Динамические системы, 2016, том 6(34), №3, 187–208

УДК 517.9

Юрий Иосифович Черский — ученый, учитель...

В. А. Лукьяненко*, **А. И. Песчанский****

*Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: art-inf@yandex.ru*
+ **Севастопольский государственный университет,
Севастополь 299053. *E-mail: peschansky_ sntu@mail.ru.*

Аннотация. Профессор Юрий Иосифович Черский (1929-2015) — видный советский математик, один из создателей теории интегральных уравнений типа свертки, краевых задач теории аналитических функций и их приложений, основатель научных школ в Ростовском, Одесском, Симферопольском университетах и Институте прикладных проблем механики и математики АН УССР. В статье научные результаты Ю.И. Черского изложены в соответствии его жизненному пути. Предложены возможные направления развития.

Ключевые слова: биография, список публикаций, уравнение типа свертки, краевые задачи теории аналитических функций.

Yu.I. Chersky — scientist, teacher...

V. A. Lukianenko, A. I. Peschansky
Crimean Federal University, Simferopol 295007,
Sevastopol State University, Sevastopol 299053.

Abstract. Professor Yuri Iosifovich Chersky (1929-2015) — a prominent Soviet mathematician, one of the creators of the theory of integral equations of convolution type and boundary value problems in the theory of analytic functions and their applications, the founder of scientific schools in Rostov, Odessa, Simferopol universities and the Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. In the article the scientific results of Yu. I. Chersky are set out in accordance with his life path. Possible development directions are suggested.

Keywords: biography, bibliography, equation of convolution type, boundary value problems in the theory of analytic functions.
MSC 2010: 01A70, 45E10

Юрий Иосифович Черский родился 8 декабря 1929 г. в Казани, в семье врачей. С 1947 по 1952 гг. учился на математическом факультете Казанского государственного университета, который окончил с отличием. В «Ученых записках Казанского университета» опубликована первая статья Юрия Иосифовича [1*][1], посвященная особым интегральным уравнениям и основанная на результатах его дипломной работы. Избранная тема исследования уравнений типа свертки являлась новой, перспективной для приложений [1].

[1]Номер ссылки со звездочкой относится к списку публикаций Ю. С. Черского, помещенному в конце статьи. Номера ссылок без звездочек относятся к пристатейному списку цитируемых источников.

(1929-2015)

Исторически первые результаты по уравнениям типа свертки связаны с именами В. А. Фока, Г. Деча, Н. Винера, Е. Хопфа, Е. Рейснера, И. М. Рапопорта. В. А. Фок в 1924 г. вывел формулу свертки и решил уравнение

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t k(t-s) f(s) ds = g(t),\ t > 0,$$

более общая теория дана в работах Г. Деча (G. Doetsch, 1923, 1925), из которой следуют результаты В. А. Фока. Н. Винер и Е. Хопф в 1931 г. предложили метод решения нового однородного одностороннего уравнения, возникшего в теории лучистого равновесия

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k(t-s) f(s) ds = g(t),\ 0 < t < \infty.$$

С тех пор это уравнение назвают уравнением Винера-Хопфа, а соответствующий метод решения — методом Винера-Хопфа. В тоже время работах В. А. Фока и

Е. Рейснера независимо решено неоднородное уравнение Винера-Хопфа. И. М. Рапопорт для решения уравнений типа свертки впервые использовал краевую задачу Римана [98*]. Этот подход успешно развивается и в наше время. Следующим шагом является работа Ю. И. Черского [1*] (1953 г.), в которой введено уравнение с двумя ядрами

$$f(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}k_1(t-s)f(s)ds+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}k_2(t-s)f(s)ds=g(t),\ t\in\mathbb{R}$$

и показано, что это уравнение является сопряженным для парного уравнения

$$\varphi(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}k_1(t-s)\varphi(s)ds=g(t),\ t>0,$$
$$\varphi(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}k_2(t-s)\varphi(s)ds=g(t),\ t<0.$$

Установлена равносильность этих уравнений уравнению с ядром Коши. Впервые рассмотрены «полные» уравнения типа свертки, проведена их регуляризация и доказаны теоремы Нетера.

В 1958 г. была опубликована, по словам Юрия Иосифовича, замечательная статья М. Г. Крейна [102], в которой на примере одностороннего уравнения с абсолютно непрерывным ядром даны глубокие теоретические результаты по разрешимости уравнения типа свертки и соответствующей краевой задачи Римана в классе непрерывных функций, являющихся преобразованием Фурье абсолютно интегрируемых функций. В 1954 г. найдено решение задачи Римана для всего класса непрерывных коэффициентов (И. Б. Симоненко, В. В. Иванов, Б. В. Хведелидзе, И. Ц. Гохберг). Полученные результаты остаются справедливыми и для более общих пространств ($L_p,\ p\geq 1$ и др.).

В 1953 г. Юрий Иосифович поступил в аспирантуру к профессору Федору Дмитриевичу Гахову и переехал в г. Ростов-на-Дону, где продолжил учебу в аспирантуре Ростовского государственного университета им. В. М. Молотова. В 1955 г. Юрий Иосифович закончил обучение в аспирантуре. В 1956 г. в Тбилисском математическом институте им. А. М. Размадзе АН Грузинской ССР защитил диссертацию «Интегральные уравнения типа свертки» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук [4*]. Это была работа очень высокого уровня. По результатам защиты ученый совет, возглавляемый Н. И. Мусхелишвили, присудил сразу степень доктора физико-математических наук. По формальным причинам ВАКом СССР была утверждена степень кандидата наук.

В 1955-1964 гг. Ю. И. Черский преподавал в Ростовском государственном университете (1955-1961 гг. — ассистент, старший преподаватель, доцент кафедры математического анализа; 1961-1964 гг. — доцент кафедры вычислительной математики).

Интересна история появления университета в Ростове. До 1915 года в Ростове-на-Дону не было ни одного высшего учебного заведения и никого с ученым званием или степенью. В 1910 году ростовчане обращались в вышестоящие инстанции с просьбой открыть в городе учебное заведение, предлагая 2 млн. рублей и землю под строительство. Царское правительство в просьбе отказало. Однако в 1915 году возникла угроза взятия Варшавы немцами, и Варшавский университет срочно был эвакуирован сначала в Москву, а затем было принято решение о переезде университета в Ростов. Механико-математический факультет Ростовского университета был знаменит своими преподавателями. Будущий известный писатель и Нобелевский лауреат по литературе А. И. Солженицин поступил на механико-математический факультет университета только потому, что именно на этом факультете работал сильный преподавательский состав, хотя интересы студента лежали совсем в другой области.

Из воспоминаний о Борисе Ивановиче Рухлине (ученик Ю. И. Черского) — «среди преподавателей университета во время его обучения на механико-математическом факультете преподавали широко известный ученый, доктор физико-математических наук, профессор Федор Дмитриевич Гахов и его ученик — талантливый молодой математик, кандидат физико-математических наук, доцент Ю. И. Черский! Книга Ф. Д. Гахова «Краевые задачи» была, есть и будет еще очень много лет настольной книгой аспирантов. Не знаю, есть ли еще одна такая монография, которую читать не только полезно, но и приятно! Добросовестного, трудолюбивого, активного, очень способного студента сразу заметил и отметил Юрий Иосифович Черский, под руководством которого Борис Иванович пишет свою первую научную работу» [23].

В 1959 г. Ю. И. Черский для решения задачи Римана [11*] применил разработанный им вариант теории обобщенных функций. Классический подход (С. Л. Соболев (1936 г.), Л. Шварц (1950-1951 гг.), И. М. Гельфанд, И. Г. Шилов (1956 г.) и др.) предполагает бесконечную дифференцируемость и финитность основных функций, кроме того, пространство основных функций не нормировано, что создает неудобства при исследовании линейных операторов в пространстве обобщенных функций. Подход Ю. И. Черского предполагает выбор наиболее подходящего для данного уравнения пространства обобщенных функций. В монографии [43*] изложен такой наиболее простой вариант теории обобщенных функций. Обобщенные функции определяются как на прямой, так и на контуре в комплексной плоскости. Основные функции могут не быть бесконечно дифференцируемыми и финитными, что позволило существенно расширить сферу приложений. Исторически первое интегральное уравнение типа свертки в пространстве обобщенных функций рассмотрел О. С. Парасюк (1956 г.). Он ограничился схемой решения без выяснения условий разрешимости и записи соответствующих формул. Полные результаты для нормального случая разрешимости задачи Римана и соответствующих характеристических уравнений получены Ю. И. Черским. Дальнейшее использование и развитие этого направления отражено в работах В. С. Рогожина, В. Б. Дыбина, Н. К. Карапетянца, Н. И. Морару, Б. И. Рухлина, М. И. Хайкина и др. (см., например, [6]-[8]). В период работы Черского в Ростовском государственном университете под его руководством С. И. Юрченко и В. Б. Дыбин подготовили и защитили кандидатские диссертации.

В 1964 г. в Тбилисском математическом институте им. А. М. Размадзе Юрий

Иосифович защитил диссертацию «Интегральные уравнения типа свертки и некоторые их приложения» [19*] на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Характерной чертой научной работы Ю. И. Черского является выявление креативных направлений, точек роста для многих последователей. При этом важные результаты исследований могли быть опубликованы и в тезисах докладов, и в научных журналах. Выделим несколько важных публикаций и направлений, которые можно применять и развивать в будущем.

Для уравнений типа свертки важную роль играют теоремы, доказанные для абстрактных линейных уравнений в абстрактном линейном пространстве, о приближенном решении линейных уравнений. Впервые метод приближенного решения одностороннего уравнения типа свертки с помощью замены ядра другим ядром, удобным для факторизации предложил в 1954 г. У. Т. Койтер [2]. В 1962-1963 годах Ю. И. Черским получено усовершенствование метода и его теоретическое обоснование [15*, 17*]. Результаты улучшены и представлены в совместной с Ф. Д. Гаховым монографии [43*]. Дальнейшее развитие получено в работах Н. Я. Тихоненко и других.

Поиск приближенного решения линейного неоднородного уравнения общего вида
$$Kf = g, \tag{1}$$
где K — заданный линейный оператор, действующий из линейного множества X в линейное множество Y, $g \in Y$, искомый элемент $f \in X$ сводится к точному решению более простого по своей структуре приближенного уравнения
$$\widetilde{K}\widetilde{f} = \widetilde{g}. \tag{2}$$
Предполагается, что $\widetilde{f} \in X$ и обеспечивается качественная близость между решениями
$$f - \widetilde{f} \in X_0 \subset X, \tag{3}$$
где X_0 — линейное подмножество множества X. Это условие будет выполнено, когда операторы K и $\widetilde{K}$ и элементы g, $\widetilde{g}$ в некотором смысле близки.

В монографии [43*] опубликована теорема.

Теорема 1. *Пусть*

(1°) *уравнение (2) имеет единственное решение* $\widetilde{f}$*;*

(2°) $g - \widetilde{g} \in Y_0$*, где* Y_0 *— линейное подмножество,* $Y_0 \subset Y$*;*

(3°) *оператор* $K - \widetilde{K}$ *действует из* X *в* Y_0*;*

(4°) *на* Y_0 *определен оператор* $\widetilde{K}^{-1}$, $\widetilde{K}^{-1} : Y_0 \to X_0$*;*

(5°) *оператор* $I + \widetilde{K}^{-1}(K - \widetilde{K})$ *на* X_0 *имеет обратный.*

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение, равное

$$f = \widetilde{f} + [I + \widetilde{K}^{-1}(K - \widetilde{K})]^{-1}\widetilde{K}^{-1}(g - K\widetilde{f}). \tag{4}$$

При этом имеет место свойство (3) и

$$K\widetilde{f} - g \in Y_0. \tag{5}$$

Теорема 1 аналогична соответствующим теоремам из общей теории приближенных методов Л. В. Канторовича. Если выполнены условия 1°-4°, причем X_0 является банаховым пространством, а условие 5° заменено ограниченностью оператора $\widetilde{K}^{-1}(K - \widetilde{K})$ в X_0 с нормой

$$\|\widetilde{K}^{-1}(K - \widetilde{K})\| < 1, \tag{6}$$

то справедливы все утверждения теоремы 1 и имеет место оценка погрешности

$$\|f - \widetilde{f}\|_{X_0} \leq \frac{\|\widetilde{K}^{-1}(g - K\widetilde{f})\|_{X_0}}{1 - \|\widetilde{K}^{-1}(K - \widetilde{K}\|}. \tag{7}$$

Действительно, при условии (6) оператор $I + \widetilde{K}^{-1}(K - \widetilde{K})$ имеет ограниченный обратный, т.е. условие 5° выполнено, а оценка (7) следует из равенства (4).

На основе этих результатов выводятся итерационные формулы построения приближенных решений, которые для уравнений типа свертки приводят к разностным уравнениям, а их решения позволяют явно получить n-е приближения в образах Фурье без итерационного процесса [62*, 81*].

Разработанный подход применим не только для приближенного решения уравнений, но и к исследованию решений на устойчивость при различных возмущениях ядер и правой части g. Это позволяет существенно расширить классы функций, входящих в уравнение. Для задачи Римана в [43*] приведены результаты с измеримым коэффициентом. Впервые задачу Римана с измеримым коэффициентом в 1960 г. решил И. Б. Симоненко [3]. Перспективны исследования на устойчивость для уравнений с особенностями, уравнения первого рода, а также для экстремальных задач для интегральных уравнений типа свертки, краевых задач, функциональных уравнений и т.п.

В 1964 г. Ю. И. Черский переезжает в Одессу, он избран заведующим вновь созданной в Одесском государственном университете им. И. И. Мечникова кафедры методов математической физики. «Интересна история переезда Ю. И. Черского в Одессу. Сидели Юрий Иосифович с Георгием Семеновичем Литвинчуком, а рядом лежала карта. Г. С. Литвинчук — доктор физико-математических наук, профессор, автор известной монографии «Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом» [5]. Георгий Семенович пальцем водит по карте, останавливается там, где находится Одесса, и говорит: «Вот куда надо ехать жить!». И поехал! Потом пригласил в Одессу работать в университет и Ю. И. Черского» [23]. Черский читал лекции по математическому анализу, функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, интегральным уравнениям, уравнениям математической физики, теории вероятностей, теории функций действительного переменного, теории функций комплексного переменного, уравнениям с частными производными, методам приближенных вычислений, спецкурс по краевым задачам аналитических функций и другие спецкурсы.

«В те времена в полной мере отражала действительность поговорка: «Скажи мне, кто твой научный руководитель, и я скажу, кто ты!». Ю. И. Черский — удивительный человек. Талантливый, очень скромный и деликатный! Слушать его огромное удовольствие, точнее, наслаждение, особенно интересны его комментарии к научным докладам или выступления на защите в качестве оппонента. Он всегда говорит кратко, но какой глубокий смысл в каждой фразе!» [23].

На лекции по функциональному анализу, которые Ю. И. Черский читал в Большом актовом зале университета, ходили студенты разных курсов. Характерной чертой Юрия Иосифовича — лектора было умение быстро подстраиваться под уровень аудитории и излагать весьма сложные понятия простым и доступным языком. Бог математики — так называли его студенты. Член команды КВН преподавателей мехмата ОГУ, велосипедист и лыжник, временами он музицировал в четыре руки со своими студентами. Вылепленные им фигуры любимых классических музыкантов были потрясающе реалистичными.

Заметный след оставил Ю. И. Черский и в научной жизни Одессы. Он организовал и возглавил научный семинар по краевым задачам, вместе с Георгием Семеновичем Литвинчуком основал школу по краевым задачам теории аналитических функций. Под его руководством Н. Я. Тихоненко, П. В. Керекеша, Б. И. Рухлин, Н. И. Морару, Фан Танг Да (Вьетнам) защитили кандидатские диссертации, а позже Н. Я. Тихоненко и П. В. Керекеша стали докторами физико-математических наук.

В этот одесский период Ю. И. Черский продолжил исследования по приближенным методам решения уравнений типа свертки, краевым задачам и задачам для уравнений математической физики [21*, 26*, 28*]. Метод факторизации становится рабочим инструментом для различных классов уравнений [38*, 39*]. Заметим, что Ю. И. Черский еще в 1957 г. статье, опубликованной в ДАН [8*], предложил использовать для решения смешанных задач не метод Винера-Хопфа, а методы теории краевой задачи Римана для системы n пар функций. В теории задачи Римана не требуется аналитичности коэффициента в некоторой полосе в отличие от метода Винера-Хопфа. Естественным развитием метода факторизации явился, предложенный Юрием Иосифовичем в 1969 г., метод неполной факторизации [31*, 35*, 43*]. Этот метод еще не исчерпал своего потенциала и может быть перспективным в различных прикладных задачах.

Новые задачи, уравнения, их конструирование и обоснование, разработка методов решения сопровождают научное творчество Ю. И. Черского. В 1967 г. в тезисах докладов [29*], а затем и в статье [34*] введено в рассмотрение новое интегральное уравнение типа свертки — уравнение плавного перехода

$$f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} k_1(t-s) f(s) ds - g(t) +$$

$$+ e^{-t} \left\{ f(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} k_2(t-s) f(s) ds - g(t) \right\} = 0, \ t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

В случае нормальной разрешимости

$$1 + K_j(x) \neq 0, \ x \in \mathbb{R}, \ K_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_j(t) e^{itx} dt, \ j = 1, 2,$$

уравнение плавного перехода сведено к задаче Карлемана для полосы $0 < Imz < 1$

$$\Phi(x) = -\frac{1 + K_2(x)}{1 + K_1(x)} \Phi(x+i) + \frac{K_2(x) - K_1(x)}{1 + K_1(x)} G(x), \ x \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

а затем к задаче Римана. Это позволило найти решение интегрального уравнения в квадратурах. При сведении задачи Карлемана и задаче Римана был реализован метод конформного склеивания. Теоретические результаты о возможности сведения задачи Карлемана к задаче Римана на разомкнутом контуре отражены в работах многих математиков: И. Б. Симоненко, Л. И. Чибриковой, Г. С. Литвинчука, Э. Г. Хабасова, Э. И. Зверовича, В. А. Чернецкого и др. Подробная библиография по теории задачи Карлемана и ее обобщений изложена в монографии Г. С. Литвинчука [5]. Заметим, что теоретический метод конформного склеивания реализован Ю. И. Черским при решении краевой задачи Карлемана для полосы. Эти результаты позволили найти точное решение ряда задач теории упругости (Г. Я. Попов, Л. Я. Тихоненко, Р. Д. Банцуры, Б. М. Нуллер). Отметим также работы Л.Я.Тихоненко, в которых задачи теории упругости для клина с помощью преобразования Меллина приводятся к задаче Карлемана для полосы.

В монографии Ф. Д. Гахова, Ю. И. Черского [43*] выделен класс задач математической физики, содержащий экспоненту в краевом условии, которые приводят к решению задачи Карлемана. Некоторые задачи, сводящиеся к обобщенному трехэлементному функциональному уравнению со сдвигом во внутрь области аналитичности, исследовались в работах Н. Л. Василевского, А. А. Карелина, П. В. Керекеши, Г. С. Литвинчука [10, 11]. Разрешимость таких уравнений может быть получена сведением к сингулярным интегральным уравнениям со сдвигом, развитие теории которых отражено в монографии [5]. Представляет интерес исследование обобщенной задачи Карлемана со сдвигом в область аналитичности (многоэлементная задача). Так как в общем случае такая задача не имеет решения в квадратурах, то, опираясь на решение двухэлементной задачи Карлемана для полосы, найдены случаи точного решения для трехэлементной задачи (симметричный случай приводится в работах [10, 11]). Эквивалентные сингулярные уравнения позволяют находить приближенные решения. Приведем необходимые сведения для постановки многоэлементной задачи Карлемана.

Теорема 2 (43*). *Пусть α, β — вещественные числа ($\alpha < \beta$). Для того чтобы функция $\varphi(t)$ одновременно удовлетворяла условиям*

$$e^{-\alpha t}\varphi(t) \in L_2(\mathbb{R}),\ e^{-\beta t}\varphi(t) \in L_2(\mathbb{R}) \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы

1) *её интеграл Фурье $\Phi(x)$ был аналитически продолжим на полосу $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$;*

2) *существовала постоянная с такая, что для всех $\alpha \le y \le \beta$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2 dx \le c$.*

При этом справедливо следующее свойство для интегралов Фурье

$$Fe^{-yt}\varphi(t) = \Phi(x+iy), \alpha \le y \le \beta. \tag{11}$$

Класс функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условиям (10), обозначается $\{\alpha, \beta\}$, а их преобразования Фурье ([43*], с.221) $\Phi(x) \in \{\{\alpha, \beta\}\}$.

Теорема 3. *Для того чтобы функция $\Phi(z)$ удовлетворяла условиям 1), 2) теоремы 2, необходимо и достаточно, чтобы а) функция $\Phi(z)$, представимая интегралом*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2(\beta-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau)d\tau}{ch\frac{\pi}{\beta-\alpha}\left(\tau - z + i\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \tag{12}$$

с плотностью $U(x) \in L_2(\mathbb{R})$ или б) функция

$$\omega\left(\zeta\right) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}}\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln\zeta + i\alpha\right), \tag{13}$$

где ветви функций $\sqrt{\zeta}$ и $\ln\zeta$ определены и аналитичны на плоскости с разрезом $\arg\zeta = 0$, *на верхнем берегу разреза логарифм принимает вещественное, а квадратный корень — положительное значение, была представима интегралом типа Коши*

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty} \frac{\Omega(t)}{t-\zeta}dt, \quad \Omega(t) \in L_2(0,\infty). \tag{14}$$

или в) функция $\Psi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(a-\zeta)(\zeta-b)}}\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln\frac{a-\zeta}{\zeta-b} + i\frac{\beta+\alpha}{2}\right)$ была представима интегралом $\Psi(\zeta) = \frac{b-a}{2\pi}\int\limits_a^b \frac{w(t)dt}{(a+b)(t+\zeta)-2(ab+t\zeta)}$ с плотностью $w(t) \in L_2(a,b) \quad (a < b)$.

Обобщенная задача Карлемана. Постановка задачи [9].

Пусть заданы $A_k(x),\ k = 0, ..., m$ — непрерывные на сомкнутой вещественной оси $\mathbb{R}$ функции. Требуется найти функцию $\Phi(z) \in \{\{\alpha, \beta\}\}$ по краевому условию

$$K\Phi \equiv \sum_{k=0}^{m} A_k(x)\Phi(x + i\alpha_k) = G(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

где $\alpha = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq ... \leq \alpha_{m-1} \leq \alpha_m = \beta$ — вещественные числа.

Частным случаем (15) является краевая задача Карлемана для полосы $\alpha \leq \operatorname{Im} z \leq \beta$. Задача (15) является $m+1$-элементной (m-го порядка) со сдвигом во внутрь области аналитичности $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$. Это усложняет ее исследование по сравнению с двухэлементной задачей Карлемана, которая допускает решение в квадратурах.

Эквивалентное сингулярное уравнение на вещественной оси, полуоси и на конечном промежутке. Условие принадлежности функции $\Phi(z)$ пространству $\{\{\alpha, \beta\}\}$ является необходимым и достаточным для представления $\Phi(z)$ интегралом (12) с плотностью $U(t) \in L_2(\mathbb{R})$, при этом справедливы формулы типа Сохоцкого для предельных значений $\Phi(x + i\alpha)$ и $\Phi(x + i\beta)$. Используя эти результаты, задачу (15) можно заменить на эквивалентное сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{A_0(x) + A_m(x)}{2}U(x) + \frac{A_m(x) - A_0(x)}{2(\beta - \alpha)i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(\tau)d\tau}{sh\frac{\pi}{\beta-\alpha}(\tau - x)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k(x)}{2(\beta - \alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(\tau)d\tau}{ch\frac{\pi}{\beta-\alpha}(\tau - x) + iv_k sh\frac{\pi}{\beta-\alpha}(\tau - x)} = G(x), \tag{16}$$

где $\sigma_k = \cos\frac{\pi}{\beta-\alpha}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha_k\right)$, $v_k = \sin\frac{\pi}{\beta-\alpha}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha_k\right)$.

Сделав замену переменных $\tau = \frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln t$ и $x = \frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln\xi$ в (16) и положив $u(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}U\left(\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln t\right)$, получим

$$\frac{\alpha_0(\xi) + \alpha_m(\xi)}{2}u(\xi) + \frac{\alpha_m(\xi) + \alpha_0(\xi)}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{u(t)dt}{(t - \xi)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\alpha_k(\xi)}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{u(t)dt}{\sigma_k(t + \xi) + iv_k(t - \xi)} = g(\xi). \tag{17}$$

В (17) $\xi > 0$, $\alpha_k(\xi) = A_k\left(\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln\xi\right)$, $k = \overline{0, m}$ — непрерывные функции, $g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}}G\left(\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln\xi\right) \in L_2(0, +\infty)$. Согласно б) теоремы 3, решение $u(t)$ ищется в пространстве $L_2(0, +\infty)$. Последний интеграл можно переписать в виде

$$\Psi_k(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{u(t)dt}{\sigma_k(\tau + \xi) + iv_k(\tau + \xi)} = W_k\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{\infty}\frac{u(t)dt}{\tau - \xi}\right),$$

где $W_k\phi(t) = i(\sigma_k - iv_k)\phi(-[\sigma_k - iv_k]^2 t)$ — оператор взвешенного сдвига.

Для того, чтобы получить эквивалентное сингулярное уравнение на конечном промежутке, воспользуемся утверждением в) теоремы 3 (для случая $a = \alpha = -1$, $b = \beta = 1$, см. [10, 11]).

Если теперь в (16) сделать замену переменных, указанную в теореме, получим сингулярное уравнение относительно $w(t)$:

$$\frac{\alpha_0(\xi)+\alpha_m(\xi)}{2}w(\xi)+\frac{\alpha_m(\xi)+\alpha_0(\xi)}{2\pi i}\int_a^b\frac{w(t)dt}{(t-\xi)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\alpha_k(\xi)}{2\pi}\int_a^b\frac{(b-a)w(t)dt}{\sigma_k[(a+b)(t+\xi)-2(ab+t\xi)]+iv_k(b-a)(t-\xi)}=g(\xi),\ \ a<\xi<b,$$

где

$$a_k(\xi)=A_k\left(\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln\frac{a-\xi}{\xi-b}\right),\ k=\overline{0,m},\quad g(\xi)=\frac{G\left(\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln\frac{a-\xi}{\xi-b}\right)}{\sqrt{(a-\xi)(\xi-b)}}.$$

В симметричном случае $a=-1, b=1$ уравнение несколько упрощается

$$\frac{\alpha_0(\xi)+\alpha_m(\xi)}{2}w(\xi)+\frac{\alpha_m(\xi)+\alpha_0(\xi)}{2\pi i}\int_{-1}^1\frac{w(t)dt}{(t-\xi)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\alpha_k(\xi)}{2\pi}\int_{-1}^1\frac{w(t)dt}{\sigma_k(1-t\xi)+iv_k(t-\xi)}=g(\xi),\ \ |\xi|<1. \tag{18}$$

В таком виде уравнение (18) удобно использовать для приближенного решения. Интегральный оператор под знаком суммы представим в следующем виде (см. [12]):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w(t)dt}{\sigma_k(1-t\xi)+iv_k(t-\xi)}=\frac{1}{(iv_k-\sigma_k\xi)2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w(t)dt}{\left[t-\frac{iv_k\xi-\sigma_k}{iv_k-\sigma_k\xi}\right]}.$$

Полученный в [9] набор теорем, частных случаев точного решения, эквивалентных интегральных уравнений отражает первоначальный этап исследований более общих задач, сводящихся к подобным краевым задачам.

В 1972 г. Ю. И. Черский в течение нескольких месяцев был профессором кафедры вычислительной математики Ростовского государственного университета, а затем переехал в Симферополь, где стал профессором кафедры математического анализа Симферопольского государственного университета им. М. В. Фрунзе, а в 1973 г. возглавил новую кафедру дифференциальных и интегральных уравнений. В Симферополе Ю. И. Черский интенсивно работал над предпечатной подготовкой совместной с Ф. Д. Гаховым книги «Уравнения типа свертки» [43*]. На семинарах обсуждались результаты по новому подходу к теории обобщенных функций. Им был впервые изложен самый простой вариант теории обобщенных функций.

Такой подход позволил Ю. И. Черскому с достаточной полнотой решить задачу Римана в обобщенных функциях и ряд классов уравнений типа свертки [43*, 44*, 97*].

В семинарах Ю. И. Черского активно участвовали его ученики, студенты и сотрудники СГУ (А. В. Семенцов, В. А. Лукьяненко, В. В. Шевчик, А. И. Песчанский, Е. П. Белан, А. Д. Дерюгин, Л. М. Львовская и др.). После семинара обсуждение продолжалось на аллеях парка «Салгирка»: о новых классах уравнений типа свертки; о классах не нетеровых операторов, рассматриваемых как гомоморфизмы модулей; уравнения плавного перехода в шкалах обобщенных функций и т.п. Заметим, что изучение уравнения плавного перехода (8) в шкалах пространств обычных и обобщенных функций, в отличии от рассмотренных в таких шкалах уравнений типа свертки, уравнение (8) не имеет явно выраженной точки раздела двух условий, что приводит к некоторой специфике в исследовании (8) на разрешимость.

Следуя Ю. И. Черскому, выделим пространства основных и обобщенных функций. Для любых целых чисел $n \geq 0$, $m \geq 0$ рассмотрим пространство W_m^n основных функций $\omega(t)$, которые не только n раз дифференцируемы, но и достаточно быстро убывают на бесконечности:

$$\|\omega\|_{W_m^n} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| (t+i)^m \left(\frac{d}{dt} + 1 \right)^n \omega(t) \right|^2 dt \right)^{1/2}. \tag{19}$$

Через W_{-m}^{-n} обозначим построенное на W_m^n пространство обобщенных функций. С помощью преобразования Фурье и изучения возникающей краевой задачи Римана в работе [43*] исследовались уравнения типа свертки в пространствах обобщенных функций W_{-m}^{-n}. Там же приводятся исторические сведения. Зависимость разрешимости уравнений типа свертки в пространствах W_{-m}^{-n} от чисел m, n, не обязательно целых, исследовал В. В. Шевчик [15]. В работе В. А. Лукьяненко [14] приведено изучение уравнения плавного перехода в пространствах основных W_β^α и обобщенных функций $W_{-\beta}^{-\alpha}$ для произвольных вещественных чисел α, β. Свойства таких шкал позволяют свести разрешимость уравнения (8) в классе обобщенных функций $W_{-\beta}^{-\alpha}$ к изучению сопряженного уравнения в классе основных функций W_β^α для целых индексов. Так как исследование (8) в пространствах $W_{-\beta}^{-\alpha}$, при соответствующих ограничениях на ядра, может быть сведено к исследованию в пространстве $W_{-\beta}^0$, то отдельно рассматриваются уравнения (8) в $W_0^{-\alpha}$ и $W_{-\beta}^0$ (более сложный случай).

В 1977 г. Ю. И. Черский возглавил созданный в Институте прикладных проблем механики и математики АН УССР (г. Львов) отдел функционального анализа и интегральных уравнений, в котором сформировал творческий коллектив сотрудников, многие из которых впоследствии стали докторами наук. В этот период он руководил исследованиями в области теории сингулярных интегральных уравнений типа плавного перехода [47*-50*, 55*-61*], разработкой методов и алгоритмов анализа антенных решеток [52*, 54*], возглавлял научный семинар «Функциональный анализ и смежные вопросы» при Западном научном центре АН УССР. Его ученики А. В. Семенцов, В. А. Лукьяненко, В. В. Шевчик, А. И. Песчанский, В. А. Козицкий и Л. В. Гладун защитили диссертации на соискание степени кандидатов физико-математических наук.

В [16] выяснен характер разрешимости площадной задачи со сдвигом

$$G^{+}(z)\Phi^{+}(z+\beta i)-\lambda\Phi^{+}(z)=H^{+}(z)\ (\beta>0)$$

в классе Харди H_2 функций аналитических в верхней полуплоскости, и в некоторых случаях найдены решения этого уравнения в квадратурах.

На основании подхода, предложенного Ю. И. Черским, в работах [61*], [17]-[20] его ученика А. И. Песчанского исследованы интегральные и интегро-дифференциальные уравнения с криволинейными свертками на замкнутом контуре в комплексной плоскости. Для ряда уравнений, в частности, уравнения, содержащего гипергеометрическую функцию Гаусса в ядре

$$\frac{a(t)}{2\pi i}\int_{\Gamma}F\left(\alpha,1;\gamma;\frac{t}{\tau}\right)f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}+\frac{b(t)}{2\pi i}\int_{\Gamma}F\left(\alpha,1;\gamma;\frac{\tau}{t}\right)f(\tau)\frac{d\tau}{t}=g(t),$$

$$t\in\Gamma,\gamma>\alpha;\gamma,\alpha\neq 0,-1,-2,\dots$$

получены решения в замкнутой форме.

Результаты Ю.И.Черского нашли применение при решении систем интегральных уравнений для определения стационарного распределения вложенных цепей Маркова полумарковских процессов, которые используются при построении моделей теории надежности и систем массового обслуживания [21, 22].

Работу в академическом институте Юрий Иосифович по-прежнему совмещал с преподавательской деятельностью. Он руководил дипломными и курсовыми работами студентов математического факультета Львовского университета, производственной практикой студентов Симферопольского университета, читал лекции для членов Малой академии наук «Эврика».

В 1983 г. Ю. И. Черский вновь приехал в Одессу и до 1990 г. возглавлял кафедру высшей математики Одесского института инженеров морского флота, а затем был профессором этой же кафедры. Здесь он подготовил кандидатов физико-математических наук Ю. А. Григорьева и А. Л. Комарницкого. Из множества работ Ю. И. Черского выделим класс экстремальных задач для уравнений типа свертки, аналитических функций, уравнений Лапласа в полупространстве, для нетеровых операторов [64*-66*, 69*, 75*, 84*, 87*-89*, 95*, 96*], которые находят применения в задачах математической физики, некорректных задачах. Учебные пособия по аналитическим методам решения экстремальных задач, ляпуновским экстремальным задачам [71*, 72*] используются в ряде университетов.

С 1995 г. Юрий Иосифович — профессор Одесской государственной академии строительства и архитектуры, где возглавил и проводил межвузовский научный семинар.

Ю. И. Черским получены значительные результаты в теории интегральных уравнений типа свертки с привлечением общей теории операторов Нетера, а также установлена связь этих уравнений с сингулярными интегральными уравнениями с ядром Коши. При решении уравнений типа свертки им использовались интегральное преобразование Фурье и Меллина, решение методом факторизации и неполной факторизации соответствующих краевых задач теории аналитических функций, разработан метод поэтапного решения [48*, 95*].

С помощью краевой задачи Карлемана для полосы с линейным сдвигом Юрий Иосифович решил новое интегральное уравнение плавного перехода, имеющее важные приложения на практике. Он также внес вклад в построение теории бесконечных алгебраических систем с дискретными свертками и дискретно-непрерывных систем [79*, 91*].

Ю. И. Черскому удалось впервые сконструировать и решить уравнения с переменными коэффициентами и свертками более общего вида, чем интеграл типа Коши, тем самым обобщив сингулярные интегральные уравнения. Он ввел в рассмотрение и решил близкие по характеру уравнение с аналитическими ядрами и уравнение, сводящееся к задаче Карлемана. Обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, обобщенное гиперболическое, а также дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом [41*], которые приводят к задаче Карлемана получили дальнейшее развитие (см. [97*]).

Ю. И. Черский исследовал общее сингулярное уравнение в банаховом пространстве, обобщив впервые рассмотренные З. И. Халиловым абстрактные сингулярные уравнения. Он решил абстрактное сингулярное уравнение, а затем и абстрактную задачу Римана в произвольном линейном пространстве при любом индексе.

В фундаментальном анализе актуальной является задача построения функций от оператора. Задача решена для функции $f(\sigma)$ аналитической в области, содержащей спектр оператора A. Хорошо известен случай, когда A — самосопряженный оператор (спектр расположен на вещественной оси), а функция $f(\sigma)$ в определенном смысле интегрируема. Черским Ю. И. предложен способ построения (неаналитический вообще говоря) функции от оператора A с помощью преобразования Фурье, а также новый способ построения (неаналитической) функции от оператора, спектр которого располагается на контуре в комплексной плоскости (см. [97*, гл. 15]). Материал, посвященный конструированию и решению уравнений [90*, 92*, 97*] отражен в публикациях лишь частично.

Перспективным является направление базирующееся на определении оператора от оператора. Здесь Юрий Иосифович использовал аналитически зависящий от комплексного параметра линейный оператор в банаховом пространстве и определил оператор от оператора, аналогично определению аналитической функции от оператора. Имея решение линейного уравнения можно выбрать подходящий линейный оператор, чтобы сконструировать и автоматически решить более сложное уравнение или систему уравнений.

Также Ю. И. Черский решил важную экстремальную задачу с двумя линейными функционалами в виде n-мерных интегралов, один из которых минимизируется, а величина другого задана при условии, что функция-решение должна быть неотрицательной. Это позволяет найти решение аналогичной задачи, где с искомой функции снято условие неотрицательности и она взята по модулю в одном из интегралов. Юрий Иосифович предложил новую экстремальную задачу, имеющую много приложений, и назвал её «взаимной» [88*].

Ю. И. Черский впервые поставил и изучил важные для приложений экстремальные задачи с искомыми областями интегрирования. Также он предложил «комплексный вариант метода Лагранжа», с помощью которого экстремальные задачи в комплексных пространствах можно свести к вещественным, тем самым сохраняя для комплексного случая полную аналогию с вещественным случаем. На этом пути Ю. И. Черским поставлены и решены новые экстремальные задачи с искомыми аналитическими функциями, которые обобщают такие важные задачи теории аналитических функций, как задачи Римана, Карлемана, Гильберта, Газемана. Большое внимание Юрий Иосифович уделил приложениям теории экстремальных задач к задачам прогнозирования, интерполированния и фильтрации случайных процессов [97*, гл. 13].

Характеризуя научное творчество Ю. И. Черского в целом, следует отметить его отличительную черту — приоритет конструктивного направления над теоретическим при доказательстве существования решения задач и построении алгоритмов их решения.

Несомненно, научное наследие Ю. И. Черского послужит отправной точкой для многих будущих исследований. В 2019 г. планируется проведение международной конференции посвященной памяти Юрия Иосифовича Черского.

Список опубликованных работ Ю. И. Черского

1*. О некоторых особых интегральных уравнениях // Учен. зап. Казан. ун-та. — 1953. — Т. 113, кн. 10. — С. 43-55.

2*. Интегральные уравнения типа свертки / соавт. Ф. Д. Гахов // Докл. АН. — 1954. — Т. 99, № 2. — С. 197-199.

3*. Особые интегральные уравнения типа свертки и площадная задача типа задачи Римана / соавт. Ф. Д. Гахов // Учен. зап. Казан. ун-та. — 1954. — Т. 114, кн. 8. — С. 21-33.

4*. Интегральные уравнения типа свертки: автореф. дис. ... кандидата физ.-мат. наук. — Тбилиси, 1956.

5*. Интегральные уравнения типа свертки // Тр. III Всесоюз. мат. съезда. Москва, июнь-июль 1956 г. — М., 1956. — Т. 1. — С. 70-71.

6*. Особые интегральные уравнения типа свертки / соавт. Ф. Д. Гахов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1956. — Т. 20, № 1. — С. 33-52.

7*. Случай полубесконечного промежутка. Примеры. Более общие уравнения // Курс высшей математики / В. И. Смирнов. — М., 1957. — Т. 4, ч. 1. — С. 193-201; Там же. — 6-е изд., перераб. и доп. — М., 1974. — С. 185-188.

8*. О сведении смешанных граничных задач к краевой задаче Римана // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 116, № 6. — С. 927-929.

9*. Общее сингулярное уравнение и уравнения типа свертки // Мат. сб. — 1957. — Т. 41, № 3. — С. 277-296.

10*. Об уравнениях типа свертки // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1958. — Т. 22, № 3. — С. 361-378.

11*. К решению краевой задачи Римана в классах обобщенных функций // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 500-503.

12*. Вопросы, связанные с приведением граничных задач для дифференциальных уравнений к задаче Римана // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного: сб. ст. — М., 1961. — С. 389–391.

13*. Задачи математической физики, сводящиеся к задаче Римана: (обзор. докл.) // Всесоюзное совещание по применению методов теории функций комплексного переменного к задачам математической физики: тез. докл. Тбилиси, 20-27 февр. 1961 г. — Тбилиси, 1961. — С. 61-68.

14*. Сведение периодических задач математической физики к особым уравнениям с ядром Коши // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 140, № 1. — С. 69-72.

15*. Задачи математической физики, сводящиеся к задаче Римана // Тр. Тбил. мат. ин-та. — 1962. — Т. 28. — С. 209-246.

16*. Уравнения типа свертки в классе функций со степенным ростом // Тез. докл. 1-й науч. сессии Сев.-Кавказ. совета. — Новочеркасск, 1962. — С. 22-23.

17*. Две теоремы об оценке погрешности и некоторые их приложения // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 150, № 2. — С. 271-274.

18*. К общей теории приближенных методов // Науч. сообщ. за 1962 год. Сер. точных и естеств. наук / Ростов. ун-т. — Ростов н/Д, 1963. — С. 13.

19*. Интегральные уравнения типа свертки и некоторые их приложения: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Тбилиси, 1964. — 15 с.

20*. Дослідження з теорії функцій та рівнянь в частинних похідних // Ювт. наук. сес., присвяч. 100-річчю ОДУ. Фіз.-мат. науки, астрономія, географія, геологія: (тез. доп.). Одеса, 26-27 трав. 1965 р. — О., 1965. — С. 26-30.

21*. Теорема об оценке погрешности // Науч. конф., посвящ. столетию университета. Мех.-мат. фак.: тез. докл. Одесса, 20-24 сент. 1965 г. — О., 1965. — С. 21-22.

22*. Задача сопряжения в одном классе обобщенных функций // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20, вып. 5. — С. 246-250.

23*. К решению смешанных задач для уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1965. — Т. 1, № 5. — С. 647-662.

24*. Об интегро-дифференциальном уравнении Винера-Хопфа и его приложениях // Изв. вузов. Математика. — 1965. — № 2. — С. 188-200.

25*. К теории уравнений типа Винера-Хопфа // Тез. кратких науч. сообщ. Секция 5. Функц. анализ: [Междунар. мат. конгр.]. Москва, 16-26 авг. 1966 г. — М., 1966. — С. 81-82.

26*. Про наближене рішення ітегральних рівнянь // XXI наук. конф. мех.-мат., фіз. та хім. ф-ів Одес. ун-ту. Одеса, 15-20 шт. 1966 р.: тези доп. — О., 1966. — С. 11-13.
27*. Про наближене розв'язання рівняння Вінера-Хопфа першого роду // Доп. АН УРСР. — 1966. — № 8. — С. 992-995.
28*. Приближенное решение уравнения Винера-Хопфа в одном исключительном случае // Дифференц. уравнения. — 1966. — Т. 2, № 8. — С. 1093-1100.
29*. Краевые задачи со специальным сдвигом, разрешимые в квадратурах // Вторая респ. конф. математиков Белоруссии: тез. докл. Минск, 27-30 июля 1967 г. — Минск, 1967. — Ч. 2. — С. 57-59.
30*. Задача сопряжения на двулистной поверхности // Мат. исследования. — Кишинев, 1968. — С. 139-149.
31*. О методе неполной факторизации // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 189, № 1. — С. 53-56.
32*. Интегральные уравнения с ядрами, зависящими от разности аргументов // История отечественной математики. — К., 1970. — Т. 4, кн. 1: 1917-1967. — С. 789-797.
33*. Задача сопряжения трех аналитических функций / соавт. М. Я. Курганская // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 195, № 4. — С. 765-768.
34*. Нормально разрешимое уравнение плавного перехода // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 190, № 1. — С. 57-60.
35*. Метод неполной факторизации // Тр. семинара по краевым задачам. — Казань, 1970. — Вып. 7. — С. 293-296.
36*. О хороших и плохих слонах // Наука и жизнь. — 1970. — № 2. — С. 131-134.
37*. Бесконечная алгебраическая система плавного перехода // Третья респ. конф. математиков Белоруссии: тез. докл. Минск, 4-7 июня 1971 г. — Минск, 1971. — Ч. 1. — С. 57-59.
38*. Граничные задачи и интегральные уравнения, решаемые методом факторизации // Симпозиум по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа: аннот. докл. Тбилиси, 23-29 сент. 1971 г. — Тбилиси, 1971. — С. 49-50.
39*. Граничные задачи и интегральные уравнения, решаемые методом факторизации // Тр. симп. по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. Тбилиси, 23-29 сент. 1971 г. — Тбилиси, 1974. — Т. 2. — С. 281-291.
40*. Исключительный случай одного обыкновенного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения и их приложения: сб. науч. работ. — Д., 1975. — Вып. 3. — С. 154-160.
41*. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, приводящиеся к задаче Карлемана / соавт. В. А. Лукьяненко // IV Всесоюз. конф. по дифференц. уравнениям с отклоняющимся аргументом: тез. докл. — К., 1975. —С. 244-245.
42*. Федор Дмитриевич Гахов: (к семидесятилетию со дня рождения) / соавт.: Г. С. Литвинчук, Л. Г. Михайлов, Б. В. Хведелидзе // Успехи мат. наук. — 1976. — Т. 31, вып. 4. — С. 288-297.

43*. Уравнения типа свертки / соавт. Ф. Д. Гахов. — М.: Наука, 1978. — 295 с.

44*. О близости нелинейных операторов // Интегро-дифференциальные уравнения и их приложения. — Фрунзе, 1978. — Вып. 1. — С. 83-84.

45*. Интегральные преобразования и задачи теории функций комплексных переменных // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1979. — № 2. — С. 97-99.

46*. Об операторах сдвига в теории обобщенных функций // Мат. методы и физ.-мех. поля: респ. межвед. сб. — К., 1979. — Вып. 10. — С. 3-7.

47*. Интегральные уравнения, сводящиеся к двум задачам Римана // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 248, № 4. — С. 802-805.

48*. Метод поэтапного разделения переменных // Мат. методы и физ.-мех. поля: респ. межвед. сб. — К., 1980. — Вып. 12. — С. 10-14.

49*. Интегральные уравнения, разрешимые в квадратурах // V Респ. конф. математиков Белоруссии: тез. докл. Гродно, 29-30 окт. 1980 г. — Гродно, 1980. — Ч. 2. — С.*

50*. Сингулярное интегральное уравнение со сдвигом // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1980. — № 12. — С. 15-18.

51*. Федор Дмитриевич Гахов: (некролог) // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1980. — № 4. — С. 130-132. — Некролог подписали также: А. А. Килбас, О. И. Маричев, М. Д. Мартыненко, В. С. Рогожин, С. Г. Самко, А. С. Феденко, В. И. Азаматова, Г. С. Литвинчук, И. Б. Симоненко.

52*. К теории моделирования протяженных периодических систем / соавт. А. Ф. Чаплин // Электрон. моделирование. — 1981. — № 5. — С. 3-6.

53*. Федор Дмитриевич Гахов: (некролог) // Успехи мат. наук. — 1981. — Т. 36, вып. 1. — С. 193-194. — Некролог подписали также: Н. П. Векуа, Г. С. Литвинчук, С. М. Никольский, В. С. Рогожин, С. Г. Самко, И. Б. Симоненко, Б. В. Хведелидзе.

54*. К решению задач дифракции на протяженных периодических структурах / соавт.: А. Ф. Чаплин, С. П. Винковский // VIII Всесоюз. симп. по дифракции и распространению радиоволн: крат. тез. докл. — 1981. — Т. 1. — С. 50-53.

55*. Интегральные уравнения в свертках с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн. — 1981. — Т. 33, № 6. — С. 793-799.

56*. К решению некоторых линейных интегральных уравнений // Третий респ. симп. по дифференциальным и интегральным уравнениям: тез. докл. Одесса, 1-3 июня 1982 г. — О., 1982. — С. 197-198.

57*. К решению интегральных уравнений в квадратурах // Мат. методы и физ.-мех. поля: респ. межвед. сб. — К., 1982. — Вып. 15. — С. 3-5.

58*. Интегральное уравнение, обратное уравнению Винера-Хопфа, и его дискретный аналог // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1982. — № 6. — С. 29-31.

59*. Уравнения с периодическими сингулярными свертками // Сообщения АН ГССР. — 1982. — Т. 106, № 3. — С. 481-484.

60*. Разрешимое в квадратурах сингулярное интегральное уравнение со сдвигом и разрывными коэффициентами / соавт. Л. В. Гладун // Мат. методы и физ.-мех. поля: респ. межвед. сб. науч. тр. — К., 1984. — Вып. 19. — С. 26-29.
61*. Интегральное уравнение с криволинейными свертками на замкнутом контуре / соавт. А. И. Песчанский // Укр. мат. журн. — 1984. — Т. 36, № 3. — С. 335-340.
62*. Алгоритмы итерационных методов // Мат. методы и физ.-мех. поля: респ. межвед. сб. науч. тр. — К., 1985. — Вып. 21. — С. 19-23.
63*. Уравнения, разрешимые в квадратурах // Науч. тр. юбил. семинара по краевым задачам, посвящ. 75-летию со дня рождения акад. АН БССР Ф. Д. Гахова. — Минск, 1985. — С. 120-128.
64*. Экстремальные краевые задачи теории аналитических функций // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1985. — № 10. — С. 18-21.
65*. Экстремальная задача для уравнения Лапласа в полупространстве // Динамические системы: респ. межвед. науч. сб. — К., 1987. — Вып. 6. — С. 101-103.
66*. Приложение комплексного анализа к экстремальным задачам математической физики // Современные проблемы математической физики: тр. Всесоюз. симп. Тбилиси, 22-25 апр. 1987 г. — Тбилиси, 1987. — Т. 2. — С. 134-141.
67*. Многомерное парное уравнение на согласованных множествах // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1988. — № 6. — С. 25-26.
68*. Разрешимость и аналитическое решение многомерных уравнений типа свертки / соавт.: А. Л. Комарницкий, Ю. А. Григорьев // Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики. — Тбилиси, 1988. — Т. 3, № 1. — С. 190-193.
69*. Экстремальные задачи для нетерова оператора // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов: сб. науч. тр. — К., 1989. — С. 196-200.
70*. Многомерное парное уравнение типа свертки и его транспонированное // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, № 5. — С. 897-901.
71*. Аналитическое решение экстремальных задач: практикум / Одес. ин-т инженеров мор. флота. — О., 1990. — 54 с.
72*. Ляпуновские экстремальные задачи и их приложения. — Львов: ИППММ, 1990. — 55 с.
73*. An Expansion of the Theory of Equations of Convolution Type // International Workshop on Operator Theory and Applications IWOTA 95: Final Programme and Book of Abstracts. Regensburg, July 31 — Aug. 4, 1995. — Regensburg, 1995. — P. 24.
74*. Интегральное представление аналитической функции в кольце и его приложение / соавт. П. В. Керекеша // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 3. — С. 322-329.
75*. Экстремальные задачи, родственные парным уравнениям // Вторая крым. мат. шк. «Метод функций Ляпунова и его приложения»: тез. докл. Алушта, 1-7 окт. 1995 г. — Симф., 1995. — С. 66.

76*. Интегральное уравнение типа свертки с экспонентой в ядре // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, № 1. — С. 1566-1567.
77*. Про деякі двохвимірні крайові задачі / у соавт. М. С. Коверний // Сьома міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: матеріали конф. Кив, 14-16 трав. 1998 р. — К., 1998. — С. 216.
78*. Сумісна аналітичність оригіналу та образу Фур'є // Сьома міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: матеріали конф. Кив, 14-16 трав. 1998 р. — К., 1998. — С. 521.
79*. Дискретно-непрерывная система уравнений свертки // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 10. — С. 81-82.
80*. Об аналитичности Фурье-оригинала и Фурье-образа внутри противолежащих углов // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, № 5. — С. 703-707.
81*. Один итерационный алгоритм // Восьма міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: тези доп. Київ, 11-14 трав. 2000 р. — К., 2000.*
82*. Экстремальная задача с оператором Винера-Хопфа // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 10. — С. 1434-1435.
83*. Сингулярное интегральное уравнение на удвоенном контуре // Міжнар. конф. «Диференціальні та інтегральні рівняння»: тези доп. Одеса, 12-14 жовт. 2000 р. — О., 2000. — С. 293.
84*. Экстремальная задача, возникшая из уравнения Винера-Хопфа // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 8. — С. 1144-1147.
85*. On Equality Between Integral and Series // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений АМАДЕ: тез. докл. междунар. конф. Минск, 15-19 февр. 2001 г. — Минск, 2001. — С. 175-176.
86*. Обобщение метода секущих // Дев'ята міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: тези доп. Кив, 16-19 трав. 2002 р. — К., 2002.*
87*. On Mutual Extremal Problem // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений АМАДЕ: тез. докл. междунар. конф. Минск, 4-9 сент. 2003 г. — Минск, 2003.*
88*. Теорема о взаимных экстремальных задачах и одно ее применение // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. — Чернівці, 2004. — Вип. 11. — С. 196-200.
89*. Экстремальная задача с сингулярным решением // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. — Чернівці, 2004. — Вип. 11. — С. 200-203.
90*. Конструирование и решение некоторых линейных уравнений // Десята міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: тези доп. Кив, 13-15 трав. 2004 р. — К., 2004. — С. 550.
91*. Система интегральных уравнений, содержащая периодические функции // Интегральные уравнения и их применения: тез. докл. междунар. конф. Одесса, 29 июня — 4 июля 2005 г. — О., 2005. — С. 157.
92*. Одно интегральное уравнение в пространстве векторных функций // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. — Чернівці 2005. — Вип. 12. — С. 322-325.

93*. Две задачи направления Ф. Д. Гахова // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений АМАДЕ: тез. докл. междунар. конф., посвящ. 100-летию акад. Ф. Д. Гахова (1906-1980). Минск, 13-19 сент. 2006 г. — Минск, 2006. — С. 141.

94*. Новый вид двумерных парных уравнений // Дванадцята мiжнар. наук. конф. iм. акад. М. Кравчука: тези доп. Кив, 1517 трав. 2008 р. — К., 2008. — С. 430.

95*. Поэтапное решение некоторых экстремальных задач // Тр. XIV Междунар. симп. «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». — X.; Херсон, 2009.*

96*. Экстремальные задачи с квадратичным функционалом и условием ляпуновского типа / соавт. О. Н. Яковлева // Вюн. Харк. нац. ун-ту. Сер. «Мат. моделювання. iнф. технологи. Автоматизованi системи управлiня». — 2009. — № 847. — С. 339-344.

97*. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / соавт. П. В. Керекеша, Д. П. Керекеша. — Одесса: Астропринт, 2010. — 552 с.

98*. Cherskii Yu.I., Gakhov F. D. Baundary value problems. — Daver Publications Inc., New York, 1990.

Список цитируемых источников

1. *Юрий Иосифович Черский.* — Библиографический указатель / Научный редактор Г. С. Полетаев. — Составитель И. Э. Рикун. — Ученые записки Одессы. Серия основана в 1957 году. Вып. 41. — Одесса: ОННБ им. М. Горького, 2009. — 30 с.
2. *Koiter W. T.* Approximate solution of Wiener-Hopf type integral equations with applications, I-III, Konikl. Ned. Akad. Wetensohap. Proc., B. 57 (1954). — P. 558-579.
3. *Симоненко И. Б.* Краевая задача Римана с измеримыми коэффициентами // ДАН СССР. — 1960. — Т.135, №3. — С. 538-541.
4. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УММ. — 13, № 5 (83). — С. 3-120.
5. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. — М.: Наука, 1977. — 448 с.
6. *Рогожин В. С.* Краевая задача Римана в классе обобщенных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1964. — Т.28, №6. — С. 1325-1344.
7. *Дыбин В. Б.* Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки в классе обобщенных функций // ДАН СССР. — 1965. — Т.161, №4. — С. 753-756.
8. *Дыбин В. Б., Карапетянц Н. К*. Об интегральных уравнениях типа свертки в классе обобщенных функций // Сиб. матем. ж. — 1965. — №3. — С. 531-545.
9. *Лукьяненко В. А.* Обобщенная краевая задача Карлемана // Динамические системы. — 2005. — вып.19. — С. 129-144.
10. *Василевский Н. Л., Карелин А. А., Керекеша П. В., Литвинчук Г. С.* Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с инволюцией и его применениях в теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т.13, №9. — С. 1692-1700.

11. *Василевский Н. Л., Карелин А. А., Керекеша П. В., Литвинчук Г. С.* Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с инволюцией и его применениях в теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т.13, №11. — С. 2051-2061.
12. *Дудучава Р. В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. — Тбилиси: Мицниереба, 1979.
13. *Лукьяненко В. А.* Дифференциально-разностное уравнение типа плавного перехода в особом случае // Таврический вестник информатики и математики. — 2000. — №1. — С. 104-113.
14. *Лукьяненко В. А.* Уравнения плавного перехода в семействе пространств обобщенных функций. // Таврический вестник информатики и математики. — 2005. — №2. — С. 90-106.
15. *Шевчик В. В.* Интегральные уравнения типа свертки в семействе пространств обобщенных функций, непрерывно зависящих от параметра. // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т. 14, №11. — С. 2060-2064.
16. *Песчанский А. И., Шевчик В. В.* О площадной задаче со сдвигом // Мат. методы и физ.-мех. поля: респ. межвед. сб. — Вып.15. — С. 39-43.
17. *Песчанский А. И.* Интегральное уравнение с сингулярными свертками. // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1981. — №10. — С. 15-18.
18. *Песчанский А. И.* Интегральные уравнения с сингулярными криволинейными свертками. // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, №11. — С. 2007-2009.
19. *Песчанский А. И.* Интегро-дифференциальное уравнение с гипергеометрическими функциями. // Сооб. АН ГрССР. — 1986. — Т. 121. — №7. — С. 469-472.
20. *Песчанский А. И.* Об описании пространства дробных интегралов типа криволинейной свертки. // Изв. вузов. Математика. — 1989. — №7. — С. 29-39.
21. *Коновалюк В. С.* Двухканальная система с зависимыми отказами. // Кибернетика. — 1981. — №6. — С. 81-87.
22. *Peschansky A. I.* Semi-Markov Models of One-Server Loss Queues with Recurrent Input / Germany: LAP LAMPERT Academic Publishing, 2013. — 138 p.
23. *Памяти Бориса Ивановича Рухлина*. [Электронный ресурс] — Режим доступа: http://vestnik.od-ua.com/all-numbers/5265/reporter-31

Получена 02.06.2016