

УДК 531.38

## Об одном алгоритме оптимального управления поворотом твердого диска с упругим стержнем

Е. П. Кубышкин, П. А. Солодовников

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль 150000. E-mail: [kubysh.e@yandex.ru](mailto:kubysh.e@yandex.ru), [hellyeahdominate@gmail.com](mailto:hellyeahdominate@gmail.com)

**Аннотация.** В работе предложен алгоритм построения оптимального управления поворотом твердого диска с упругим стержнем постоянного сечения, жестко прикрепленным к боковой поверхности диска в направлении его радиуса. Поворот осуществляется моментом внешних сил, приложенным к оси, проходящей через центр диска перпендикулярно средней линии стержня. Изучаются задача перевода механической системы из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени с минимизацией величины управляющего момента (нормы управляющего момента в пространстве  $L_\infty$ ) и задача быстродействия при ограничении величины управляющего момента. Сформулирован принцип максимума, предложен эффективный алгоритм решения указанных задач.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, принцип максимума, твердое тело с упругим стержнем.

## An algorithm for optimal control of the hard disk turning with elastic rod

E. P. Kubyshkin, P. A. Solodovnikov

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

**Abstract.** The paper proposes an algorithm for constructing optimal control for turning of the hard disk with a constant section elastic rod rigidly attached to the side surface of the disk in the radial direction thereof. Turning is carried out by the momentum of external forces, acted to an axis passing through the center of the disk perpendicularly to the middle line of the rod. The problem of translating a mechanical system from the initial phase state to the final state at a given time while minimizing the amount for the governing moment (norm of the governing moment in  $L_\infty$  space) is studied. The problem of the speed while confining the amount of governing moment is also studied. Optimal control construction problem is reduced to the solution of moment problem in the corresponding functional space. Maximum principle is formulated, an effective algorithm for construction of optimal controls in the series form with in advance known functional terms is proposed. Existence of controls with large number of shifts is noticed.

**Keywords:** optimal control, maximum principle, solid body with flexible rod.

**MSC 2010:** 47N10, 49J20, 49J35, 93C20, 70E99

## 1. Постановка задачи и формулировка результата

Рассматривается начально-краевая задача

$$J\ddot{\theta} + \int_0^1 (x+a)y_{tt}(x,t)dx = M(t), \quad (1)$$

$$y_{tt} + b^2 y_{xxxx} = -(x+a)\ddot{\theta}, \quad (2)$$

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0, y_{xx}(1,t) = y_{xxx}(1,t) = 0, \quad (3)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = \dot{y}_0(x), \quad (4)$$

для определения функций  $\theta(t), y(x,t)$  ( $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1$ ), в которой  $J = J_0 + a^2 + a + 1/3$ , где  $J_0, a$  — положительные параметры,  $\theta_0, \dot{\theta}_0, M(t), y_0(x), \dot{y}_0(x)$  — заданные постоянные и функции.

Начально-краевая задача (1)–(4) описывает поворот механической системы, состоящей из твердого диска радиуса  $r$  и толщины  $h$  с прямолинейным упругим стержнем, который одним концом жестко прикреплен к боковой поверхности диска в направлении радиуса. Упругий стержень моделируется балкой Эйлера-Бернулли в рамках гипотез малого изгиба, имеет постоянное круговое сечение диаметра  $d$  и равномерно распределенную по длине массу. Точка заделки стержня в диск и его центр масс находятся на одной прямой со средней линией недеформированного стержня. Поворот осуществляется вокруг оси, проходящей через центр масс диска перпендикулярно средней линии недеформированного стержня моментом внешних сил  $M'(t')$ , приложенным к оси вращения. Положение механической системы характеризуется двумя функциями  $\theta(t'), y'(x', t')$ , определяющими соответственно в момент времени  $t'$  угол поворота системы относительно инерциального пространства и величину поперечной деформации стержня в точке с координатой  $x'$  на оси  $OX'$ , проходящей вдоль средней оси стержня от его точки заделки в диске. Вывод уравнений движения рассматриваемой механической системы, имеется, например, в [2]. Рассматриваемая механическая система может служить, например, механической моделью руки манипулятора, обладающей упругой податливостью.

Начально-краевая задача (1)–(4) приведена в безразмерных переменных

$$x = \frac{x'}{l}, \quad t = \frac{t'}{t_0}, \quad a = \frac{r}{l}, \quad y(x,t) = \frac{y'(x', t')}{l}, \quad J_0 = \frac{2\rho_d r^4 h}{d^2 \rho_b l^3}, \quad b^2 = \frac{E d^2 t_0^2}{16 \rho_b l^4}, \quad (5)$$

где  $\rho_d, \rho_b$  — соответственно удельные плотности материала стержня и материала диска,  $E$  — модуль упругости материала стержня,  $t_0$  — временной масштаб. Величина  $J$  характеризует момент инерции всей системы относительно оси вращения.

В дальнейшем, как обычно,  $L_2(0, T)$  — пространство определенных на  $(0, T)$  вещественнозначных интегрируемых по Лебегу функций  $u(t)$ , для которых  $\|u(t)\|_{L_2(0, T)} = (u(t), u(t))_{L_2(0, T)}^{1/2} < \infty$ , где  $(u_1(t), u_2(t))_{L_2(0, T)} = \int_0^T u_1(t)u_2(t)dt$ ,  $L_\infty(0, T)$  — подпространство функций из  $L_2(0, T)$ , для которых  $\|u(t)\|_{L_\infty(0, T)} = \text{vrai sup}_{0 \leq t \leq T} |u(t)| < \infty$  (существенный supremum).

Для начально-краевой задачи (1)–(4) рассмотрены следующие задачи оптимального управления.

**Задача 1.** Определить функцию управления  $M(t) \in L_\infty(0, T)$ , переводящую решение начально-краевой задачи (1)–(4) из начального состояния (4) в конечное

$$\theta(T) = \theta_T, \quad \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T, \quad y(x, T) = y_T(x), \quad y_t(x, T) = \dot{y}_T(x) \quad (6)$$

в заданный момент времени  $T$  и минимизирующую функционал

$$\Phi(M) = \|M(t)\|_{L_\infty(0, T)}. \quad (7)$$

**Задача 2** (Задача быстрогодействия). Определить функцию управления  $M(t) \in L_\infty(0, T)$ ,  $\Phi(M) \leq L < \infty$ , переводящую решение начально-краевой задачи (1)–(4) из (4) в (6) за минимальное время  $T$ .

Ниже для решения задач 1,2 используется идеология работ [6]–[8], позволяющая свести решение задач оптимального управления поведением решений начально-краевых задач вида (1)–(4) к решению проблемы моментов в соответствующих функциональных пространствах. Для оптимального управления сформулирован принцип максимума, предложен эффективный алгоритм построения оптимального управления в виде ряда по заранее построенным функциям. В задаче 2 значение минимального времени определяется как корень некоторого нелинейного алгебраического уравнения.

## 2. Построение решения начально-краевой задачи (1)–(4)

Выразим  $\theta_{tt}(x, t)$  из (1) и подставим в уравнение (2). В результате имеем для определения  $y(x, t)$  следующую начально-краевую задачу:

$$y_{tt} - J^{-1}(x+a) \int_0^1 (x_1+a)y_{tt}(x_1, t)dx_1 + b^2 y_{xxxx} = -J^{-1}(x+a)M(t), \quad (8)$$

$$y(0, t) = y_x(0, t) = 0, \quad y_{xx}(1, t) = y_{xxx}(1, t) = 0, \quad (9)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x) \quad (10)$$

Положим сначала  $M(t) \equiv 0$ . Определяя решение  $y(x, t)$  в виде  $y(x, t) = v(x)s(t)$ , подставим его в краевую задачу (8)–(10). В результате получим для определения  $v(x)$  спектральную краевую задачу

$$b^2 v^{IV}(x) = \lambda(v(x) - J^{-1}(x+a) \int_0^1 (x_1+a)v(x_1)dx_1), \quad (11)$$

$$v(0) = v'(0) = 0, \quad v''(1) = v'''(1) = 0, \quad (12)$$

а для  $s(t)$  — следующее уравнение:

$$\ddot{s}(t) + \lambda s(t) = 0.$$

Изучим спектральную краевую задачу (11)–(12). Интегральный оператор

$$Av(x) \equiv v(x) - J^{-1}(x+a) \int_0^1 (x_1+a)v(x_1)dx_1 \equiv v(x) - J^{-1}(x+a)(x_1+a, v(x))_{L_2(0,1)},$$

действующий в  $L_2(0,1)$ , является ограниченным, симметричным и положительно определенным:

$$\begin{aligned} \|Av\|_{L_2(0,1)}^2 &= \|v\|_{L_2(0,1)}^2 - (J_0 + J)J^{-2}(x+a, v)_{L_2(0,1)}^2 \leq \|v\|_{L_2(0,1)}^2, \\ (Av, u)_{L_2(0,1)} &= (v, u)_{L_2(0,1)} - J^{-1}(x+a, v)_{L_2(0,1)}(x+a, u)_{L_2(0,1)} = (v, Au)_{L_2(0,1)}, \\ (Av, v)_{L_2(0,1)} &= (v, v)_{L_2(0,1)} - J^{-1}(x+a, v)_{L_2(0,1)}^2 \geq \\ &\geq (v, v)_{L_2(0,1)} - J^{-1}(x+a, x+a)_{L_2(0,1)}^2 (v, v)_{L_2(0,1)} = J_0 J^{-1}(v, v)_{L_2(0,1)}. \end{aligned}$$

При этом  $A^{-1}v(x) \equiv v(x) + J_0^{-1}(x+a)(x_1+a, v(x))_{L_2(0,1)}$ . Оператор  $Bv(x) \equiv v^{IV}(x)$ , действующий в  $L_2(0,1)$  с областью определения  $D(B) = \{v(x) \in W_2^4(0,1), v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0\}$  является симметричным и положительно определенным. Расширим его до самосопряженного в энергетическом пространстве  $H_B \subset W_2^2(0,1)$ , при этом  $B^{-1}$  вполне непрерывный оператор. Запишем спектральную краевую задачу(11)–(12) в операторной форме

$$Bv = \tilde{\lambda}Av, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{b}. \quad (13)$$

Выполнив в (13) замену  $B^{1/2}v = u \in L_2(0,1)$ , где  $B^{1/2}$  положительный корень из оператора  $B$  ( $v = B^{-1/2}u$ ), получим спектральную задачу

$$\mu u = B^{-1/2}AB^{-1/2}u, \quad \mu = \tilde{\lambda}^{-1} \quad (14)$$

для вполне непрерывного самосопряженного и положительно определенного оператора  $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ . Такая спектральная задача имеет (см., например, [1]) счетное число вещественных положительных конечнократных точек спектра  $\mu_j \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ , которым соответствуют линейно независимые, ортогональные в  $L_2(0,1)$  собственные функции  $u_j = u_j(x)$ . Ниже будет показано, что точки спектра однократны. Для  $v_j = B^{-1/2}u_j$  согласно (13) имеем

$$(u_j, u_k)_{L_2(0,1)} = (B^{1/2}v_j, B^{1/2}v_k)_{L_2(0,1)} = \tilde{\lambda}_j(Av_j, v_k)_{L_2(0,1)} = \tilde{\lambda}_j \langle v_j, v_k \rangle = \tilde{\lambda}_j \delta_{kj}, \quad (15)$$

где скалярное произведение

$$\langle v, u \rangle = (v, u)_{L_2(0,1)} - J^{-1}(x+a, v)_{L_2(0,1)}(x+a, u)_{L_2(0,1)}, \quad (16)$$

$\delta_{kj}$  – символ Кронекера. Отметим, что  $v_j(x)$  образуют ортонормированный базис в  $L_2(0,1)$  и ортогональный в  $H_B$  – энергетическом пространстве оператора  $B$ .

Для построения функций  $v_j(x)$  применим к обеим частям уравнения (11) оператор  $A^{-1}$ . В результате получим эквивалентное (11) уравнение

$$v^{IV}(x) - J_0^{-1}(x+a)(av'''(0) - v''(0)) = \tilde{\lambda}v(x). \quad (17)$$

Покажем, что собственные значения  $\tilde{\lambda}_j$  однократны. Предположим, что для некоторого  $\tilde{\lambda}_k$  имеется две линейно независимых собственных функции  $v_{k1}(x)$  и  $v_{k2}(x)$ . Возьмем их линейную комбинацию  $\tilde{v}_k(x) = (av'''_{k2}(0) - v''_{k2}(0))v_{k1}(x) - (av'''_{k1}(0) - v''_{k1}(0))v_{k2}(x)$  и подставим ее в уравнение (16). В результате получим, что  $\tilde{v}_k^{IV}(x) = \tilde{\lambda}_k \tilde{v}_k(x)$ . Таким образом,  $\tilde{v}_k(x)$  является балочной функцией, удовлетворяющей краевым условиям (12), т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k(x) &= w_k(x) / \langle w_k(x), w_k(x) \rangle^{1/2}, \\ w_k(x) &= (\text{sh}(\beta_k) + \sin(\beta_k))(\text{ch}(\beta_k x) - \cos(\beta_k x)) - \\ &\quad - (\text{ch}(\beta_k) + \cos(\beta_k))(\text{sh}(\beta_k x) - \sin(\beta_k x)), \end{aligned} \tag{18}$$

а  $\beta_k > 0$  корень уравнения  $\text{ch}(\beta) \cos(\beta) + 1 = 0$  ([3]). Для любого  $\beta_k$ :  $aw'''_k(0) - w''_k(0) = -2(a\beta_k^3(\text{ch}(\beta_k) + \cos(\beta_k)) + \beta_k^2(\text{sh}(\beta_k) + \sin(\beta_k))) < 0$ . Получили противоречие.

Положим в  $\tilde{\lambda} = \beta^4$  и заметим, что общее решение уравнения (17) имеет вид

$$\begin{aligned} v(\beta x) &= A \text{ch}(\beta x) + B \text{sh}(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) - \\ &\quad - \frac{1}{J_0 \beta^2} (x + a)(a\beta(B - D) - A + C). \end{aligned} \tag{19}$$

Подставив (19) в краевые условия (12), получим для определения  $A, B, C, D$  линейную однородную алгебраическую систему. Равенство нулю определителя матрицы этой системы дает характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} &\text{ch}(\beta) \cos(\beta) + 1 + J_0^{-1} \{2a\beta^{-2} \text{sh}(\beta) \sin(\beta) + \\ &+ \beta^{-3} [(a^2 \beta^2 + 1) \text{ch}(\beta) \sin(\beta) + (a^2 \beta^2 - 1) \text{sh}(\beta) \cos(\beta)]\} = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

положительные корни которого определяют точки спектра  $0 < \tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2 < \dots < \tilde{\lambda}_n < \dots$  ( $\tilde{\lambda}_n = \beta_n^4$ ) спектральной краевой задачи (11)–(12). Ненулевые решения линейной алгебраической системы при соответствующем  $\beta_n$  имеют вид

$$\begin{aligned} A_n &= \text{sh}(\beta_n) + [1 - 2a(J_0 \beta_n^2)^{-1}] \sin(\beta_n) - 2a^2 (J_0 \beta_n)^{-1} \cos(\beta_n), \\ B_n &= -\text{ch}(\beta_n) - [1 + 2a(J_0 \beta_n^2)^{-1}] \cos(\beta_n) - 2(J_0 \beta_n^3)^{-1} \sin(\beta_n), \\ C_n &= -\sin(\beta_n) - [1 + 2a(J_0 \beta_n^2)^{-1}] \text{sh}(\beta_n) - 2a^2 (J_0 \beta_n)^{-1} \text{ch}(\beta_n), \\ D_n &= \cos(\beta_n) + [1 - 2a(J_0 \beta_n^2)^{-1}] \text{ch}(\beta_n) - 2(J_0 \beta_n^3)^{-1} \text{sh}(\beta_n). \end{aligned} \tag{21}$$

и, будучи подставленные в (18), определяют собственные функции

$$v_n(x) = v(\beta_n x) / \langle v(\beta_n x), v(\beta_n x) \rangle^{1/2} \tag{22}$$

спектральной краевой задачи (11)–(12).

Перейдем к построению решения начально-краевой задачи (8)–(9), считая  $M(t) \in L_\infty(0, T)$ . Для его определения введем следующие функциональные пространства. В дальнейшем  $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ . Обозначим

через  $H(0, 1)$  пространство функций  $u(x) \in L_2(0, 1)$ , снабженное скалярным произведением (16) и нормой  $\|u(x)\|_{H(0,1)} = \langle u(x), u(x) \rangle^{1/2}$ . Через  $H_j(0, 1)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) обозначим пространства функций вида

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n(x), u_n = \langle u(x), v_n(x) \rangle, \|u(x)\|_{H_j(0,1)} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^j u_n^2 \right)^{1/2} < \infty, \omega_n = \beta_n^2 b$$

Отметим, что эти пространства являются соответственно замкнутыми подпространствами  $W_2^j(0, 1) = \left\{ u(x) : \|u(x)\|_{W_2^j(0,1)} = \left( \sum_{k=0}^j \|u^{(k)}(x)\|_{L_2(0,1)}^2 \right)^{1/2} \right\}$ .

Через  $H(Q_T)$  обозначим пространство  $L_2(Q_T)$  функций  $y(x, t)$ , снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u(x, t), v(x, t))_{H(Q_T)} = \int_0^T \langle u(x, t), v(x, t) \rangle dt, \|y(x, t)\|_{H(Q_T)} = (y(x, t), y(x, t))_{H(Q_T)}^{1/2}.$$

Через  $H_2(Q_T)$  обозначим гильбертово пространство функций  $y(x, t)$ , полученное замыканием множества соответствующее число раз непрерывно дифференцируемых функций  $y(x, t) \in C^{3,1}(\bar{Q}_T)$ ,  $y(0, t) = y_x(0, t) = 0$ ,  $y_{xx}(1, t) = y_{xxx}(1, t) = 0$  в норме

$$\begin{aligned} \|y(x, t)\|_{H_2(Q_T)} &= (y(x, t), y(x, t))_{H_2(Q_T)}^{1/2}, \\ (u(x, t), v(x, t))_{H_2(Q_T)} &= (u_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(Q_T)} + (u_t(x, t), v_t(x, t))_{H(Q_T)} \end{aligned}$$

Умножим обе части уравнения (8) на функцию

$$v(x, t) \in H_2(Q_T), \quad v(x, T) \equiv 0 \quad (23)$$

и проинтегрируем по  $(x, t) \in Q_T$ . В результате, вычисляя интегралы по частям при учете краевых и начальных условий (9)–(10), условия (23), а также учтя соотношение  $J_0(x+a, v(x, t))_{L_2(0,1)} = J\langle x+a, v(x, t) \rangle$ , получим интегральное равенство

$$\begin{aligned} \int_0^T (y_t(x, t), v_t(x, t)) - (y_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(0,1)} - J_0^{-1} \langle x+a, v(x, t) \rangle M(t) dt + \\ + \langle \dot{y}_0(x), v(x, 0) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть

$$y_0(x) \in H_2(0, 1), \quad \dot{y}_0(x) \in H(0, 1) \quad (25)$$

Под решением начально-краевой задачи (8)–(10), определенным в области  $Q(T)$ , с начальными условиями (25) будем понимать функцию  $y(x, t) \in H_2(Q_T)$ ,  $y(x, 0) = y_0(x)$ , удовлетворяющую интегральному соотношению (24) для любой функции  $v(x, t)$  вида (23).

Представим

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{-1} a_{0n} v_n(x), \quad a_{0n} = \omega_n \langle y_0(x), v_n(x) \rangle, \quad \|y_0(x)\|_{H_2(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}^2, \\
 y_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} v_n(x), \quad b_{0n} = \langle y_1(x), v_n(x) \rangle, \quad \|y_1(x)\|_{H(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}^2 \quad (26) \\
 x + a &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x), \quad d_n = \langle x + a, v_n(x) \rangle, \quad \|x + a\|_{H(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2.
 \end{aligned}$$

**Теорема 1.** *Решение  $y(x, t) \in H_2(Q_T)$  начально-краевой задачи (8)–(10) с начальными условиями (25) существует, единственно и представимо в виде*

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \omega_n^{-1} \left( a_{0n} \cos(\omega_n t) + \right. \\
 &\quad \left. + b_{0n} \sin(\omega_n t) - J_0^{-1} d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) M(\tau) d\tau \right) \quad (27)
 \end{aligned}$$

где  $a_{0n}, b_{0n}, d_n$  определены в (26). При этом справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 \|y(x, t)\|_{H_2(Q_T)} \leq C \left( \|y_0(x)\|_{H_2(0,1)}^2 + \|y_1(x)\|_{H(0,1)}^2 + \right. \\
 \left. + \|x + a\|_{H(0,1)}^2 \|M(t)\|_{L_\infty(0,T)}^2 \right)^{1/2}, \quad (28)
 \end{aligned}$$

где  $C > 0$  – некоторая постоянная.

Доказательство теоремы имеется в работе [8].

Неравенство (28) обеспечивает корректность поставленной начально-краевой задачи (8)–(10).

Построим теперь решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (4). Пусть функция

$$p(t) \in W_2^1(0, T), \quad p(T) = 0. \quad (29)$$

Умножим уравнение (1) на  $p(t)$  и проинтегрируем по  $t \in [0, T]$ . Вычисляя интегралы, входящие в полученное равенство по частям, будем иметь

$$\begin{aligned}
 -J \int_0^T \dot{\theta}(t) \dot{p}(t) dt - J\theta_1 p(0) - p(0) \int_0^1 (x + a) \dot{y}_0(x) dx - \\
 - \int_0^T \dot{p}(t) \int_0^1 (x + a) y_t(x, t) dx dt = \int_0^T M(t) p(t) dt,
 \end{aligned}$$

что эквивалентно равенству

$$\int_0^T (J\dot{\theta}(t)\dot{p}(t) + JJ_0^{-1}\langle x + a_1, y_t(x, t) \rangle \dot{p}(t)) dt + \\ + (J\theta_1 + JJ_0^{-1}\langle x + a, \dot{y}_0(x) \rangle)p(0) + \int_0^T M(t)p(t)dt = 0. \quad (30)$$

Под решением уравнения (1) будем понимать функцию  $\theta(t) \in W_2^1(0, T)$ ,  $\theta(0) = \theta_0$ , удовлетворяющую интегральному равенству (30) для любой функции  $p(t)$  вида (29).

Легко видеть, что искомым решением уравнения (1) будет функция

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + J_0^{-1}(\langle x + a, \dot{y}_0(x) \rangle t - \int_0^t \langle x + a, y_{t_1}(x, t_1) \rangle dt_1) + \\ + J^{-1} \int_0^t (t - t_1)M(t_1)dt_1 = \theta_0 + \theta_1 t + J_0^{-1}(\langle x + a, \dot{y}_0(x) \rangle t - \\ - \langle x + a, y(x, t) \rangle + \langle x + a, y_0(x) \rangle) + J^{-1} \int_0^t (t - t_1)M(t_1)dt_1. \quad (31)$$

### 3. Построение оптимального управления

Выберем

$$y_0(x), y_T(x) \in H_3(0, 1), \quad \dot{y}_0(x), \dot{y}_T(x) \in H_1(0, 1) \quad (32)$$

и переформулируем с учетом (27), (31) задачу 1 следующим образом: найти минимум функционала (7) при ограничениях

$$\dot{\theta}_T = \dot{\theta}_0 + J_0^{-1}(\langle x + a, \dot{y}_0(x) \rangle - \langle x + a, \dot{y}_T(x) \rangle) + J^{-1} \int_0^T M(\tau)d\tau, \\ \theta_T = \theta_0 + \dot{\theta}_0 T + J_0^{-1}(\langle x + a, \dot{y}_0(x) \rangle T + \langle x + a, y_0(x) \rangle - \langle x + a, y_T(x) \rangle) + \\ + J^{-1} \int_0^T (T - \tau)M(\tau)d\tau,$$

$$\begin{aligned}
 a_{Tn} &= a_{0n} \cos(\omega_n T) + b_{0n} \sin(\omega_n T) - J_0^{-1} d_n \int_0^T \sin(\omega_n(T - \tau)) M(\tau) d\tau, \\
 b_{Tn} &= -a_{0n} \sin(\omega_n T) + b_{0n} \cos(\omega_n T) - J_0^{-1} d_n \int_0^T \cos(\omega_n(T - \tau)) M(\tau) d\tau, \\
 a_{Tn} &= \omega_n \langle y_T(x), v_n(x) \rangle, \quad b_{Tn} = \langle \dot{y}_T(x), v_n(x) \rangle \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (33)
 \end{aligned}$$

**Теорема 2.**

$$d_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad d_n = O(n^{-1}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (34)$$

*Доказательство.* Воспользуемся равенством

$$\omega_n^2 d_n = -(av_n'''(0) - v_n''(0)), \quad (35)$$

которое получается, если в уравнение (17) подставить  $v(x) = v_n(x)$ ,  $\lambda = \omega_n^2$ , полученное равенство умножить на  $x + a$  и проинтегрировать по отрезку  $[0, 1]$  с учетом краевых условий (12). Предположим, что для некоторого  $n$   $d_n = 0$ . Из (35) следует, что  $av_n'''(0) - v_n''(0) = 0$ . Это равенство совместно с первой частью краевых условий (12) влечет выполнение следующих равенств

$$A_n + C_n = 0, \quad B_n + D_n = 0, \quad (36)$$

для коэффициентов, фигурирующих в определении  $v_n(x)$  в соответствии с (20)–(22). Подставим в (36) выражения для  $A_n$  и  $C_n$ , определяемые согласно (21). В результате получим выражение

$$-2a(J_0\beta_n)^{-1}[\beta_n^{-1}(\sin(\beta_n) + \text{sh}(\beta_n)) + a(\cos(\beta_n) + \text{ch}(\beta_n))] < 0.$$

Получили противоречие. Для получения второго соотношения (34) заметим, что при  $\beta \rightarrow \infty$  характеристическое уравнение (20) имеет вид  $\cos(\beta) + O(\beta^{-1}) = 0$ . В соответствии с этим  $\beta_n \sim \pi/2(2n + 1)$  при  $n \rightarrow \infty$ , а соответствующие собственные функции  $v_n(x)$  близки к балочным функциям (18), в которых  $\langle w_k(x), w_k(x) \rangle^{1/2} = \exp(\beta_n)/2(1 + O(\beta_n^{-1}))$  при  $n \rightarrow \infty$ . С учетом этого, вида функций (18) и равенства (35) имеем второе соотношение (34).  $\square$

Отметим, что первое условие (34) является необходимым условием управляемости поведением решений начально-краевой задачи (1)–(4).

Преобразуем равенства (3) с учетом (26) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_0^T M(t)dt &= \alpha_1(T) = J(\dot{\theta}_T - \dot{\theta}_0) + JJ_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n(b_{Tn} - b_{0n}), \\ \int_0^T tdt &= \alpha_2(T) = J(\theta_0 - \theta_T - \dot{\theta}_T T) + JJ_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n(a_{0n}\omega_n^{-1} - a_{Tn} - b_{Tn}T), \\ \int_0^T \sin(\omega_n t)M(t)dt &= \alpha_{2n+1}(T) = J_0 d_n^{-1}(a_{Tn} \cos(\omega_n T) - b_{Tn} \sin(\omega_n T) - a_{0n}), \\ \int_0^T \cos(\omega_n t)M(t)dt &= \alpha_{2n+2}(T) = J_0 d_n^{-1}(-a_{Tn} \sin(\omega_n T) - b_{Tn} \cos(\omega_n T) + b_{0n}) \end{aligned} \quad (37)$$

( $n=1, 2, \dots$ ).

Отметим, что согласно (32), (35) справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2(T) < \infty. \quad (38)$$

Линейный непрерывный функционал в  $L_1(0, T)$  имеет вид

$$F(u) = \int_0^T u(t)M(t)dt, \quad M(t) \in L_{\infty}(0, T), \quad \|F\| = \|M(t)\|_{L_{\infty}}. \quad (39)$$

Обозначим

$$\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = t, \varphi_{2n+1}(t) = \sin(\omega_n t), \varphi_{2n+2}(t) = \cos(\omega_n t) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (40)$$

С учетом (37), (39)–(40) задача 1 может быть сформулирована как следующая проблема моментов в  $L_1(0, T)$ .

**Задача.** Найти функционал вида (39), удовлетворяющий условиям

$$F(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (41)$$

и имеющий минимальную норму  $\|F\|_{min} = m(T)$ .

Отметим, что указанная проблема моментов при конечном числе ограничений (41) рассмотрена в [5]. Некоторые результаты [5] могут быть распространены на рассматриваемый случай.

Обозначим через  $Q_2(0, T)$  подпространство  $L_2(0, T)$ , являющееся замкнутой в норме этого пространства линейной оболочкой функций (40).

**Теорема 3.** *Функции (40) образуют базис Рисса в  $Q_2(0, T)$ .*

*Доказательство.* Покажем сначала, что для некоторого  $n$  функции

$$\varphi_{2(n+j)+1}(t), \varphi_{2(n+j)+2}(t) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (42)$$

образуют базис Рисса в подпространстве  $Q_2^n(0, T)$ , являющимся замкнутой линейной оболочкой функций (42). Согласно [1, с. 56], для этого необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матриц Грамма

$$G_m^n = \{g_{pq}\}, g_{pq} = (\varphi_p(t), \varphi_q(t))_{L_2(0, T)}, (p, q = 2(n+j)+1, 2(n+j)+2, j = 1, 2, \dots, m)$$

были в совокупности отделены от нуля и бесконечности. Из вида функции (40) с учетом соотношения  $\omega_n \sim b[\pi/2(2n+1)]^2$  при  $n \rightarrow \infty$ , имеем

$$g_{2(n+j)+1, 2(n+j)+1}, g_{2(n+j)+2, 2(n+j)+2} = T/2 + O((n+j)^{-2}), g_{2(n+j)+1, 2(n+j)+2} = O((n+j)^{-2})$$

при  $(n+j) \rightarrow \infty$ , и

$$g_{2(n+j)+1, 2(n+k)+1}, g_{2(n+j)+1, 2(n+k)+2} = O([(2n+j+k)(j-k)]^{-1})$$

при  $j \neq k, j, k = 1, 2, \dots, m, |(2n+j+k)(j-k)| \rightarrow \infty$ .

В связи с этим характеристическое уравнение матрицы  $G_m^n$  порядка  $2m$  будет иметь вид  $(T/2 - \lambda)^{2m} + O(n^{-1})$ . Отсюда следует совокупная отделенность от нуля и бесконечности собственных значений матриц  $G_m^n$ . Таким образом, функции (42) образуют базис Рисса в  $Q_2^n(0, T)$ . Добавление к функциям (42) конечного числа линейно независимых функций не меняет свойства базиса. Следовательно функции (40) образуют базис Рисса в  $Q_2(0, T)$ . Это означает, что собственные значения  $\lambda_j > 0$  бесконечной матрицы Грамма  $G$ , построенной по системе функций (40), в совокупности отделены от нуля и бесконечности, т.е. существуют постоянные  $m_g, M_g > 0$ , для которых  $m_g < \lambda_j < M_g$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Таким образом справедливо неравенство

$$m_g \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \sum_{j, k=1}^{\infty} g_{j, k} \xi_j \xi_k < M_g \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2. \quad (43)$$

для любого  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2, \|\xi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \infty. \quad \square$

Обозначим через  $Q_1(0, T)$  подпространство  $L_1(0, T)$ , полученное замыканием в норме пространства  $L_1(0, T)$  множества функций вида  $u_N(t) = \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j(t), \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ . В силу соотношения  $\|u_N(t)\|_{L_1(0, T)} \leq T^{1/2} \|u_N(t)\|_{L_2(0, T)}$  и неравенства (43),  $Q_1(0, T)$  является замкнутым линейным подпространством  $L_1(0, T)$ .

Введем двойственную к проблеме моментов задачу.

**Задача.** Найти

$$\min_{\xi \in l_2} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0, T)} = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^* \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0, T)} = \|u^*(t)\|_{L_1(0, T)} = l^{-1}(T), \quad (44)$$

при условии  $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) = 1$ .

**Утверждение 1.**  $m(T) = l(T)$ .

*Доказательство.* Для любых  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$  и  $N > 0$  согласно (41)

$$\left| \sum_{j=1}^N \xi_j \alpha_j(T) \right| = \left| F \left( \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j \right) \right| \leq \|F\| \left\| \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j \right\|_{L_1(0,T)} \leq \|F\| \left\| \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j \right\|_{L_1(0,T)}.$$

Отсюда

$$\|F\|^{-1} \leq \min_{\xi \in l_2} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} / \left| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) \right| = \min_{\xi \in l_2, \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) = 1} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)}.$$

Таким образом,  $\|F\| \geq l(T)$  и  $m(T) \geq l(T)$ .

Определим в  $Q_1(0, T)$  функционал  $\Phi(u) = \Phi(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T)$  ( $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ ). Норма  $\Phi(u)$  в  $Q_1(0, T)$  равна

$$\|\Phi\| = \sup_{u \in Q_1(0,T)} |\Phi(u)| / \|u\|_{L_1(0,T)} = \sup_{\xi \in l_2} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) \right| / \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} = l(T). \quad (45)$$

Продолжим функционал  $\Phi(u)$  на все пространство  $L_1(0, T)$  с сохранением нормы (теорема Хана-Банаха, см. [4, с. 244]). Этот функционал обозначим  $F(u)$ . Соответственно имеем  $F(u_j) = \alpha_j(T)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Следовательно,  $m(T) = l(T)$ .  $\square$

Отсюда на основании (39), (44) имеем следующее утверждение.

**Утверждение 2.** *Решение задачи 1 дается формулой*

$$M^*(t) = l(T) \text{sign}(u^*(t)). \quad (46)$$

Отметим, что на основании (45)

$$|F(u^*)| = l(T) \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)} = 1. \quad (47)$$

Очевидно, что справедливо и обратное. Если для некоторого элемента  $u^*(t) \in Q_1(0, T)$  выполнено (47), то для  $u^*(t)$  выполнено (45) и  $u^*(t)$  является решением двойственной задачи.

Пространство  $L_1(0, T)$  не является строго нормированным. Поэтому равенство (47) и соответственно решение двойственной задачи (44) справедливо не для единственного элемента.

Пусть  $u^*(t)$  и  $v^*(t)$  — решения (44). Тогда для функционала  $F(u)$  вида (39), дающего решение проблемы моментов (41), в котором  $M^*(t)$  определяется согласно (46), справедливы на основании (45), (47) равенства  $|F(u^*)| = |F(v^*)| = 1$ . Но тогда на основании (39) почти всюду  $l(T) \text{sign}(u^*(t)) = l(T) \text{sign}(v^*(t))$ . Таким образом, решение задачи 1 единственно.

Обозначим через  $S(l(T))$  множество функционалов вида (39), имеющих норму  $l(T)$ . Элемент  $u_0(t) = u^*(t) / \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)}$ , где  $u^*(t)$  — решение задачи (44), назовем экстремальным.

На основании (47) справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 3** (Принцип максимума). *Оптимальный функционал  $F_*(u)$  вида (39), определяемый функцией  $M^*(t)$ , выделяется из всех функционалов вида (39), имеющих ту же норму  $l(T)$ , следующим свойством максимума на любом экстремальном элементе:*

$$F_*(u_0) = \max_{M(t) \in S(l(T))} F(u_0).$$

Отметим, что согласно (44):  $\lim_{t \rightarrow 0} l(T) = \infty$ ,  $\lim_{T \rightarrow \infty} l(T) = 0$ .

Обозначим через  $T^*$  первый положительный корень уравнения  $l(T) = L$ .

**Утверждение 4.** *Решение задачи 2 дает пара  $(T^*, M^*(t))$ , где  $M^*(t)$  определяется формулой (47), в которой  $T = T^*$ .*

Рассмотрим алгоритм построения элемента  $u^*(t)$ , определенного в (44).

Произвольный линейный непрерывный функционал в пространстве  $L_2(0, T)$  запишем в виде

$$F_2(u) = (u(t), M(t))_{L_2(0, T)}, \quad M(t) \in L_2(0, T), \quad \|F_2\| = \|M(t)\|_{L_2(0, T)}. \quad (48)$$

Сформулируем следующую проблему моментов в пространстве  $L_2(0, T)$ .

**Задача.** Найти функционал вида (48), удовлетворяющий условиям

$$F_2(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (49)$$

и имеющий минимальную норму  $\|F_2\|_{min} = m_{2T}$ .

По системе функций  $\varphi_j(t)$  построим ортонормированную в  $L_2(0, T)$  систему функций  $\psi_j(t)$ , используя ортогонализацию Шмидта (см., например, [1]). Для этого положим

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1(t) &= \varphi_1(t), \psi_1(t) = \bar{\psi}_1(t)/\eta_1, \bar{\psi}_2(t) = \varphi_2(t) - \alpha_{21}\psi_1(t), \psi_2(t) = \bar{\psi}_2(t)/\eta_2, \dots \\ \bar{\psi}_n(t) &= \varphi_n(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\psi_j(t), \psi_n(t) = \bar{\psi}_n(t)/\eta_n, \alpha_{nj} = \\ &= (\varphi_n(t), \psi_j(t))_{L_2(0, T)}, \eta_n = \|\bar{\psi}_n(t)\|_{L_2(0, T)}. \end{aligned} \quad (50)$$

Введем в рассмотрение величины  $\beta_n(T)$  по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \beta_1(T) &= \alpha_1(T)/\eta_1, \beta_2(T) = (\alpha_2(T) - \alpha_{21}\beta_1(T))/\eta_2, \dots \\ \beta_n(T) &= (\alpha_n(T) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\beta_j(T))/\eta_n. \end{aligned}$$

Эти соотношения определяют бесконечномерную нижнюю треугольную матрицу  $B(T) = \{B_{ij}(T)\}_{i,j=1,\dots,\infty}$ , которая согласно (43), (46) задает ограниченный и

ограниченно обратимый в пространстве  $l_2$  оператор  $\beta(T) = B(T)\alpha(T)$   $\beta(T) = (\beta_1(T), \beta_2(T), \dots)$ ,  $\alpha(T) = (\alpha_1(T), \alpha_2(T), \dots)$ . Непосредственно вычисляя, находим

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= T^{-1/2}, \psi_2(t) = 3^{1/2}(-T^{-1/2} + 2 \cdot T^{-3/2}t), \dots \\ \beta_1(T) &= T^{-1/2}\alpha_1(T), \beta_2(T) = 3^{1/2}(-T^{-1/2}\alpha_1(T) + 2T^{-3/2}\alpha_2(T)), \dots\end{aligned}$$

Отметим, что остальные  $\beta_n(T)$  имеют аналогичную зависимость от  $T$ :  $\lim_{T \rightarrow 0} \beta_n(T) = \infty$ ,  $\lim_{T \rightarrow \infty} \beta_n(T) = 0$ . В связи с этим

$$m(T) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2(T) \right)^{1/2} < \infty, \quad \lim_{T \rightarrow 0} m(T) = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} m(T) = 0. \quad (51)$$

**Теорема 4.** *Существует единственная функция*

$$M^{**}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(T)\psi_n(t), \quad (52)$$

удовлетворяющая условию

$$\|M^{**}(t)\|_{L_2(0,T)} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2(T) \right)^{1/2} = m_{2T}. \quad (53)$$

*Доказательство.* Представим  $L_2(0, T) = Q_2(0, T) \oplus P_2(0, T)$ , где  $P_2(0, T) = \{u(t) \in L_2(0, T), (u(t), \psi_j(t))_{L_2(0,T)} = 0, j = 1, 2, \dots\}$ . Условия (49) эквивалентны условиям

$$F_2(\psi_j(t)) = \beta_j(T) \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (54)$$

Произвольная функция  $M(t) \in L_2(0, T)$ , определяющая (48) и удовлетворяющая условиям (54) имеет вид  $M(t) = M^*(t) + P(t)$ , где  $p(t) \in P_2(0, T)$ , но  $\|M(t)\|_{L_2(0,T)}^2 = \|M^*(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \|P(t)\|_{L_2(0,T)}^2$ . Отсюда  $\min \|M(t)\|_{L_2(0,T)} = \|M^*(t)\|_{L_2(0,T)} = m_{2T}$ .  $\square$

Отметим, что  $Q_2(0, T) \subset Q_1(0, T)$ . Рассмотрим функцию

$$v^*(t) = M^{**}(t)/m_{2T}^2.$$

На основании (45), (50) имеем

$$F(v^*(t)) = F\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(T)\psi_j(t)\right)/m_{2T}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2(T)/m_{2T}^2 = 1.$$

Таким образом,  $v^*(t)$  является решением (44) и  $\|v^*(t)\|_{L_1(0,T)} = l^{-1}(T)$ . Следовательно,

$$M^*(t) = l^{-1}(T)\text{sign}(v^*(t)). \quad (55)$$

*Пример.* В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из диска радиуса  $r = 7.5 \times 10^{-2}$  м, толщины  $h = 5 \times 10^{-2}$  м с упругим стержнем длины  $l = 7.5 \times 10^{-1}$  м и диаметра  $d$ , который будет варьироваться.

Параметры материала:  $\rho = 7.8 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 2 \times 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup> (сталь). Система поворачивается из начального положения  $\theta_0 = 0$ ,  $y_0(x) \equiv \dot{y}_0(x) \equiv 0$  в конечное  $\theta_T = \pi/2$ ,  $\dot{\theta}_T = 0$ .  $y_T(x) \equiv 0$ ,  $\dot{y}_T(x) = 90x^2$  (с ударом) за время  $T = 0.1$  с. На рис. 1–4 приведены графики функций  $M^*(t)$  (в безразмерных переменных) для разных значений диаметра  $d$ .

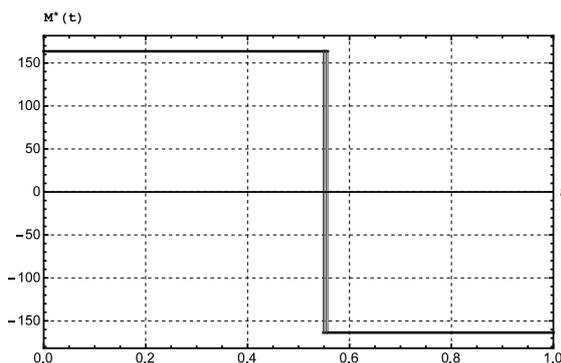


Рис. 1.  $d = 2.5 \times 10^{-2}$  м

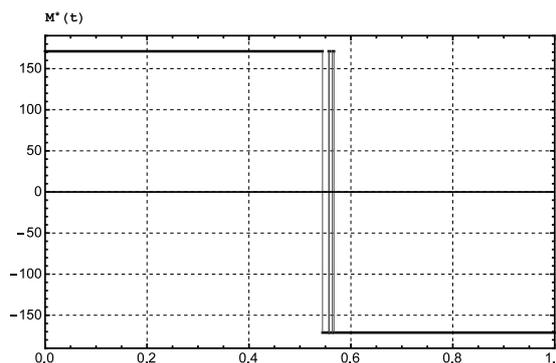


Рис. 2.  $d = 1.5 \times 10^{-2}$  м

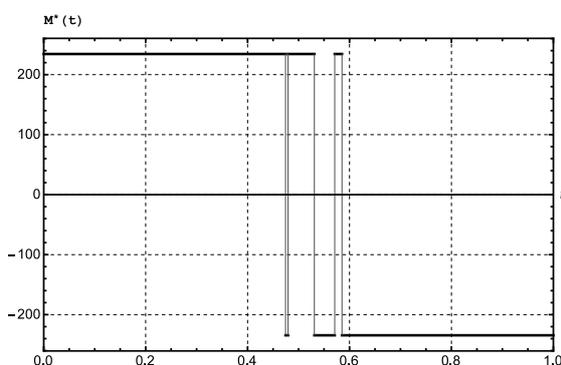


Рис. 3.  $d = 6 \times 10^{-3}$  м

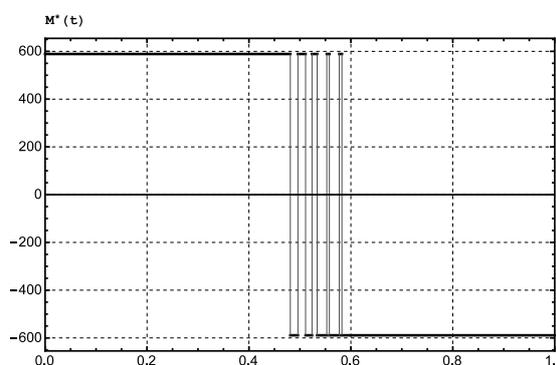


Рис. 4.  $d = 2.5 \times 10^{-3}$  м

Из графиков видно, что наблюдается эффект нарастания числа переключений при уменьшении  $d$ . Переключения отмечены вертикальными сплошными линиями.

### Список цитируемых источников

1. *Ахизер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 544 с.  
 Akhiezer N. I., Glazman I. M. (1993). Theory of linear operators in Hilbert space. 2 ed. Dover.

2. *Бербюк В. Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. — Киев: Наумова думка, 1989. — 192 с.  
Verbyuk V. E. (1989) Dynamics and optimization of robotics systems (in Russian). Kyiv: Naukova Dumka.
3. *Вибрации в технике: Справочник.* — М.: Машиностроение, 1978. — 362 с.  
Vibration in technics: handbook (in Russian). (1978). Moscow: Mashinostroenie.
4. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. — М.: Наука, 1967. — 414 с.  
Vulikh B. Z. (1963) Introduction to Functional Analysis for Scientists and Technologists. Elsevier Science and Technology.
5. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973. — 554 с.  
Krein M. G., Nudelman A. A. (1977). The Markov moment problem and extremal problems. Ideas and problems of P. L. Chebyshev and A. A. Markov and their future development // Translations of Mathematical Monographs. Vol. 50. American Mathematical Society, Providence, R.I.
6. *Кубышкин Е. П.* Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // Прикладная математика и механика — 1992. — Т. 56, №1. — С. 240–249.  
Kubyshkin Ye. P. (1992). Optimal control of the rotation of a solid with a flexible rod. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 56:2, 205-214.
7. *Кубышкин Е. П.* Оптимальное управление поворотом системы двух тел, соединенных упругим стержнем // ПММ. — 2014. — Т. 78, №5. — С. 656–670.  
Kubyshkin Ye. P. (2014). Optimal control of the rotation of a system of two bodies connected by an elastic rod. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 78:5, 468-479.
8. *Кубышкин Е. П., Трыахов М. С.* Optimal control of the behavior of solutions of an initial boundary value problem simulating rotation of a solid with an elastic rod // Automatic Control and Computer Sciences. — 2015. — Vol. 49, №7. — P. 597–607.

Получена 12.05.2016

УДК 314.15.926

# Устойчивые режимы динамических систем с импульсными воздействиями<sup>1</sup>

**Л. И. Ивановский**

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,  
Ярославль 150003. E-mail: *leon19unknown@gmail.com*

**Аннотация.** Рассматривается математическая модель системы из трех связанных, сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием. Для нее изучаются вопросы существования, устойчивости и асимптотического представления периодических решений на основании бифуркационного анализа специального двумерного отображения в зависимости от различных значений начальных параметров, а также краевых условий. Особое внимание уделяется числу сосуществующих устойчивых режимов. Данная работа состоит двух частей. Первая часть посвящена постановке задачи. В ней большое внимание уделяется математической модели и необходимым теоретическим выкладкам, подводящим к асимптотическому исследованию специального двумерного отображения. Здесь также рассказывается об особенностях численного исследования. Во второй части представлены результаты численного исследования. Здесь рассмотрены основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве специального двумерного отображения на основе теории бифуркаций.

**Ключевые слова:** устойчивый режим, фазовые перестройки, осциллятор.

## Stable modes of dynamical systems with impulses

**L. I. Ivanovsky**

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

**Abstract.** A mathematical model of a system of three coupled singularly perturbed oscillator with delay. For her study questions of existence and asymptotic stability of the periodic solutions based on the bifurcation analysis of a special two-dimensional map depending on different initial values of the parameters and boundary conditions. Particular attention is paid to the number of coexisting stable regimes. This work consists of two parts. The first part is devoted to the formulation of the problem. In it a lot of attention is paid to the mathematical model and the necessary theoretical calculations, the supplying to the asymptotic study of a special two-dimensional map. It also describes the features of the numerical studies. The second part presents the results of numerical studies. It describes the main adjustments occurring in the phase space of a special two-dimensional map based on bifurcation theory.

**Keywords:** stable mode, phase adjustment, oscillator.

**MSC 2010:** 34K26, 34A37, 34K18, 34K20, 39A28, 39A23

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158)

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим цепочку из трех связанных, сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием

$$\dot{u}_j = d(a_1 u_{j-1} - a_2 u_j + u_{j+1}) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

где  $u_j = u_j(t) > 0$  моделируют мембранные потенциалы нейронов, параметры  $a_1, a_2 \in \{0, 1, 2\}, \lambda \gg 1, \beta > 0, \alpha > 1 + \beta$ , а гладкие функции  $f(u), g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$  удовлетворяют условиям  $0 < \beta g(u) < \alpha, f(0) = g(0) = 1$  и  $f(u), g(u), u f'(u), u g'(u) = O(1/u)$  при  $u \rightarrow +\infty$ . В данной работе изучаются три вида систем (1) для различных значений параметров  $a_1, a_2$  и краевых условий на  $u_0, u_4$ : а)  $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_1, u_3 = u_4$ ; б)  $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_3, u_1 = u_4$ ; с)  $a_1 = 0, a_2 = 1, u_1 = u_4$ .

Для сингулярно возмущенной системы (1) во всех перечисленных случаях, в статьях [1-3] с помощью замен следующего вида

$$u_1 = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \ll 1,$$

$$u_j = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = 2, 3,$$

где  $x, y_1, \dots, y_{m-1}$  — новые переменные, было доказано, что они при достаточно большом  $\lambda$  могут быть сведены к двумерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений без малых параметров, но с импульсными воздействиями:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= d(e^{y_2} + a_1 e^{-y_1} - e^{y_1} - a_1 e^{-y_0}) \\ \dot{y}_2 &= d(e^{y_3} + a_1 e^{-y_2} - e^{y_2} - a_1 e^{-y_1}) \end{aligned} \quad (2)$$

$$y_j(+0) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y_j(-0), \quad y_j(1+0) = y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_j(+0),$$

$$y_j(\alpha+0) = (1 + \beta) y_j(\alpha-0), \quad y_j(\alpha+1+0) = y_j(\alpha+1-0) - \frac{\alpha}{1 + \beta} y_j(\alpha+0).$$

Значения переменных  $y_0, y_3$  зависят от начальных условий на  $u_0$  и  $u_4$ : а)  $u_0 = u_1, u_3 = u_4: y_0 = y_3 = 0$ ; б)  $u_0 = u_3, u_1 = u_4: y_0 = y_3 = -(y_1 + y_2)$ ; с)  $u_1 = u_4: y_3 = -(y_1 + y_2)$

Рассмотрим решения системы (2)  $y_1(t, z_1, z_2), y_2(t, z_1, z_2)$  с начальными условиями  $y_1(-0, z_1, z_2) = z_1, y_2(-0, z_1, z_2) = z_2$ . Для отображения

$$\Phi(z) : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1(T_0, z_1, z_2) \\ y_2(T_0, z_1, z_2) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

в статьях [1-3] было доказано, что экспоненциально устойчивым неподвижным точкам отображения (3) соответствуют орбитально асимптотически устойчивые

циклы систем (1) и (2). Другими словами, для того, чтобы говорить об устойчивых циклах системы (1) и системы (2) соответственно, достаточно изучить неподвижные точки отображения (3). Они и являлись объектами исследования. В отображении (3) функции  $y_1(t, z_1, z_2)$  и  $y_2(t, z_1, z_2)$  имеют начальные условия  $y_1(-0) = z_1, y_2(-0) = z_2$ . Эти функции связаны с исходными переменными приближенными равенствами  $y_1 \approx \ln u_2 - \ln u_1, y_2 \approx \ln u_3 - \ln u_2$  соответственно и характеризуют фазовые сдвиги между компонентами системы (1). Величина  $T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1)$  определяет главную часть периода устойчивого цикла одиночного осциллятора системы (1).

Асимптотический анализ отображения (3) позволяет показать, что при достаточно малых значениях параметра  $d$  оно имеет как минимум четыре устойчивые неподвижные точки. При этом нулевое состояние равновесия устойчиво для любых значений  $d$ . Ему соответствует однородный (синхронный) цикл системы (1). Задача исследования состоит в определении таких значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых отображение (3) имеет наибольшее число устойчивых неподвижных точек. Также изучались вопросы фазовых перестроек, происходящих в фазовом пространстве отображения (3). Поскольку описать динамические свойства отображения (3) в полной мере с использованием одного лишь аналитического аппарата затруднительно, исследование осуществлялось с помощью специально разработанного приложения. Расчет координат неподвижных точек осуществлялся параллельно, с помощью одновременного вычисления облака траекторий на независимых потоках центрального процессора компьютера. Полученные численные результаты отображаются в виде фазового портрета отображения (3). В зависимости от различных значений начальных параметров изучаются вопросы существования и устойчивости релаксационных периодических решений. В процессе исследования, особое внимание уделялось числу сосуществующих устойчивых режимов отображения (3).

## 2. Результаты численного исследования

### 2.1. Случай $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_1, u_3 = u_4$

На координатной плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  можно выделить области  $A_1, A_2, A_3$  и кривые  $l_0, \dots, l_4$ . Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 1.

Наиболее важным элементом построения введенных областей, является прямая  $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$ . Относительно нее симметрично проведены кривые  $l_2$  и  $l_3$ , касающиеся  $l_0$  в точке  $(2, 0)$ . Они являются границами области  $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_3, \beta < l_2\}$ . Также в точке  $(2, 0)$  проведена кривая  $l_4$ , касательная к прямой  $l_0$ , в совокупности с осью абсцисс образующая границы области  $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_4\}$ . Двусвязная область  $A_3$  представляется в виде:  $A_3 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_2, \beta < l_1; \beta > l_4, \beta < l_3\}$ , где прямая  $l_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1\}$ .

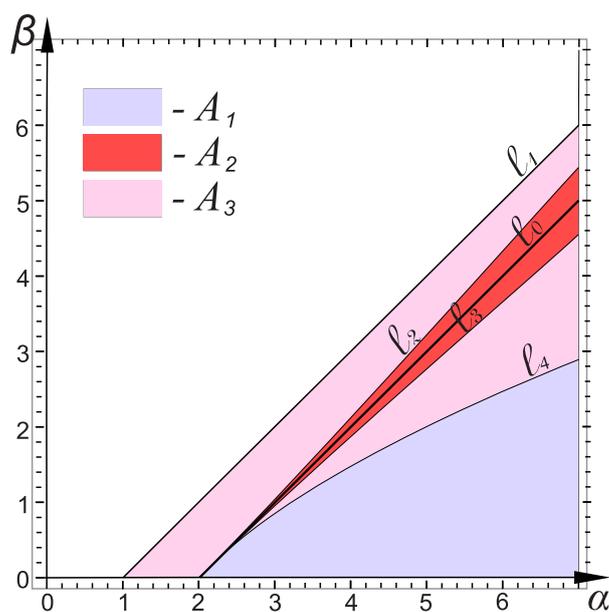


Рис. 1. Области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Далее, как и в статьях [5, 6], рассмотрим типичные бифуркации для каждой из введенных областей.

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_1$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий бифуркационных перестроек. Для определенности возьмем  $\alpha = 5,0$  и  $\beta = 0,4$  и начнем менять значение параметра  $d$ . Подобный численный анализ отображения (3) позволяет получить следующую последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,019$  отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек и шесть неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 2а. Буквами  $S_j$  обозначены устойчивые, а  $U_j$  — неустойчивые неподвижные точки, черными линиями показаны сепаратрисы, а серыми — некоторые фазовые кривые.
2. При  $d = d_1$  два симметричных друг другу седла  $U_5$  и  $U_6$  сливаются с самосимметричной точкой  $S_4$  и отбирают у нее устойчивость, образуя седло  $U'$ .
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,031$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и пять неустойчивых. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 2б.

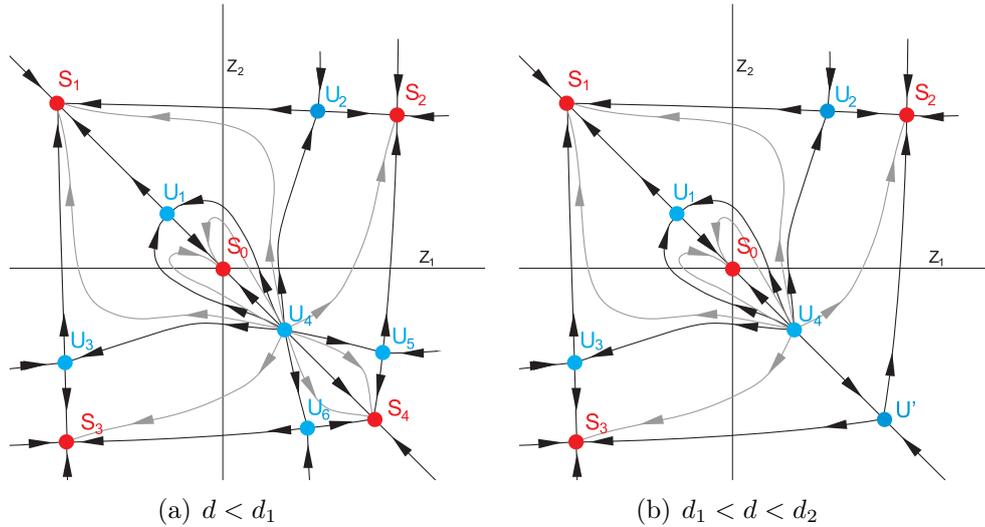


Рис. 2. Фазовые портреты отображения

4. При  $d = d_2$  неустойчивый узел  $U_4$  и седло  $U_7$ , сливаясь, пропадают.
5. При  $d_2 < d < d_3$ ;  $d_3 \approx 0,059$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и три неустойчивые. Схема фазового пространства представлена на рис. 3а.
6. При  $d = d_3$  устойчивый узел  $S_1$  и седло  $U_1$ , сливаясь друг с другом, пропадают.
7. При  $d_3 < d < d_4$ ;  $d_4 \approx 0,127$  отображение имеет три устойчивые неподвижные точки и две неустойчивые. Фазовый портрет изображен на рис. 3б.

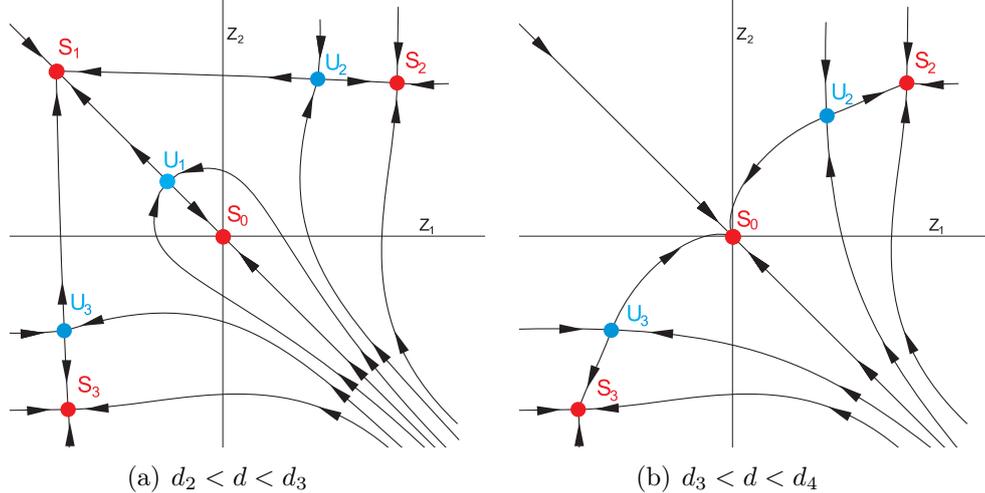


Рис. 3. Фазовые портреты отображения

8. Последняя бифуркация происходит при  $d = d_4$ . Симметричные друг другу устойчивые узлы  $S_2$  и  $S_3$  сливаются с симметричными седлами  $U_2$  и  $U_3$  и

исчезают. Тем самым, при  $d > d_4$  отображение имеет единственное нулевое устойчивое состояние.

Полученный сценарий фазовых перестроек верен для любых  $(\alpha, \beta) \in A_1$ . Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра  $d$ .

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_2$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий бифуркационных перестроек. Для удобства зафиксируем величины  $\alpha = 5.0$  и  $\beta = 3.0$ . При изменении параметра  $d$  для заданных величин  $\alpha$  и  $\beta$  получается следующая последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,047$  отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек и восемь неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета отображения для данного случая можно увидеть на рис. 4а.
2. При  $d = d_1$  от устойчивого самосимметричного узла  $S_{12}$  ответвляется пара симметричных друг другу устойчивых узлов  $S_1$  и  $S_2$  и самосимметричная седловая точка  $U_9$ . Одновременно с этой бифуркацией подобная происходит и с устойчивым узлом  $S_{56}$ . Он также распадается на два устойчивых узла  $S_5$  и  $S_6$  и седло  $U_{10}$ .
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,056$  отображение имеет семь устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 4б.

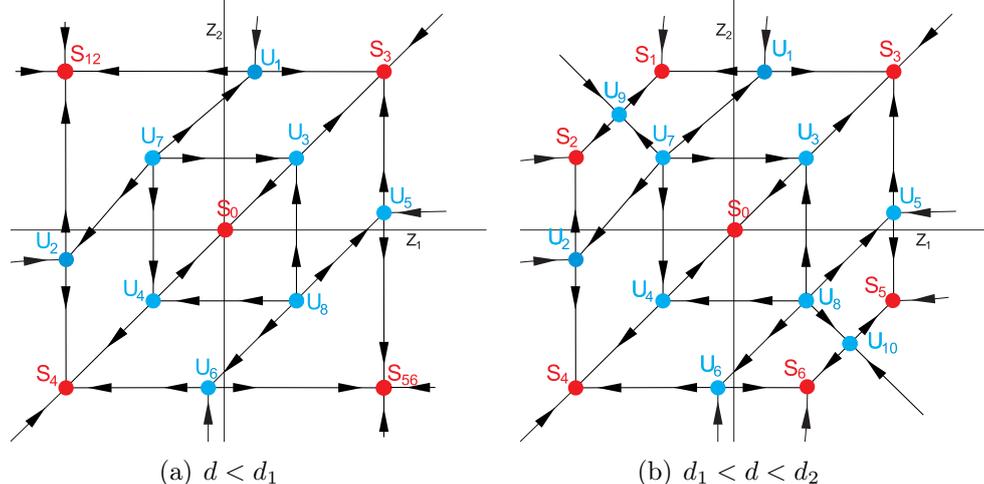


Рис. 4. Фазовые портреты отображения

4. При  $d = d_2$  неустойчивые узлы  $U_7$  и  $U_8$  сливаются соответственно с седловыми точками  $U_9$  и  $U_{10}$ .
5. При  $d_2 < d < d_3$ ;  $d_3 \approx 0,058$  отображение имеет семь устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 5а.

6. При  $d = d_3$  симметричные друг другу устойчивые узлы  $S_1$  и  $S_2$  сливаются с симметричными седлами  $U_1$  и  $U_2$  и исчезают. Одновременно с этим проходит также аналогичная бифуркация, в результате которой исчезают устойчивые узлы  $S_5$  и  $S_6$  и седла  $U_5$  и  $U_6$ .
7. При  $d_3 < d < d_4$ ;  $d_4 \approx 0,172$  отображения имеет три устойчивые и две неустойчивые неподвижные точки. Фазовый портрет изображен на рис. 5б.

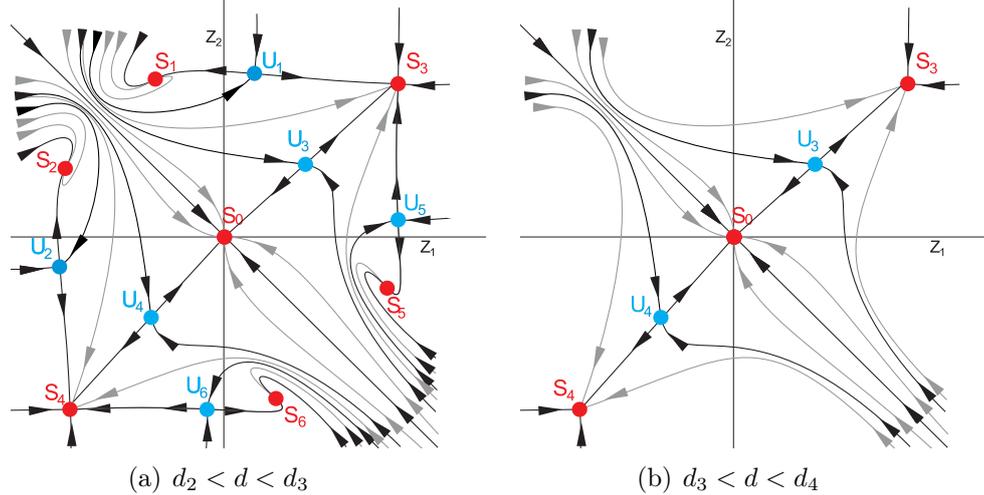


Рис. 5. Фазовые портреты отображения

8. Наконец, при  $d = d_4$  симметричные друг другу устойчивые узлы  $S_3$  и  $S_4$  сливаются с симметричными седлами  $U_3$  и  $U_4$  и исчезают. При  $d > d_4$  отображение имеет единственное нулевое устойчивое состояние.

Далее численно было исследовано поведение отображения в подобластях  $A'_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_2\}$  и  $A''_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_3, \beta < l_0\}$ . Эти области образованы разделением области  $A_2$  прямой  $l_0$  на две компоненты. Обнаружилось, что во введенных областях нарушена одновременность протекания бифуркаций распада устойчивых узлов  $S_{12}$  и  $S_{56}$ , а также последующих бифуркаций слияния их компонент. Для области  $A'_2$  характерен сдвиг бифуркации распада устойчивого узла  $S_{12}$  по  $d$  вперед. Она происходит при большем  $d$ . Также бифуркация распада устойчивого узла  $S_{56}$  сдвигается по  $d$  назад и происходит при меньшем  $d$  соответственно. Для области  $A''_2$  наоборот свойственен сдвиг бифуркации распада  $S_{12}$  по  $d$  назад, а узла  $S_{56}$  — вперед.

Поскольку область  $A_3$  - двусвязная, рассмотрим следующие ее подобласти:

$$A'_3 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_2, \beta < l_1\}, \quad A''_3 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_4, \beta < l_3\}.$$

Для значений  $(\alpha, \beta) \in A'_3$ , например, при  $\alpha = 4,0$  и  $\beta = 2,3$  наблюдаются следующие бифуркации:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0.04$  отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек и восемь неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета отображения для данного случая можно увидеть на рис. 6а.
2. При  $d = d_1$  от устойчивого самосимметричного узла  $S_{12}$  ответвляется пара симметричных друг другу устойчивых узлов  $S_1$  и  $S_2$  и самосимметричная седловая точка  $U_9$ .

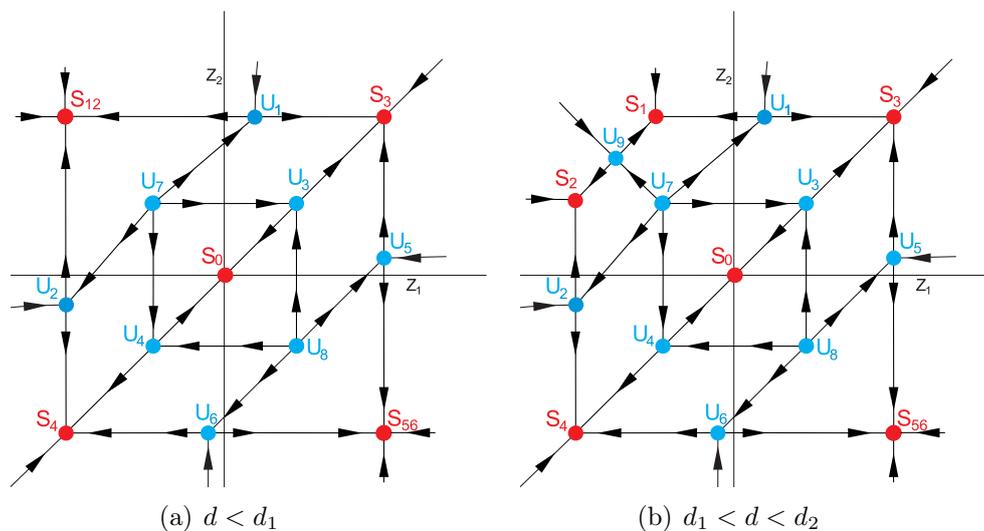


Рис. 6. Фазовые портреты отображения

3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,049$  отображение имеет шесть устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 6б.
4. При  $d = d_2$  симметричные друг другу устойчивые узлы  $S_1$  и  $S_2$  сливаются с симметричными седлами  $U_1$  и  $U_2$  и исчезают.
5. При  $d_2 < d < d_3$ ;  $d_3 \approx 0,053$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки. Фазовый портрет изображен на рис. 7а.
6. При  $d = d_3$  неустойчивый узел  $U_7$  сливается с седловой точкой  $U_9$ .
7. При  $d_3 < d < d_4$ ;  $d_4 \approx 0,055$  отображение по-прежнему имеет четыре устойчивые неподвижные точки. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 7б.

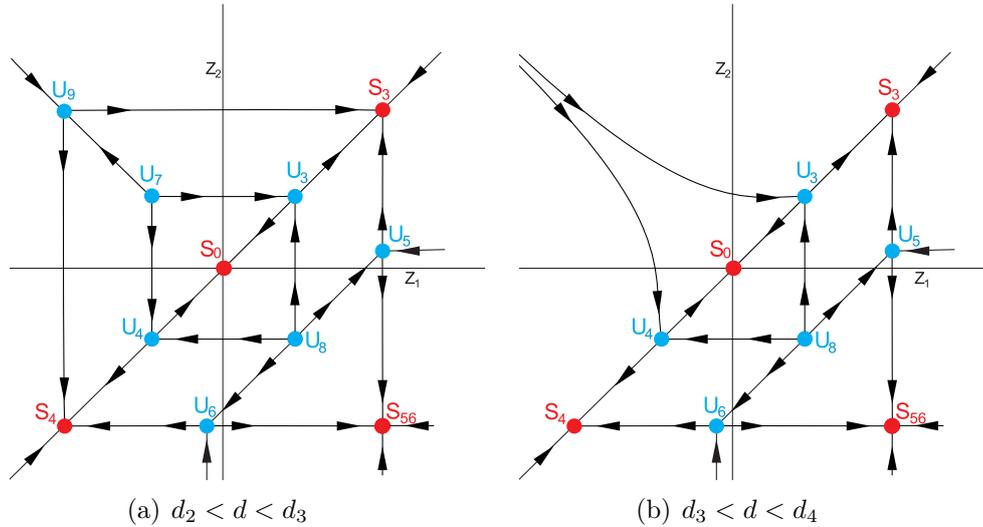


Рис. 7. Фазовые портреты отображения

8. При  $d = d_4$  от устойчивого самосимметричного узла  $S_{56}$  ответвляется пара симметричных друг другу устойчивых узлов  $S_5$  и  $S_6$  и самосимметричная седловая точка  $U_{10}$ .
9. При  $d_4 < d < d_5$ ;  $d_5 \approx 0,057$  отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 8а.
10. При  $d = d_5$  неустойчивый узел  $U_8$  сливается с седловой точкой  $U_{10}$ . Одновременно с этим симметричные устойчивые неподвижные точки  $S_5$  и  $S_6$  меняют свой тип и становятся устойчивыми фокусами.
11. При  $d_5 < d < d_6$ ;  $d_6 \approx 0,069$  отображение имеет пять устойчивых неподвижных точек. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 8б.

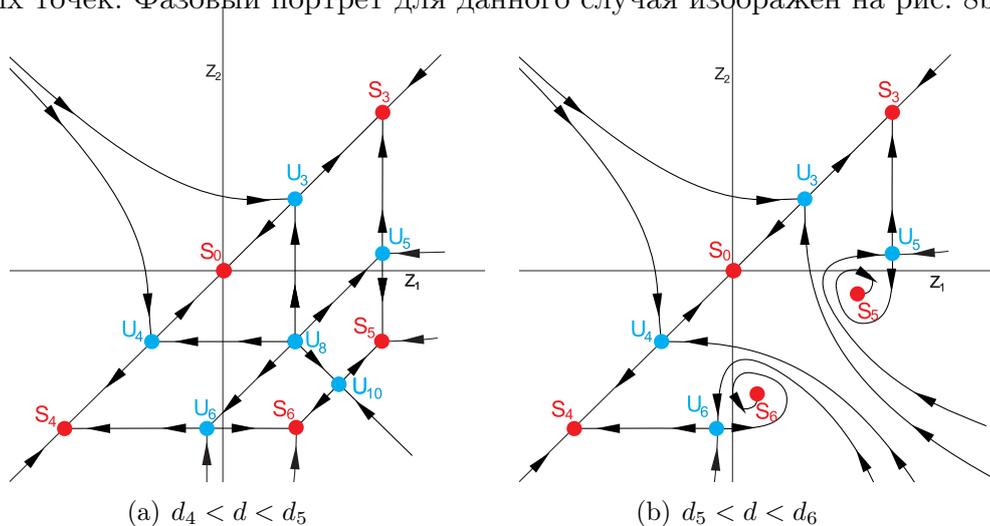


Рис. 8. Фазовые портреты отображения

12. При  $d = d_6$  симметричные друг другу устойчивые фокусы  $S_5$  и  $S_6$  сливаются с симметричными седлами  $U_5$  и  $U_6$  и исчезают.
13. При  $d_6 < d < d_7$ ;  $d_7 \approx 0,17$  отображение имеет три устойчивые неподвижные точки и две неустойчивые. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 9.

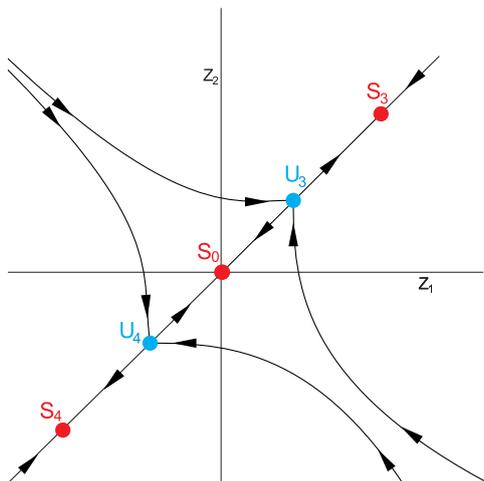


Рис. 9. Фазовый портреты отображения при  $d_6 < d < d_7$

14. Наконец, при  $d = d_6$  симметричные друг другу устойчивые узлы  $S_3$  и  $S_4$  сливаются с симметричными седлами  $U_3$  и  $U_4$  и исчезают. При  $d > d_6$  отображение имеет единственное нулевое устойчивое состояние.

Полученный сценарий фазовых перестроек характерен для любых  $(\alpha, \beta) \in A'_3$ . Отличия от рассмотренного случая могут состоять в очередности бифуркации исчезновения симметричных друг другу устойчивых узлов  $S_1$  и  $S_2$  и бифуркации слияния неустойчивого узла  $U_7$  с седлом  $U_9$ . Аналогичные изменения возможны с узлами  $S_5$  и  $S_6$  и неустойчивыми точками  $U_8$  и  $U_{10}$ .

## 2.2. Случай $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_3, u_1 = u_4$

На координатной плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  можно выделить области  $A_1, A_2, A_3$  и кривые  $l_0, \dots, l_3$ . Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 10.

Наиболее важным элементом построения введенных областей является прямая  $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$ . Относительно нее симметрично проведены кривые  $l_2$  и  $l_3$ , касающиеся  $l_0$  в точке  $(2, 0)$ . Эти кривые являются границами области  $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_2, \beta < l_1\}$ , где прямая  $l_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1\}$ . Области  $A_1$  и  $A_3$  представляются в виде  $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_3\}$  и  $A_3 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_2, \beta < l_3\}$  соответственно.

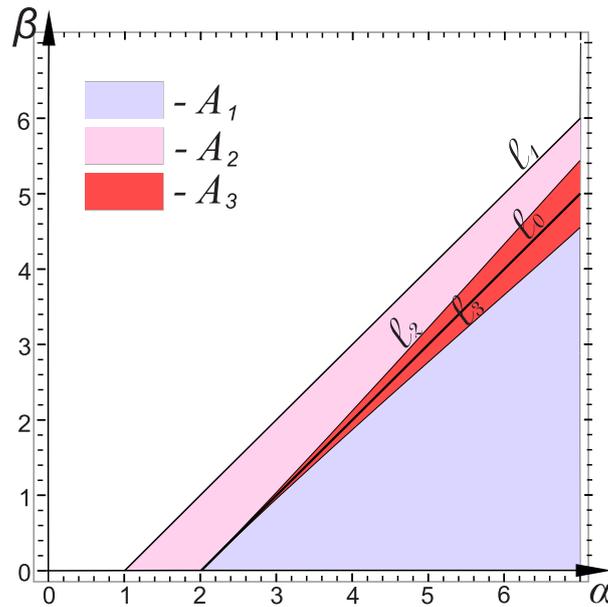


Рис. 10. Области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Далее, как и в статье [4], рассмотрим типичные бифуркации для каждой из введенных областей.

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_1$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для определенности возьмем  $\alpha = 5,0$  и  $\beta = 0,4$ . При изменении параметра  $d$  для заданных величин  $\alpha$  и  $\beta$  получается следующая последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,021$  отображение (3) имеет семь устойчивых неподвижных точек и двенадцать неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 11а.
2. При  $d = d_1$  три пары симметричных друг относительно друга седел  $U_7$  и  $U_8$ ,  $U_9$  и  $U_{10}$ ,  $U_{11}$  и  $U_{12}$  одновременно сливаются с устойчивыми узлами  $S_2$ ,  $S_4$  и  $S_6$ , отбирая у них устойчивость, образуя седла  $U'_2$ ,  $U'_4$  и  $U'_6$  соответственно.
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,031$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и девять неустойчивых. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 11б.

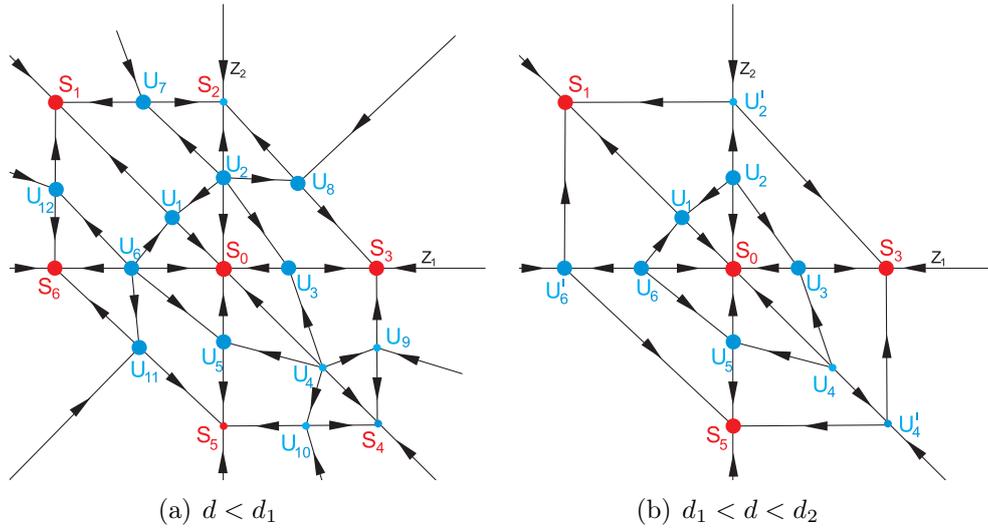
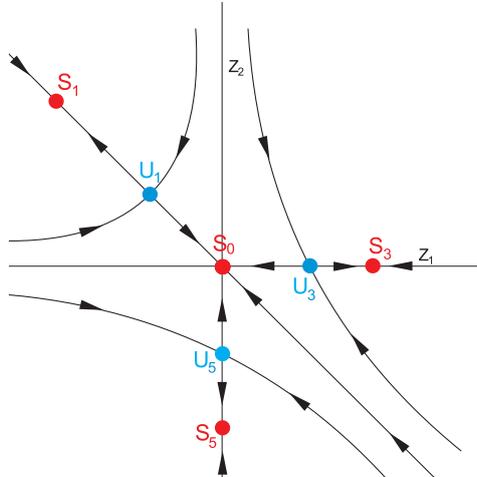


Рис. 11. Фазовые портреты отображения

4. При  $d = d_2$  неустойчивые узлы  $U'_2$ ,  $U'_4$  и  $U'_6$  одновременно сливаются с неустойчивыми седлами  $U_2$ ,  $U_4$  и  $U_6$ , и пропадают.
5. При  $d_2 < d < d_3$ ;  $d_3 \approx 0,058$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и три неустойчивые, как это представлено представлено на рис. 12.

Рис. 12. Фазовый портрет отображения при  $d_2 < d < d_3$ 

6. Последняя бифуркация происходит при  $d = d_3$ . Устойчивые узлы  $S_1$ ,  $S_3$  и  $S_5$ , сливаясь с седлами  $U_1$ ,  $U_3$  и  $U_5$ , пропадают. Тем самым, при  $d > d_4$  отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние.

Полученный сценарий фазовых перестроек верен для любых  $(\alpha, \beta) \in A_1$ . Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра  $d$ .

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_2$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для удобства зафиксируем величины  $\alpha = 1,9$  и  $\beta = 0,1$  и будем менять значение параметра  $d$ . В результате для отображения (3) получим следующую последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,003$  модельное отображение имеет семь устойчивых неподвижных точек и двенадцать неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета отображения (3) для этого случая можно увидеть на рис. 13а.
2. При  $d = d_1$  три пары симметричных друг относительно друга седла  $U_7$  и  $U_{12}$ ,  $U_8$  и  $U_9$ ,  $U_{10}$  и  $U_{11}$  одновременно сливаются с устойчивыми узлами  $S_1$ ,  $S_3$  и  $S_5$ , отбирая у них устойчивость, и тем самым, образуя седла  $U'_1$ ,  $U'_3$  и  $U'_5$  соответственно.
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,006$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и девять неустойчивых. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 13б.

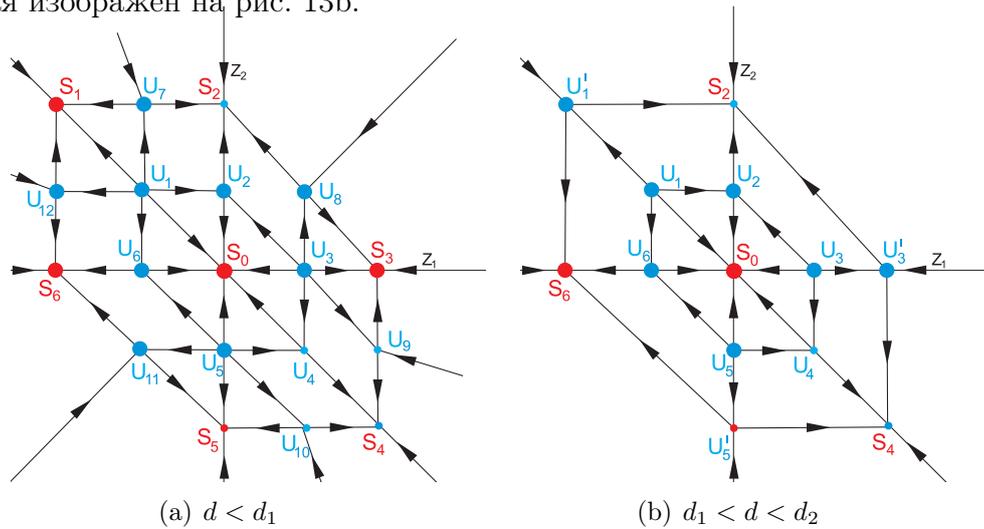
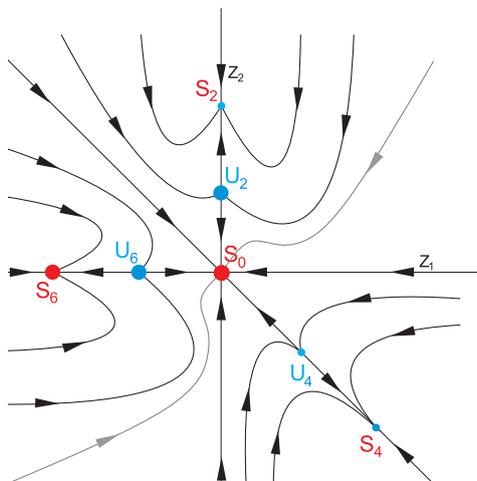


Рис. 13. Фазовые портреты отображения

4. При  $d = d_2$  неустойчивые узлы  $U'_1$ ,  $U'_3$  и  $U'_5$  одновременно сливаются с неустойчивыми седлами  $U_1$ ,  $U_3$  и  $U_5$  и пропадают.
5. При  $d_2 < d < d_3$ ;  $d_3 \approx 0,021$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и три неустойчивые, как это представлено на рис. 14.
6. Последняя бифуркация происходит при  $d = d_3$ . Устойчивые узлы  $S_2$ ,  $S_4$  и  $S_6$ , сливаясь с седлами  $U_2$ ,  $U_4$  и  $U_6$ , пропадают. Тем самым, при  $d > d_4$  отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние.

Рис. 14. Фазовый портрет отображения при  $d_2 < d < d_3$ 

Полученный сценарий фазовых перестроек верен для любых  $(\alpha, \beta) \in A_2$ . Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра  $d$ .

Рассмотрим фазовые портреты с наибольшим числом устойчивых состояний равновесия (рис. 11а и 13а). Различия в них заключаются лишь в том, что в первом случае точки  $U_1, U_3, U_5$  являлись неустойчивыми седлами, точки  $U_2, U_4, U_6$  являлись неустойчивыми узлами, а во втором случае — все в точности до наоборот. В связи с этим возник вопрос, как изменяется поведение состояний равновесия  $U_1, \dots, U_6$  при переходе из одной области параметров в другую. В результате численного исследования, при зафиксированных  $\alpha$  и  $d$  и изменении значения  $\beta$  была обнаружена область параметров  $A_3$ , для которой обнаруживалось существование шести устойчивых и шести неустойчивых режимов, а также неустойчивого многообразия  $M_U$ , каждая точка которого является неустойчивым состоянием равновесия (см. рис. 15):

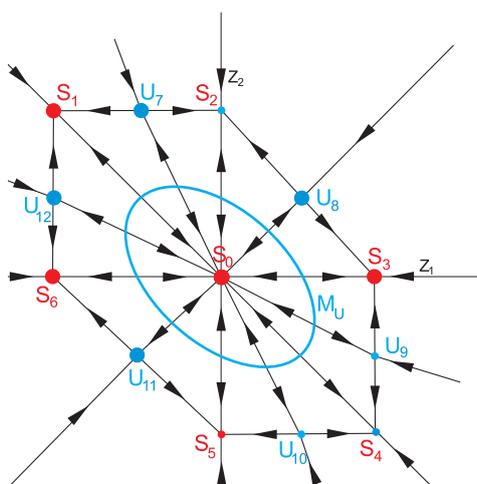


Рис. 15. Фазовый портрет отображения

Для области  $A_3$  рассмотрим следующие подобласти:

$$A'_3 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_3, \beta < l_0\}, \quad A''_3 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_2\}.$$

При увеличении параметра  $d$  для любых значений пары  $(\alpha, \beta)$  из областей  $A'_3$  и  $A''_3$  в фазовом пространстве отображения наблюдается тот же сценарий фазовых перестроек, что и для областей  $A_1$  и  $A_2$  соответственно.

### 2.3. Случай $a_1 = 0, a_2 = 1, u_1 = u_4$

На координатной плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  можно выделить области  $A_1, A_2, A_3$  и кривые  $l_0, \dots, l_5$ . Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 16.

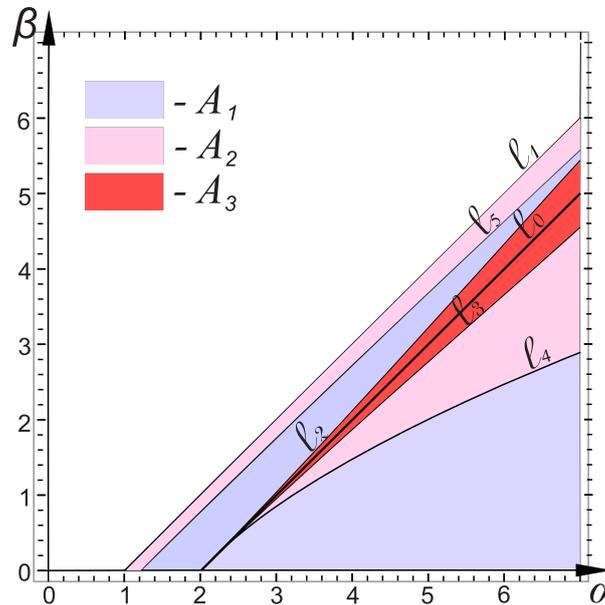


Рис. 16. Области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Наиболее важным элементом построения введенных областей, является прямая  $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$ . Относительно нее симметрично проведены кривые  $l_2$  и  $l_3$ , касающиеся  $l_0$  в точке  $(2, 0)$ . Эти кривые являются границами области  $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_3, \beta < l_2\}$ . В точке  $(2, 0)$  проведена еще и кривая  $l_4$ , касательная к прямой  $l_0$ . Также на рис. 16 имеется прямая  $l_5$ , которая по мере увеличения значения параметра  $\alpha$  приближается к прямой  $l_0$ . В совокупности прямые  $l_1, \dots, l_5$  образуют границы двусвязных областей  $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_4; \beta > l_2, \beta < l_5\}$  и  $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_4, \beta < l_3; \beta > l_5, \beta < l_1\}$ .

Далее рассмотрим типичные бифуркации для каждой из введенных областей.

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_1$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий бифуркационных перестроек. Для определенности возьмем  $\alpha = 3,6$  и  $\beta = 0,4$ .

При изменении параметра  $d$  для заданных величин  $\alpha$  и  $\beta$  получаются следующие бифуркации:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,008$  отображение имеет четыре устойчивых неподвижных точек и девять неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета для этого случая можно увидеть на рис. 17а.
2. При  $d = d_1$  три узла  $U_1$ ,  $U_3$  и  $U_5$  одновременно сливаются с седлами  $U_7$ ,  $U_8$  и  $U_9$  и исчезают.
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,19$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и три неустойчивые. Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 17б.

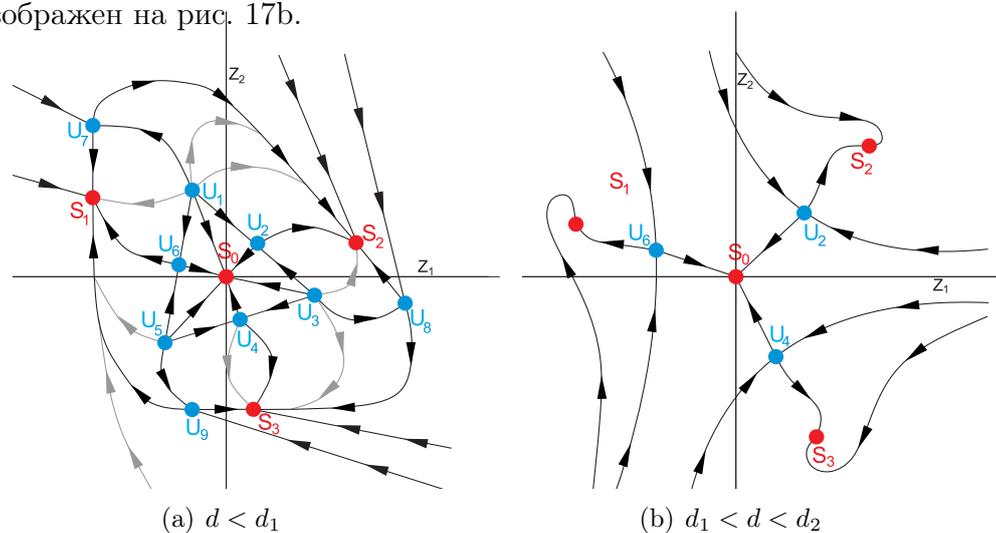


Рис. 17. Фазовые портреты отображения

4. Последняя бифуркация происходит при  $d = d_2$ . Устойчивые узлы  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , сливаясь с седлами  $U_6$ ,  $U_2$  и  $U_4$  пропадают. Тем самым, при  $d > d_2$  отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние.

Полученный сценарий фазовых перестроек верен для любых  $(\alpha, \beta) \in A_1$ . Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра  $d$ .

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_2$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для удобства зафиксируем величины  $\alpha = 1,9$  и  $\beta = 0,1$  и будем менять значение параметра  $d$ . В результате для отображения (3) получим следующую последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,316$  отображение имеет четыре устойчивых неподвижных точек и девять неустойчивых. Схематическое изображение фазового портрета для этого случая можно увидеть на рис. 18а.

2. При  $d = d_1$  седла  $U_7, U_8$  и  $U_9$  одновременно подходят к седлам  $S_1, S_2$  и  $S_3$ , сливаются с ними и образуют устойчивое многообразие  $M_S$ , по которому осуществляется движение по часовой стрелке. При этом неустойчивые состояния равновесия  $U_1, U_3$  и  $U_5$  становятся фокусами.
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,317$  отображение имеет три неустойчивые и одну устойчивую неподвижные точки, а также устойчивое многообразие. Сепаратрисы, идущие из точек  $U_1, \dots, U_6$  бесконечно приближаются к устойчивому многообразию  $M_S$ . Фазовый портрет в данном случае имеет вид, изображенный на рис. 18b.

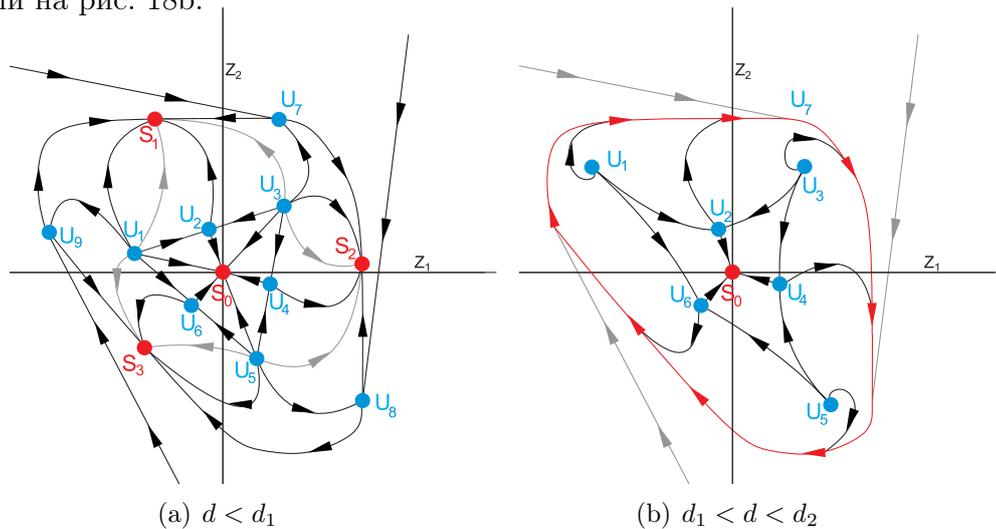


Рис. 18. Фазовые портреты отображения

4. При  $d = d_2$  от неустойчивых узлов  $U_1, U_3$  и  $U_5$  отделяются неустойчивые многообразия. Тем самым неустойчивые фокусы  $U_1, U_3$  и  $U_5$  становятся устойчивыми фокусами  $S'_1, S'_2$  и  $S'_3$ .
5. При  $d_2 < d < d_3$ ;  $d_3 \approx 0,3174$  отображение имеет три неустойчивые и четыре устойчивые неподвижные точки, а также одно устойчивое и три неустойчивых многообразия. Сепаратрисы, идущие из точек  $U_2, U_4$  и  $U_6$  бесконечно приближаются к устойчивому многообразию  $M_S$ . Фазовый портрет для данного случая изображен на рис. 19a.
6. При  $d = d_3$  три неустойчивых многообразия, расположенные вокруг фокусов  $S'_1, S'_2$  и  $S'_3$  одновременно сливаются с устойчивым многообразием  $M_S$  и пропадают.
7. При  $d_3 < d < d_4$ ;  $d_4 \approx 0,3178$  отображение имеет четыре устойчивые неподвижные точки и три неустойчивых. Фазовый портрет в данном случае имеет вид, изображенный на рис. 19b.

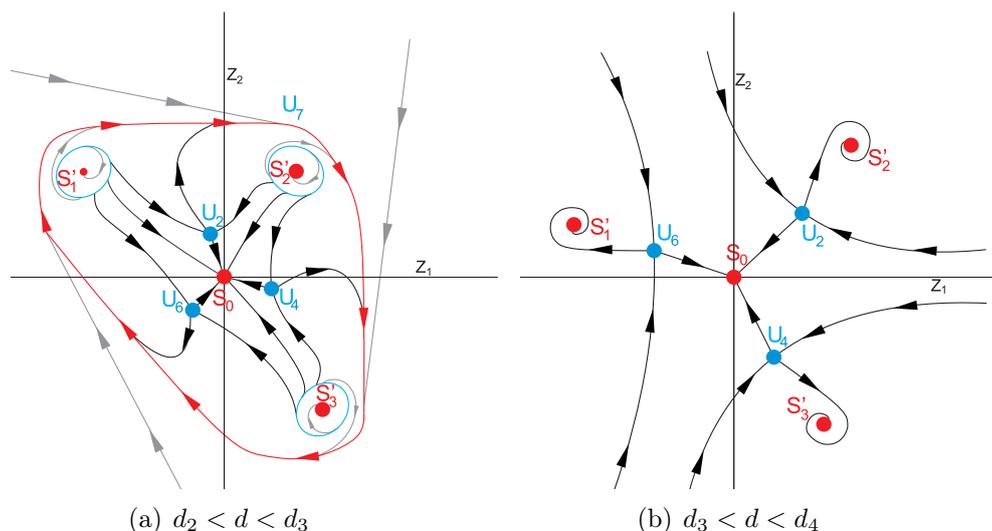


Рис. 19. Фазовые портреты отображения

8. Последняя бифуркация происходит при  $d = d_4$ . Неустойчивые седла  $U_2, U_4$  и  $U_6$ , сливаясь с устойчивыми фокусами  $S'_2, S'_3$  и  $S'_1$  соответственно, пропадают. Тем самым, при  $d > d_4$  отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние.

Полученный сценарий фазовых перестроек верен для любых  $(\alpha, \beta) \in A_2$ . Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра  $d$ .

При изменении параметра  $d$  для любых фиксированных значений пары  $(\alpha, \beta) \in A_3$  в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий бифуркационных перестроек. Для удобства зафиксируем величины  $\alpha = 2,1$  и  $\beta = 0,1$  и будем менять значение параметра  $d$ . В результате для отображения (3) получим следующую последовательность бифуркаций:

1. При  $d < d_1$ ;  $d_1 \approx 0,013$  отображение имеет семь устойчивых и шесть неустойчивых неподвижных точек, а также неустойчивое многообразие  $M_U$ , по которому осуществляется движение по часовой стрелке. Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 20а.
2. При  $d = d_1$  неустойчивые узлы  $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$  одновременно сливаются с устойчивыми седлами  $S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_1$  и исчезают, образуя тем самым устойчивое многообразие  $M_S$ .
3. При  $d_1 < d < d_2$ ;  $d_2 \approx 0,017$  отображение имеет одно устойчивое и одну неустойчивое многообразие, движение по которым осуществляется по часовой стрелке. Фазовый портрет в данном случае имеет вид, изображенный на рис. 20б.

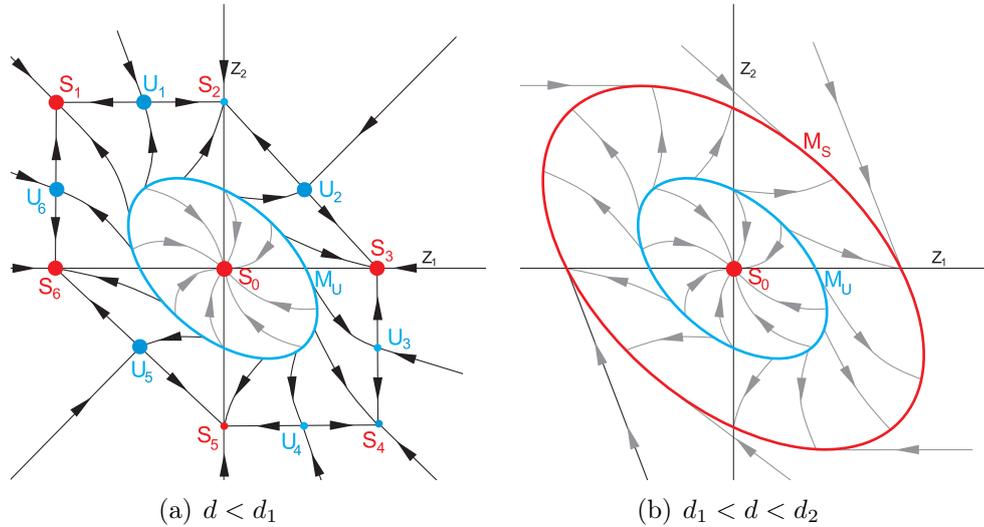


Рис. 20. Фазовые портреты отображения

4. Последняя бифуркация происходит при  $d = d_2$ . Устойчивое многообразие  $M_S$  приближается к неустойчивому  $M_U$ , сливается с ним и пропадает. Тем самым, при  $d > d_2$  отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние.

### 3. Заключение

Для трех видов динамических систем с импульсными воздействиями, на координатной плоскости параметров были выделены области, соответствующие различным бифуркационным сценариям. Благодаря численному исследованию, в каждой из областей были подробно рассмотрены основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве соответствующего двумерного отображения. Также были установлены множества значений начальных параметров, при которых возможно одновременное сосуществование большего числа устойчивых неподвижных точек.

#### Список цитируемых источников

1. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I // Дифференциальные уравнения — 2011. — Т. 47, №7. — С. 919–932.  
Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. Relaxation self-oscillations in neuron systems. I. Differential Equations 47:7, 927-941.
2. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II // Дифференциальные уравнения — 2011. — Т. 47, №12. — С. 1675–1692.  
Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. (2011). Relaxation self-oscillations in neuron systems. II. Differential Equations, 47:12, 1697–1713.

3. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III // Дифференциальные уравнения — 2012. — Т. 48, №2. — С. 155–170.  
Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. (2012). Relaxation self-oscillations in neuron systems. III. Differential Equations, 48:2, 159–175.
4. Ивановский Л. И. Динамические свойства одного класса импульсных систем // Вычисл. техн. в естеств. науках. Методы суперкомп. модел. Ч. 3 — 2015. — С. 126–131.  
Ivanovsky L. I. (2015). Dynamical properties of a class of impulsive systems (in Russian). Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers. Part 3. Proceedings, 126–131.
5. Ивановский Л. И., Самсонов С. О. Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием // Модел. и анализ информ. систем — 2014. — Т. 21, №6. — С. 179–181.  
Ivanovsky L. I., Samsonov S. O (2014). Phase rebuildings of one two-dimensional dynamic system with impulsive influences (in Russian). Modeling and Analysis of Information Systems, 21:6, 179–181.
6. Ивановский Л. И., Самсонов С. О. Динамика одного двумерного отображения и устойчивые режимы сингулярно возмущенной системы нейронного типа // Вычисл. техн. в естеств. науках. Методы суперкомп. модел. Ч. 2 — 2015. — С. 121–132.  
Ivanovsky L. I., Samsonov S. O. (2015). Dynamics of two-dimensional mapping and stable regimes of singularly perturbed neuron system (in Russian). Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers. Part 2. Proceedings, 121-132.

Получена 25.05.2016

УДК 519.713.5+528.854.4

# Количественная оценка изменений на полутоновых изображениях клеточным автоматом

**А. А. Максимов**

ООО «Сбербанк-Сервис»

Ярославль 150003. E-mail: maksimov\_aa@outlook.com

**Аннотация.** Предлагается новый подход к оценке изменений (яркостных, конфигурационных и их композиций) для двух последовательных полутоновых изображений одной и той же сцены, полученных в разные моменты времени. Приводится математическое обоснование предложенных показателей. Для определения этих показателей предлагается параллельная вычислительная модель, основанная на концепции клеточных автоматов с диффузионной динамикой. Приводится пример реализации предложенного подхода.

**Ключевые слова:** сравнение изображений, клеточный автомат, диффузия

## Quantitative evaluation of changes on grayscale images by cellular automaton

**A. A. Maksimov**

Sberbank-Service Ltd, Yaroslavl 150003.

**Abstract.** A new approach to estimate changes in brightness, configuration and their compositions for two grayscale images of the same scene is proposed. A mathematical justification for the proposed indicators of such changes is fulfilled. To determine these indicators we propose parallel computing model based on the concept of cellular automata with the diffusion dynamics.

**Keywords:** digital image processing, cellular automata, diffusion processes.

**MSC 2010:** 37B15, 68U10

## Введение

Обнаружение и оценка изменений областей на последовательности цифровых изображений — важная задача, возникающая в таких прикладных областях как анализ данных, полученных с геостационарных спутников (обнаружение и анализ облачности, динамика изменения объектов урбанистического и природного происхождения) [2], рентгеноскопический контроль качества, разработка охранных систем и др.

Фактически эта задача сводится к сравнению двух снимков одной сцены, полученных неподвижной камерой в разные моменты времени. Несмотря на простоту формулировки, эта задача является достаточно сложной. Дело в том, что

даже для черно-белых изображений, в которых области естественно интерпретировать как связанные компоненты черного цвета на белом фоне трудно, а иногда и невозможно, установить некоторое взаимно-однозначное соответствие между компонентами разных снимков. Это связано с тем, что компоненты могут менять положение, форму, сливаться и дробиться. Для полутоновых изображений задача усложняется, поскольку помимо конфигурационных изменений возможны изменения яркости пикселей. Таким образом возникает проблема строгой формализации задачи.

Вторая проблема связана с трудоемкостью алгоритмов. Любой последовательный алгоритм, обнаруживающий измененные области и вычисляющий величину относительного изменения, фактически должен проанализировать каждый пиксель изображения, что потребует недопустимо большого времени получения результата. Следовательно, алгоритм должен допускать максимально возможное распараллеливание в рамках определенной вычислительной модели.

В работе [4] был предложен подход к решению задачи оценки изменений для бинарных изображений. Суть его заключалась в использовании клеточного автомата с диффузионной динамикой для получения требуемых результатов. Клеточный автомат, по-видимому, является простейшей вычислительной моделью параллельного типа, наиболее подходящей для решения задач обработки изображений [9, 10]. В настоящее время существуют компьютерные технологии (например, CUDA), которые позволяют реализовывать клеточные автоматы в «железе». В данной работе предлагается адаптировать указанный подход для полутоновых изображений

## 1. Области на полутоновых изображениях

Растровое полутоновое изображение  $K$  кодируется в цифровом виде с помощью битовой карты — матрицы  $K = (K(i, j))$ , хранящей значения яркости элементов изображения (пикселей). Для хранения изображения в памяти под величину  $K(i, j)$  каждого пикселя  $(i, j)$  выделяется некоторое количество бит, что определяет шкалу возможных полутонов (уровней серого — grayscale) со значениями  $0, 1, \dots, q - 1$ . Часто при создании алгоритмов обработки и анализа изображений бывает удобным нормировать диапазон яркостей так, что  $0 \leq K(i, j) \leq 1$ .

Пусть  $K' = (K'(i, j))$  и  $K'' = (K''(i, j))$ ,  $(i, j) \in \Omega = \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$  — пара полутоновых растровых изображений (кадров), полученных экспонированием в одинаковых условиях некоторого участка пространства неподвижной камерой в моменты  $t'$  и  $t'' > t'$  соответственно. За время  $t'' - t'$  на рассматриваемом участке пространства могут произойти изменения, которые приводят к различию между кадрами. Обычно для поиска и оценки изменений определяют функцию разности сравниваемых изображений  $L(i, j) = |K'(i, j) - K''(i, j)|$  [1]. Матрица  $L = (L(i, j))$  содержит информацию об изменении яркости отдельных пикселей, но сама по себе не дает количественной оценки относительного изменения отдельных областей изображения.

Далее будем рассматривать каждый кадр как совокупность областей, где каждая область представляет собой связанное множество пикселей, объединенных до-

полнительным критерием, например, определенной однородностью яркости пикселей.

Очевидно, что подобное понимание изображения как совокупности областей требует определенной формализации. В противном случае мы можем столкнуться с парадоксами интерпретации изображения, описанными в работах по гештальт-психологии зрительного восприятия [5]. Ниже предлагается формальное определение областей изображения и количественная оценка их изменения.

Назовем маской изображения  $K'$  матрицу  $B' = (b'_{ij})$ , полученную функцией квантования по яркости:

$$b'_{ij} = \begin{cases} a_1, & \text{если } 0 \leq K'(i, j) < b_1, \\ a_2, & \text{если } b_1 \leq K'(i, j) < b_2, \\ a_3, & \text{если } b_2 \leq K'(i, j) < b_3, \\ \dots & \\ a_k, & \text{если } b_{k-1} \leq K'(i, j) \leq 1, \end{cases}$$

где  $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{k-1} \leq 1$  — заранее выбранные уровни квантования [1]. Аналогично при тех же значениях  $a_i$  и  $b_i$  строится маска  $B''$  для второго кадра  $K''$ . Если интерпретировать матрицы  $B'$  и  $B''$  как изображения, в которых яркости пикселей имеют значения  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$  (или  $a_1 > a_2 > \dots > a_k$ ), то  $B'$  и  $B''$  представляют собой множество монохромных компонент связности, образуемых пикселями одинаковой яркости:  $B' = \{B'_1, \dots, B'_{m'}\}$  и  $B'' = \{B''_1, \dots, B''_{m''}\}$ .

Заметим, что характер упорядченности (по возрастанию или убыванию) величин  $a_1, a_2, \dots, a_k$  влияет на матрицы  $B'$ ,  $B''$  (см. на рис. 2(а) и(б)) и определяет понятие фона и объектов интереса. При  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k$  более светлые области на исходных кадрах будут являться объектами на темном фоне. Если же  $a_1 > a_2 > \dots > a_k$ , то более темные области будут объектами на светлом фоне. Для определенности будем считать, что матрицы  $B'$ ,  $B''$  определены для случая  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ .

Назовем  $K'_r$  областью полутонного изображения  $K'$ , если пиксели  $(i, j)$  в  $K'_r$  на маске областей  $B'$  образуют связную компоненту  $B'_r$  с одним и тем же значением уровня яркости  $a_i$ . Аналогично определяются области изображения  $K''$ , порождаемые монохромными компонентами связности матрицы  $B''$ .

В качестве примера, поясняющего введенные понятия, на рис. 1 изображены кадры  $K'$  и  $K''$  с обозначенными областями  $K' = \{K'_1, \dots, K'_6\}$  и  $K'' = \{K''_1, \dots, K''_7\}$ , которые порождены соответствующими масками  $B'$  и  $B''$  ((в) и (г) соответственно) с обозначенными границами связных компонент  $B' = \{B'_1, \dots, B'_6\}$  и  $B'' = \{B''_1, \dots, B''_7\}$ .

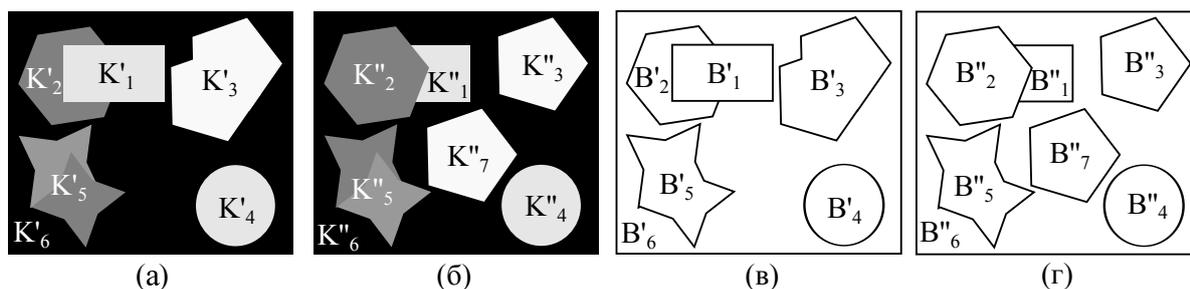


Рис. 1. (а) и (б) — кадры  $K'$  и  $K''$ ; (в) и (г) — маски областей  $B'$  и  $B''$ .

Под изменением изображения всюду далее понимается изменение его областей, т. е. переход множества  $\{K'_1, \dots, K'_{m'}\}$  в множество  $\{K''_1, \dots, K''_{m''}\}$ . Для количественной оценки изменения требуется установить соответствие между областями кадра  $K'$  и областями кадра  $K''$ .

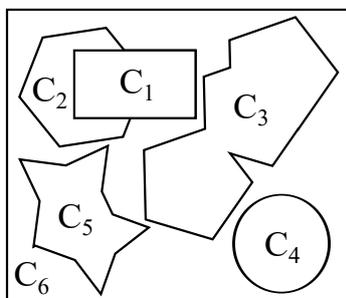


Рис. 2. Объединенная маска  $B_U$

Для этого воспользуемся объединенной маской  $B_U$ :

$$B_U = B' \cup B'',$$

где теоретико-множественная операция объединения понимается в терминах функции яркости как

$$B_U(i, j) = \max\{B'(i, j), B''(i, j)\}, \quad (i, j) \in \Omega. \quad (1.1)$$

Изображение  $B_U$  как и  $B'$  и  $B''$  можно рассмотреть как множества компонент связности:

$$B_U = \{C_1, \dots, C_m\}$$

Если компонента  $B'_r$  (или компоненты) со значением элементов  $a_r$  на маске  $B'$  и отличная от нее компонента  $B''_s$  (или компоненты) с тем же значением элементов  $a_r$  на маске  $B''$  образуют связную компоненту  $C_p$  на объединенной маске  $B_U$ , то между соответствующими областями  $K'_r$  и  $K''_s$  на исходных кадрах  $K'$  и  $K''$  устанавливается соответствие. На рис. 2 приведена объединенная маска  $B_U$  с обозначенными границами компонент связности  $B_U = \{C_1, \dots, C_6\}$ .

Формализовав понятие области на изображении и соответствия между областями на кадрах, перейдем к вопросу об оценке изменения этих областей.

## 2. Оценка изменений областей изображения

Пусть, как и ранее,  $L(i, j) = |K'(i, j) - K''(i, j)|$ . Обозначим через  $L_1$  множество пикселей кадра  $K''$ , изменившихся относительно кадра  $K'$ :

$$L_1 = \{(i, j) \in \Omega : L(i, j) > 0\}.$$

Пусть  $C_r \in B_U$  — компонента связности на формальном изображении  $B_U$ . Назовем изменившейся областью связную компоненту  $C_r$  на формальном изображении  $B_U$ , если в  $C_r$  есть изменившиеся пиксели, т. е.  $L_1 \cap C_r \neq \emptyset$ . Естественно возникает вопрос о количественной оценке изменений в каждой такой области. Для этого определим величину  $\delta_L(C_r)$  следующим образом:

$$\delta_L(C_r) = \frac{\sum_{(i,j) \in L_1 \cap C_r} L(i, j)}{|C_r|},$$

где  $|C_r|$  — количество пикселей в  $C_r$ . Очевидно, что значение  $\delta_L(C_r)$  есть среднее изменение яркости в  $C_r$ .

Помимо яркостных изменений, можно количественно оценить и изменения формы областей. В [4] предлагался достаточно естественный подход, позволяющий количественно оценить изменения отдельных областей динамически меняющегося бинарного изображения. В определенном смысле введенный коэффициент являлся дополнением до 1 меры сходства Жаккара, часто используемого при решении задач кластеризации данных. Определим величину  $S(i, j)$  по правилу

$$S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } |B'(i, j) - B''(i, j)| > 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть  $S_1$  — множество элементов матрицы  $S$ , равных единице:

$$S_1 = \{(i, j) \in \Omega : S(i, j) = 1\}.$$

Если  $S_1 \cap C_r \neq \emptyset$ , то в  $C_r$  произошли изменения, повлиявшие на форму области. Поясним на примере. На рис.1 (фигуры (в), (г)) область  $B'_1$  изменила форму и стала  $B''_1$ , т.к. на рис.2  $C_1 = B'_1 \cup B''_1$ . А в  $B'_5$  произошли только яркостные изменения, но форма области  $B'_5$  относительно  $B''_5$  не изменилась, т.к. на рис.2  $C_5 = B'_5 \cup B''_5$ .

Определим величину  $\delta_S(C_r)$  следующим образом:

$$\delta_S(C_r) = \frac{\sum_{(i,j) \in S_1 \cap C_r} S(i, j)}{|C_r|}.$$

Значение  $\delta_S(C_r)$  характеризует различие (сходство) формы областей, объединение которых образовало  $C_r$ .  $\delta_S(C_r) = 0$  означает, что формы областей на масках  $B'$  и  $B''$ , объединение которых образовало  $C_r$ , совпадают. И, наоборот, если  $\delta_S(C_r) = 1$ , то либо область на маске  $B'$ , совпадающая с  $C_r$  исчезла, либо на маске  $B''$ , появилась новая область, совпадающая с  $C_r$ .

Заметим, что для случая, когда  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_k$  (более темные области будут объектами на светлом фоне), вышесказанные рассуждения также применимы.

Вычисление введенных характеристик изменившихся областей на изображении обычными последовательными методами — задача крайне трудоемкая. Для ее решения естественно привлекать альтернативные, параллельные платформы для вычислений, например, клеточные автоматы.

### 3. Клеточный автомат с диффузионной динамикой

Поскольку многие задачи обработки изображений «клеточные» по своей природе естественно привлекать для их решения аппаратные платформы, основанные на клеточной логике. В качестве такой платформы можно использовать клеточный автомат (КА), позволяющий реализовывать параллельные алгоритмы для задач обработки и анализа изображений. Клеточный автомат (КА) представляет собой динамическую систему, поведение которой полностью определяется в терминах локальных зависимостей. Классический КА состоит из множества клеток, организованных в регулярную  $d$ -мерную решетку (массив). Каждой клетке ставится в соответствие конечный автомат, называемый элементарным автоматом, который может находиться в одном из состояний множества возможных состояний<sup>1</sup>. Элементарный автомат может изменять это состояние в зависимости от состояний клеток некоторого своего окружения, называемого окрестностью. Правило вычисления следующего состояния в зависимости от состояний соседей (функция переходов элементарного автомата) у всех клеток одно и то же. Необходимо сделать замечание относительно множества соседних клеток, которое по определению состоит из ячеек самого КА. В ряде прикладных работ (см., [6]) используется понятие псевдососедей, т. е. сигналов, которые могут быть считаны функцией перехода, но источником которых не является содержимое клеток автомата. В задачах анализа изображений псевдососедями могут выступать матрицы того же размера что и решетка КА. Для этого достаточно представить в трехмерном пространстве плоскость КА и над ней матрицу псевдососедей. Каждый элемент матрицы псевдососедей связан с соответствующей ячейкой КА. Все клетки выполняют переход в новое состояние одновременно, т. е. синхронно и параллельно (очевидно,

<sup>1</sup>Вообще говоря, в классическом определении КА множество возможных состояний предполагается конечным. В последнее время для описания сложной динамики и хаоса в распределенных системах различной природы активно используются КА с континуальным множеством состояний. Такие автоматы часто называют решеткой связанных отображений (coupled map lattices – CML) [8].

что у псевдососедей значение не меняется). При этом наблюдается изменение глобальной картины распределения состояний по пространству КА. Такая картина называется конфигурацией КА.

В данной работе будет использоваться двумерный КА, решетка которого естественным образом соотносится с анализируемыми растровыми изображениями. Под окрестностью клетки  $(i, j)$  понимается совокупность  $\mathcal{N}(i, j)$  соседних клеток с центральной клеткой  $(i, j)$

$$\mathcal{N}(i, j) = \{(k, l) \in L : |k - i| \leq r \wedge |l - j| \leq r\},$$

где величина  $r$  называется радиусом окрестности. Всюду далее будем рассматривать окрестности радиуса  $r = 1$ . В этом случае  $\mathcal{N}(i, j)$  содержит наряду с клеткой  $(i, j)$  восемь ее ближайших соседей вида  $(i + k, j + l)$ ,  $k, l = -1, 0, +1$  (т.н. окрестность Мура). Состояние клетки  $(i, j)$  в момент времени  $t$  будем задавать величиной  $x_{ij}(t) \in \mathcal{P}$ , где  $\mathcal{P} = [0, 1]$  — множество состояний рассматриваемого КА, представляющее собой единичный отрезок.

Состояние окрестности клетки  $(i, j)$  в момент времени  $t$  обозначим как  $x_{\mathcal{N}(i,j)}(t) = \{x_{u,v}(t)\}$ , где  $(u, v) \in \mathcal{N}(i, j)$ .

Обозначим  $\mathcal{X}_0 = [x_{ij}(0)]$  - начальное состояние КА, а матрицу псевдососедей  $\mathcal{X}_\psi$

Начиная с шага  $t = 1$  динамика КА будет подчиняться единому правилу перехода для каждой клетки автомата в соответствии с уравнением:

$$x_{ij}(t + 1) = \mathcal{F}\left(x_{ij}(t), x_{\mathcal{N}(i,j)}(t), \mathcal{X}_0(i, j), \mathcal{X}_\psi(i, j)\right), \tag{3.1}$$

где функция перехода

$$\mathcal{F} = x_{ij}(t) + \gamma \cdot \sum_{(u,v) \in \mathcal{N}(i,j): (\mathcal{X}_\psi(u,v) = \mathcal{X}_\psi(i,j))} [x_{uv}(t) - x_{ij}(t)] \tag{3.2}$$

а параметр  $\gamma > 0$ . Правило (3.2) при определенном значении параметра  $\gamma > 0$  является конечно-разностным уравнением диффузии. Поясним динамику клеточного автомата на примере, а также рассмотрим вопрос сходимости конфигурации КА к стационарному состоянию.

#### 4. Динамика клеточного автомата.

Рассмотрим КА с правилом (3.2) на рис. 3, в котором параметр  $\gamma = 0.124$ , матрица псевдососедей  $\mathcal{X}_\psi$  изображена на рис. 3 фигура (а), а начальная конфигурация  $\mathcal{X}_0$  — рис. 3 фигура (б). Яркость ячеек в фигурах пропорциональна их значениям. В течение эволюции клеточной плоскости в силу правила (3.2) и его диффузионного характера ненулевые элементы постепенно начинают «размазываться» по плоскости КА, при этом не выходя за границы связанных компонент матрицы псевдососедей  $\mathcal{X}_\psi$  (см. рис. 3 фигура (в)).

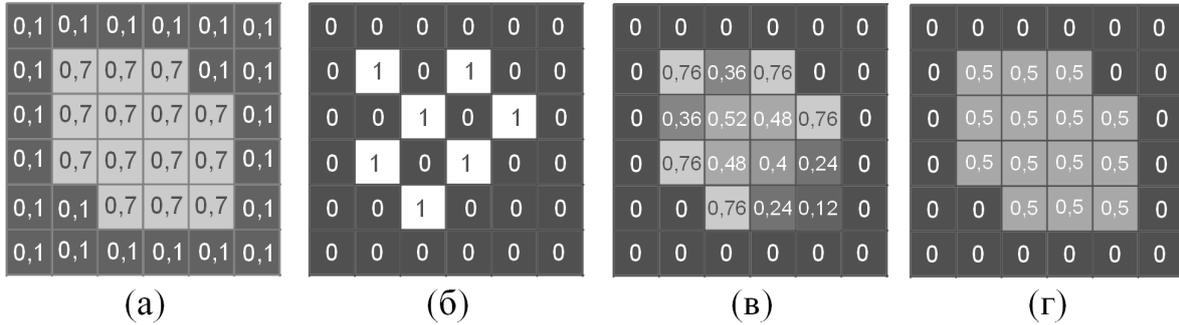


Рис. 3. (а) — матрица псевдососедей  $\mathcal{X}_\psi$ ; (б) — начальная конфигурация КА  $\mathcal{X}_0$ ; (в) — конфигурация КА в момент времени  $t = 2$ ; (г) — конфигурация КА в момент времени  $t = 25$ .

Другими словами для каждой компоненты матрицы псевдососедей  $\mathcal{X}_\psi$  будет существовать такая же по форме компонента из ячеек КА, в которой происходит диффузионный процесс. На рис. 3 фигура (г) на 25-й итерации конфигурация КА находится практически в стационарном состоянии, т.к. значения всех клеток отличаются от предельного значения не более чем на 0.005. Матрицу значений ячеек КА в стационарном состоянии будем считать искомой. Рассмотрим подробно вопрос при каком значении параметра  $\gamma > 0$  в уравнении (3.2) будет наблюдаться сходимость.

Пусть  $C_r^\psi \in \mathcal{X}_\psi$  — связная компонента матрицы  $\mathcal{X}_\psi$ . Пусть  $C_r \in \mathcal{X}_0$  — множество ячеек, соответствующих  $C_r^\psi$  (форма  $C_r^\psi$  совпадает с  $C_r$ ). Клеточный автомат эволюционирует в соответствии с уравнением (3.2). Отметим, что, начиная с первого шага, выполняется условие сохранения суммы состояний всех клеток множества  $C_r$ :

$$\sum_{(i,j) \in C_r} x_{ij}(t) = \sum_{(i,j) \in C_r} x_{ij}(0). \quad (4.1)$$

Равенство (4.1) легко доказывается, если просуммировать разностное уравнение (3.2) по всем клеткам  $(i,j) \in C_r$  и учесть, что

$$\sum_{(i,j) \in C_r} \sum_{(u,v) \in \mathcal{N}(i,j), (u,v) \in C_r^\psi} (x_{uv}(t) - x_{ij}(t)) = 0.$$

Для удобства пронумеруем произвольным образом все клетки множества  $C_r$  индексами  $i = 1, 2, \dots, n$ . Пусть  $A = [a_{ij}]$  — матрица смежности графа связности множества  $C_r$ :  $a_{ij} = 1$ , если клетка  $i$  и  $j$  — соседние и  $a_{ij} = 0$  в противном случае. Отметим, что максимальная степень вершин этого графа не превосходит 8, поскольку в КА используется структура связей, определяемая окрестностью Мура. Вектор состояний клеток  $x_{C_r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  описывает конфигурацию компоненты  $C_r$  в момент времени  $t$ . Запишем динамику правила (3.2) конфигурации  $x_{C_r}(t)$  множества  $C_r$  в матричном виде

$$x_{C_r}(t+1) = D_\gamma x_{C_r}(t), \quad (4.2)$$

где

$$D_\gamma = \begin{pmatrix} 1 - r_1\gamma & a_{12}\gamma & \dots & a_{1n}\gamma \\ a_{21}\gamma & 1 - r_2\gamma & \dots & a_{2n}\gamma \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\gamma & a_{n2}\gamma & \dots & 1 - r_n\gamma \end{pmatrix}, \quad r_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Решение  $x_{C_r}(t)$  линейной системы конечно-разностных уравнений (4.2) можно записать в виде

$$x_{C_r}(t) = D_\gamma^t x_{C_r}(0).$$

Если существует предельная матрица  $D_\gamma^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} D_\gamma^t$ , то предельная конфигурация  $\tilde{x}_{C_r} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_{C_r}(t) = D_\gamma^\infty x_{C_r}(0)$ .

Определим ограничения на параметр диффузии  $\gamma$ , при которых существует ненулевой предел степеней матрицы  $D_\gamma$ . Для этого заметим, что при выполнении неравенств

$$0 < 1 - r_i\gamma < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{4.3}$$

симметричная матрица  $D_\gamma$  является дважды стохастической, поскольку все элементы каждой строки (столбца) неотрицательны, а сумма их равна 1.

Пусть  $\gamma$  удовлетворяет системе (4.3). Соответствующая матрице  $D_\gamma$  марковская цепь является регулярной, поскольку, во-первых, граф переходов цепи сильно связан, и, во-вторых, диагональные элементы  $1 - r_i\gamma$  матрицы  $D_\gamma$  положительны. Для регулярных марковских цепей с дважды стохастической матрицей переходов справедлива эргодическая теорема [7], в силу которой имеет место сходимость с экспоненциальной скоростью:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_\gamma^t = D_\gamma^\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что достаточным условием выполнения неравенств (4.3) будет выбор параметра  $\gamma = 1/8 - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) поскольку величины  $r_i \leq 8$ .<sup>2</sup>

Определим теперь предельное состояние  $\tilde{x}_{C_r}$  клеток автомата, соответствующих множеству ячеек  $C_r$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{C_r} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_{C_r}(t) &= D_\gamma^\infty x(0) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i(0), \dots, \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i(0) \right) = \\ &= \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i(0)}{n}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^n x_i(0)}{n} \right), \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из (4.1). Каждая клетка  $\tilde{x}_{ij} \in C_r$  предельной конфигурации находится в состоянии

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(0)}{n}$$

---

<sup>2</sup>Всюду в вычислительных экспериментах использован параметр  $\gamma = 0.124$ . Выбор меньшего значения увеличивает число итераций КА экспоненциально.

Таким образом, если начальная конфигурация КА  $\mathcal{X}_0 = L$ , где, как и ранее,  $L(i, j) = |K'(i, j) - K''(i, j)|$ , а матрица псевдосооседей  $\mathcal{X}_\psi = B_\cup$ , то предельное состояние клеток:

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(0)}{n} = \frac{\sum_{(i,j) \in L_1 \cap C_r} L(i, j)}{|C_r|} = \delta_L(C_r).$$

Очевидно, что если  $\mathcal{X}_0 = S$  и  $\mathcal{X}_\psi = B_\cup$ , где

$$S(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } |B'(i, j) - B''(i, j)| > 0; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

то

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(0)}{n} = \frac{\sum_{(i,j) \in S_1 \cap C_r} S(i, j)}{|C_r|} = \delta_S(C_r).$$

Обозначим предельные матрицы значений КА в зависимости от входных данных:

$$\Delta_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}(x_{ij}(t), x_{N(i,j)}(t), L(i, j), B_\cup(i, j)),$$

$$\Delta_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}(x_{ij}(t), x_{N(i,j)}(t), S(i, j), B_\cup(i, j)),$$

Рассмотрим конкретные примеры применения введенных мер различия для анализа изменений на полутонных изображениях.

## 5. Примеры

На рис. 4 (фигуры (а) и (б)) приведены два негативных полутонных спутниковых снимка. На снимках изображены исчезающие тропические леса Амазонки. Первый кадр снят в 1984 году, второй в 2012.<sup>3</sup> Более темные области на втором кадре (фигура (б)) — это вырубки. Для данных снимков требуется оценить площадь изменившихся областей (вырубок).

Выделяем области изображения квантованием по яркости. Для простоты бинаризуем исходные кадры по порогу 0.59 (фигуры (в) и (г)). Запишем формально:

$$B' = \beta(K'(i, j)) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq K'(i, j) < 0.59, \\ 0, & \text{если } 0.59 \leq K'(i, j) \leq 1. \end{cases}$$

<sup>3</sup>Источник изображений: <https://earthengine.google.org/>

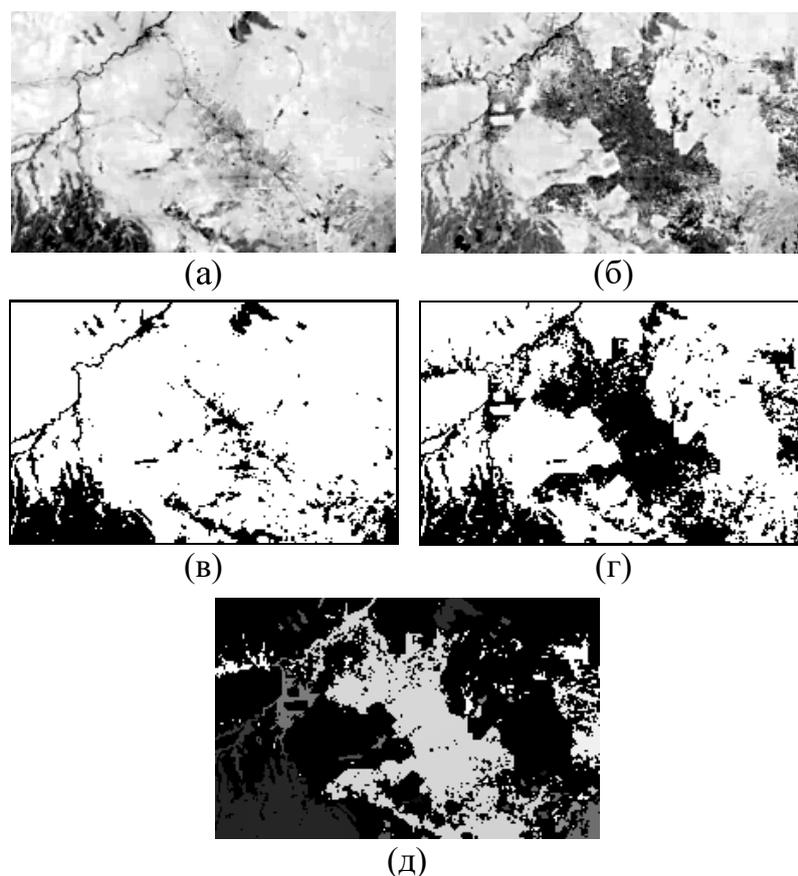


Рис. 4. (а) — кадр  $K'$ ; (б) — кадр  $K''$ ; (в) — изображение маски областей  $B'$ ; (г) — изображение маски областей  $B''$ ; (д) — изображение матрицы  $\Delta_S$

Аналогично вычисляем  $B''$ . С помощью описанного выше КА получим  $\Delta_S$ . На рис. 4 (фигура (д)) изображена матрица  $\Delta_S$  (яркость пикселей пропорциональна соответствующему значению в матрице).  $\Delta_S$  является стационарным состоянием КА после 25280 итераций. Белым цветом обозначены появившиеся вырубki ( $\delta_S(i, j) = 1$ ), черным — неизменившийся лес ( $\delta_S(i, j) = 0$ ), а промежуточным значением отмечены изменившиеся вырубki, что позволяет оценить масштаб изменения каждой вырубki.

Рассмотрим следующий пример. На рис. 5 (фигуры (а) и (б)) приведены два полутоновых снимка, полученных с помощью тепловизора. На снимках изображена стена дома до и после установки пластиковых стеклопакетов.<sup>4</sup> Яркость пикселей пропорциональна температуре на поверхности. Необходимо вычислить среднее изменение температуры в изменившихся областях. Для определения областей бинаризуем кадры по порогу 0.57 (рис. 5 (фигуры (в) и (г))) На изображении матрицы  $\Delta_L$  (фигура (д), 3339 итераций КА) видно, что после установки пластиковых стеклопакетов потери тепла в каждом окне снизились приблизительно на

<sup>4</sup>Источник изображений: <http://www.ecoseal.co.uk/energy-efficiency>.

50%, а в дверном проеме на 28%.

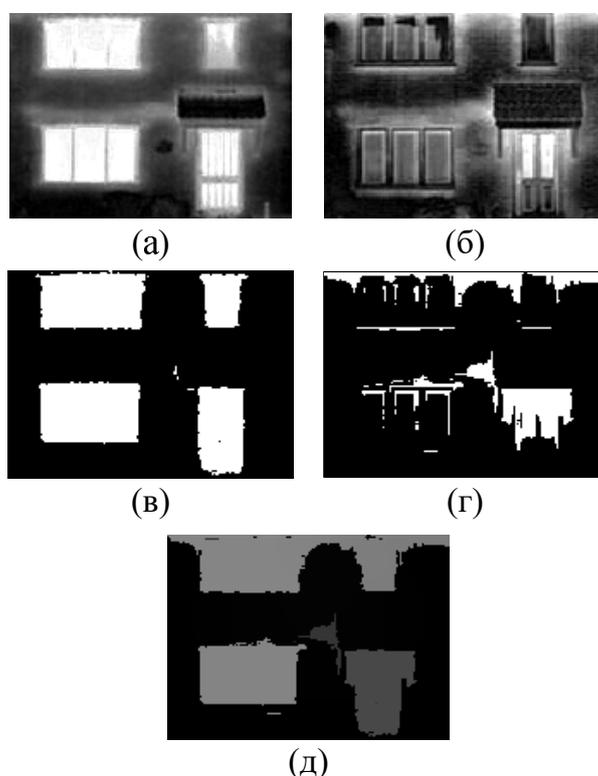


Рис. 5. (а) — кадр  $K'$ ; (б) — кадр  $K''$ ; (в) — изображение маски областей  $B'$ ; (г) — изображение маски областей  $B''$ ; (д) — изображение матрицы  $\Delta_L$

### Список цитируемых источников

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. — М.: Техносфера, 2005.  
Gonzalez Rafael C., Woods Richard E. (2002). Digital Image Processing, 2nd Edition, Upper Saddle River: Prentice Hall.
2. Кашкин В. Б., Сухинин А. И. Дистанционное зондирование Земли из космоса. Цифровая обработка изображений. — М.: Логос, 2001.  
Kashkin V. B., Sukhinin A. I. (2001). Remote sensing of the Earth from space. Digital image processing (in Russian). Moscow: Logos.
3. Короткин А. А., Майоров В. В. Нейронная сеть с диффузионным взаимодействием элементов для селекции изменений динамического изображения. // Журнал выч. мат. и мат. физ. — 2000 — Т. 40, №2. — С. 300–306.  
Korotkin A. A., Majorov V. V. (2000). A neural network with diffusive interaction between elements for selecting changes in a dynamic image. Comput. Math. Math. Phys. 40:2, 287–292.

4. *Короткин А. А., Максимов А. А.* Клеточно-локальный алгоритм выделения и оценки изменений на бинарных изображениях. // *Модел. и анализ информ. систем.* — 2014. — Т. 21, №4. — С. 64–74.  
Korotkin A. A., Maksimov A. A. (2014). Cell-local algorithm for isolating and estimating changes on binary images. *Modelirovanie i analiz informats. sistem.* 21:4, 64–74.
5. *Марр Д.* Зрение. Информационный подход к изучению представления и обработки зрительных образов. — М.: Радио и связь, 1987.  
Marr D. (1982). *Vision. A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information.* New York: W. H. Freeman and Company.
6. *Тюффоли Т., Марголюс Н.* Машины клеточных автоматов. — М.: Мир, 1991.  
Toffoli T., Margolus N. (1987). *Cellular Automata Machines.* Cambridge: MIT Press.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. — М.: Мир, 1964.  
Feller W. (1957). *An introduction to probability theory and its applications.* Vol. 1. 2d ed. New York: Wiley.
8. *Kaneko K.* Theory and Application of Coupled Map Lattices. John Wiley&Sons Ltd, 1993.
9. *Preston K., Duff M.* Modern Cellular Automata. Theory and Applications. — New York: Plenum Press, 1984.
10. *Rosin Paul L.* Training Cellular Automata for Image Processing. // *Image Analysis. Lecture Notes in Computer Science.* — 2005, — Vol. 3540. — pp. 195-204.

Получена 21.05.2016



УДК 517.929

# Модель сценария популяционного кризиса в результате бифуркации Андропова-Хопфа<sup>1</sup>

А. Ю. Переварюха

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН  
Санкт-Петербург 199178. E-mail: temp\_elf@mail.ru

**Аннотация.** В работе предложена модификация дифференциального уравнения с запаздыванием с целью описания специфического варианта развития популяционного процесса. Рассмотрены примеры реальной популяционной динамики со сценариями неожиданных переходов к резким колебаниям. Включенная изначально в уравнение ёмкость экологической ниши не полностью определяет асимптотические условия существования многих популяций и требует дополнения. Обоснование оригинальной формы правой части исходит из значимости действующего с запаздыванием величины превышения численности над оптимальной. После бифуркации Андропова-Хопфа траектория демонстрирует свойственный некоторым видам бабочек продолжительно происходящий переход к негармоническим флуктуациям численности. В отличие от уравнения Гопалсами характеристика ёмкости среды выступает не асимптотическим предельным значением для затухающих осцилляций, но исполняет роль порогового уровня для амплитуды релаксационного цикла. Сценарий увеличения репродуктивной активности описывает популяционный кризис от чрезмерного истощения ресурсов при пиках флуктуаций, который реализуется в виде выброса траектории возникшего цикла за пределы допустимых значений существования биологической системы.

**Ключевые слова:** уравнения с запаздыванием, специфические эффекты популяционной динамики, релаксационные циклы, модели кризисных явлений.

## Model for the scenario of population crisis resulting from Andronov-Hopf bifurcation

A. Yu. Perevaryukha

St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of RAS, St.Petersburg 199178.

**Abstract.** We offered the modification of a differential equation with delay to describe a specific embodiment of the population process. It was shown the examples of real population dynamics with transitions to sharp fluctuations. Included in equations capacity of the ecological niche not fully determines the asymptotic conditions for the existence of the population and require a supplement. Reasonable form of right-hand side on the basis of the importance of acting with a time lag of magnitude exceeding the size from the optimum was proposed. After the Andronov-Hopf bifurcation trajectory shows a prolonged transition to anharmonic population fluctuations, which can be seen for some moths. Unlike Gopalsamy equation carrying capacity does not serves the asymptotic

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках проектов РФФИ: No.15-07-01230 СПИИРАН, No.05-04-01226 ВИЗР.

limit value for damped oscillations, but there is a threshold for the amplitude of the relaxation cycle. Computational scenario of excess capacity during fluctuations describes the crisis due to over saturation in form of ejection cycle outside the allowable values of the existence of a biological system. **Keywords:** delay equations, specific effects of population dynamics, relaxation cycles, models of crisis phenomena.

**MSC 2010:** 92D25, 65L07, 34K18

## 1. Введение

Обоснованное описание особых нетривиальных изменений динамики для саморегулируемого экологического сообщества остается актуальной задачей прикладного применения непрерывных вычислительных систем. Балансовое равновесие ключевое понятие для теоретической экологии [11]. Первой популяционной моделью ограниченного роста стала модель Ферхюльста 1838 г. Асимптотика решения уравнения подразумевала плавный выход численности к стационарному состоянию  $K$ , соответствующему балансу со средой:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right), N(t) = \frac{N(0)e^{rt}}{1 + N(0)(e^{rt} - 1)/K} \quad (1)$$

Ферхюльст проводил оценку репродуктивного параметра  $r$  уравнения (1) по демографическим данным европейских стран. Квадратичная регуляция численности в (1) не рассматривалась Ферхюльстом как единственно возможная для модели ограниченного роста. В 1845 г. он выписал обобщенное уравнение:

$$M \frac{dp}{dt} = mp - np^u$$

Современные обозначения  $r, K$  модели (1) и понятия  $K$ -отбор и  $r$ -стратегия в экологии появились значительно позднее. Позднее он предположил [4], что динамика народонаселения Европы развивается согласно (1) только до некоторого порога, так как не наблюдалось замедления темпов прироста населения, которое для (1) должно происходить после  $N > K/2$ .

В (1) можно добавить множитель  $(N - L)$  увеличивая число нулей правой части. Для той же цели отдельно учесть смертность, зависящую от плотности скопления  $\delta$  и естественную  $\varsigma$ . Так предложил Базыкин, расширив набор параметров:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 \frac{\gamma N^2}{\gamma + \sigma N} - \varsigma N - \delta N^2 \quad (2)$$

и получил дополнительно репеллерную точку равновесия  $L$ . Базыкин искал модель для видов с минимально допустимой численностью группы [1]. Отметим, для формы правой части с множителем  $(N - L)$  в вычислительных моделях необходима компенсирующая сверхбыстрый прирост перенормировка репродуктивного параметра:  $r_1 \ll r$ , но вымирание  $N(t) \rightarrow 0$  будет выглядеть стремительным и безвозвратным явлением. Однако, многие популяции могут восстанавливать численность от нескольких сохранивших репродуктивную активность особей. Несколько

куколок бабочки *Lymantria dispar* привезенные в Америку вызвали сокрушительное опустошение хвойного леса<sup>2</sup>. Подобные вселенцы через некоторое время снова начинают демонстрировать нестационарные режимы изредка прерывающиеся депрессиями численности.

Исчезновение ряда популяций (характерно для островных сообществ без разреженной границы ареала) может происходить как раз не из состояния близкого к  $L$ , но из благополучной окрестности балансовой ёмкости  $K$ . Мы ставим задачу получения в уравнении режима, соответствующего частному, но значимому сценарию популяционной динамики.

## 2. Уравнения Хатчинсона и Гополсами

Решение (1) плохо согласовывалась с наблюдавшимися разнообразного вида флуктуациями популяций самых разных животных. Флуктуации наблюдаются даже для слонов в Национальном парке Крюгера, потому там приходится проводить отстрелы с целью удержать популяцию в оптимальном по расчетам для сохранения растительной среды состоянии [3]. На рис. 1 видно, как слоны способны стремительно достигать пиковых значений, тогда как для них рассчитано  $K = 7000$ . Хотя согласно экологической теории именно слоны считаются примером  $K$ -стратегии, подавляющей возмущения среды и стремящейся к асимптотическому равновесию. Признаков скорого достижения предела не наблюдается и после изъятия особей через некоторое время слоны начинают вновь оказывать чрезмерное давление на растительность. Лемминги считаются примером  $r$ -стратегии с нерегулярностью своих больших пиков, но вспышки грызунов заканчивающиеся их массовой гибелью для полярных кустарничков тундры эквивалентны воздействию слонов на леса.



Рис. 1. Динамика регулируемой численности слонов [3], оценка  $K = 7000$ .

<sup>2</sup>*Lymantria* означает «разрушитель», и эта невзрачная бабочка оправдывает латинское название.

Модель взаимодействия двух видов Вольтерра, как известно, позволяет получить циклическое решение системы двух дифференциальных уравнений. Казалось бы, уравнения позволяют описать наблюдаемые с отставанием по фазе колебания в сообществе «зайцы-рыси» после бифуркации рождения цикла. Однако, как было установлено, колебания численности канадских зайцев наблюдаются и в местах, где рыси не обитают. Более того, аналогичные псевдоциклические колебания свойственны многим другим северным популяциям грызунов, в том числе обособленным островным группам. Подобные флуктуации с немного меняющимся периодом по экологическим причинам не могут быть описаны из модели взаимодействия двух видов типа хищник-жертва. Не подтвердились выводы об устойчивых колебаниях из модели Вольтерра в лабораторных экспериментах Г. Гаузе с простейшими организмами. Колебания в лабораторных экспериментах с насекомыми получил С. Утида, но для взаимоотношений паразит-хозяин. Паразитизм имеет отличия от трофического взаимодействия хищник-жертва, так текущая репродуктивная активность паразитической осы зависит от количества доступных яиц (но не взрослых жуков) в предшествующем поколении.

Из лабораторных экспериментов энтомолога Никольсона [13] стало понятно, что колебания численности могут появляться у изолированной популяций, обитающих при постоянных условиях и получающих фиксированное количество корма. Хатчинсоном [10] была предложена модификация (1) исходя из запаздывающего действия саморегуляции, что привело к уравнению «logistic DDE» с отклоняющимся по времени аргументом:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) \quad (3)$$

Введенное в уравнение запаздывание  $\tau$  служит характеристикой регуляции — использования и восстановления ресурсов или накопления/распада отравляющих продуктов метаболизма, но не связано с возрастом полового созревания.

Возникающие в уравнении режимы поведения траектории были подробно исследованы в работах отечественных авторов [2]. При малых значениях запаздывания  $\tau$  динамика модели опишет затухающие колебания  $N(t) \rightarrow K$ . В (3) установлена возможность возникновения бифуркации Андронова-Хопфа с появлением устойчивого предельного цикла  $N_*(t, r)$ . Нарушение устойчивости состояния равновесия зависит от величины  $r\tau$ . Дальнейшее увеличение  $r\tau > \pi/2$  вызывает переход в режим релаксационных колебаний. Быстрое возрастание амплитуды колебаний выраженной негармонической формы при увеличении временного промежутка между максимумами и стремящиеся к нулю минимумы приводят такой релаксационный цикл к затруднениям при экологическом обосновании в реальных наблюдениях (рис. 2).

Многим насекомым свойственны продолжительные вспышки численности, но они начинаются после преодоления некоторого порогового значения, когда паразиты не могут эффективно подавлять размножение. Формы колебаний для автохтонных и инвазионных популяций могут быть различными. Помимо зату-

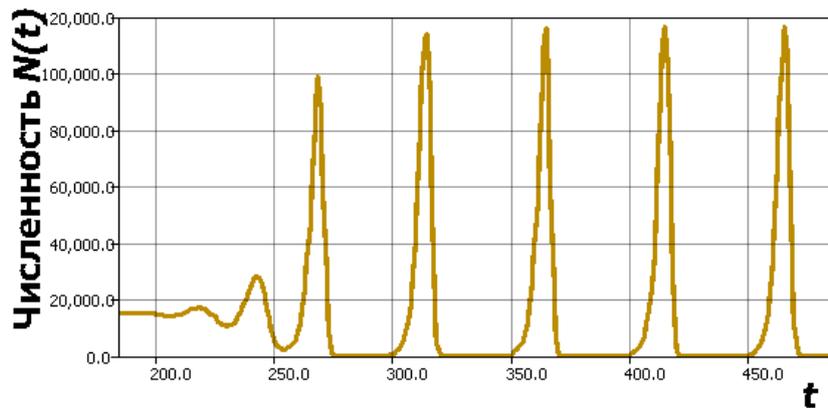


Рис. 2. Релаксационный цикл в уравнении (3),  $K = 15000$ .

хающих и гармонических колебаний может возникать и противоположное явление — возникновение флуктуации с затяжными пиками численности. Такие всплески возможны при переходе популяций к каннибализму и/или может быть обусловлены изменением направления естественного отбора в особых условиях существования. Дополнение «репродуктивного» сомножителя запаздыванием  $rN(t - \tau)f[N(t), N(t - \tau)]$  не несет экологического смысла. В [7], [8] предложена модификация с включением запаздывания для альтернативной модели роста изолированной популяции (с приведенными коэффициентами):

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) f(N(t - 1)), \tag{4}$$

где  $f$  — бесконечно дифференцируемая функция, разложимая в асимптотический ряд, например удовлетворяет:  $f(x) = (1 - x)/(1 + cx)$ . В модели Гополсами коэффициент  $c > 0$  становится еще одним параметром, определяющим характеристики цикла, при увеличении  $c$  сжимается амплитуда, но по-прежнему непонятно, какой именно нелинейный популяционный процесс сможет помочь предсказать (4). Для (4) при дополнительных условиях для  $f(x)$  установлено существование единственного устойчивого релаксационного цикла неклассической формы [12], но предлагаемые нами далее модификации этим условиям удовлетворять не будут.

### 3. Релаксационный цикл еловой листовертки

Отдельным северным популяциям вредителей свойственно специфическое нерегулярное явление пилообразной вспышки численности «sawtooth oscillations» [5], которую можно описать при некотором дополнении модели (4). После равновесного состояния при численности бабочек не вызывающей дефолиации вдруг (мы не нашли объяснения стартовых механизмов) появляется серия непоследовательных очень многочисленных поколений, на порядок превышающих среднепогодную численность за предшествующую декаду в очаге вспышки. Так внезапно

проявляет себя еловая листовёртка в лесах Северной Америки (на рис. 3 — изменение площади погибшего леса с тремя выраженными пиками [9]). Более 30 лет постоянно наблюдалась полная потеря хвои (дефолиация) на значительных площадях вплоть до прекращения вспышки в конце 1980 гг. Завершение атипичной вспышки может происходить так же внезапно, как и ее развитие.

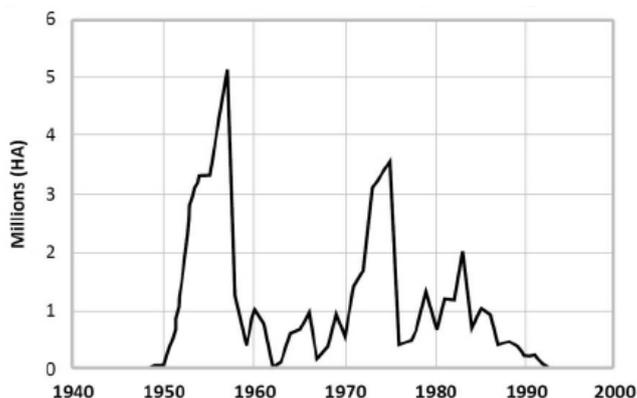


Рис. 3. Пилообразная вспышка *Choristoneura fumiferana* в масштабах гибели леса.

Мы предлагаем математическое описание такого частного, но весьма опасного сценария популяционной динамики, увеличивая степень нелинейности правой части (4):

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( \frac{K - N^2(t - \tau)}{(K + cN^3(t - \tau))} \right), \quad (5)$$

Так удается сгладить недостаток у минимумов  $\min_{0 < t < T_*} N_*(t, r) \rightarrow 0$ , слишком низких для возможностей быстрого роста. В вычислительных исследованиях для (5) мы при бифуркации получаем реализацию сценария пилообразной вспышки (рис. 4), когда очередной стремительный неконтролируемый рост численности вредителя начинается от значения близкого к существовавшему ранее равновесию.

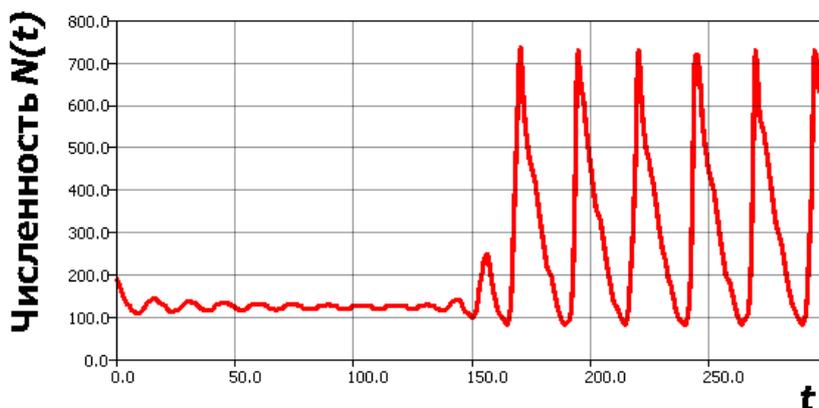


Рис. 4. Переход к релаксационному циклу в модификации (5).

Возникает вопрос, как из двух возможных бифуркационных параметров следует так резко изменять в первую очередь? Мы предполагаем, что в реальных ситуациях они оба согласованно изменяются с незначительным отставанием.

*Замечание.* В итерациях нелинейных функций  $R_{j+1} = \psi(R_j)$  имеющих максимум  $\psi'(R_m) = 0, \psi''(R_m) \neq 0$  поведение траектории весьма разнообразно и есть мнение, что дискретизация задачи поможет найти оптимальное описание. В ихтиологии применяют:

$$R_{j+1} = aR_j e^{-bR_j}, a > 1, 0 < b < 1,$$

где при  $a > e^2$  возникают циклы разнообразных периодов. Однако, помимо периода циклы итераций отличаются взаимным расположением точек. При бифуркациях удвоения периода вокруг теряющей устойчивость циклической точки возникнет две новые, сохраняя симметрию ветвей на бифуркационной диаграмме сценария Фейгенбаума [6]. Короткие циклы грызунов в таких терминах это монотонные перестановки с пиком в конце, которые можно найти в окнах периодичности с циклами  $p \neq 2^i$  при узких диапазонах значений параметра  $a$ .

В предыдущих работах мы обсуждали причины, из-за которых возникновение хаотического аттрактора в точке накопления каскада бифуркаций удвоения не является хорошим свойством для описания популяционных процессов [14].

#### 4. Модель популяционного кризиса

Целенаправленно развивая (3) получим описание еще одного специфического экологического явления, которое не было рассмотрено в известных работах. В случае вспышек насекомых понятие ёмкости экологической ниши утрачивает смысл, а равновесие при малой их численности имеет другую природу. Из анализа дилеммы парка Крюгера предположим существование некоторого предкритического порогового уровня  $H < K$ . Положим, что достижение значения численности  $K$  означает не уравнивание, но непоправимую деградацию для среды обитания. Переход через мягкий порог имеет значение для механизмов контроля внутривидовой популяционной структуры. Тогда на динамику системы оказывает влияние отклонение  $(H - N(t - \tau))$ , и величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. Модифицируем (3) следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) (H - N(t - \tau)) \tag{6}$$

Можно считать, что при смене знака отклонения члены правой части (воспроизводства и регуляции) меняются своими функциональными ролями в модели.

##### 4.1. Вычислительный анализ новой модели

При малом значении запаздывания в (6) получаем затухающие осцилляции с  $N \rightarrow H$ . Очевидно из рассуждений [12], что при увеличении  $\tau$  или  $r_1$  в таком

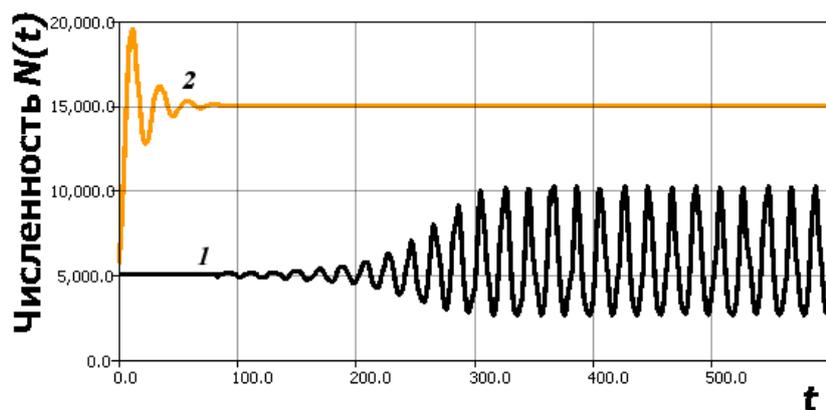


Рис. 5. 1 — цикл после бифуркации в (6), 2 — динамика (3) при аналогичных параметрах.

уравнении (с  $r_1 = 10^{-3}r$ ) возникнет устойчивый цикл (рис. 5,  $K = 15000$ ,  $H = 5000$ ).

На рис. 5 динамика после плавного прохождения бифуркационного изменения по сценарию Андронова-Хопфа при переходе  $r_1$  через критическое значение, (в вычислительном эксперименте рис. 5 все параметры модели сохраняются) показывающая установление цикла при  $N(0) = H + \epsilon$ ,  $H = 5000$ ,  $K = 15000$ .

Цикл быстро становится релаксационным с возрастанием  $r_1$ . Амплитуда колебаний в отличие аналогичного случая модели (3) не возрастает до нереалистичных величин, но остается в разумных для биологии границах. Скошенная форма пиков даже более похожа на реальные данные популяционной динамики. В (6) при  $N(0) < H$  переход к установившимся флуктуациям происходит не плавно, но через скачкообразный переходный режим.

Изменение репродуктивного параметра можно трактовать как следствие ослабления давления паразитов на выживаемость личинок. Пусть давление исчезнет совсем. С дальнейшим увеличением значения  $r_1\tau$  увидим другое резкое изменение поведения траектории, которая перестанет притягиваться к замкнутому подмножеству фазового пространства. При такой бифуркации траектория системы вместо установления цикла со все увеличивающейся огромной амплитудой будет резко выброшена за пределы допустимых для её существования значений при  $N(t - \tau) > K$ . Такая потеря установившегося режима считается жесткой (катастрофической). На рис. 6 ситуация после бифуркации, когда в результате изменения параметра  $r_1$  (в сравнении с аналогичным изменением  $r$  в (3) в момент  $t = 150$ ) траектория в релаксационных колебаниях преодолевает значение  $K$ , и далее  $N(t) \rightarrow \infty$  реализует сценарий демографического кризиса переполнения.

Цикл сжимается и выбрасывается, вычислительный эксперимент заканчивается сообщением программы о переполнении при вычислениях с плавающей точкой. Неожиданный кризисный сценарий нам видится более реалистичным, чем возможность неограниченного возрастания амплитуды в известных моделях Хатчинсона-Гополсами.

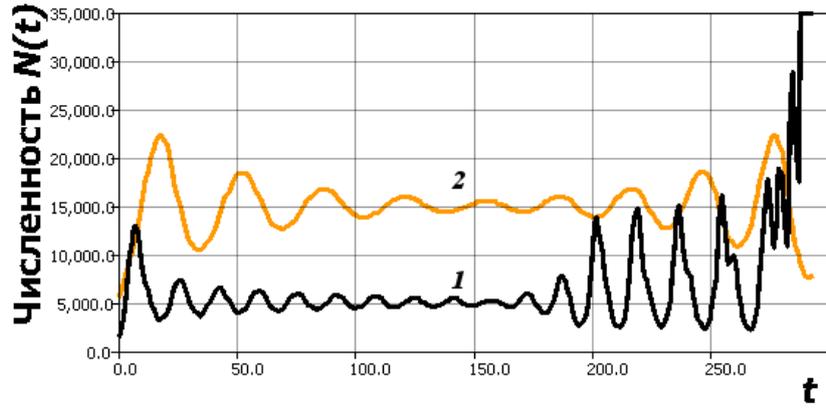


Рис. 6. Сценарий популяционного кризиса по (6). 1 — выброс за границы емкости среды в (6), 2 — динамика (3) при аналогичном изменении параметра.

#### 4.2. Об улучшении модели (6)

На первый взгляд очевидно дальнейшее развитие модели как объединения идей обсуждавшихся ранних модификаций. Для осмысленного улучшения нужно понимать, какое поведение решения интересно, а какое заведомо противоречит смыслу. Можно представить популяционное уравнение с запаздыванием в следующем виде:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) \left( \frac{K - N^2(t - \tau)}{(K + cN^3(t - \tau))} \right) (H - N(t - \tau)), \quad (7)$$

увеличивая нелинейность в правой части до кубической. Тогда образующая для  $N(0) < H$  релаксационный цикл траектория при уменьшении  $c$  начнет достаточно параболически плавно возрастать (рис. 7,  $c_0 = 0.11, c_{bif} = 0.1, \tau = 8$ ). Подобный

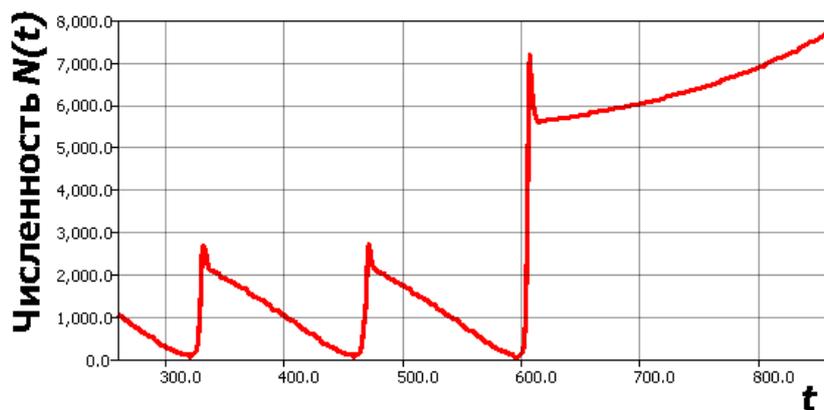


Рис. 7. Медленный сценарий ухода траектории из цикла в (7).

сценарий видится экологически не обоснованным и в реальности такая ситуация

вряд ли встретится. Должно присутствовать ограниченное сверху равновесное состояние, либо система может разрушаться скачком. Возможно (7) интересно в другой предметной области.

### 4.3. Заключение

Мы модифицировали уравнение, описывающее переход численности из окрестности неявного порога в режим колебаний с интересными для популяционной динамики насекомых свойствами. Предложена вычислительная модель возникновения популяционных колебаний релаксационной формы, где вместо дальнейшего увеличения амплитуды происходит выброс траектории в режим за рамками ограниченного прироста численности. Будем считать введенное в уравнение (6) значение  $H$  мягким пороговым состоянием отложенного действия, в отличие от явной нижней критической точки в (2) и жесткой уровнем останова прироста  $K$  в (1). В новой модели критическим, но спонтанно преодолеваемым состоянием служит  $K$ .  $N > K$  на время  $\delta t > \tau$  подразумевает стремительное катастрофическое разрушение популяцией своей среды обитания. Пример катастрофы успешно размножавшейся искусственно вселенной популяции — исчезновение оленей с острова Беринга, куда в 1882 г. было завезено 15 голов, через 20 лет численность колебалась 1,5–3 тыс. с учетом промысла. Без регуляции к 1917 г. на острове не осталось оленей, а обильные лишайниковые пастбища полностью истощены. В демографии самый известный случай кризиса перенаселения загадка падения цивилизации острова Пасхи.

В современном обзоре по применению уравнений с отклоняющимся аргументом [15] в математической биологии подобный сценарий не рассматривался. Бифуркация, для которой требовалось изменение условий регуляции, приводит системе не к изменению амплитуды/периода цикла или переходу к хаотическому движению, но к скачку за границы экологического баланса в виде резкой потери замкнутого колебательного контура. Полученные характеристики критических случаев популяционного процесса не могут быть по нашему мнению быть распространены на обобщенный случай динамики распространения вида-вселенца.

### Список цитируемых источников

1. *Базыкин А. Д., Березовская Ф. С.* Эффект Олли, нижняя критическая численность популяции и динамика системы хищник–жертва // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. — 1979. — Т. 2. — С. 161–175.  
Bazykin A. D., Berezovskaya S. C. (1979). Allee effect for lower critical population size and dynamics of the predator-prey ecosystem. Problemy ehkologicheskogo monitoringa i modelirovaniya ehkosistem. 2, 161–175.
2. *Борздыко В. И.* Об исследовании популяционной модели Хатчинсона // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21. — С 316–318.  
Borzdyko V. I. (1985). An investigation of Hutchinson's population model (in Russian). Differ. Uravn. 21:2, 316-318.

3. *Aarde R.* Culling and the dynamics of the Kruger National Park African elephant population. // *Animal Conservation*. — 1999. — Vol. 2, no.2. — P. 287-294.
4. *Bacaer N.* A Short History of Mathematical Population Dynamics. — London.: Springer-Verlag, 2011. — 160 pp.
5. *Cooke B., Nealis V., Regniere J.* Insect Defoliators as Periodic Disturbances in Northern Forest Ecosystems // *Plant disturbance ecology: the process and the response*. — Burlington: Elsevier, 2007. — P. 487-525.
6. *Feigenbaum M.* Universal behavior in nonlinear systems // *Physica D*. — 1983. — Vol.7. — P. 16-39.
7. *Gopalsamy K., Kulenovic M., Ladas G.* Time lags in a «food-limited» population model // *Applicable Analysis*. — 1988. — Vol. 31. — P. 225-237.
8. *Gopalsamy K.* Global stability in the Delay-logistic Equation with discrete delays // *Houston J. Math.* — 1990. — Vol. 16. — P. 347–356.
9. *Gray D. R.* Historical spruce budworm defoliation records adjusted for insecticide protection in New Brunswick // *Journal of the Acadian Entomological Society*. — 2007. — Vol. 115, no.1. — P. 1–6.
10. *Hutchinson G.* An Introduction to Population Ecology. — New Haven: Yale University Press. — 1978, 260 pp.
11. *Jeffers J.* An introduction to systems analysis: with ecological applications. — London: Edward Arnold, 1978. — 198 pp.
12. *Kolesov A. Y., Mishchenko E. F., Rozov N. K.* A modification of Hutchinson's equation // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2010. — Vol. 50, no.12. — P. 1990–2002.
13. *Nicholson A.* An outline of the dynamics of animal populations // *Australian Journal of Zoology*. — 1954. — Vol.2, no.1. — P. 9–65.
14. *Perevaryukha A. Y.* Cyclic and unstable chaotic dynamics in models of two populations of sturgeon fish // *Numerical Analysis and Applications*. — 2012. — Vol.5. — P. 254–264.
15. *Ruan S.* Delay Differential Equations in Single Species Dynamics // *Delay Differential Equations and Applications*. — Berlin.: Springer, 2006. — P. 477-517.

Получена 12.06.2016



УДК 517.98

# Интеграл Бохнера в линейных нормированных конусах<sup>1</sup>

**Ф. С. Стонякин, А. Н. Степанов**

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 295007.

*E-mail: fedyor@mail.ru*

*E-mail: stepanov.student@gmail.com*

**Аннотация.** В классе линейных нормированных конусов (ЛНК) вводится аналог понятия интеграла Бохнера для отображений вещественного отрезка со значениями в абстрактных конусах. Исследованы общие свойства интеграла Бохнера, в том числе свойство полноты конуса интегрируемых отображений. Для этого случая рассмотрена известная проблема Радона-Никодима, связанная с отсутствием представимости отображения ограниченной вариации в виде неопределённого интеграла Бохнера. В настоящей работе указанная выше проблема в определённом смысле решена для отображений с  $p$ -вариацией для  $p \geq 1$ . Эти результаты новы даже в классе банаховых пространств.

**Ключевые слова:** абстрактный выпуклый конус, линейный нормированный конус, закон сокращения, интеграл Бохнера, метрическая топология.

## The Bochner integral in Linear Normed Cones

**F. S. Stonyakin, A. N. Stepanov**

Crimean Federal University, Simferopol 295007.

**Abstract.** The analogue of Bochner integral for mappings of real segment with values in abstract cones in the special class of linear normed cones is introduced in the paper. The general properties of Bochner integral, including the property of completeness of cone of integrable mappings, are studied. For this case the known Radon-Nikodym problem is considered. We solved this problem in a sense for mappings with  $p$ -variation for  $p \geq 1$ . These results are new even in the class of Banach spaces.

**Keywords:** abstract convex cone, linear normed cone, cancellation law, Bochner integral, metric topology.

**MSC 2010:** 46G05, 46G10, 46T20

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук, проект МК-2915.2015.1

## Введение

Основы теории интегрирования в бесконечномерных векторных пространствах были заложены Дж. Грейвсом, Т. Гильдебрандтом, С. Бохнером [9], Дж. Биркгофом [8]. Н. Данфордом, И. М. Гельфандом [1] – [2]. Б. Дж. Петтисом [16], Дж. Прайсом [18], С. Риккартом, Р. С. Филлипсом [17].

Векторное интегрирование активно используется при решении самых разнообразных математических задач и ему посвящены крупные разделы в монографиях Э. Хилле и Р. С. Филлипса [14], К. Иосиды [3], Н. Данфорда и Дж. Т. Шварца [10], Э. Эдвардса [12], а также известная монография Дж. Дистеля и Дж. Ула [11].

При этом среди сильных типов интеграла отображений отрезка в банаховы пространства выделяют интеграл Бохнера, который наиболее близок к классическому интегралу Лебега.

В последние десятилетия активно развивается теория так называемых локально выпуклых конусов. В частности этой теорией занимались такие известные математики, как J. Radstrom [19], В. Fuchssteiner [13], К. Keimel [15], W. Roth [20, 21] и другие.

Недавно И. В. Орловым [5] были введены так называемые субнормированные и банаховы конусы и на их базе построена теория компактных субдифференциалов с приложениями к вариационным задачам.

Предлагаемая работа посвящена известной проблеме Радона-Никодима, свойственной для интеграла Бохнера отображений даже в классе банаховых пространств. Кратко сформулируем эту проблему.

Подобно интегралу Лебега в вещественном случае, неопределённый интеграл Бохнера отображений в банаховы пространства является абсолютно непрерывным отображением относительно нормы. Однако, в отличие от вещественного случая, уже не всякое абсолютно непрерывное отображение представимо в виде неопределённого интеграла Бохнера [3, 14].

Для отображений в банаховы пространства эта тематика изучалась в диссертации Ф. С. Стонякина [7]. Предложенный там подход основан на усилении понятия абсолютной непрерывности отображения  $f: I \rightarrow E$ . Суть этого подхода, в основном, заключается в замене обычной нормы на норму в некотором банаховом пространстве, порожденном выпуклым симметричным компактом в  $E$ . Как оказалось, такая абсолютная непрерывность в определенном смысле снимает проблему в классе банаховых пространств. Мы продолжим эти исследования в следующих направлениях.

Во-первых, в классе банаховых пространств данной работы мы рассмотрим класс отображений с так называемой  $p$ -вариацией при  $p \in (+1; \infty)$ . Пусть на сегменте  $[a; b]$  задано отображение  $F: I \rightarrow E$  ( $E$  — банахово пространство). Разложим  $[a; b]$  на части точками  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$  и составим сумму ( $p \geq 1$ )

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|F(x_{k+1}) - F(x_k)\|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}}.$$

Точная верхняя граница множества всевозможных сумм  $V$  называется полной  $p$ -вариацией отображения  $F(x)$  и обозначается через  $V^p(F, [a; b])$ . Для таких отображений получено условие представимости в виде интеграла Бохнера с  $L_p$ -оценкой

$$\int_a^b \|F'(t)\| dt < +\infty$$

для отображений  $F : I \rightarrow E$  в банаховы пространства (теорема 6).

Поскольку всякое липшицево отображение имеет конечную  $p$ -вариацию для всякого  $p \in [1; +\infty)$ , то упомянутая проблема Радона-Никодима вполне актуальна и для класса отображений  $F : I \rightarrow X$  с конечной  $p$ -вариацией. Как показано в [3, 14], липшицево отображение  $f : I \rightarrow E$  может быть нигде не дифференцируемым.

По аналогии с [7] мы вводим понятие отображения с компактной  $p$ -вариацией и доказываем теорему о дифференцируемости таких отображений почти всюду и представимости в виде интеграла Бохнера таких отображений  $F : I \rightarrow E$  с  $L_p$ -оценкой  $\int_a^b \|F'(t)\|^p dt < +\infty$  (теорема 7).

Во-вторых, упомянутая проблематика рассмотрена в специальном классе линейных нормированных конусов с метрической топологией. На этот случай перенесена теорема 7 и получена теорема 8. Отдельно рассмотрен случай абсолютно непрерывного отображения в ЛНК, т.е. специфичный случай  $p = 1$  (теорема 9).

Работа состоит из введения, трех основных разделов и заключения.

В разделе 1 рассматриваются базовые вопросы теории абстрактных выпуклых конусов, выделен специальный класс линейных нормированных конусов (ЛНК), для которых существует линейное инъективное изометричное вложение в банахово пространство. Рассмотрено несколько примеров абстрактных выпуклых конусов с нормой, которые могут как входить в класс ЛНК, так и нет.

В разделе 2 вводятся аналоги интеграла Лебега для отображений вещественного отрезка в ЛНК — интегралы типа Бохнера и Петтиса. Исследованы базовые свойства таких интегралов, получен критерий интегрируемости отображений по Бохнеру.

Раздел 3 посвящен описанной выше проблеме Радона-Никодима для отображений вещественного отрезка в ЛНК. В частности, получены условия дифференцируемости отображений с конечной  $p$ -вариацией ( $p \geq 1$ ) и представимости их в виде интеграла Бохнера с  $L_p$ -оценкой на подинтегральное отображение.

## 1. Линейные нормированные конусы

В известной работе [19] доказано, что если в абстрактном выпуклом конусе имеется метрика  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$d(x, y) = d(x + z, y + z), \quad d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x, y), \quad \forall x, y, z \in X, \lambda \geq 0, \quad (1.1)$$

а также шар  $\{x \in X \mid d(0, x) < \varepsilon\}$  — поглощающее множество при всех  $\varepsilon > 0$ , то такой конус  $X$  линейно, инъективно и изометрично (относительно метрики) вложен в некоторое линейное *нормированное* пространство  $E_X$ .

Интересно записать условия (1.1) в виде условий на какой-то аналог нормы в самом конусе  $X$ . Мы рассмотрим следующий аналог понятия нормы в выпуклых конусах, который предложен Ф.С. Стонякиным в [22].

**Определение 1.** Нормой в выпуклом конусе  $X$  называется функция  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая следующим аксиомам  $\forall x, y \in X, \forall \lambda \geq 0$ :

- 1)  $\|x\| \geq 0$ ;  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- 2)  $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$ ;
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ;
- 4)  $x + y = 0 \Rightarrow \|x\| = \|y\|$ .

**Определение 2.**  $X$  называется выпуклым нормированным конусом (ВНК), если  $X$  — выпуклый конус и существует норма на  $X$ .

Отметим, что аксиома 4) определения 1 в выпуклых конусах, вообще говоря, не следует из остальных. Приведём соответствующий пример.

*Пример 1.* Пусть  $X$  — набор чисел  $x \in [0; +\infty)$ . Умножение на неотрицательный скаляр вводится стандартно. Сложение  $x_1 \oplus x_2$  введём следующим образом:

$$x_1 \oplus x_2 := \min\{x_1, x_2\}.$$

Ведём естественную норму в выпуклом конусе  $X$ :  $\|x\| := x \geq 0$ . Аксиомы нормы выполнены, но  $\|0\| \neq \|1\|$ , хотя  $0 \oplus 1 = 0$ .

Заметим, что в случае операции сложения  $x_1 \oplus x_2 := \max\{x_1, x_2\}$  множество  $X = [0; +\infty)$  будет выпуклым нормированным конусом. Приведём некоторые другие естественные примеры выпуклых нормированных конусов.

*Пример 2.* Пусть  $X = F$  — набор неотрицательных ограниченных вещественных функций  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  с обычными операциями сложения и умножения на скаляр. В этом случае мы рассматриваем обычную норму  $\|f\|_F := \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ .

*Пример 3.* Пусть  $X = K$  — набор выпуклых компактных подмножеств  $A$  некоторого нормированного линейного пространства  $E$  с операцией сложения по Минковскому и обычного умножения на скаляр. Норму в  $K$  введём стандартно:  $\|A\|_K := \max_{a \in A} \|a\|_E$ .

**Определение 3.** Если в выпуклом нормированном конусе  $X$  существует метрика  $d$ , удовлетворяющая условиям (1.1), причём  $d(0, x) = \|x\|$  для всякого  $x \in X$ , то назовём  $X$  *линейным нормированным конусом* (ЛНК).

Из известного результата [19] следует, что всякий ЛНК можно линейно инъективно изометрично вложить в некоторое банахово пространство  $E_X$ . Поэтому в  $X$  существует метрика  $X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  и естественно рассмотреть топологию, которая порождается системой окрестностей точки  $x_0 \in X$  вида

$$B_\varepsilon(x_0) = \{y \in X \mid d(y, x_0) < \varepsilon\}.$$

Будем называть эту топологию *метрической*.

В качестве нетривиального примера ЛНК можно привести конус выпуклых компактных подмножеств банахова пространства  $E$ . Приведем нетривиальный пример ЛНК.

*Пример 4.* Пусть  $E$  — банахово пространство, а  $K(E)$  — набор выпуклых компактов  $E$ . Как известно [6],  $K(E)$  изометрично вложено в линейное пространство  $L(E)$  классов эквивалентности  $(A, B)$  для  $A, B \in K(E)$ :

$$\forall A_1, A_2, B_1, B_2 \in K(E) \quad (A_1, B_1) \sim (A_2, B_2), \text{ если } A_1 + B_2 = A_2 + B_1.$$

Нулевой элемент  $L(E)$  определяется так:  $O_{L(E)} := \{(A, A) \mid A \in K(E)\}$ . В пространстве  $L(E)$  можно ввести норму:  $\|(A, B)\|_{L(E)} := h(A, B)$ , равную метрике Хаусдорфа множеств  $A$  и  $B$ .  $K(E)$  изоморфно выпуклому конусу  $\mathbb{K} := \{(A, \{0\}) \mid A \in K(E)\} \subset L(E)$ . Вообще говоря,  $L(E)$  не полно, но конус  $\mathbb{K}$  секвенциально полон в  $L(E)$ .

Интересно также привести пример выпуклого конуса с нормой, не являющегося ЛНК.

*Пример 5.* Пусть  $X$  — набор пар неотрицательных чисел  $(a, b)$ , для которых  $a = 0$  тогда и только тогда, когда  $b = 0$ :  $(a, b) = 0 \iff a = 0$ . Введем норму следующим образом:  $\|(a, b)\|_X := a$ .

Ясно, что  $X$  линейно инъективно вложено в линейное пространство  $E$  пар вещественных чисел  $(a, b)$ . Более того, всякое соответствующее линейное инъективное вложение  $\varphi((a, b)) = (\alpha_1 a + \beta_1 b, \alpha_2 a + \beta_2 b)$  не изометрично, где  $\alpha_{1,2}$  и  $\beta_{1,2}$  — фиксированные вещественные числа, для которых  $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$  и  $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ . Действительно, для всякой возможной нормы  $q(\cdot)$  на  $E$

$$q(\varphi(a, b)) = q((\alpha_1, \alpha_2)a + (\beta_1, \beta_2)b) \geq q((\beta_1, \beta_2)b) - q((\alpha_1, \alpha_2)a)$$

и  $\lim_{b \rightarrow +\infty} q((\alpha a, \beta b)) = +\infty$  для любого фиксированного числа  $a$ . Поэтому существует такая пара  $(a, b) \in X$ , что  $q((a, b)) \neq \|(a, b)\|_X$ , то есть вложение  $\varphi$  не изометрично.

Ясно, что в случае существования линейного инъективного изометричного вложения  $\varphi : X \rightarrow E_X$  можно ввести метрику  $d(x, y) = \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{E_X}$ . Стоит заметить, что существование линейного инъективного изометрического вложения  $\varphi : X \rightarrow E_X$  означает, что на класс ЛНК с законом сокращения можно перенести все версии теоремы Хана-Банаха об отделимости выпуклых множеств. В частности, это касается известного результата о функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества, который мы будем использовать в дальнейшем.

**Определение 4.** Множество  $A \subset X$  назовем *замкнутым*, если для всякой  $d$ -сходящейся последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$  её предел  $x_0$  лежит в  $A$ .

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — ЛНК с законом сокращения,  $A \subset X$  — замкнутое выпуклое множество,  $x_0 \notin A$ . Тогда существует  $\ell \in X^*$  такой, что  $\ell(x_0) > \ell(A)$ .

## 2. Интеграл Бохнера в ЛНК: определение и свойства

Существует множество аналогов классического интеграла Лебега для отображений в бесконечномерные пространства Фреше. Наиболее известным и широко употребляемым является интеграл Бохнера, поскольку он сохраняет практически все свойства интеграла Лебега [4, 12, 14]. Однако класс интегрируемых по Бохнеру отображений не является достаточно широким для многих задач функционального анализа и его приложений [4, 12, 23].

В связи с этим наряду с интегралом Бохнера активно изучаются и используются другие понятия интеграла для отображений в бесконечномерные пространства Фреше [4, 12, 23]. В частности, хорошо известна теория интеграла Петтиса [4, 14, 23]. Класс интегрируемых по Петтису отображений существенно шире класса отображений, интегрируемых по Бохнеру. Но при этом интеграл Петтиса теряет множество существенных свойств интеграла Бохнера.

В данном разделе статьи мы введём аналоги понятий интегралов Петтиса и Бохнера для отображений  $f : I = [a; b] \rightarrow X$ , где  $X$  — ЛНК с законом сокращения. Наши рассуждения основаны на существовании линейного инъективного изометричного вложения всякого такого конуса в банахово пространство.

Для метрической топологии понятие интеграла Бохнера отображений  $f : I \rightarrow X$  можно ввести, заменив местами сходимости по норме в  $X$  на сходимости по метрике. Этому посвящен пункт 2.2 данного раздела. Что же касается других типов сходимости, то тут мы вынуждены рассмотреть всю схему построения интеграла (от понятия измеримости и слабого интеграла), чему более подробно посвящен п. 2.3 настоящего раздела работы. Обе концепции интеграла Бохнера опираются на понятие и простейшие свойства интеграла Петтиса (п. 2.1.).

### 2.1. Интеграл Петтиса в ЛНК

Вслед за стандартной схемой построения интегралов [14] отображений в банаховы пространства будем вводить слабый интеграл Петтиса и сильный интеграл Бохнера отображений  $f : I \rightarrow X$ . Здесь мы снова используем существование линейного инъективного изометричного вложения  $X$  в банахово пространство  $E_X$ . Будем обозначать через  $X^*$  набор линейных ограниченных функционалов  $\ell : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  (т.е.  $|\ell(x)| \leq C \cdot \|x\|$  для всякого  $x \in X$  при некотором  $C > 0$ ).

**Определение 5.** Отображение  $f$  будем называть интегрируемым по Петтису на измеримом по Лебегу множестве  $A$ , если всякому существует  $x_A \in X$  такой, что

$$\ell(x_A) = \int_A \ell(f(t)) dt \quad \forall \ell \in X^*,$$

где интеграл справа понимается в смысле Лебега. Примем обозначение:

$$(P) \int_A f(t) dt =: x_A.$$

По стандартной схеме [14] можно проверить следующий факт.

**Теорема 2.** Если  $f : I \rightarrow X$  интегрируема по Петтису на всяком измеримом по Лебегу подмножестве  $A \subset I$ , то функция множества

$$\Phi(A) = (P) \int_A f(t) dt$$

сильно счетно аддитивна и абсолютно непрерывна относительно классической меры Лебега  $mes$ , заданной на борелевской  $\sigma$ -алгебре подмножеств  $I$ .

## 2.2. Интеграл Бохнера в ЛНК

Напомним, что наличие метрики  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  с соответствующими условиями позволяет линейно инъективно изометрично вложить  $X$  в некоторое банахово пространство  $E_X$ .

Введем понятие интеграла Бохнера для метрической топологии. По сути, это — обычное понятие интеграла Бохнера для отображения  $f : I \rightarrow E_X$ . Начнём с определения интеграла Бохнера простых отображений.

**Определение 6.** Через  $mes$  будем обозначать классическую меру Лебега на числовой прямой,  $I_k$ ,  $A$  — измеримые по Лебегу подмножества  $I$ ,  $\chi_A(\cdot)$  — характеристическая функция множества  $A$ .

Простое отображение  $f(t) := \sum_{k=1}^N c_k \chi_{I_k}(t)$ , где  $c_k \in X$  ( $X$  — ЛНК),  $I = \bigcup_{k=0}^N I_k$ ,  $mes(I_0) = 0$ , назовем интегрируемым по Бохнеру, если его норма  $\|f(t)\| : I \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по Лебегу. В таком случае

$$(B) \int_A f(t) dt := \sum_{k=1}^N c_k mes(A \cap I_k). \quad (2.1)$$

**Определение 7.** Будем считать, что  $X$  — ЛНК с законом сокращения. Тогда существует линейное инъективное изометричное вложение  $\varphi : X \rightarrow E_X$ .

Положим  $d(x, y) := \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{E_X}$ . Отображение  $f : I \rightarrow X$  ( $X$  — ЛНК с законом сокращения) будем называть интегрируемым по Бохнеру, если существует такая последовательность простых отображений  $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ , что для почти всех  $t \in I$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(t), f(t)) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int d(f_n(t), f(t)) = 0, \quad (2.2)$$

а также существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_I f_n(t) dt$ . В таком случае по определению для всякого измеримого по Лебегу множества  $A \subset I$

$$(B) \int_A f(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_A f_n(t) dt. \quad (2.3)$$

*Замечание 1.* Условие существования предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_I f_n(t) dt$  можно заменить на условие полноты  $X$  как метрического пространства. Независимо от этого условия такой предел будет единственным, что обосновывает корректность определения 7.

Если  $f : I \rightarrow X$  интегрируемо по Бохнеру в любой из нормированных топологий, то из условия  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  для почти всюду  $t \in I$  ( $f_n$  — простые) следует, что для всякого  $\ell \in X^*$   $\ell(f(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(f_n(t))$  для почти всюду  $t \in I$ , откуда

$$\ell \left( (B) \int_I f_n(t) dt \right) = \int_I \ell(f_n(t)) dt \rightarrow \int_I \ell(f(t)) dt.$$

Теперь в силу непрерывности функционала  $\ell$

$$\ell \left( (B) \int_I f(t) dt \right) = \int_I \ell(f(t)) dt \quad \forall \ell \in X^*,$$

то есть любая интегрируемая по Бохнеру функция интегрируема и по Петтису, причем значения обоих интегралов совпадают. Это, в частности, означает, что функция множества ( $A \subset I$ ,  $A$  измеримо по Лебегу).

$$\Phi(A) = (B) \int_A f(t) dt$$

сильно счетно-аддитивна и абсолютно непрерывна относительно меры  $mes$ .

Стандартно проверяется для всякого измеримого  $A \subset I$ .

**Предложение 1.** (i)  $\int_A \|f(t)\| dt \geq \| (B) \int_A f(t) dt \|$ ;  
(ii)  $\int_A (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_A f(t) dt + \beta \int_A g(t) dt \quad \forall \alpha, \beta \geq 0$ .

Стандартным способом [14] проверяется критерий интегрируемости по Бохнеру отображений  $F : I \rightarrow X$ .

**Теорема 3.** Пусть  $X$  —  $d$ -полное метрическое пространство. Отображение  $f : I \rightarrow X$  интегрируемо по Бохнеру тогда и только тогда, когда  $f$  почти всюду есть предел последовательности простых отображений метрической топологии и функция  $\|f(t)\|$  суммируема по Лебегу.

Если  $X$  —  $d$ -полное метрическое пространство, то конус интегрируемых по Бохнеру отображений  $f : I \rightarrow X$  снова будет полным метрическим пространством с метрикой

$$d(f, g) = \int_I \rho(f(t), g(t)) dt = \int_I \|\varphi(f(t)) - \varphi(g(t))\| dt,$$

где  $\varphi : X \rightarrow E_X$  — линейное инъективное непрерывное вложение. Это следует из соответствующего свойства интеграла Бохнера отображений в банаховых пространствах.

Аналогично проверяется, что для интеграла Бохнера можно усилить теорему 2.

**Теорема 4.** Пусть  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $A$  и  $A_n$  — измеримы по Лебегу. Тогда для интегрируемого по Бохнеру отображения  $f$  на  $I$  в метрической топологии верно

$$\int_A f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(t) dt.$$

*Доказательство.* Отметим лишь, что из интегрируемости по Бохнеру на всём множестве вытекает интегрируемость на всяком его измеримом подмножестве. Это следует из свойств интеграла Бохнера отображений вещественного отрезка в банаховы пространства и доказывается по стандартной схеме [14].  $\square$

### 3. Проблема Радона-Николима и $p$ -вариация

#### 3.1. Постановка задачи, решение проблемы в банаховом случае

Теперь вспомним о проблеме Радона-Никодима, которая для отображений  $F : I \rightarrow E$  ( $E$  — ЛВП) была исследована Ф. С. Стонякиным ранее. Для банахова пространства  $E$ , в частности, рассматривалось семейство абсолютно выпуклых компактов  $\mathcal{C}(E)$ . Отображение  $F : I \rightarrow E$  называлось в [7] компактно абсолютно непрерывным, если  $F : I \rightarrow F(a) + E_C$  для некоторого  $C \in \mathcal{C}(E)$ ,  $E_C = (sp C, \|\cdot\|_C)$ , и  $p_C(\cdot)$  — функционал Минковского множества  $C \in \mathcal{C}(E)$ . В частности, было доказано, что

**Теорема 5.** Если  $F : I \rightarrow E$  компактно абсолютно непрерывно, то

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x F'(t) dt \quad (F' \text{ существует почти всюду на } I).$$

Введем понятие сильно абсолютно непрерывного отображения  $F : I = [a; b] \rightarrow X$  в метрической топологии.

**Определение 8.**  $F : I \rightarrow X$  назовем (сильно) абсолютно непрерывным, если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left( \forall \bigcup_{k=1}^n [\alpha_k; \beta_k] \subset I : \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < \delta \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^p d(F(\alpha_k), F(\beta_k)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Легко проверить, что всякий неопределенный интеграл Бохнера

$$F(x) = (B) \int_a^x f(t) dt$$

отображения  $f : I = [a; b] \rightarrow X$  сильно абсолютно непрерывен в метрической топологии.

Для ЛНК  $X$  зафиксируем банахово пространство  $E_X$  такое, что существует линейное инъективное изометричное вложение  $\varphi : X \rightarrow E_X$ . Тогда для всякого выпуклого симметричного компакта  $C \subset E_X$  можно ввести метрику для  $x, y \in X$ :

$$d_C(x, y) := \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_C, \quad (3.1)$$

равную  $+\infty$  в случае  $\varphi(x) - \varphi(y) \notin \text{span } C \subset E_X$ .

Теперь введем понятие компактно абсолютно непрерывного отображения.

**Определение 9.**  $F : I \rightarrow X$  назовем компактно абсолютно непрерывным ( $F \in AC_K(I, X)$ ), если для некоторого выпуклого компакта  $C \subset X$   $\varphi(F) : I \rightarrow \varphi(F(a)) + E_C$ , причем

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left( \forall \bigcup_{k=1}^n [\alpha_k; \beta_k] \subset I : \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < \delta \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^p d(F(\alpha_k), F(\beta_k)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отметим простейшие свойства класса  $AC_K(I, X)$ .

**Предложение 2.** Справедливо включение  $AC_K(I, X) \subset AC(I, X)$ . В случае, когда  $X$  линейно инъективно и непрерывно вложен в конечномерное пространство  $\dim E < \infty$ , классы  $AC_K(I, X)$  и  $AC(I, X)$  совпадают.

Для переноса теоремы 5 существенна непрерывность вложения ЛНК  $X$  в банахово пространство  $E_X$ . Это сразу приводит к необходимости учитывать выбор топологии в ЛНК  $X$ . Поэтому мы переходим к проблеме переноса теоремы 5 на отображения в ЛНК.

Попутно мы рассматриваем обобщение понятия абсолютно непрерывного отображения — отображения с  $p$ -вариацией ( $p \in (1; +\infty)$ ) и ставим проблему представимости таких отображений в виде интеграла Бохнера. В этом плане удалось получить теоремы о представимости отображений с компактной  $p$ -вариацией в виде интеграла, которые новы даже для банаховых пространств (теоремы 7, 8).

### 3.2. Об отображениях с конечной $p$ -вариацией со значениями в банаховых пространствах

Данный раздел посвящен переносу известной теоремы Ф. Рисса об описании вещественных функций, имеющих конечную  $p$ -вариацию на случай отображений в банаховы пространства.

**Определение 10.** Пусть на сегменте  $[a; b]$  задано отображение  $F : I \rightarrow E$  ( $E$  — банахово пространство). Разложим  $[a; b]$  на части точками  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$  и составим сумму

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|F(x_{k+1}) - F(x_k)\|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}}, \quad p \geq 1.$$

Точная верхняя граница множества всевозможных сумм  $V$  называется полной  $p$ -вариацией отображения  $F$  и обозначается через  $V^p(F, [a; b])$ .

**Лемма 1.** Непосредственно проверяются основные свойства для отображений с конечной  $p$ -вариацией:

- $F, g \in BV^p \Rightarrow F \pm g \in BV^p, \lambda F \in BV^p$  ( $BV^p$  означает, что  $F$  имеет конечную  $p$ -вариацию);
- $F \in BV^p \Rightarrow F \in AC$  ( $AC$  — класс абсолютно непрерывных функций);
- $F \in Lip \Rightarrow F \in BV^p, 1 < p < \infty$  ( $Lip$  — класс липшицевых функций).

Хорошо известно, что липшицево отображение может быть нигде не дифференцируемым [2]. Оказывается, что условие ограниченной  $p$ -вариации сильнее условия абсолютной непрерывности, но слабее условия Липшица, поэтому исходная проблематика переносится и на случай  $p$ -вариации. Иными словами, отображение с конечной  $p$ -вариацией может также быть нигде не дифференцируемым.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.** Если функция  $F : [a; b] \rightarrow E$  (где  $E$  — банахово пространство) имеет конечную полную  $p$ -вариацию, почти всюду дифференцируема на  $[a; b]$ , тогда

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x f(t) dt,$$

$$\text{где } \int_a^x \|f(t)\|^p dt < \infty.$$

*Доказательство.* В неравенстве

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|F(x_{k+1}) - F(x_k)\|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}} \leq K$$

(где  $K$  не зависит от способа разложения  $[a, b]$ , причем за число  $K$  можно принять интеграл  $\int_a^b \|f(t)\|^p dt$ ) для любой конечной системы взаимно неналегающих интервалов  $(a_k, b_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), содержащейся в  $[a, b]$ , будет

$$\sum_{k=1}^n \frac{\|F(b_k) - F(a_k)\|^p}{(b_k - a_k)^{p-1}} \leq K.$$

Но в силу сумматорного неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|F(b_k) - F(a_k)\| &= \sum_{k=1}^n \frac{\|F(b_k) - F(a_k)\|}{(b_k - a_k)^{\frac{p-1}{p}}} (b_k - a_k)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n \frac{\|F(b_k) - F(a_k)\|^p}{(b_k - a_k)^{p-1}}} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)}, \quad \text{где } q = \frac{p}{p-1} \end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\sum_{k=1}^n \|F(b_k) - F(a_k)\| \leq \sqrt[p]{K} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)},$$

откуда вытекает абсолютная непрерывность функции  $F(x)$ .

Значения функции  $F(x)$  содержатся в некотором замкнутом сепарабельном подпространстве  $E_0$  пространства  $E$ . Так как слабые пределы элементов из  $E_0$  заключены в  $E_0$ , то почти все значения  $F(x)$  содержатся в  $E_0$ . Таким образом,  $F(x)$  слабо измерима, почти сепарабельнозначна и, следовательно, сильно измерима.

Положим  $f_n(t) = 2^n [F(k2^{-n}) - F((k-1)2^{-n})]$  при  $(k-1)2^{-n} \leq t < k2^{-n}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$2^{-n} = x_{k+1} - x_k.$$

Следовательно,

$$f_n(t) = \frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t).$$

При этом

$$\int_a^b \|f_n(t)\|^p dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} \|f_n(t)\|^p dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})\|^p}{(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)})^{p-1}} \leq K$$

и, стало быть,

$$\int_a^b \|f(t)\|^p dt < +\infty.$$

Далее,  $f_n(t)$  почти всюду сходится слабо к  $f(t)$ , поэтому почти всюду  $\|f(t)\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t)\|$ . Для любого линейного непрерывного функционала  $\ell \in E^*$

$$\ell(F(b) - F(a)) = \int_a^x \ell(f(t)) dt = \ell \left( (B) \int_a^x f(t) dt \right).$$

Поэтому

$$F(b) - F(a) = (B) \int_a^x f(t) dt.$$

Теорема доказана.  $\square$

### 3.3. отображения с компактной $p$ -вариацией в ЛНК: метрическая топология

Введем понятие отображения с компактной  $p$ -вариацией при  $p \in [1; +\infty)$ . Если  $E$  — банахово пространство, то для всякого выпуклого симметричного компакта  $C \subset E$  полной  $p$ -вариацией в  $E_C$  отображения  $F : I \rightarrow F(a) + E_C$  будем называть

$$\sup \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|F(x_k) - F(x_{k-1})\|_C^p}{(x_k - x_{k-1})^{p-1}}, \quad (3.2)$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка  $[a; b] : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Если полная вариация конечна, то отображение  $F$  будем называть отображением с компактной  $p$ -вариацией. При  $p > 1$  всякое такое отображение будет компактно абсолютно непрерывным. Нами доказана следующая теорема.

**Теорема 7.** Пусть  $F : I \rightarrow E$  имеет компактную  $p$ -вариацию ( $p > 1$ ). Тогда

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x F'(t) dt, \quad (3.3)$$

причем  $\int \|F'(t)\|_C^p dt < +\infty$  для соответствующего выпуклого компакта  $C \subset E$ .

*Доказательство.* Данное утверждение следует из того, что  $F \in AC_K(I, E)$  (см. лемму 1). Далее нужно комбинировать теоремы 5 и 6.  $\square$

Тогда условие компактной  $p$ -вариации для  $F : I = [a; b] \rightarrow X$  можно ввести так:

$$\sup \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_C^p(F(x_k), F(x_{k-1}))}{(x_k - x_{k-1})^{p-1}} < +\infty, \quad (3.4)$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка  $[a; b]$ :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Примем обозначение  $F \in BV^p(I, X, C)$ .

Из  $F \in BV^p(I, X, C)$  следует  $F \in AC_k(I, E_X)$  и далее, комбинируя теоремы 5 и 6, получаем следующий результат.

**Теорема 8.** Пусть  $X$  —  $d$ -полное метрическое пространство. Если при  $p > 1$   $F \in BV^p(X, C)$  для некоторого выпуклого симметричного компакта  $C \subset E_X$ , то  $F$  почти всюду дифференцируемо в  $X$  и верно равенство

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x F'(t) dt, \quad (3.5)$$

$$\text{где } \int_a^b d_C^p(0, F'(t)) dt = \int_a^b \|\varphi(F'(t))\|_C^p dt < +\infty.$$

Отметим, что  $d$ -полнота существенна для принадлежности  $F'(t) \in X$ .

*Замечание 2.* Покажем класс примеров применимости данного результата. Отображение  $F : I \rightarrow X$  будет иметь компактную  $p$ -вариацию, если

$$F(x) = F(a) + \Phi(x)C \quad (a \leq x \leq b)$$

для некоторого компакта  $C \subset X$  и

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t) dt, \quad \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \in L_p([a; b]).$$

Из доказанной нами теоремы 5 следует, что такое отображение почти всюду имеет производную  $F'$  в метрической топологии ЛНК  $X$ , причем

$$\int_a^b \|F'(t)\|^p dt < +\infty.$$

Отметим, что при  $p = 1$  отображение ограниченной вариации может не быть абсолютно непрерывным, поэтому в таком случае стоит потребовать абсолютную непрерывность отображения  $F$ .

**Теорема 9.** Пусть  $X$  —  $d$ -полное метрическое пространство. Если для некоторого выпуклого симметричного компакта  $C \subset E_X$  верно

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left( \forall \bigcup_{k=1}^n [\alpha_k; \beta_k] \subset I : \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < \delta \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^p d_C(F(\alpha_k), F(\beta_k)) < \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.6)$$

то  $F$  почти всюду дифференцируемо в  $X$  и верно

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x F'(t) dt, \quad (3.7)$$

$$\text{где } \int_a^b d_C(0, F'(t)) dt = \int_a^b \|\varphi(F'(t))\|_C dt < +\infty.$$

*Доказательство.* Условие 3.6 гарантирует компактную абсолютную непрерывность отображения  $\varphi(F) : I = [a; b] \rightarrow E_X$ . Далее нужно воспользоваться теоремой 5 и полнотой метрического пространства  $X$ .  $\square$

Полученный результат можно использовать для отображения в конус выпуклых компактов любого банахова пространства со стандартной нормой и метрикой Хаусдорфа (см. пример 5).

## Заключение

В работе рассмотрено понятие линейного нормированного конуса (ЛНК). Для отображений в ЛНК  $X$  с законом сокращения введен и исследован аналог понятия интеграла Бохнера для отображений  $f : I = [a; b] \rightarrow X$  в метрической топологии.

Была затронута известная проблема Радона-Никодима о представимости абсолютно непрерывных отображений в виде интеграла Бохнера. Для отображений в банаховы пространства эта проблема была исследована Ф. С. Стонякиным в его кандидатской диссертации [7].

Мы развили эти исследования в новом направлении. Во-первых, в классе банаховых пространств работы мы рассмотрели класс отображений с так называемой  $p$ -вариацией при  $p \in [1; +\infty)$ . В работе получены условия дифференцируемости таких отображений почти всюду и представимости в виде интеграла Бохнера, которые новы даже для банаховых пространств.

Во-вторых, упомянутая проблематика рассмотрена в классе ЛНК с метрической топологией. На этот случай перенесена теорема 7 — сформулирована теорема 8. Дано замечание о содержательном классе примеров (см. замечание 2). Отдельно рассмотрен случай  $p = 1$ , т.е. сильно абсолютно непрерывного отображения в ЛНК (теорема 9).

## Список цитируемых источников

1. *Гельфанд И. М.* Abstracte Funktionen und lineare Operatoren. // Математический сборник. — 1938. — Т. 4(46). — С. 235-286.  
Gel'fand I. M. (1938). Abstracte Funktionen und lineare Operatoren. Math. Sb. 46 (4), 235-287.
2. *Гельфанд И. М., Яглом А. М.* Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике // Успехи мат. наук. — 1956. — Т.11, вып. 1(67). — С. 77-114.  
Gel'fand I. M., Yaglom A. M. (1956). Integration in functional spaces and its application in quantum physics (in Russian). Uspekhi Mat. Nauk 11:1, 77-114.
3. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.  
Yosida K. (1965). Functional analysis. Berlin: Springer.
4. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа. Учебное пособие. — Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. — 600 с.  
Kadets V. M. (2006). Course of Functional Analysis. Textbook (in Russian). Kharkov.
5. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ. // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — Т. 53. — С. 64-132.  
Orlov I. V. (2014). Introduction to the sublinear analysis (in Russian). Sovr. matem. Fund. Napravleniya 53, 64-132.
6. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — Москва: Физматлит, 2007 — 440 с.  
Polovinkin E. S., Balashov M. V., (2007). Elements of convex and strongly convex analysis (in Russian). Moscow: Fizmatlit.
7. *Стонякин Ф. С.* Компактные характеристики отображений в локально выпуклых пространствах и их приложения в векторном интегрировании. // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 — Симферополь: 2011. — 161 с.  
Stonyakin F. S. (2011). Compact properties of mappings in locally convex spaces and their applications in vector integration (in Russian). PhD Thesis, Simferopol.
8. *Birkhoff G.* Integration of functions with values in a Banach space. — Trans. Amer. Math. Soc. — 1935. — Vol.38. — P. 357–378.
9. *Bochner S.* Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vectorraumes. — Fund. Math. — 1933. — Vol.20. — P. 262-276.
10. *Dunford N., Shwarcz J. T.* Linear operators. General theory. — New York: Interscience Publishers, 1958.
11. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector Measures. — Providence: Amer. Math. Soc., 1977.
12. *Edwards R.*, Functional Analysis. Theory and applications, Holt, Rinehart and Winston, New York — London, 1965.
13. *Fuchssteiner B., Lusky W.* Convex cones, North Holland Math. Stud., 56, North Holland, Amsterdam, 1981.
14. *Hille E., Phillips R. S.* Functional Analysis and Semigroups, Lect. Notes in Math, no. 481, Springer Verlag, New York, 1975.

15. *Keimel K., Roth W.* Ordered cones and approximation, Lecture Notes in Math., 1517, Springer, Berlin, 1992.
16. *Pettis B. J.* On integration in vector space, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), no. 2, 277-304.
17. *Phillips R. S.* On weakly compact subsets of a Banach space, Amer. J. Math., 65 (1943), no. 3, 108-136.
18. *Price G. B.*, The theory of integration, Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942), 498-521.
19. *Rådström J. H.* An embedding theorem for space of convex sets, Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 165-169.
20. *Roth W.* A combined approach to the fundamental theorems for normed spaces, Bulletin Acad. Sinica, 11(1994), 83-89.
21. *Roth W.* Hahn-Banach type theorems for locally convex cones, Journal of the Australian Math. Soc. (Ser. A), 68 (2000), no. 1, 104-125.
22. *Stonyakin F. S.* An analogue of the Hahn-Banach theorem for functionals on abstract convex cones. // Eurasian Math. J. — Vol.7, no.3. — P. 89-99.
23. *Vachaniya N. N., Tarieladze V. I., Chobanyan S. A.* Probabilistic distributions in Banach spaces (in Russian). Moscow: Nauka, 1985.

Получена 25.04.2016

## РЕФЕРАТЫ

УДК 531.38

Е. П. КУБЫШКИН, П. А. СОЛОДОВНИКОВ. **Об одном алгоритме оптимального управления поворотом твердого диска с упругим стержнем** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №2. — С. 99–114.

В работе предложен алгоритм построения оптимального управления поворотом твердого диска с упругим стержнем постоянного сечения, жестко прикрепленным к боковой поверхности диска в направлении его радиуса. Поворот осуществляется моментом внешних сил, приложенным к оси, проходящей через центр диска перпендикулярно средней линии стержня. Изучаются задача перевода механической системы из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени с минимизацией величины управляющего момента (нормы управляющего момента в пространстве  $L_\infty$ ) и задача быстродействия при ограничении величины управляющего момента. Сформулирован принцип максимума, предложен эффективный алгоритм решения указанных задач.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, принцип максимума, твердое тело с упругим стержнем.

Ил. 4. Библиогр. 8 назв.

УДК 314.15.926

Л. И. ИВАНОВСКИЙ. **Устойчивые режимы динамических систем с импульсными воздействиями** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №2. — С. 115–134.

Рассматривается математическая модель системы из трех связанных, сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием. Для нее изучаются вопросы существования, устойчивости и асимптотического представления периодических решений на основании бифуркационного анализа специального двумерного отображения в зависимости от различных значений начальных параметров, а также краевых условий. Особое внимание уделяется числу сосуществующих устойчивых режимов. Данная работа состоит из двух частей. Первая часть посвящена постановке задачи. В ней большое внимание уделяется математической модели и необходимым теоретическим выкладкам, подводящим к асимптотическому исследованию специального двумерного отображения. Здесь также рассказывается об особенностях численного исследования. Во второй части представлены результаты численного исследования. Здесь рассмотрены основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве специального двумерного отображения на основе теории бифуркаций.

**Ключевые слова:** устойчивый режим, фазовые перестройки, осциллятор.

Ил. 20. Библиогр. 6 назв.

УДК 519.713.5+528.854.4

А. А. МАКСИМОВ. **Количественная оценка изменений на полутоновых изображениях клеточным автоматом** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №2. — С. 135–147.

Предлагается новый подход к оценке изменений (яркостных, конфигурационных и их композиций) для двух последовательных полутоновых изображениях одной и той же сцены, полученных в разные моменты времени. Приводится математическое обоснование предложенных

показателей. Для определения этих показателей предлагается параллельная вычислительная модель, основанная на концепции клеточных автоматов с диффузионной динамикой. Приводится пример реализации предложенного подхода.

**Ключевые слова:** сравнение изображений, клеточный автомат, диффузия

Ил. 5. Библиогр. 10 назв.

УДК 517.929

А. Ю. ПЕРЕВАРЮХА. **Модель сценария популяционного кризиса в результате бифуркации Андронова-Хопфа** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №2. — С. 149–159.

В работе предложена модификация дифференциального уравнения с запаздыванием с целью описания специфического варианта развития популяционного процесса. Рассмотрены примеры реальной популяционной динамики со сценариями неожиданных переходов к резким колебаниям. Включенная изначально в уравнение ёмкость экологической ниши не полностью определяет асимптотические условия существования многих популяций и требует дополнения. Обоснование оригинальной формы правой части исходит из значимости действующего с запаздыванием величины превышения численности над оптимальной. После бифуркации Андронова-Хопфа траектория демонстрирует свойственный некоторым видам бабочек продолжительно происходящий переход к негармоническим флуктуациям численности. В отличие от уравнения Гопалсами характеристика ёмкости среды выступает не асимптотическим предельным значением для затухающих осцилляций, но исполняет роль порогового уровня для амплитуды релаксационного цикла. Сценарий увеличения репродуктивной активности описывает популяционный кризис от чрезмерного истощения ресурсов при пиках флуктуаций, который реализуется в виде выброса траектории возникшего цикла за пределы допустимых значений существования биологической системы.

**Ключевые слова:** уравнения с запаздыванием, специфические эффекты популяционной динамики, релаксационные циклы, модели кризисных явлений.

Ил. 7. Библиогр. 15 назв.

УДК 517.98

Ф. С. СТОНЯКИН, А. Н. СТЕПАНОВ. **Интеграл Бохнера в линейных нормированных конусах** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №2. — С. 161–177.

В классе линейных нормированных конусов (ЛНК) вводится аналог понятия интеграла Бохнера для отображений вещественного отрезка со значениями в абстрактных конусах. Исследованы общие свойства интеграла Бохнера, в том числе свойство полноты конуса интегрируемых отображений. Для этого случая рассмотрена известная проблема Радона-Никодима, связанная с отсутствием представимости отображения ограниченной вариации в виде неопределенного интеграла Бохнера. В настоящей работе указанная выше проблема в определённом смысле решена для отображений с  $p$ -вариацией для  $p \geq 1$ . Эти результаты новы даже в классе банаховых пространств.

**Ключевые слова:** абстрактный выпуклый конус, линейный нормированный конус, закон сокращения, интеграл Бохнера, метрическая топология.

Библиогр. 23 назв.

## ABSTRACTS

MSC 2010: 47N10, 49J20, 49J35, 93C20, 70E99

E. P. KUBYSHKIN, P. A. SOLODOVNIKOV. **An algorithm for optimal control of the hard disk turning with elastic rod** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.2, 99–114 (2016).

The paper proposes an algorithm for constructing optimal control for turning of the hard disk with a constant section elastic rod rigidly attached to the side surface of the disk in the radial direction thereof. Turning is carried out by the momentum of external forces, acted to an axis passing through the center of the disk perpendicularly to the middle line of the rod. The problem of translating a mechanical system from the initial phase state to the final state at a given time while minimizing the amount for the governing moment (norm of the governing moment in  $L_\infty$  space) is studied. The problem of the speed while confining the amount of governing moment is also studied. Optimal control construction problem is reduced to the solution of moment problem in the corresponding functional space. Maximum principle is formulated, an effective algorithm for construction of optimal controls in the series form with in advance known functional terms is proposed. Existence of controls with large number of shifts is noticed.

**Keywords:** optimal control, maximum principle, solid body with flexible rod.

Fig. 4. Ref. 8.

MSC 2010: 34K26, 34A37, 34K18, 34K20, 39A28, 39A23

L. I. IVANOVSKY. **Stable modes of dynamical systems with impulses** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.2, 115–134 (2016).

A mathematical model of a system of three coupled singularly perturbed oscillator with delay. For her study questions of existence and asymptotic stability of the periodic solutions based on the bifurcation analysis of a special two-dimensional map depending on different initial values of the parameters and boundary conditions. Particular attention is paid to the number of coexisting stable regimes. This work consists of two parts. The first part is devoted to the formulation of the problem. In it a lot of attention is paid to the mathematical model and the necessary theoretical calculations, the supplying to the asymptotic study of a special two-dimensional map. It also describes the features of the numerical studies. The second part presents the results of numerical studies. It describes the main adjustments occurring in the phase space of a special two-dimensional map based on bifurcation theory.

**Keywords:** stable mode, phase adjustment, oscillator.

Fig. 20. Ref. 6.

MSC 2010: 37B15, 68U10

A. A. MAKSIMOV. **Quantitative evaluation of changes on grayscale images by cellular automaton** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.2, 135–147 (2016).

A new approach to estimate changes in brightness, configuration and their compositions for two grayscale images of the same scene is proposed. A mathematical justification for the proposed indicators of such changes is fulfilled. To determine these indicators we propose parallel computing model based on the concept of cellular automata with the diffusion dynamics.

**Keywords:** digital image processing, cellular automata, diffusion processes.

Fig. 5. Ref. 10.

MSC 2010: 92D25, 65L07, 34K18

A. YU. PEREVARYUKHA. **Model for the scenario of population crisis resulting from Andronov-Hopf bifurcation** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.2, 149–159 (2016).

We offered the modification of a differential equation with delay to describe a specific embodiment of the population process. It was shown the examples of real population dynamics with transitions to sharp fluctuations. Included in equations capacity of the ecological niche not fully determines the asymptotic conditions for the existence of the population and require a supplement. Reasonable form of right-hand side on the basis of the importance of acting with a time lag of magnitude exceeding the size from the optimum was proposed. After the Andronov-Hopf bifurcation trajectory shows a prolonged transition to anharmonic population fluctuations, which can be seen for some moths. Unlike Gopalsamy equation carrying capacity does not serves the asymptotic limit value for damped oscillations, but there is a threshold for the amplitude of the relaxation cycle. Computational scenario of excess capacity during fluctuations describes the crisis due to over saturation in form of ejection cycle outside the allowable values of the existence of a biological system.

**Keywords:** delay equations, specific effects of population dynamics, relaxation cycles, models of crisis phenomena.

Fig. 7. Ref. 15.

MSC 2010: 46G05, 46G10, 46T20

F. S. STONYAKIN, A N. STEPANOV. **The Bochner integral in Linear Normed Cones** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.2, 161–177 (2016).

The analogue of Bochner integral for mappings of real segment with values in abstract cones in the special class of linear normed cones is introduced in the paper. The general properties of Bochner integral, including the property of completeness of cone of integrable mappings, are studied. For this case the known Radon-Nikodym problem is considered. We solved this problem in a sense for mappings with  $p$ -variation for  $p \geq 1$ . These results are new even in the class of Banach spaces.

**Keywords:** abstract convex cone, linear normed cone, cancellation law, Bochner integral, metric topology.

Ref. 23.

# Динамические системы

---

Том 6(34) №2

2016

---

## Содержание

Е. П. КУБЫШКИН, П. А. СОЛОДОВНИКОВ. Об одном алгоритме оптимального управления поворотом твердого диска с упругим стержнем	99
Л. И. ИВАНОВСКИЙ. Устойчивые режимы динамических систем с импульсными воздействиями	115
А. А. МАКСИМОВ. Количественная оценка изменений на полутоновых изображениях клеточным автоматом	135
А. Ю. ПЕРЕВАРЮХА. Модель сценария популяционного кризиса в результате бифуркации Андронова-Хопфа	149
Ф. С. СТОНЯКИН, А. Н. СТЕПАНОВ. Интеграл Бохнера в линейных нормированных конусах	161

# Dinamicheskie sistemy (Dynamical Systems)

---

Volume 6(34) no.2

2016

---

## Table of Contents

E. P. KUBYSHKIN, P. A. SOLODOVNIKOV. An algorithm for optimal control of the hard disk turning with elastic rod	99
L. I. IVANOVSKY. Stable modes of dynamical systems with impulses	115
A. A. MAKSIMOV. Quantitative evaluation of changes on grayscale images by cellular automaton	135
A. YU. PEREVARYUKHA. Model for the scenario of population crisis resulting from Andronov-Hopf bifurcation	149
F. S. STONYAKIN, A. N. STEPANOV. The Bochner integral in Linear Normed Cones	161