

УДК 539.3

# О регулярности бесконечных систем для установившихся колебаний изотропных прямоугольных призм

В. Н. Чехов, А. В. Пан

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007. E-mail: chekhov40@mail.ru, a-r-s-e-n@inbox.ru

**Аннотация.** Получено новое аналитическое представление решения для установившихся вынужденных колебаний прямоугольной призмы, которое позволяет элементарно оценить регулярность соответствующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений и найти суммы всех бесконечных рядов для напряженного состояния призмы. Предлагается метод вычисления собственных частот призмы посредством оценки регулярности бесконечных систем алгебраических уравнений при последовательном исключении первых неизвестных. В качестве примера вычислены несколько первых собственных частот для призмы с квадратным основанием.

**Ключевые слова:** установившиеся колебания, метод суперпозиции, регулярная бесконечная система линейных алгебраических уравнений, собственные частоты прямоугольной призмы, аналитическое представление решения.

## On regularity of infinite systems for steady-state oscillations of isotropic rectangular prisms

V. N. Chekhov, A. V. Pan

V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** A new analytical presentation of the solution for steady-state oscillations of a rectangular prism is found. This analytical presentation allows elementary to evaluate the regularity corresponding infinite system of linear algebraic equations and to find the analytical sums for the all infinite series in the stress state of the prism. A method for calculating the natural frequencies of the prism through the assessment of regularity of infinite systems of algebraic equations at sequential elimination the first unknowns is proposed. As an example the first few natural frequencies for the prism with a square base have been calculated.

**Keywords:** steady-state oscillations, superposition method, regular infinite system of linear algebraic equations, eigenvalues of a prism, analytical solution

**MSC 2010:** 74G10, 74G30, 74G40, 74G45

### 1. Введение

Прямоугольные пластинки и призмы являются одними из наиболее распространенных элементов конструкций в машиностроении и в строительстве. Результаты исследований динамического поведения тонких пластин и прямоугольных

призм представлены в работах [2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 12]. Наиболее полно они исследованы вариационным методом Рэлея - Ритца [9, 12]. Довольно много исследователей применяют разные варианты метода суперпозиции [2, 3, 6, 7, 10, 11], который в классическом варианте, включая задачи статики, приводит к оценкам решений бесконечной системы линейных алгебраических уравнений [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16]. В статике для изгиба прямоугольных пластин удачный вариант метода суперпозиции был предложен С. П. Тимошенко еще в 1939 году [6, 7, 16]. Эффективность его в статике связана [13, 14] с удачной идеей использовать аналитические частные решения, получаемые методом Леви для шарнирно опертой прямоугольной пластины. В большой степени на распространение этого варианта повлияло и существование нулевого предела для решения соответствующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Радующая пользователей «практическая» сходимость метода простой редукции привела к игнорированию теории бесконечных систем уравнений. К этому варианту метода суперпозиции стали относиться как к вариационному методу Рэлея - Ритца, подтверждая его достоверность сравнениями с решениями по методу Рэлея - Ритца. Однако, «практическая» сходимость бесконечных рядов относится только к прогибам пластины. Для подсчета напряжений и поперечных усилий ряды для прогибов необходимо дифференцировать 2-3 раза. И это заметно увеличивает погрешности в величинах напряжений и поперечных усилий. Теория бесконечных систем линейных алгебраических уравнений позволяет исправить уменьшение точности из-за дифференцирования рядов Фурье. Существует другой вариант метода суперпозиции [2, 3, 5, 13], в котором решение бесконечной системы стремится к ненулевой постоянной. Это свойство позволяет достаточно точно оценить предел решения бесконечной системы и аналитически просуммировать все ряды Фурье. Дифференцирование сумм рядов Фурье в отличие от почленного дифференцирования не увеличивает погрешности.

## 2. Постановка задачи об установившихся вынужденных колебаниях призмы

В рамках математической модели плоской деформации задача об установившихся вынужденных колебаниях упругой изотропной прямоугольной призмы приводится к краевой задаче для векторного дифференциального уравнения Навье в области прямоугольника (рис. 1).

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\nu} \text{grad div} \mathbf{u} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\rho$  — плотность материала;  $\mu$  — модуль сдвига;  $\mathbf{u} = \tilde{u}(x, y, t)\mathbf{i} + \tilde{v}(x, y, t)\mathbf{j}$  — вектор смещений;  $\Delta$  — двумерный оператор Лапласа. Безразмерные координаты  $x, y$  связаны с прямоугольными декартовыми координатами:  $x = X/h, y = Y/h$ . Здесь  $2h$  — длина основания призмы, параметры  $a$  и  $b$  — стороны прямоугольного основания ( $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$ ).

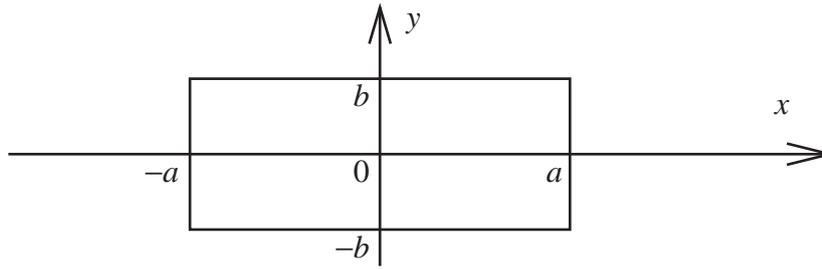


Рис. 1.

Для уменьшения громоздкости выкладок рассмотрим только симметричное относительно двух осей координат деформированное состояние и только нулевые касательные напряжения на границе. Граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx}|_{x=\pm a} &= \mu f(y) \sin \omega t; & \tilde{\sigma}_{xy}|_{x=\pm a} &= 0; \\ \tilde{\sigma}_{yy}|_{x=\pm b} &= \mu f(x) \sin \omega t; & \tilde{\sigma}_{xy}|_{y=\pm b} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

С помощью потенциалов Ламе [9]:

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}; \quad \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \quad (2.3)$$

векторное уравнение (2.1) заменяется двумя волновыми уравнениями

$$\Delta \tilde{\phi} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2}; \quad \Delta \tilde{\psi} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

где  $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ;  $c_1 = c_2 \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}}$  — скорости поперечных и продольных волн. Для установившихся колебаний вводим амплитудные функции потенциалов Ламе:

$$\tilde{\phi} = \phi(x, y) \sin \omega t; \quad \tilde{\psi} = \psi(x, y) \sin \omega t. \quad (2.5)$$

Тогда волновые уравнения (2.4) преобразуются в дифференциальные уравнения Гельмгольца

$$\Delta \phi + \Omega_1^2 \phi = 0; \quad \Delta \psi + \Omega_2^2 \psi = 0, \quad (2.6)$$

где

$$\Omega_2 = \frac{\pi}{2} \Omega; \quad \Omega_1 = \frac{\pi}{2} \Omega \sqrt{\frac{1-2\nu}{2-2\nu}}.$$

$$\text{Здесь } \Omega = \frac{2 \omega h}{\pi c_2} \quad (2.7)$$

безразмерный параметр заданной частоты вынужденных колебаний.

Выражения амплитудных функций напряжений выводятся из закона Гука для плоской деформации:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xy}}{\mu} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2\mu} &= \frac{1}{1 - 2\nu} \Delta \phi; \\ \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\mu} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Граничные условия (2.2) для напряжений преобразуются в граничные условия для амплитудных значений напряжений:

$$\sigma_{xy}|_{x=\pm a} = 0; \quad \sigma_{xy}|_{y=\pm b} = 0. \quad (2.9)$$

$$\sigma_{xx}|_{x=\pm a} = \mu f(y); \quad \sigma_{yy}|_{y=\pm b} = \mu g(x). \quad (2.10)$$

Задача об установившихся колебаниях свелась к краевой задаче (2.6), (2.9), (2.10).

### 3. Аналитическое представление решений и элементарные собственные формы

Ограничиваясь для простоты выкладок чётными как по  $x$ , так и по  $y$  смещениями, выпишем следующее частное решение задачи (2.6), (2.9):

$$\begin{bmatrix} \phi^* \\ \psi^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \Omega_1 y}{\Omega_1 \sin(\Omega_1 b)} - \frac{\cos \Omega_1 x}{\Omega_1 \sin(\Omega_1 a)} \\ \frac{\sin \frac{\Omega_2 x}{\sqrt{2}} \sin \frac{\Omega_2 y}{\sqrt{2}}}{\sin \frac{\Omega_2 a}{\sqrt{2}} \sin \frac{\Omega_2 b}{\sqrt{2}}} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

С помощью разложений в ряды Фурье можно получить следующие тождества в области прямоугольного основания призмы:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} \frac{2}{q_{1n} b \operatorname{ch}(q_{1n} a)} \cos \beta_n y \\ -\frac{\operatorname{sh} q_{2n} x}{\beta_n^2 + q_{2n}^2 b \operatorname{sh}(q_{2n} a)} \sin \beta_n y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{p_{1n} a \operatorname{ch}(p_{1n} b)} \cos \alpha_n x \\ \frac{\operatorname{sh} p_{2n} y}{\alpha_n^2 + p_{2n}^2 a \operatorname{sh}(p_{2n} b)} \sin \alpha_n x \end{bmatrix} \right) \equiv \\ & \equiv \begin{bmatrix} -\phi^* \\ \left\{ \begin{array}{l} \psi^*, \quad |x||y| < ab; \\ 0, \quad |x| = a \text{ и } |y| = b \end{array} \right. \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$  и  $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$ .

Поскольку каждый член ряда в (3.2) является точным решением задачи (2.6), (2.9), общий вид решения задачи (2.6), (2.9) образуем в форме линейных комбинаций этих точных решений с неопределенными множителями  $x_n, y_n$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} &= y_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1 a} \frac{\cos \Omega_1 y}{\sin(\Omega_1 b)} \\ 0 \end{bmatrix} - x_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1 b} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin(\Omega_1 a)} \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \begin{bmatrix} \frac{2}{q_{1n} b} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{2n} x} \frac{\cos \beta_n y}{4\beta_n} \\ -\frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{\beta_n} \frac{b \operatorname{sh}(q_{2n} a)}{\operatorname{sh} p_{2n} y} \sin \beta_n y \end{bmatrix} - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \begin{bmatrix} \frac{2}{p_{1n} a} \frac{\operatorname{ch}(p_{1n} b)}{\operatorname{sh} p_{2n} y} \frac{\cos \alpha_n x}{4\alpha_n} \\ \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{\alpha_n} \operatorname{ash}(p_{2n} b) \sin \alpha_n x \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $p_{ln}^2 = \alpha_n^2 - \Omega_l^2, q_{ln}^2 = \beta_n^2 - \Omega_l^2$  ( $l = 1, 2$ ). Из-за тождества (3.2) представление решения (3.3) в частном случае равенства всех неопределенных коэффициентов единице ( $x_n = y_n = 1$ ) принимает внутри прямоугольной области элементарный вид:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi^* \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Согласно зависимостям (2.8), частному решению (3.1) отвечают амплитуды напряжений:

$$\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = \mu \Omega_2^2 \frac{\cos(\Omega_2 x / \sqrt{2}) \cos(\Omega_2 y / \sqrt{2})}{\sin \frac{\Omega_2 a}{\sqrt{2}} \sin \frac{\Omega_2 b}{\sqrt{2}}}; \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (3.5)$$

Полагая граничные (при  $x = a$  и при  $y = b$ ) значения напряжений (3.5) нулевыми, получаем, что это возможно только для дискретных значений параметра  $\Omega$  и отношения сторон основания призмы:

$$\Omega = (2m - 1)\sqrt{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots); \quad \frac{b}{a} = \frac{2k - 1}{2m - 1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.6)$$

*Пример 1.* Для призмы с квадратным ( $a = b$ ) основанием из (3.6) следует  $k = m$ , и счетное множество собственных частот  $\Omega$ :

$$\{ \sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, \dots \}. \quad (3.7)$$

Этот спектр не исчерпывает весь спектр симметричных относительно осей координат (рис. 1) собственных колебаний призмы, но, тем не менее, достаточно широк и называется [2] модами Ламе. Интересно, что моды Ламе не зависят от коэффициента Пуассона  $\nu$ .

#### 4. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений

Выражения для напряжений получаем, подставляя выражения (3.3) в зависимости (2.8).

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xy}}{\mu} = & 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_n \beta_n}{b} \left( \frac{\operatorname{sh} q_{2n} x}{\operatorname{sh}(q_{2n} a)} - \frac{\operatorname{sh} q_{1n} x}{\operatorname{sh}(q_{1n} a)} \right) \sin \beta_n y + \\ & + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y_n \alpha_n}{a} \left( \frac{\operatorname{sh} p_{1n} y}{\operatorname{sh}(p_{1n} b)} - \frac{\operatorname{sh} p_{2n} y}{\operatorname{sh}(p_{2n} b)} \right) \sin \alpha_n x \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}}{\mu} = & x_0 \frac{\Omega_1}{b} \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin(\Omega_1 a)} - y_0 \frac{\Omega_1}{a} \frac{2\nu}{1 - 2\nu} \frac{\cos \Omega_1 y}{\sin(\Omega_1 b)} + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left( \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{q_{1n} b} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh}(q_{1n} a)} - \frac{4\beta_n^2 q_{2n}}{\beta_n^2 + q_{2n}^2} \frac{\operatorname{ch} q_{2n} x}{\operatorname{bsh}(q_{2n} a)} \right) \cos \beta_n y + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \left( \left( \alpha_n^2 + p_{2n}^2 + \frac{\Omega_2^2}{1 - \nu} \right) \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{p_{1n} \operatorname{ash}(p_{1n} b)} - \frac{4\alpha_n^2 p_{2n}}{\alpha_n^2 + p_{2n}^2} \frac{\operatorname{ch} p_{2n} y}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} \right) \cos \alpha_n x \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{yy}}{\mu} = & x_0 \frac{\Omega_1}{1 - 2\nu} \frac{2\nu}{b} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin(\Omega_1 a)} - y_0 \frac{\Omega_1}{a} \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin(\Omega_1 b)} + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \left( \frac{4\beta_n^2 q_{2n}}{\beta_n^2 + q_{2n}^2} \frac{\operatorname{ch} q_{2n} x}{\operatorname{bsh}(p_{2n} a)} - \left( \beta_n^2 + q_{2n}^2 + \frac{\Omega_2^2}{1 - \nu} \right) \frac{\operatorname{ch} q_{1n} y}{q_{1n} \operatorname{bsh}(q_{1n} a)} \right) \cos \beta_n y + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \left( \frac{4\alpha_n^2 p_{2n}}{\alpha_n^2 + p_{2n}^2} \frac{\operatorname{ch} p_{2n} y}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} - \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{p_{1n} a} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{sh}(p_{1n} b)} \right) \cos \alpha_n x \end{aligned} \quad (4.3)$$

Представление для касательных напряжений (4.1) тождественно обращается в нуль на гранях призмы. А подстановка в граничные условия (2.2) выражений для нормальных напряжений (4.2) и (4.3) после известной процедуры [2] метода суперпозиции приводит к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов  $x_k, y_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} x_k \delta_k^x = & \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn}^x y_n + \frac{b}{2} f_k \begin{cases} 1 - 2\nu, & k = 0 \\ -q_{1k}, & k \geq 1, \end{cases} ; \\ y_k \delta_k^y = & \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn}^y x_n - \frac{a}{2} g_k \begin{cases} 1 - 2\nu, & k = 0 \\ -p_{1k}, & k \geq 1, \end{cases} ; \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь

$$\delta_k^x = \begin{cases} \frac{(1 - \nu)\Omega_1 a}{\operatorname{tg}(\Omega_1 a)}, & k = 0 \\ \frac{4\beta_k^2 q_{1k} q_{2k}}{(\beta_k^2 + q_{2k}^2) \operatorname{th}(q_{2k} a)} - \frac{\beta_k^2 + q_{2k}^2}{\operatorname{th}(q_{1k} a)}, & k \geq 1, \end{cases}$$

$$\delta_k^y = \begin{cases} \frac{(1-\nu)\Omega_1 b}{\operatorname{tg}(\Omega_1 b)}, & k = 0 \\ \frac{4\alpha_k^2 p_{1k} p_{2k}}{(\alpha_k^2 + p_{2k}^2) \operatorname{th}(p_{2k} b)} - \frac{\alpha_k^2 + p_{2k}^2}{\operatorname{th}(p_{1k} b)}, & k \geq 1, \end{cases}$$

$$A_{kn}^x = \begin{cases} \begin{cases} \nu, & n = 0 \\ \frac{1}{(\alpha_n^2 + p_{2n}^2) p_{1n}^2}, & n \geq 1, \end{cases} & k = 0 \\ \frac{1}{1-\nu} \Omega_2^2 \begin{cases} \frac{q_{1k} a}{q_{1k}}, & n = 0 \\ \frac{4\alpha_n^2 \beta_k^2 - 2\nu \Omega_2^2 (\alpha_n^2 + q_{2k}^2)}{a (\alpha_n^2 + p_{2n}^2) (\beta_n^2 + p_{1n}^2) (\beta_n^2 + p_{2n}^2)}, & n \geq 1 \end{cases}, & k \geq 1, \end{cases} \quad (4.5)$$

$$A_{kn}^y = \begin{cases} \begin{cases} \nu, & n = 0 \\ \frac{1}{(\beta_n^2 + q_{2n}^2) q_{1n}^2}, & n \geq 1, \end{cases} & k = 0 \\ \frac{1}{1-\nu} \Omega_2^2 \begin{cases} \frac{p_{1k} b}{p_{1k}}, & n = 0 \\ \frac{4\beta_n^2 \alpha_k^2 - 2\nu \Omega_2^2 (\beta_n^2 + p_{2k}^2)}{b (\beta_n^2 + q_{2n}^2) (\alpha_n^2 + q_{1n}^2) (\alpha_n^2 + q_{2n}^2)}, & n \geq 1 \end{cases}, & k \geq 1, \end{cases}$$

свободные члены связаны с коэффициентами в рядах Фурье для граничных значений нормальных напряжений в условиях (1.10):

$$f(y) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k \cos(\beta_k y); \quad g(y) = g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k \cos(\alpha_k x). \quad (4.6)$$

Например, в случае амплитуд элементарного напряженного состояния (3.5) граничные значения напряжений на краях  $x = a$  и  $y = b$  прямоугольной области получаются с помощью известного разложения и приводят к следующим коэффициентам в рядах Фурье:

$$f_k = \frac{\Omega_2 \sqrt{2}}{b \operatorname{tg} \frac{a \Omega_2}{\sqrt{2}}} \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{-\Omega_2^2}{\beta_k^2 - \frac{\Omega_2^2}{2}}, & k \geq 1; \end{cases} \quad g_k = -\frac{\Omega_2 \sqrt{2}}{a \operatorname{tg} \frac{b \Omega_2}{\sqrt{2}}} \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{-\Omega_2^2}{\beta_k^2 - \frac{\Omega_2^2}{2}}, & k \geq 1. \end{cases} \quad (4.7)$$

### 5. Формулы для оценки регулярности бесконечной системы (4.4)

Для исследования регулярности бесконечной системы линейных алгебраических уравнений необходимо [4] вычислить суммы из абсолютных величин элементов матрицы для каждого уравнения системы. (Предварительно каждое из уравнений необходимо разделить на коэффициент при неизвестной в левой части этого уравнения). В этом отношении бесконечная система (4.4) удачно отличается тем свойством, что для нее почти автоматически получаются аналитические суммы для бесконечных рядов из коэффициентов матрицы во всех уравнениях.

Действительно, специальные свободные члены системы (4.4), которые получаются с помощью коэффициентов (4.7), соответствуют единичным значениям всех неизвестных ( $x_n = y_n = 1$ ). Иными словами бесконечная система (4.4) имеет точное решение  $x_n = y_n = 1$  при подстановке коэффициентов (4.7) в ее свободные члены. При этом бесконечные ряды в правых частях каждого из уравнений системы представляют собой ряды из элементов матрицы бесконечной системы. Они обретают аналитические значения своих сумм посредством вычитания известных свободных членов из единицы в левой части каждого из уравнений. Для строк системы (4.4) выражения бесконечных рядов и значения сумм этих бесконечных рядов получаются в следующем виде:

$$1 - \frac{1}{\delta_k^x} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn}^x = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{\Omega_2 a}{\sqrt{2}}} \begin{cases} \frac{\Omega_1 \operatorname{tg}(\Omega_1 a)}{\Omega_2}, & k = 0 \\ \frac{q_{1k} \Omega_2^3}{(\beta_k^2 + q_{2k}^2) \delta_k^x}, & k \geq 1, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$1 - \frac{1}{\delta_k^y} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn}^y = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{\Omega_2 b}{\sqrt{2}}} \begin{cases} \frac{\Omega_1 \operatorname{tg}(\Omega_1 b)}{\Omega_2}, & k = 0 \\ \frac{p_{1k} \Omega_2^3}{(\beta_k^2 + p_{2k}^2) \delta_k^y}, & k \geq 1. \end{cases}$$

Можно увидеть, что при значениях параметра  $\Omega \leq \sqrt{2}$  все слагаемые в бесконечных рядах (5.1) являются положительными. Поэтому суммы этих рядов тоже положительны, и правые части формул (5.1) — положительные числа меньше единицы. Следовательно, коэффициенты всех уравнений бесконечной системы (4.4) положительны и удовлетворяют условиям регулярности. С увеличением параметра частоты  $\Omega$  в формулах (5.1) появляются отрицательные коэффициенты и комплексные числа. Соответственно нарушается регулярность бесконечной системы (4.4).

## 6. Анализ регулярности бесконечной системы (4.4)

При  $a = b = 1$  на интервале  $0 < \Omega < \Omega_{\text{poz}}$ , где  $\Omega_{\text{poz}} \geq \sqrt{2}$ , все коэффициенты (4.5) оказываются положительными, поэтому для вычисления суммы абсолютных величин коэффициентов (6.8) можно обойтись выражениями (5.1). Попробуем вычленивать из интервала  $0 < \Omega < \Omega_{\text{poz}}$  интервал  $0 < \Omega < \Omega_{\text{reg}}$ , на котором суммы (5.1) меньше единицы. В процессе исследования правых частей выражений (5.1) выявились два факта:

**Утверждение 1.** При любом  $k$  правая часть выражений (5.1) монотонно возрастает в зависимости от  $\Omega$ .

**Утверждение 2.** При любом  $k$  правая часть выражений (5.1) равна единице при  $\Omega = \sqrt{2}$ .

Таким образом,  $\Omega_{reg} = \sqrt{2}$ .

### 6.1. Решение системы (4.4) при частотах $\Omega$ , превышающих границу регулярности

К системе (4.4) при частоте  $\Omega > \Omega_{reg}$  может применяться способ исключения  $q$  пар первых неизвестных  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^q$ , описанный в [4] на стр. 52. Ради компактности, запишем бесконечную систему (4.4) в непарном виде:

$$X_k = \sum_{n=1}^{\infty} M_{kn} X_n + B_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.1)$$

Способ заключается в сведении системы (6.1) к последовательности  $2q + 1$  бесконечных систем: для каждого  $j = \overline{0, 2q}$  записываем бесконечную систему относительно неизвестных  $\{X_k^j\}_{k=2q+1}^{\infty}$

$$X_k^j = \sum_{n=2q+1}^{\infty} M_{kn} X_n^j + M_k^j \quad (k = 2q + 1, 2q + 2, \dots), \quad (6.2)$$

где через  $\{M_k^0\}_{k=1}^{\infty}$  обозначена правая часть  $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$  (легко видеть, что последовательность систем (6.2) представляет из себя одну матричную бесконечную систему с  $2q + 1$  столбцами свободных членов). После решения систем (6.2) находятся коэффициенты  $\{X_k^j\}_{k=2q+1}^{\infty}$  по формуле

$$\forall k \geq 2q + 1 : X_k = \sum_{j=1}^{2q} X_k^j X_j + X_k^0. \quad (6.3)$$

Затем решается одна конечная система порядка  $2q$  относительно  $\{X_k\}_{k=1}^{2q}$

$$X_k = \sum_{n=1}^{2q} M_{kn} X_n + \sum_{n=2q+1}^{\infty} M_{kn} X_n + B_k \quad (k = \overline{1, 2q}). \quad (6.4)$$

Условие регулярности каждой из бесконечных систем (6.2) заключается в выполнении неравенств:

$$\forall k \geq 2q + 1 : \sum_{n=2q+1}^{\infty} |M_{kn}| < 1, \quad (6.5)$$

достижимых и при отсутствии регулярности исходной системы (6.1), если подобрать достаточно большой параметр  $q$ . На интервалах параметра частоты  $\Omega$ , где все коэффициенты «усечённой» системы (6.2) имеют один и тот же знак, для проверки выполнения неравенств (6.5) можно задействовать формулы (5.1) так же, как и для исходной системы (6.1).

Заметим, что в матрице системы (6.2) по сравнению с матрицей системы (6.1) опущены не только первые  $2q$  строк, но и первые  $2q$  столбцов. Т. е., для применения только что приведённого способа не требуется квазирегулярности. Из утверждения 1 следует, что при  $\Omega > \Omega_{reg}$  квазирегулярность системы (6.7) отсутствует. Посмотрим, окажется ли действенным вышеприведённый способ при отсутствии квазирегулярности.

### 6.2. Анализ системы (4.4) при $\nu = 0$

Если коэффициент Пуассона равен нулю, то  $x_0$  и  $y_0$  находятся точно:

$$x_0 = f_0 \frac{btg(\Omega_1 a)}{2\Omega_1}, \quad y_0 = -g_0 \frac{btg(\Omega_1 b)}{2\Omega_1} \quad (6.6)$$

Остальные неизвестные определяются из парной бесконечной системы

$$\begin{cases} x_k \delta_k = \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} y_n - \frac{b}{2} f_k q_{1k}; \\ y_k \delta_k = \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} x_n + \frac{a}{2} g_k p_{1k} \end{cases} \quad (6.7)$$

( $k = 1, 2, \dots$ ) с матрицей

$$A_{kn} = \Omega_2^2 \frac{q_{1k}}{a} \frac{4\alpha_n^2 \beta_k^2}{(\alpha_n^2 + p_{2n}^2)(\beta_n^2 + p_{1n}^2)(\beta_n^2 + p_{2n}^2)} \quad (6.8)$$

Вычисленные для системы (6.7) пределы интервалов представим в таблице:

Таблица 1.

$q$	0	1	2	3	4
$\Omega_{poz}$	1,900	3,507	5,244	6,922	8,740
$\Omega_{reg}$	$\sqrt{2}$	3,003	4,638	6,268	7,896

### 6.3. Анализ системы (4.4) при $\nu \neq 0$

В табл. 2 представлены вычисленные таким же способом верхние пределы интервалов положительности и регулярности для системы (4.4). Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,248$  взят, согласно [3, 15], соответствующим титанату бария.

Таблица 2.

$q$	0	1	2	3	4	5
$\Omega_{poz}$	1,725	1,99	3,6	5,5	8,4	9,1
$\Omega_{reg}$	$\sqrt{2}$	1,562	3,259	5,007	6,753	8,495

## 7. Существование предела решения бесконечной системы и суммирование рядов в представлении решения

В работе Б.М. Кояловича [5] для парной регулярной бесконечной системы с положительными коэффициентами и с неотрицательными свободными членами получены достаточные условия существования конечного предела решения при неограниченном увеличении номеров неизвестных. Краткий обзор этих результатов имеется в [2] на стр. 18–21. Достаточные условия относятся только к элементам матрицы. Поэтому существование точного единичного решения у бесконечной системы (4.4) при специальных свободных членах (4.7) свидетельствует о том, что решение системы (4.4) также обладает ненулевым пределом при больших номерах неизвестных:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = G \quad (7.1)$$

Начиная с номера  $n = p + 1$ , полагаем  $x_n = y_n = G$ . Следовательно:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} &\approx y_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1 a} \frac{\cos \Omega_1 y}{\sin(\Omega_1 b)} \\ 0 \end{bmatrix} - x_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1 b} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin(\Omega_1 a)} \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{n=1}^p (-1)^n x_n \begin{bmatrix} \frac{2}{4\beta_n} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{2n} x} \frac{\cos \beta_n y}{\operatorname{bsh}(q_{2n} a)} \\ -\frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{\operatorname{bsh}(q_{2n} a)} \sin \beta_n y \end{bmatrix} - \\ &- \sum_{n=1}^p (-1)^n y_n \begin{bmatrix} \frac{2}{4\alpha_n} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} y} \frac{\cos \alpha_n x}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} \\ \frac{p_{1n} a}{\operatorname{sh} p_{2n} y} \frac{\sin \alpha_n x}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} \end{bmatrix} + \\ &+ G \left( \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^n \begin{bmatrix} \frac{2}{4\beta_n} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{sh} q_{2n} x} \frac{\cos \beta_n y}{\operatorname{bsh}(q_{2n} a)} \\ -\frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{\operatorname{bsh}(q_{2n} a)} \sin \beta_n y \end{bmatrix} - \right. \\ &\left. - \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^n \begin{bmatrix} \frac{2}{4\alpha_n} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{sh} p_{2n} y} \frac{\cos \alpha_n x}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} \\ \frac{p_{1n} a}{\operatorname{sh} p_{2n} y} \frac{\sin \alpha_n x}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (7.2)$$

С учетом тождества (3.2) это выражение преобразуем к следующей форме:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \phi \\ \psi \end{Bmatrix} &\approx (y_0 - G) \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1 a} \frac{\cos \Omega_1 y}{\sin(\Omega_1 b)} \\ 0 \end{bmatrix} - (x_0 - G) \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1 b} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin(\Omega_1 a)} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&+ \sum_{n=1}^p (-1)^n (x_n - G) \begin{bmatrix} \frac{2}{q_{1n} b} \frac{\operatorname{ch} q_{1n} x}{\operatorname{ch}(q_{1n} a)} \cos \beta_n y \\ -\frac{4\beta_n}{\beta_n^2 + q_{2n}^2} \frac{\operatorname{sh} q_{2n} x}{\operatorname{bsh}(q_{2n} a)} \sin \beta_n y \end{bmatrix} - \\
&- \sum_{n=1}^p (-1)^n (y_n - G) \begin{bmatrix} \frac{2}{p_{1n} a} \frac{\operatorname{ch} p_{1n} y}{\operatorname{ch}(p_{1n} b)} \cos \alpha_n x \\ \frac{4\alpha_n}{\alpha_n^2 + p_{2n}^2} \frac{\operatorname{sh} p_{2n} y}{\operatorname{ash}(p_{2n} b)} \sin \alpha_n x \end{bmatrix} + \\
&+ G \begin{bmatrix} 0 \\ \psi^* \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Погрешность приближенной формы (7.3) можно уменьшать, увеличивая параметр  $p$ .

## 8. Метод улучшенной редукции для численных оценок решений бесконечных систем

Метод улучшенной редукции был предложен Гринченко В.Т. [2, 3] на основании анализа особенностей нормальных напряжений в угловой точке ( $x = a$ ,  $y = b$ ) призмы и на существовании ненулевого предела (7.1) решения регулярной бесконечной системы (4.4). Решение бесконечной системы (4.4), записанной в краткой форме (6.1), выразим через решения двух вспомогательных конечных систем порядка  $p$ . Для этого, предполагая, что при  $k \geq p+1$  все неизвестные не отличаются от предела  $G$ , подставим в первые  $p$  уравнения бесконечной системы (6.1) следующие выражения:

$$X_k = \begin{cases} \hat{X}_k + \check{X}_k G, & k = \overline{1, p} \\ G, & k \geq p+1 \end{cases} \tag{8.1}$$

Собирая коэффициенты при  $G$  и оставшиеся слагаемые, получаем из системы (6.1) две конечные вспомогательные системы:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_k &= \sum_{n=1}^p M_{kn} \hat{X}_n + B_k \quad (k = \overline{1, p}), \\
\check{X}_k &= \sum_{n=1}^p M_{kn} \check{X}_n + \check{B}_k \quad (k = \overline{1, p}),
\end{aligned} \tag{8.2}$$

где  $\check{B}_k = \sum_{n=p+1}^{\infty} M_{kn} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{kn} - \sum_{n=1}^p M_{kn}$  ( $k = \overline{1, p}$ ). Приближённое значение предела  $G$  определится из дополнительного условия, следующего из равенства нормальных напряжений в угловой точке ( $x = a$ ,  $y = b$ ) согласно граничным условиям (2.2):

$$\frac{1}{\mu} \sigma_{xx}(a, b) - \frac{1}{\mu} \sigma_{yy}(a, b) = f(b) - g(a). \tag{8.3}$$

Для реализации условия (8.3) возвращаемся от краткой формы решения (6.1) к решению соответствующих парных вспомогательных систем для бесконечной системы (4.4):

$$x_k = \hat{x}_k + \check{x}_k G, \quad y_k = \hat{y}_k + \check{y}_k G \quad (k = \overline{0, p}) \quad (8.4)$$

Подставляя эти выражения в формулы (4.2), (4.3) для нормальных напряжений, после вычисления значений нормальных напряжений в угловой точке и подстановки получившихся выражений в условие (8.3) приходим к линейному относительно  $G$  уравнению, решение которого не выписываем из-за громоздкости. Найденная таким способом формула для предельного значения  $G$  решения бесконечной системы (4.4) отличается очень быстрой сходимостью. Вычисленное при  $p = 10$  значение  $G$  практически не изменяется при дальнейшем увеличении порядка конечных вспомогательных систем. Важным этапом обоснования метода исследования установившихся вынужденных колебаниях прямоугольной призмы является определение собственных частот призмы. Пока заданная частота внешних нормальных напряжений не совпадает с одной из собственных частот, гарантировано существование ограниченного решения регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений и сходимость рядов Фурье для перемещений и напряжений. В случае призмы с квадратным основанием одной из элементарных собственных форм колебаний является частота  $\Omega = \sqrt{2}$ . Поскольку эта частота совпадает с границей регулярности бесконечной системы, она является минимальной собственной частотой. После исключения нескольких первых неизвестных источником собственных частот являются нули определителя системы линейных уравнений (6.4), из которой вычисляются исключенные неизвестные после оценок решения регулярной бесконечной системы (6.1). На основании представленных в табл. 2. границ интервалов положительности коэффициентов и регулярности бесконечных систем вычислены приближенно первые 8 собственных частот для квадратной призмы из титаната бария (в постановке плоской деформации) как нули определителя системы (6.4). Они представлены в табл. 3.

Таблица 3.

$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	$\Omega_7$	$\Omega_8$
1,414	1,625	1,909	2,731	3,269	4,034	4,243	5,053

Можно видеть, что частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_7$  совпали с двумя элементарными собственными частотами ( $\sqrt{2} \approx 1,414$ ;  $3\sqrt{2} \approx 4,243$ ).

## 9. Обсуждение полученных результатов

Построено новое аналитическое представление решения для установившихся гармонических колебаний прямоугольной призмы в постановке плоской деформации. Методом суперпозиции выведена бесконечная система линейных алгебраических уравнений, которая при специальных значениях свободных членов имеет точное решение  $x_n = y_n = 1$ . Подстановка этих специальных свободных членов и отвечающего им единичного решения превращает все уравнения бесконечной системы в тождества, из которых элементарно находятся аналитические выражения для сумм коэффициентов каждой строки матрицы бесконечной системы. Суммы коэффициентов при дополнительном условии неотрицательности всех коэффициентов матрицы позволяют элементарно оценить регулярность бесконечной системы и воспользоваться теоремами о существовании ограниченного решения регулярной бесконечной системы. Для призмы с квадратным основанием посредством вычисления коэффициентов бесконечной системы при заданной частоте колебаний найдены наименьшие значения частоты колебаний, при которых коэффициенты бесконечной системы перестают быть положительными. В интервале положительности коэффициентов системы наименьшей собственной частотой для призмы с квадратным основанием оказалась частота  $\Omega = \sqrt{2}$ . На этой частоте все уравнения бесконечной системы (4.4) перестают (если  $\mu = 1$ ) удовлетворять условиям регулярности. Поэтому система (4.4) не является квазирегулярной. Поскольку в квазирегулярных бесконечных системах «условие регулярности выполнено во всех строках, начиная с некоторой» [4, стр. 52]. По формулам (5.1) для сумм коэффициентов в строках матрицы можно заметить, что интервал регулярности можно распространить на большие частоты колебаний, если исключить несколько первых неизвестных в каждом уравнении. Исключать удобно с помощью такого же количества первых уравнений, как это сделано в [4, стр. 52] при исследовании квазирегулярных бесконечных систем. Здесь этот способ исключения неизвестных отражён в формулах (6.1) — (6.4). А в таб. 1. и таб. 2. представлены в зависимости от количества исключённых неизвестных интервалы частот колебаний призмы, на которых выполнены условия положительности коэффициентов и условия регулярности всех оставшихся уравнений. Следует заметить, что в таб. 1. и таб. 2. интервалы положительности коэффициентов шире, чем интервалы регулярности, то есть для оценки регулярности можно и после исключения неизвестных пользоваться формулами (5.1). При этом собственные частоты находятся среди нулей определителя конечной системы (6.4) относительно исключённых неизвестных. Ещё одно преимущество нового представления решения заключается в том, что бесконечная система (4.4) имеет точное единичное решение при специальных значениях свободных членов. Это свидетельствует о свойстве решений бесконечной системы (4.4) иметь ненулевой предел при неограниченном увеличении номеров неизвестных. Использование существования ненулевого предела для суммирования всех бесконечных рядов в представлении решения представлено в пунктах 7 и 8. Отметим, что суммирование бесконечных рядов для прогибов защемлённой

прямоугольной пластины позволило авторам [8] правильно отобразить закон распределения поперечных усилий без привлечения интегрального преобразования Меллина [14].

### Список цитируемых источников

1. *Бондаренко П. С.* К вопросу о единственности для бесконечных систем линейных уравнений // Матем. сборник. — 1951. — Т. 29, №2. — С. 403–418.  
Bondarenko P. S. (1951). On uniqueness for infinite systems of linear equations. Mat. Sb. 29, No.2, 403–418. (in Russian)
2. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — К.: Наук. думка, 1978. — 264 с.  
Grinchenko V. T. (1978). Equilibrium and steady-state oscillations of elastic bodies of finite dimensions. Kyev: Naukova Dumka. (in Russian)
3. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. — К.: Наук. думка, 1981. — 284 с.  
Grinchenko V. T., Meleshko V. V. (1981). Harmonic vibrations and waves in elastic bodies. Kyev: Naukova Dumka. (in Russian)
4. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. — М. -Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.  
Kantorovich L. V., Krylov V. I. (1958). Approximate methods of higher analysis. Groningen: Noordhoff.
5. *Коялович В. М.* Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. физ.-матем. ин-та им. В.А. Стеклова. — Год. — №3. — С. 41–167.  
Koialovich, V.M. (1930). Studies on infinite systems of linear algebraic equations. Izv. fiz.-mat. Inst. Im. V.A. Steklova. 3, 41-167. (in Russian)
6. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1966. — 636 с.  
Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. (1959). Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill.
7. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.  
Timoshenko, S. P., Young, D. H., Weaver, W. (1974). Vibration problems in engineering. 4th ed. New York: Wiley.
8. *Чехов В. Н., Пан А. В.* Об улучшении сходимости рядов для бигармонической задачи в прямоугольнике // Динамические системы. — 2008. — вып.25. — С. 135–144.  
Chekhov, V. N., Pan, A. V. (2008). On acceleration of convergence of the series for a biharmonic problem in a rectangle. Dinamicheskie sistemy 25, 135-144. (in Russian)
9. *Eringen A. C., Suhubi E. S.* Elastodynamics, Vol. 2. Linear Theory. — New York-London: Academic Press, Inc., 1975. — 343–1003 pp.
10. *Gorman D. J.* Free vibration analysis of rectangular plates. — Elsevier, North Holland-New York: Inc., 1982. — 324 pp.

11. *Gorman D. J., Yu S. D* A review of the superposition method for computing free vibration eigenvalues of elastic structures // *Computers and Structures*. — 2012. — No.104–105. — P. 27–37.
12. *Leissa A. W.* Vibration of plates. — NASA SP, 1969. — 160-353 pp.
13. *Meleshko V. V., Gomilko A. M.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // *Proc. Roy. London*. — 1997. — A453. — P. 2139–2160.
14. *Meleshko V. V., Gomilko A. M., Gourjii A. A.* Normal reactions in a clamped elastic rectangular plate // *J. Engng Math*. — 2001. — 40, No.1. — 19–24 pp.
15. *Onoe M., Pao Y. H.* Edge mode of thin rectangular plate of barium titanate // *J. Acoust. Soc. Amer*. — 1961. — 33, No.11. — P. 16–28.
16. *Timoshenko S. P.* Bending of rectangular plates with clamped edges // In: *Proc. Fifth Intern. Congress for Applied Mechanics*. Wiley, New York. — 1939. — C. 40–43.

Получена 11.04.2016