rho_{k^+}h_{(l+2k+1)^+},\\
\dot h_{l^+} &= (\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+} + i\hat\omega_{k^+})h_{l^+}, \quad (l+2k+1)^+ > k_0.
\end{aligned}$$

Блочно-диагональная матрица коэффициентов $A^{k^+}$ этой системы состоит из двумерных и одномерных блоков. Её двумерные блоки:

a) $A_{k^+,s^-}$, $\overline{A}_{k^+,s^-}$, $m^+ + (2k+s+1)q \le k_0$;

b) $A_{k^+,s^+}$, $\overline{A}_{k^+,s^+}$, $0 \le s < k$;

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} + i\mathrm{Im}\,c\rho_{k^+} & -\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} + i\mathrm{Im}\,c\rho_{k^+} \\ -\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} - i\mathrm{Im}\,c\rho_{k^+} & -\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} - i\mathrm{Im}\,c\rho_{k^+} \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы $A_{k^+,s^-}$, $A_{k^+,s^+}$ определены выше. Одномерными блоками матрицы $A^{k^+}$ являются $\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+} + i\hat\omega_{k^+}$, $(l+2k+1)^+ > k_0$, и им комплексно сопряженные величины. Следовательно, при фиксированных $\mu > 0, \nu > 0$ найдется такое $k_0 = k_0(\mu,\nu)$, что $\mathrm{Re}\,(\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+}) < 0$ для всех $l$, удовлетворяющих неравенству $(l + 2k+1)^+ > k_0$. Итак, устойчивость системы (3.6) определяется матрицами $A_{k^+,s^-}$, $s \ge 0$, $m^+ + (2k+s+1)q \le k_0$, $A_{k^+,s^+}$, $0 \le s < k$.

Следуя [17], приходим к заключению, что экспоненциальная орбитальная устойчивость приближенного решения $\hat v_{k^+}$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия i), ii) теоремы. Перейдем теперь к вопросу о существовании решения $v_{k^+}$ уравнения (1.9) типа бегущей волны. Положим в (1.9) $v = y(\tau,\mu,\nu) = y(\omega t + (m^+ + kq)\theta, \mu, \nu)$. В результате для определения $2\pi$-периодического решения $y(\tau,\mu,\nu)$ и $\omega = \omega_{k^+}(\mu,\nu)$ имеем сингулярно возмущенное дифференциально-разностное уравнение

$$\begin{aligned}
\omega y'(\tau) = \mu(m^+ + kq)^2 y''(\tau) - y(\tau) + \\
+(\widehat\Lambda - \nu)y(\tau + m^+h) + \mathfrak{R}(y(\tau + m^+h), \nu).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Согласно (2.16) это уравнение при $\omega = \hat\omega_{k^+}$ имеет приближенное по невязке порядка $\rho_{k^+}^{3/2}$ $2\pi$-периодическое решение $\hat y(\tau) = \hat y(\tau,\mu,\nu)$, где

$$\hat y(\tau) = \rho_{k^+}^{1/2} 2\cos(\tau) + \widehat\Lambda \operatorname{ctg}\widehat{w}\rho_{k^+}((1-\widehat\Lambda)^{-1} + \mathrm{Re}\,b\exp{(2i(\tau + m^+h))}.$$

Согласно изложенному выше, можно построить приближенные $2\pi$-периодические решения уравнения (3.9) с любой наперед заданной точностью при соответствующем выборе $\omega$. Следуя [17], покажем, что существование приближенных $2\pi$-периодических решений влечет существование $2\pi$-периодического решения уравнения (3.9). Линеаризованное на $\hat{y}(\tau)$ уравнение запишем в виде

$$\mathfrak{B}(\mu,\nu)z = \hat{\omega}_{k^+}z'(\tau) - \mu(m^+ + kq)^2 z''(\tau) - z(\tau) +$$
$$+ (\widehat{\Lambda} - \nu)z(\tau + m^+h) + (\rho^{1/2}g_1 + \rho g_2 + \rho^{3/2}g_3)z(\tau + m^+h) = 0,$$

где $\rho = \rho_{k^+}(\mu,\nu)$,

$$g_1 = g_1(\tau) = -\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}(\exp(i(\tau + m^+h)) + \exp(-i(\tau + m^+h)),$$
$$g_2 = g_2(\tau) = \frac{1}{2}\widehat{\Lambda}(\exp(i(\tau + m^+h)) + \exp(-i(\tau + m^+h)))^2 -$$
$$-(\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^2((1-\widehat{\Lambda})^{-1} + (\frac{b}{2}\exp(2i(\tau + m^+h)) + \text{к.с.})),$$

а функция $g_= g_3(\tau,\mu,\nu)$ — $2\pi$-периодична по $\tau$, непрерывно дифференцируема по $\tau$ и непрерывна по $(\mu,\nu)$ при $0 \le \mu < \mu_0$, $0 < \nu < \nu_0$. Замена

$$y = \hat{y}(\tau) + z$$

приводит уравнение (3.9) к виду

$$\mathfrak{B}(\mu,\nu)z = F(\tau, z, z', \mu, \nu, \delta), \tag{3.10}$$

где
$$F(\tau, z, z', \mu, \nu, \delta) = \delta(z'(\tau) + \hat{y}'(\tau)) + f(\tau, z, \mu, \nu).$$

Здесь $\delta = \hat{\omega}_{k^+} - \omega$,

$$f(\tau, z, \mu, \nu) = f_0(\tau, \mu, \nu) + f_2(\tau, z, \mu, \nu),$$

где $2\pi$-периодическая функция $f_0$ такова, что

$$\|f_0(\cdot, \mu, \nu)\|_H < d\rho^{3/2}(\mu,\nu),$$

а функция $f_2(\tau, \cdot, \mu, \nu) : H^1 \to H$, $f_2(\tau, 0, \mu, \nu) = 0$ удовлетворяет условию

$$\|f_2(\cdot, z_1, \cdot) - f_2(\cdot, z_2, \cdot)\|_H < d\max(\|z_1\|_{H^1}, \|z_2\|_{H^1})\|z_1 - z_2\|_H \tag{3.11}$$

для всех $\|z_k\|_{H^1} < d\rho$, $k = 1, 2$. Здесь и далее одним символом $d$ будем обозначать положительные постоянные, которые не зависят от $\mu, \nu$ и точные значения которых несущественны.

Вопрос о разрешимости уравнения (3.10) приводит к рассматриваемой в пространстве $H^2$ задаче

$$\mathfrak{B}(\mu,\nu)z = g, \quad g \in H. \tag{3.12}$$

Предположим, что $z \in H^2$ удовлетворяет этому уравнению. Умножим его левую и правую части скалярно на $z$. Используя затем интегрирование по частям и неравенство Гельдера, получим априорную оценку

$$\|z\|_{H^1} < d(\|z\|_H + \|g\|_H).$$

Действуя аналогично, получим неравенство

$$(m^+ + kq)^2 \mu \|z\|_{H^2} < d(\|z\|_H + \|g\|_H).$$

Дальнейший анализ задачи (3.12) опирается на свойства спектральной задачи

$$\mathfrak{B}(\mu, \nu) z = \lambda z, \quad z \in H. \tag{3.13}$$

Интерпретируем её как возмущение задачи

$$\hat{\omega}_{k^+} z'(\tau) - \mu(m^+ + kq)^2 z''(\tau) - z(\tau) - (\widehat{\Lambda} - \nu) z(\tau + m^+ h) = \lambda z,$$

рассматриваемой в пространстве $H$. Ясно, что последняя имеет полную, ортонормированную в $H$ систему собственных функций 1, $\exp(ik\tau)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Собственным функциям $\exp(i\tau)$, $\exp(-i\tau)$ соответствуют комплексно сопряженные собственные значения, стремящиеся к нулю при $\mu \to 0$, $\nu \to 0$.

Все остальные собственные значения при малых $\mu, \nu$ являются простыми и равномерно отделены от нуля. В этой связи достаточно ограничиться исследованием задачи (3.13) для $\lambda$ из окрестности нуля. Так как $\rho^{-1/2} \hat{y}'(\tau)$ — приближенное решение (3.13) при $\lambda = 0$, то применима следующая методика. Положим

$$\begin{aligned} &z = \beta_1 \exp(i\tau) + \beta_2 \exp(-i\tau) + z_2(\tau, \mu, \nu) + z_3(\tau, \mu, \nu) + \ldots, \\ &\lambda = \lambda_1(\mu, \nu) + \lambda_2(\mu, \nu) + \ldots. \end{aligned}$$

и подставим эти равенства в (3.13). Приравняем затем слагаемые в левой и правой частях полученного равенства одного порядка малости. В результате относительно $z_2$ получим уравнение

$$\mathfrak{B} z_2 = -\rho^{1/2} g_1(\tau)(\beta_1 \exp(i(\tau + m^+ h)) + \beta_2 \exp(-i(\tau + m^+ h))),$$

где $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(0,0)$, которому удовлетворяет функция

$$\begin{aligned} z_2 = \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w}(b\beta_1 \exp(2i(\tau + m^+ h)) + \\ + \bar{b}\beta_2 \exp(-2i(\tau + m^+ h)) + (1 - \widehat{\Lambda})^{-1}(\beta_1 + \beta_2)). \end{aligned}$$

Уравнение

$$\mathfrak{B} z_3 = G_3(\tau, \mu, \nu)$$

разрешимо тогда и только тогда, когда функция $G_3$ ортогональна $\exp(i\tau)$ и $\exp(-i\tau)$. Отсюда следует, что $(\beta_1, \beta_2)^T$ является собственным вектором матрицы

$$\rho S = \rho \begin{pmatrix} c & c \\ \bar{c} & \bar{c} \end{pmatrix},$$

а $\lambda_1$ — соответствующее собственное значение. Очевидно, собственным векторам $(1,-1)^T$ и $(c,\overline{c})^T$ этой матрицы отвечают собственные значения 0 и $2\rho\mathrm{Re}\, c$ соответственно. Итак,

$$z^1(\tau,\mu,\nu) = \mathrm{Re}\,(c\exp{(i\tau)}) + \rho^{1/2}\widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}\,\widehat{w}((1-\widehat{\Lambda})^{-1}+ \\ + \mathrm{Re}\,(c\exp{(2i(\tau+m^+h))})) + O(\rho) \quad (3.14)$$

— собственная функция оператора $\mathfrak{B}(\mu,\nu)$, соответствующая собственному значению $2\rho\mathrm{Re}\, c + O(\rho^2)$. Нулевому с точностью $O(\rho^2)$ собственному значению отвечает собственная функция $\rho^{-1/2}(\hat{y}'(\tau)+O(\rho))$. Из условия разрешимости уравнения

$$S\beta = \alpha$$

заключаем, что $\mathrm{Im}\,(c\exp{(i\tau)}) + O(\rho^{1/2})$ — собственная функция оператора, сопряженного к оператору $\mathfrak{B}(\mu,\nu)$, и нулевым с точностью $O(\rho^2)$ собственным значением.

Добавим теперь в левую часть (3.13) слагаемое $-\langle z,h^0\rangle\mathfrak{B}(\mu,\nu)h^0\|h^0\|^{-2}$, где $h^0(\tau) = \rho^{-1/2}\hat{y}'(\tau)$. В результате получим спектральную задачу

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu,\nu)z = \lambda z, \quad z \in H.$$

Ясно, что $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu,\nu)h^0 = 0$. Спектральные свойства оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu,\nu)$ аналогичны таковым для оператора $\mathfrak{B}(\mu,\nu)$. В частности, $2\rho\mathrm{Re}\, c + O(\rho^2)$ есть собственное значение оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu,\nu)$, которому соответствует собственная функция $h^1 = z^1 + O(\rho^2)$, где $z^1$ удовлетворяет равенству (3.14). Воспользуемся далее равенством $\widehat{\mathfrak{B}}^*q = 0$, где

$$q = q(\tau,\mu,\nu) = (\mathrm{Re}\, c)^{-1}\mathrm{Im}\,(c\exp{(i\tau)}) + O(\rho^{1/2}), \quad \langle q,h^0\rangle = 1.$$

Обозначим $M_1 = \mathrm{Span}\{h^1\}$. Пусть $H$ разложено по $\{0, 2\rho\mathrm{Re}\, c + O(\rho^2)\}$, т. е.

$$H = Ker(\widehat{\mathfrak{B}}) \oplus M_1 \oplus M_2.$$

В силу альтернативы Фредгольма уравнение

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu,\nu)z = g, \quad g \in H,$$

разрешимо тогда и только тогда, когда: $\langle g,q\rangle = 0$. Согласно изложенному имеют место оценки

$$\|\mathfrak{K}g\|_1 < d\|g\|, \quad g \in M_2,$$
$$\|\mathfrak{K}g\|_1 < \frac{d}{\rho}\|g\|, \quad g \in M_1.$$

Пусть $\widehat{P}$ проектор в пространстве $H$ на $Ker(\widehat{\mathfrak{B}}) \oplus M_1$. В силу построения $\hat{v}_{k^+}$ справедливо неравенство

$$\|\widehat{P}f_0(\cdot,\mu,\nu)\| < d\rho^{5/2}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (3.10). Заменим в нём $\mathfrak{B}$ на $\widehat{\mathfrak{B}}$. Это замену мы учтем и в правой части. Правую часть обозначим $\widehat{F}$. В этой связи отметим, что согласно проведенному анализу задачи (3.13)

$$\|\mathfrak{B}(\mu,\nu)h^0\| < d\rho, \quad \|\widehat{P}\mathfrak{B}(\mu,\nu)h^0\| < d\rho^{3/2}.$$

Рассмотрим в пространстве $H^1$ уравнение

$$w - \mathfrak{K}(\widehat{F}(\cdot, w, w', \mu, \nu, \delta) - \langle q, \widehat{F}(\cdot, w, w', \mu, \nu, \delta)\rangle q) = 0. \tag{3.15}$$

Теперь ясно, что метод последовательных приближений с нулевой начальной точкой, примененный к этому уравнению, приводит к сходящейся в $H^1$ последовательности равномерно по $\mu$, $\delta$ в области $0 \le \mu \le \mu_0$, $|\delta| \le d\rho^{3/2}$. Предел этой последовательности $w^*(\mu,\nu,\delta)$ является решением уравнения (3.15) таким, что:

$$\|w^*(\mu,\nu,\delta)\|_1 < d\rho^{3/2}. \tag{3.16}$$

Согласно (3.11) существует единственное решение уравнения (3.15), удовлетворяющее этому неравенству. Функция $w^*(\mu,\nu,\delta) \in H^2$ при $\mu > 0$ ($w^*(0,\nu,\delta) \in H^1$) непрерывна по $\mu,\nu,\delta$ и удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{B}(\mu,\nu)z = F(\tau, z, z', \mu, \nu, \delta) - \mathfrak{D}(\mu,\nu,\delta)q(\tau),$$

где

$$\mathfrak{D}(\mu,\nu,\delta) = \langle q, \widehat{F}(\cdot, w^*(\mu,\nu,\delta), w^{*\prime}(\mu,\nu,\delta), \mu,\nu,\delta)\rangle.$$

Несложно убедиться в том, что $w^*(\mu,\nu,\delta)$ имеет непрерывную производную по $\delta$. Итак, вопрос о разрешимости уравнения (3.10) в пространстве $H^2$ при $\mu > 0$ сводится к вопросу о разрешимости относительно $\delta$ уравнения

$$\mathfrak{D}(\mu,\nu,\delta) = 0. \tag{3.17}$$

Несложно убедиться в справедливости равенства

$$\mathfrak{D}(\mu,\nu,\delta) = \rho((\operatorname{Re} c)^{-1}\delta + \rho^{3/2}\sigma(\mu,\nu,\delta)),$$

где $\sigma(\mu,\nu,\delta)$ непрерывна по всем переменным и непрерывно дифференцируема по $\delta$. Отсюда следует существование непрерывного при $0 \le \mu \le \mu_0$, $0 \le \nu \le \nu_0$ решения $\delta = \delta(\mu,\nu)$ уравнения (3.17) такого, что

$$|\delta(\mu,\nu)| < d\rho^{3/2}.$$

Следовательно, $w^*(\mu,\nu,\delta(\mu,\nu))$ есть $2\pi$ -периодическое по $t$ решение уравнения (3.7) при $0 \le \mu \le \mu_0$, $0 \le \nu \le \nu_0$. Очевидно,

$$|\delta(\mu,\nu)| + \|w^*(\mu,\nu,\delta(\mu,\nu))\|_1 < d\rho^{3/2}(\mu,\nu).$$

Теорема доказана. □

Опираясь на теорему, можно получить легко проверяемые условия устойчивости бегущей волны $v_{k^+}$. Введем с этой целью следующие обозначения

$$
\begin{aligned}
a_{k^+,s^-} &= 4\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{s^-} - \mathrm{Re}\,\lambda_{l^+},\\
b_{k^+,s^-} &= (2\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{s^-})(2\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{l^+}) - \mathrm{Re}\,\lambda_{k^+}^2,\\
\beta_{k^+,s^-} &= \chi\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+}(\mathrm{Re}\,\lambda_{s^-} - \mathrm{Re}\,\lambda_{l^+}),
\end{aligned}
$$

где $l = 2k + s + 1$. Для устойчивости матриц $A_{k^+,s^-}$, $\overline{A}_{k^+,s^-}$, $s \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство

$$
d_{k^+,s^-} = a_{k^+,s^-}^2 b_{k^+,s^-} - b_{k^+,s^-}^2 - \beta_{k^+,s^-}^2 > 0.
$$

Заметим, что $\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} = -\widehat{\Lambda}^{-1}\nu(1 + \widehat{\Lambda}(m^+ + kq)^2\varepsilon^2)$, где $\varepsilon^2 = \frac{\mu}{\nu}$. В силу (1.14) $b_{k^+,s^-}$ принимает минимальное значение при $s = 0$. Будем далее считать, что $\varepsilon$ достаточно мало. Как легко видеть, если

$$
m^+ + kq < (-\widehat{\Lambda}^{-1})^{1/2}(\frac{2}{5\varepsilon})^{1/2},
$$

то $b_{k^+,0^-} > 0$. Можно убедиться, что, если

$$
m^+ + kq < (-\widehat{\Lambda}^{-1})^{1/2}(\frac{2}{(5 + 4\chi^2)\varepsilon})^{1/2},
$$

то матрицы $A_{k^+,s^-}$, $s \geq 0$, — гурвицевы при малых $\varepsilon$.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости матрицы $A_{k^+,s^+}$, $s < k$. Несложный анализ приводит к заключению, что для устойчивости матрицы $A_{k^+,(k-1)^+}$ необходимо выполнения условия

$$
m^+ + kq < (\frac{\nu}{3\mu})^{1/2}(-\widehat{\Lambda}^{-1})^{1/2}. \tag{3.18}
$$

В этом случае имеет место неравенство

$$
1 + \widehat{\Lambda}(m^+ + kq)^2\frac{\mu}{\nu} > \frac{2}{3}(1 + \widehat{\Lambda}(m^+)^2\frac{\mu}{\nu}). \tag{3.19}
$$

Можно убедиться, что для устойчивости матрицы $A_{k^+,s^+}$, $s < k$, достаточно выполнения неравенства

$$
m^+ + kq < (\frac{\nu}{(3 + 8\chi^2)\mu})^{1/2}(-\widehat{\Lambda}^{-1})^{1/2}. \tag{3.20}
$$

Таким образом, для экспоненциальной орбитальной устойчивости бегущей волны $v_{k^+}(\eta, \varepsilon)$ достаточно выполнения неравенства (3.20). Если же имеет место неравенство строго противоположное неравенству (3.18), то бегущая волна $v_{k^+}(\eta, \varepsilon)$ неустойчива. Отметим, что достаточным условием устойчивости бегущей волны $v_{k-}(\eta, \varepsilon)$ является неравенство (3.20), в котором выполнена замена $m^+$ на $m^-$.

Итак, при сформулированных выше условиях и при $\varepsilon \to 0$ в рассматриваемой задаче реализуется феномен буферности, т.е. неограниченно увеличивается количество сосуществующих экспоненциально орбитально устойчивых периодических по $t$ решений уравнения (1.9) типа бегущих волн.

В качестве иллюстрации к теореме рассмотрим вопрос об обретении устойчивости решения $v_{1+}$. $v_{1+}$ рождается неустойчивым с индексом неустойчивости 4. Воздействие бегущих волн $v_{0+}$, $v_{2+}$ на бегущую волну $v_{1+}$ описывается системой дифференциальных уравнений (3.4), в которой $s^+ = 0^+$, $n^+ = 2^+$. Далее приводятся собственные значения матриц указанного воздействия, увеличенные на $-\hat{\Lambda}\nu^{-1}$.

*Пример* 3.

$$12)(1.8, 0.1, -3.34431 \pm 2.38068i, 3.74431 \pm 2.38257i),$$
$$13)(1.8, 0.0085, -0.88008 \pm 0.89224i, -0.000919586 \pm 0.135304i),$$
$$14)(1.8, 0.001, -0.57882 \pm 0.73119i, -0.470103 \pm 0.73119i).$$

Согласно примеру бегущая волна $v_{1+}$ в случае $w = 1.8$ неустойчива относительно рассматриваемого давления до значения $\varepsilon \approx 0.0085$. $v_{1+}$ при переходе через указанное значение $\varepsilon$ преодолевает давление пары $v_{0+}$, $v_{2+}$ при дальнейшем уменьшении $\varepsilon$. Индекс неустойчивости $v_{1+}$ при этом понижается на два порядка.

Воздействие бегущих волн $v_{0-}$, $v_{3+}$ на $v_{1+}$ описывается системой дифференциальных уравнений (3.2),в которой $s^+ = 0^-$, $l^+ = 3^+$. Приведем, как и выше, собственные значения соответствующих матриц.

*Пример* 4.

$$15)(1.8, 0.1, -8.11695 \pm 3.3007i, 3.11695 \pm 3.30073i),$$
$$16)(0.0078, -1.305626 \pm 0.764432i, -0.005052 \pm 0.0.764432i),$$
$$17)(1.8, 0.001, -0.635064 \pm 0.715197i, -0.404936 \pm 0.715197i).$$

Бегущая волна $v_{1+}$ согласно приведенным расчетам неустойчива относительно рассматриваемого давления до значения $\varepsilon \approx 0.0078$. При переходе через указанное значение $\varepsilon$ $v_{1+}$, преодолевая давление $v_{0-}$, $v_{3+}$, устойчивость обретает и сохраняет его при уменьшении $\varepsilon$.

## 4. Высокомодовая буферность

Предположим, что имеет место равенство

$$h = \widehat{h} + \nu, \quad \widehat{h} = 2\pi p/q, \tag{4.1}$$

где $\nu$ меняется в окрестности нуля, а натуральные $p, q$ такие же, как в равенстве (1.4). Этот случай представляет теоретический интерес и, что самое главное, отвечает физическим условиям преобразования поворота в оптических системах с двумерной обратной связью.

Определим согласно (1.6) при $h = \widehat{h}$ натуральные $m^+ < m^-$, $m^+ + m^- = q$. Рассмотрим теперь уравнение (1.7) при $h = \widehat{h}$. Сохраняя принятые выше обозначения, предположим, что $\widehat{K}$ решение этого уравнения, причем $\sin\widehat{w} > 0$, $\widehat{\Lambda} = -\widehat{K}\gamma\sin\widehat{w} < -1$. $\widehat{w} = w(\widehat{K})$.

Выполним в уравнении (1.1) преобразование

$$u = v + \widehat{w}$$

и представим полученное уравнение в виде

$$\dot{v} = \mathfrak{L}_1(\mu,\nu)v + \mathfrak{R}_1(Qv,\nu), \tag{4.2}$$

где

$$\mathfrak{L}_1(\mu,\nu)v = \mu\Delta v - v + \widehat{\Lambda}Qv,$$
$$\mathfrak{R}_1(v,\nu) = \widehat{K}\gamma[\cos(\widehat{w}+v) - \cos\widehat{w} + v\sin(\widehat{w})].$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$\mathfrak{L}_1(\mu,\nu)\exp(im\theta) = \lambda^1_m(\mu,\nu)\exp(im\theta), \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

где

$$\lambda^1_m(\mu,\nu) = -1 - \mu m^2 + \widehat{\Lambda}\exp(im(\widehat{h}+\nu)). \tag{4.3}$$

Обозначим

$$\delta^1_{s\pm}(\mu,\nu) = -\mu(m^\pm + sq)^2 - \nu\widehat{\Lambda}(m^\pm + sq)\sin m^\pm\widehat{h}. \tag{4.4}$$

Из равенств (4.3) следуют формулы

$$\operatorname{Re}\lambda^1_{s\pm}(\mu,\nu) = \delta^1_{s\pm}(\mu,\nu) + O(\nu^2), \tag{4.5}$$

$$\operatorname{Im}\lambda^1_{s\pm}(\nu) = \widehat{\Lambda}\sin m^\pm\widehat{h} + i\nu s^\pm\cos m^\pm\widehat{h}O(\nu^2). \tag{4.6}$$

Предположим теперь, что

$$\sin m^+\widehat{h} < 0.$$

Если $\nu < 0$, то $\delta^1_{k-}(\mu,\nu) < 0$ при всех $k \geq 0$. Следовательно, при $\nu < 0$ все собственные значения $\lambda^1_{s-}(\mu,\nu)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ оператора $\mathfrak{L}_1(\mu,\nu)$ принадлежат левой комплексной полуплоскости.

Следовательно, при $\nu > 0$ интерес представляет случай

$$\sin m^+\widehat{h} > 0. \tag{4.7}$$

Тогда согласно равенств (4.3), (4.4) для бифуркационного параметра $\varepsilon = -\dfrac{\mu}{\nu\widehat{\Lambda}}$. точками бифуркации являются $(m^+ + sq)^{-1}\sin m^+\widehat{h}$. При уменьшении $\varepsilon$ в этих точках из тривиального решения уравнения ответвляются решения типа бегущих волн. Рассуждая, как и выше, приходим к следующему заключению: если

$\delta_{k^+}(\mu,\nu) > 0$, то уравнение (4.2) при $\nu > 0$ имеет приближенное по невязке порядка $\delta_{k^+}(\mu,\nu)^{3/2}$, периодическое по $t$ решение $v^1_{k^+}(\eta,\mu,\nu)$, $\eta = \omega^1_{k^+}(\mu,\nu)t + (m^+ + kq)\theta$, где

$$v^1_{k^+} = (\rho^1_{k^+})^{1/2} 2\cos\eta + \widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}\rho^1_{k^+}((1-\widehat{\Lambda})^{-1} + \\ + \operatorname{Re} b \exp(2i(\eta + m^+ h))) + o(\mu,\nu). \quad (4.8)$$

Здесь

$$\rho^1_{k^+} = \frac{\delta_{k^+}(\mu,\nu)}{-\operatorname{Re} c} + o(\|(\mu,\nu)\|), \\ \omega^1_{k^+}(\mu,\nu) = \operatorname{Im}\lambda^1_{k^+}(\mu,\nu) + \operatorname{Im} c\rho^1_{k^+} + o(\|\mu,\nu\|), \quad (4.9)$$

а постоянные $b$, $c$ удовлетворяют равенствам (2.7) и (2.10), соответственно.

Исследуем по изложенной выше методике характер устойчивости бегущей волны $\widehat{v}^1_{k^+}$ уравнения (4.2). В результате приходим к заключению, что воздействие бегущих волн $\widehat{v}^1_{s^-}$, $\widehat{v}^1_{l^+}$, $l = 2k+s+1$ на $\widehat{v}^1_{k^+}$ приводит к матрице

$$A^1_{k^+,s^-} = \begin{pmatrix} \delta^1_{s^-} - 2\delta^1_{k^+} - i(\chi\delta_{k^+} - \gamma_{k^+,s^-}) & \bar{c}\rho_{k^+} \\ c\rho_{k^+} & \delta^1_{l^+} - 2\delta^1_{k^+} + i(\chi\delta^1_{k^+} + \gamma_{k^+,s^-}) \end{pmatrix}.$$

Воздействие же на $\widehat{v}^1_{k^+}$ бегущих волн $\widehat{v}^1_{s^+}$, $\widehat{v}^1_{n^+}$, $n = 2k - s$, приводит к матрице

$$A^1_{k^+,s^+} = \begin{pmatrix} \delta^1_{s^+} - 2\delta^1_{k^+} - i(\chi\delta_{k^+} - \gamma_{k^+,s^+}) & \bar{c}\rho_{k^+} \\ c\rho_{k^+} & \delta^1_{n^+} - 2\delta^1_{k^+} + i(\chi\delta^1_{k^+} - \gamma_{k^+,s^+}), \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\gamma_{k^+,s^-} = \nu\widehat{\Lambda}(k+s+1)q\cos m^+\widehat{h},\ \gamma_{k^+,s^+} = \nu\widehat{\Lambda}(k-s)q\cos m^+\widehat{h}. \quad (4.10)$$

Так как при рассматриваемых условиях уравнение (4.2) бегущей волны $\widehat{v}^1_{s^-}$ не имеет, то предложение о взаимодействии бегущей волны $\widehat{v}^1_{k^+}$ с бегущей волной $\widehat{v}^1_{s^-}$ следует понимать как чисто формальное, порождающее матрицу $A^1_{k^+,s^-}$.

Отметим теперь, что собственные значения матрицы $\operatorname{diag} A^1_{k^+,s^-}, A^{1*}_{k^+,s^-}$ являются корнями многочлена

$$\lambda^4 + 2\hat{a}\lambda^3 + (\hat{a}^2 + 2b)\lambda^2 + 2\hat{a}\hat{b}\lambda + \hat{b}^2 + \hat{d}^2, \quad (4.11)$$

где

$$\hat{a} = a_{k^+,s^-} = 4\delta_{k^+} - \delta_{s^-} - \delta_{l^+}, \quad (4.12)$$

$$\hat{b} = b_{k^+,s^-} = (2\delta_{k^+} - \delta_{k^+})(2\delta_{k^+} - \delta_{l^+}) + (\chi\delta_{k^+} - \gamma_{k^+,s^-})^2 - \delta^2_{k^+}, \quad (4.13)$$

$$\hat{d} = d_{k^+,s^-} = 2(\chi\rho_{k^+} - \gamma_{k^+,s^-})(\delta_{k^+} - \delta_{l^+}). \quad (4.14)$$

Заменим в (4.12) $s^-$, $l^+$ на $s^+$, $n^+$ соответственно. Тогда корни многочлена (4.11), в котором коэффициенты определены, как указано выше, являются собственными значениями матрицы $\operatorname{diag} A^1_{k^+,s^+}, A^{1*}_{k^+,s^+}$.

Обозначим

$$\mathfrak{D}^1_{k^+} = \{(\mu,\nu) : \mu > 0, \nu > 0, \delta_{k^+}(\mu,\nu) > 0\},$$

где $k \geq 0$ — некоторое целое число. Следуя доказательству теоремы 1, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

**Теорема 2.** *Существует $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k)$ такое, что для всех $(\mu,\nu) \in \mathfrak{D}^1_{k^+}$, удовлетворяющих неравенству $\|(\mu,\nu)\| < \varepsilon_0$, уравнение (4.2) имеет периодическое по $t$ решение $v^1_{k^+}(\eta,\mu,\nu)$, удовлетворяющее равенству (4.9).*

*Для экспоненциальной орбитальной устойчивости $v^1_{k^+}(\eta,\mu,\nu)$ необходимо и достаточно выполнение условий:*

*iii) для любого $s \geq 0$ матрица $A^1_{k^+,s^-}(\mu,\nu)$ устойчива;*

*iv) для любого $0 \leq s < k$ матрица $A^1_{k^+,s^+}(\mu,\nu)$ устойчива.*

Опираясь на эту теорему, найдем условия устойчивости бегущей волны $v^1_{k^+}$. Рассмотрим с этой целью матрицу $A^1_{k^+,(k-1)^+}$. Согласно критерию Рауса-Гурвица для устойчивости этой матрицы необходимо, чтобы

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\operatorname{Tr}A^1_{k^+,(k-1)^+}\operatorname{Re}\,\det A^1_{k^+,(k-1)^+}+\\+\operatorname{Im}\operatorname{Tr}A^1_{k^+,(k-1)^+}\operatorname{Im}\,\det A^1_{k^+,(k-1)^+}<0.\end{gathered} \tag{4.15}$$

В силу (4.3), (4.4), (4.5) отсюда получаем

$$-6(m^+ + kq)^2 + 6(m^+ + kq)\varepsilon - \varepsilon^2 > 0.$$

Следовательно, если бегущая волна $v^1_{k^+}(\mu,\nu)$ является устойчивой, то

$$\frac{3-\sqrt{3}}{6\varepsilon} < m^+ + kq < \frac{3+\sqrt{3}}{6\varepsilon}. \tag{4.16}$$

Предположим теперь, что $\chi^2 < 3$. Можно убедиться, что тогда при достаточной малости параметра $\mu/\nu$ для устойчивости матрицы $A^1_{k^+,(k-1)^+}$ достаточно, чтобы имело место неравенство

$$\frac{3+\chi^2-\sqrt{3-\chi^2}}{(6+\chi^2)\varepsilon} < m^+ + kq < \frac{3+\chi^2+\sqrt{3-\chi^2}}{(6+\chi^2)\varepsilon}. \tag{4.17}$$

Более того, в этом случае устойчивы как матрицы $A^1_{k^+,s^+}$, $1 \leq s < k$, так и матрицы $A^1_{k^+,s^-}$, $s = 0,1,\ldots$. Итак, если выполнено неравенство (4.17), то при малых $\varepsilon$ волна $v_{k^+}(\varepsilon)$ устойчива. Если имеет место неравенство, строго противоположное неравенству (4.16), то при малых $\varepsilon$ волна $v_{k^+}(\varepsilon)$ неустойчива.

Отметим, что условие (4.16) с точностью $O(\|(\mu,\nu)\|^2)$ эквивалентно неравенству

$$\delta_{k^+}(\mu,\nu) > \frac{2}{3}\sup_{s<k}\delta_{s^+}(\mu,\nu). \tag{4.18}$$

При $\chi^2 < 3$ в силу (4.17) в уравнении (4.2) при $\frac{\nu}{\mu} \to \infty$, $\frac{\nu^2}{\mu} \to 0$ реализуется так называемая высокомодовая буферность [22], [21], [25] т.е. устойчивыми оказываются лишь бегущие волны $v^1_{k+}$ с достаточно большими волновыми числами.

Перейдем теперь к иллюстрирующим примерам. Согласно проведенному выше анализу под давлением пары $\hat{v}^1_{0-}$,$\hat{v}^1_{1+}$ $\hat{v}^1_{0+}$ устойчивость теряет при соответствующем значении $\varepsilon$. Поведение собственных значений матрицы $\mathrm{diag} A^1_{0+,0-} A^{1*}_{0+,0-}$ отвечает этому предложению. Предположим, как и выше, что $h = 2\pi/3$, $L = -2$. В этом случае $m^+ = 1$, $m^- = 2$. Далее приводятся собственные значения матриц воздействия с коэффициентом умножения $(-\nu\hat{\Lambda})^{-1}$. Эти собственные значения для $\mathrm{diag} A^1_{0+,0-} A^{1*}_{0+,0-}$ при указанных значениях $\varepsilon$, $w = 2.08$ таковы:

*Пример* 5.

$$18)(2.08, 0.45, -9.7058 \pm 3.57733i, -0.883221 \pm 3.57733i)$$
$$19)(2.08, 0.392, -7.54512 \pm 3.85687i, -0.00378 \pm 3.85687i)$$
$$20)(2.08, 0.01, -7.26923 \pm 3.34038i, 3.64512 \pm 3.34038i)$$

Итак, $\hat{v}^1_{0+}$ теряет устойчивость под давлением пары $\hat{v}^1_{0-}$, $\hat{v}^1_{1+}$, когда $\varepsilon$, убывая, проходит значение $\approx 0.392$.

Приведем собственные значения матриц воздействия бегущих волн $\hat{v}^1_{-1^+}$, $\hat{v}^1_{1+}$ на $\hat{v}^1_{0+}$ для 3-х значений $\varepsilon$.

*Пример* 6.

$$21)(2.08, 0.3, -0.795257 \pm 3.85687i, -0.540642 \pm 3.97437i)$$
$$22)2.08, 0.259, -0.674094 \pm 4.05086i, 0.0059 \pm 4.05086i)$$
$$23)(2.08, 0.01, -1.1979 \pm 5.01574i, 4.5288 \pm 5.01574i)$$

Итак, $\hat{v}^1_{0+}$ под давлением пары бегущих волн $\hat{v}^1_{0-}$,$\hat{v}^1_{1+}$, когда $\varepsilon$ проходит убывая значение $\approx 0.259$, теряет устойчивость. Разумеется, что при указанном переходе индекс неустойчивости $\hat{v}^1_{0+}$ принимает значение 4.

## Заключение

Согласно проведенному анализу характер устойчивости бегущей волны $v_{k^+}$ уравнения (1.1) определяется её взаимодействиями конкурентного типа с парами бегущих волн $v_{s^-}$, $v_{(2k+s+1)^+}$, $s = 0, 1, \ldots$, $v_{s^+}$, $v_{(k-s)^+}$, $s < k$. Аналогичный результат имеет место и относительно $v_{k^-}$.

Этот результат, следуя [10], сформулируем в виде следующего принципа.

**Принцип 1:2 взаимодействия бегущих волн.** *Характер устойчивости бегущей волны* $v_{k^+}$*;* $v_{k^-}$ *семейства уравнений* (1.9) *вполне определяется ее взаимодействиями с парами бегущих волн:* $(v_{s^-}, v_{(2k+s+1)^+})$ , $(v_{s^+}, v_{(2k-s)^+})$, $s < k$*;* $(v_{s^+}, v_{(2k+s+1)^-})$, $(v_{s^-}, v_{(2k-s)^-})$, $s < k$*, соответственно.*

Есть основания полагать, что этот принцип имеет универсальный характер. Бегущие волны феноменологического уравнения спинового горения [19] взаимодействуют по принципу 1:2 [32, 15, 33]. Бегущие волны комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау также взаимодействуют по указанному конкурентному принципу [15].

## Список цитируемых источников

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей. // Новые принципы оптической обработки информации. — М.: Наука. — 1990. — С. 263-325.

   Akhmanov, S. A., Vorontsov, M/ A., Ivanov, V. Yu. (1990). Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback: on the way to creation of nonlinear optical analogs of neural networks. In Novye printsypy opticheskoi obrabotki informatsii (pp. 263-325), Moscow: Nauka. (in Russian).

2. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. — М.: Физматлит, 2007. — 485 с.

   Akhromeeva, T. S., Kurdyumov, S. P., Malinetskiĭ, G. G., Samarskiĭ, A. A. (2007). Structures and chaos in nonlinear media. Moscow: Fizmatlit. (in Russian).

3. *Белан Е. П.* Бифуркация рождения периодических решений в параболической задаче с преобразованным аргументом. Ученые записки ТНУ. Математика. — 2001. — Т. 14, №1. — С. 24-33.

   Belan, E. P. (2001). Bifurcation of the generation of periodic solutions in a parabolic problem with a transformed argument. Uchenye zapiski TNU. Matematika 14, No.1, 24-33. (in Russian).

4. *Белан Е. П.* О бифуркации периодических решений в параболическом функционально-диффереciальном уравнении. // Ученые записки ТНУ. Математика. — 2002. — Т.15, №2. — С. 24-33.

   Belan, E. P. (2002). On the bifurcation of periodic solutions in a parabolic functional-differential equation. Uchenye zapiski TNU. Matematika 15, No.2, 24-33. (in Russian).

5. *Белан Е. П.* Об автоколебаниях в сингулярно возмущенном параболическом уравнении с преобразованным аргументом. // Доповіді НАНУ. — 2002. — №7. — С. 7-12.

   Belan, E. P. (2002). On auto-oscillations for a singularly perturbed parabolic equation with transformed argument. Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky 2002, No.7, 7-12. (in Russian).

6. *Белан Е. П., Лыкова О. Б.* О бифуркации вращающихся волн в параболической задаче с преобразованным аргументом. // Доповіді НАНУ. — 2003. — №1. — С. 7-12.

   Belan, E. P., Lykova, O. B. (2003). On the bifurcation of rotating waves in a parabolic problem with transformed argument. Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky 2003, No.1, 7-12. (in Russian).

7. *Белан Е. П.* О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении. // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, №5. — С. 645-654.

Belan, E. P. (2004). On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation. Differ. Equ. 40, No.5, 692-702.

8. *Белан Е. П., Лыкова О. Б.* Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении. // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т.40, №10. — С. 1348-1357.

   Belan, E. P., Lykova, O. B. (2004). Rotating structures in a parabolic functional-differential equation. Differ. Equ. 40, No.10, 1419-1430.

9. *Белан Е. П., Лыкова О. Б.* Бифуркации вращающихся структур в параболическом функционально-дифференциальном уравнении. // Нелінійні коливання. — 2006. — Т.9, №2. — С. 155-169.

   Belan, E. P., Lykova, O. B. (2006). Bifurcations of rotating structures in a parabolic functional differential equation. Nonlinear Oscil. 9, No.2, 152-165.

10. *Белан Е. П.* О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной. // Журнал математической физики, анализа, геометрии. — 2005. — Т.1, №1. — С. 3–34.

    Belan, E P. (2005). On the dynamics of travelling waves in a nonlinear parabolic equation with a shift transformation of the space variable. Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. 1, No.1, 3-34. (in Russian).

11. *Белан Е. П.* Оптическая буферность стационарных структур. // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — Т.44, №5. — С. 61-75.

    Belan, E. P. (2008). Optical buffering in stationary structures. Cybern. Syst. Anal. 44, No. 5, 680-691.

12. *Белан Е. П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной. // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — Т.46, №5. — С. 95-111.

    Belan, E. P. (2010). Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflected spatial argument. Cybern. Syst. Anal. 46, No. 5, 772-783.

13. *Белан Е. П.* Стационарные структуры в параболическом уравнении с преобразованием отражения пространственной переменной. // Динамические системы. — 2010. — Вып. 28. — С. 35-47.

    Belan, E.P. (2010). Stationary structures in parabolic equations with inversion transformer spatial argument. Dinamicheskie Sistemy 28, 35-47. (in Russian).

14. *Белан Е. П.* Двумерные стационарные структуры в параболическом уравнении с отражением пространственных переменных. // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — Т.47, №3. — С. 33-41.

    Belan, E. P. (2011). Two-dimensional stationary structures in a parabolic equation with an inversion transformation of its spatial arguments. Cybern. Syst. Anal. 47, No. 3, 360-367.

15. *Белан Е. П., Самойленко А. М.* Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения. // Украинский матем. журнал. — 2013. — Т.65, №1. — С. 21–43.

    Belan, E.P.; Samoilenko, A.M. (2013). Dynamics of periodic modes for the phenomenological equation of spin combustion. Ukr. Math. J. 65, No.1, 21-46.

16. *Белан Е. П., Хазова Ю. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с преобразованием отражения пространственной переменной. // Динамические системы. — 2014. — Т. 4(32), №1-2. — 43–57.

Belan, E. P.; Khazova, Yu. A. (2014). Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. Dinamicheskie Sistemy 4(32), No.1-2, 43-57. (in Russian).

17. *Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией. // Математический сборник. — 1986. — Т.130(172), №4. — С. 488–499.

Vasil'eva, A.B.; Kashchenko, S.A.; Kolesov, Yu.S.; Rozov, N.Kh. (1987). Bifurcation of self-oscillations of nonlinear parabolic equations with small diffusion. Math. USSR. Sb. 58, No.4, 491-503.

18. *Гапонов-Грехов А. В., Ломов А. С., Осипов Г. В., Рабинович М. И.* Рождение и динамика двумерных структур в неравновесных диссипативных системах. // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. / Под ред. А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Рабинович. — М.: Наука, 1989. — С. 61-73.

Gaponov-Grekhov, A. V., Lomov, A. S., Osipov, G. V., Rabinovich, M. I. (1989). Pattern formation and dynamics of two-dimensional structures in nonequilibrium dissipative media. In A. V. Gaponov-Grekhov, M. I. Rabinovich (Eds.) Nonlinear waves. Dynamics and evolution. (pp. 61-73). Moscow: Nauka.

19. *Зельдович Я. Б., Маломед Б. А.* Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах. // Известия вузов, сер. Радиофизика. — 1982. — Т.15, №6 — С. 591-618.

Zeldovich, Ya. B., Malomed, B. A. (1982). Complex wave regimes in distributed dynamic systems. Izv. vuzov, ser. radiofizika 15, No.6, 591-618. (in Russian).

20. *Кащенко С. А.* Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. — 1991. — Т.31, №3. — С. 467-473.

Kashchenko, S. A. (1991). Asymptotic form of spatially non-uniform structures in coherent nonlinear optical systems. Comput. Math. Math. Phys. 31, No.3, 97-102.

21. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения. // Теор. и мат. физика. — 2004. — 140. — С. 14-28.

Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. (2004). Optical buffering and mechanisms for its occurrence. Theor. Math. Phys. 140, No. 1, 905-917.

22. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. — М.: Физматлит, 2004. — 405 с.

Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. (2004). Invariant tori of nonlinear wave equations. Moscow: Fizmatlit. (in Russian).

23. *Корнута А.А.* Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении с поворотом пространственной переменной. // Динамические системы. — 2014. — Т.4(32), №1-2. — С. 59-75.

Kornuta, A. A. (2014). Metastable patterns of a parabolic equation on the circle with the rotation of the spatial variable. Dinamicheskie Sistemy 4(32), No. 1-2, 59-75. (in Russian).

24. *Марсден Дж.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир. — 1980. — 368 с.

    Marsden, J. E., McCracken M. (1976). The Hopf bifurcation and its applications. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

25. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.

    Mishchenko, E. F., Sadovnichii, V. A., Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. (2005). Autowave processes in nonlinear media with diffusion. Moscow: Fizmatlit. (in Russian).

26. *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1993. — Т.33, №1. — С. 69-80.

    Razgulin, A. V. (1993). Self-excited oscillations in the nonlinear parabolic problem with transformed argument. Comput. Math. Math. Phys. 33, No.1, 61-70.

27. *Разгулин А. В.* Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1993. — Т.33, №10. — С. 1499-1508.

    Razgulin, A. V. (1993). The stability of self-excited bifurcation oscillations in a nonlinear parabolic problem with transformed argument. Comput. Math. Math. Physics 33, No.10, 1323–1330.

28. *Разгулин А. В.* Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // Математическое моделирование. — 1993. — Т. 5, №4. — С. 105-119.

    Razgulin, A. V. (1993). Rotational waves in optical system with two-dimensional feedback. Matemat. Modelirovanie 5, No.4, 105-119. (in Russian).

29. *Разгулин А. В., Романенко Т.Е.* Ротационные волны в параболических функционально-дифференциальных уравнениях с преобразованием поворота и запаздыванием. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, №11. — С. 42–60.

    Razgulin, A. V., Romanenko, T. E. (2013). Rotating waves in parabolic functional-differential equations with rotation of spatial arguments and time delay. Comput. Math. Math. Phys. 53, No.11, 1626-1643.

30. *Романенко Т. Е., Разгулин А. В.* О моделировании подавления искажений в нелинейной оптической системе с запаздыванием в контуре обратной связи. // Математическое моделирование. — 2014. — Т.26, №11. — С. 123-136.

    Romanenko, T., E., Razgulin, A. V. (2015). Modeling of distortion suppression in a nonlinear optical system with a delayed feedback loop. Math. Models Comput Simul. 7, No.3, 259-270.

31. *Романенко Т.Е.* Двумерные вращающиеся волны в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с поворотом пространственных аргументов и запаздыванием. // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т.50, №2. — С. 260-263.

    Romanenko, T. E. (2014). Two-dimensional rotating waves in a functional-differential diffusion equation with rotation of spatial arguments and time delay. Differ. Equ. 50, No. 2, 264-267.

32. *Самойленко А. М., Белан Е. П.* Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения. // Доклады РАН. — 2006. — Т.406, №6. — С. 738-741.

Samoilenko, A. M., Belan, E. P. (2006). Dynamics of traveling waves in the phenomenological equation of spin combustion. Dokl. Math. 73, No.1, 134-137.

33. *Самойленко А. М., Белан Е. П.* Периодические режимы феноменологического уравнения спинового горения. // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т.51, №2. — С. 211-228.

Samoilenko, A. M., Belan, E. P. (2015). Periodic modes of the phenomenological spin combustion equation. Differ. Equ. 51, No.2, 214-231.

34. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т.34, №10. — С. 1394-1401.

Skubachevskij, A. L. (1998). The Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional-differential equation. Differ. Equations 34, No.10, 1395-1402.

35. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

Henry, D. (1981). Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

36. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн Й.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М.: Мир, 1985. — 280 с.

Hassard, B. D., Kazarinoff, N. D., Wan, U.-H. (1981). Theory and applications of Hopf bifurcation. Cambridge-New York-Sydney: CUP.

37. *Чушкин В. А., Разгулин А. В.* Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отраженным аргументом. // Вестн. Моск. ун-та. — сер. 15, вычисл. матем. и киберн. — 2003, №2. — С. 13-20.

Chushkin, V.A., Razgulin, A.V. (2003). The stationary structures in the functional-differential diffusion equation with a reflected argument. Vestnik Moskovskogo Univ., Ser.15, vychislit. matem. i kibernetika, No.2, 13-20.

38. Воронцов М. А., Железных Н. И. Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью. // Математическое моделирование, — 1990. — Т.2, №2. — С. 31 — 38.

Vorontsov, M. A., Zheleznykh, N. I. (1990). Transverse bistability and multistability in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback. Matemat. modelirovanie 2, No.2, 31-38. (in Russian).

39. *Budzinskiy S.* Rotating waves in a model of delayed feedback optical system with diffraction. // Interdisciplinary Information Sciences. — 2016. — Vol. 22, no.2. — P. 187-197.

40. *Budzinskiy S. S., Razgulin A. V.* Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under O(2) hopf bifurcation. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2017. — Vol. 49. — P. 17–29.

41. *Carr J., Pego R.L.* Metastable Patterns in Solution of $u_t = \mu^2 u_{xx} - f(u)$. Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1989. — Vol. XLII. — P. 523–576.

42. *Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S. A., Pelster A.* Traveling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback. // Physica D. — 1999. — Vol. 125. — P. 123-141.
43. *Fusco G., Hale J.K.* Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singulary Perturbations. // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 1989. — Vol. 1, no.1. — P. 75–94.
44. *Kuznetzov Y. A.* Elements of applied bifurcation theory. — New York: Springer-Verlag, 1998.
45. *Ikeda K., Daido H., Okimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmmitted light from a ring cavity. // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol.45. — P. 709-712.
46. *Le Berry M., Ressayre E., Tallet A.* Lyapunov analysis of the Ruelle-Takens route to chaos in optical retarted differential system. // Opt. Commun. — 1980. — Vol.72. — P. 123-128.
47. *Razgulin A. V.* Rotational multi-petel waves in optical system with 2-D feedback. Chaos in Optics. Ed. Rajarshi Roy (proc.SPIE-2039), 1993. — P. 342-351.
48. *Skubachevskii A.L.* Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics. // Nonlinear Analysis. Theory. Methods & Applications. — 1998. — Vol.12, no.2. — P. 261-278.
49. *Vorontsov M. A., Zheleznykh, N. I., Ivanov V. Yu.* Transverse interaction in 2-D feedback non-linear optical systems. // Opt. and Quant. Electron. — 1988. — Vol.22. — P. 301-318.

*Получена 28.06.2016*