

MSC 2010: 37D05

Description of domain structures in the Solar Corona by means multi-color graphs¹

D. Malyshev, O. Pochinka

Higher School of Economics

Nizhny Novgorod. *E-mail: dmalishev@hse, olga-pochinka@yandex.ru*

Abstracts. Magnetic charging topology explains many energy processes (flares, prominences, etc.) in the solar corona by changing the domain structure associated with the appearance or disappearance of the separators. It is known that at most of the nulls of the magnetic field are prone. In this paper it is proved that a topology of the domains of a field with the prone nulls is completely described by a multi-color graph. In addition, we give an efficient algorithm for distinguishing of these graphs.

Keywords: magnetic fields, model of corona, photosphere magnetic reconnection, dynamics prominences, multi-color graph, polynomial-time algorithm.

1. Introduction and the formulation of the results

Understanding the energy processes in the corona of the sun is very important to explain many of the laws of nature. This paper considered a possible model to explain such effects in the photosphere as the flares and the prominences. Their origin is connected with the restructuring of regions (domains), on which the fans and the spines of the null points of the magnetic field divide the corona of the sun — reconnection. Therefore, the main questions for this approach are the qualitative partition of the solar corona into domains, as well as the existence of the separators (the lines of intersection of fans) — marks of upcoming or already occurred reconnection. There are different approaches to the study of the topology of domains, such as the construction of graphs that reflect the structure and the relative position of the domains [3] or footprints — traces of spines and fans on the photosphere [8]. We have proposed a new approach consisting in distinguishing of traces of fans on some circle on the photosphere. We describe these trace on a language of multi-color graph whose isomorphic class is a complete invariant for the topology of domains and gives information on the number of the separators. In more detail.

By the topological approach the magnetic field in the corona is believed to arise from a large number of dipoles in the solar interior. The dipoles are interpreted as locations where flux tubes originating in the solar interior break through the surface and spread out into the atmosphere (see figure 1). We use the assumptions of Magnetic Charge

¹This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 15-01-03687-a, 16-51-10005-Ko_a, 16-31-60008-mol-a-dk), RF President grant MK-4819.2016.1, the Basic Research Program at the HSE (project 98) in 2016, by LATNA laboratory, National Research University Higher School of Economics.

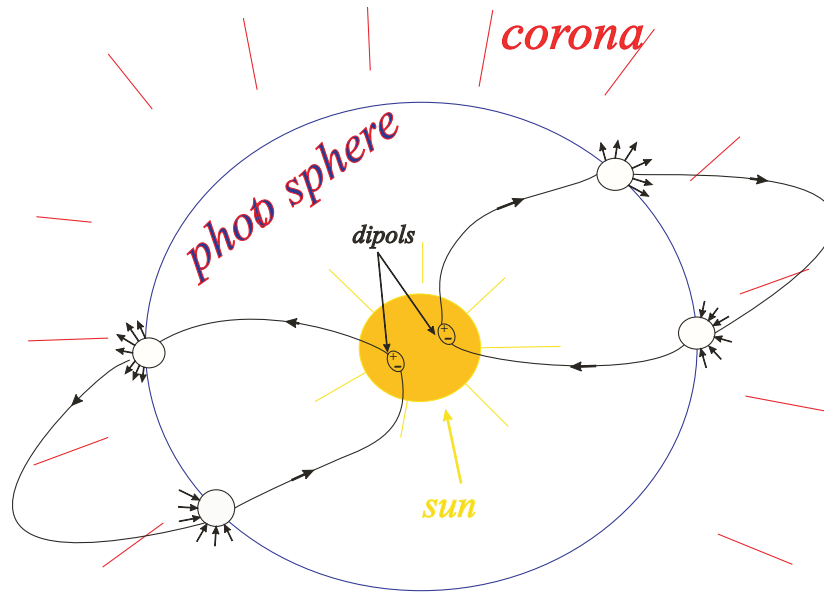


Рис. 1. The dipoles in the solar interior

Topology [7], where photospheric flux patches are modeled as point sources (charges) on the photosphere. Although this suggestion violate the solenoidal condition, but each source is considered to represent a flux tube passing through the solar surface and spreading out into the overlying corona, then this simplification is allowable. Following [2] for a model of the magnetic field \mathbf{B} with point sources the two-dimensional sphere $P = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 \mid w = 0\}$ in three-dimensional sphere $\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ is used as the photosphere and the region $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 \mid w > 0\}$ as solar corona. Moreover we suppose that \mathbf{B} is symmetrically extended to the region $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 \mid w < 0\}$ being termed the mirror corona and, hence, it is defined on $M = \mathbb{S}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^k q_i$ where q_1, \dots, q_k are the points on the photosphere where the charges are situated.

Magnetic *nulls* are the points where the magnitude of magnetic field vector vanishes. Due to the solenoidal condition $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ three eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ of the critical point satisfy the equality $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Since \mathbf{B} is potential then all eigenvalues are real number. Generically each eigenvalue is different from 0, thus each null of \mathbf{B} is a saddle point. Two quite distinct families of field lines tends to a null point: the *spine* is a line and the *fan* is a surface. For a null p denote by S_p the spine and by F_p the fan of p . The spines of different nulls have no intersections in general position. A null is called *positive* (*negative*) if $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$ ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$). The topological structure of a magnetic field \mathbf{B} is largely defined by null points, spines, fans, and separators, the union of which forms the so-called *skeleton* of the magnetic field. There are several types of nulls. A null which belongs to the photosphere is called *photospheric*. A photospheric null point whose spine lies in the photosphere is called *prone*, whereas a photospheric

null with a spine directed vertically is called *upright*. The *coronal null* is a null above the photosphere. It follows from [1] that the most nulls are prone.

When two fans have intersection they form a *separator*, which joins two oppositely signed null points. Fans divide the corona into different regions which called *domains*. Appearance and disappearance of separators change the topology of domains splitting. Such situation is called *separator reconnection*, which is one of the major reconnection mechanisms [15]. Much papers [3], [10], [11], [12] were devoted to classification of the magnetic field configurations that arise from such point-source models. It is naturally to introduce the following definition which goes back to the classic paper [14], see also [16].

Definition 1. One says that two coronal magnetic fields \mathbf{B}, \mathbf{B}' are *topologically equivalent* if there is a homeomorphism $H : M \rightarrow M$ sending magnetic lines of \mathbf{B} to magnetic lines of \mathbf{B}' with preserving orientation on the lines.

Denote by \mathcal{B} the set of the magnetic fields \mathbf{B} with the following properties:

- 1) each null of \mathbf{B} is prone;
- 2) if two fans of \mathbf{B} are intersected then they are either coincide, either have contact along one curve on the photosphere or have transversal intersection along two symmetric with respect to the photosphere curves;
- 3) the closures of the spines of different nulls have no intersection.

Now let $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$.

Theorem 1. For each magnetic field $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ there is a circle $C \subset P$ which is transversal to the flow generated by \mathbf{B} on P and such that each fan intersects C at exactly two points.

We will called such circle C by *photosphere section*. Denote by N the set of nulls of \mathbf{B} . Set $W = P \setminus \bigcup_{p \in N} S_p$, $\mathcal{F} = \bigcup_{p \in N} F_p$ and $X = C \cap \mathcal{F}$. Denote by N^u (N^s) the set of positive (negative) nulls of \mathbf{B} . Set $\mathcal{F}^u = \bigcup_{p \in N^u} F_p$ ($\mathcal{F}^s = \bigcup_{p \in N^s} F_p$), $X^u = C \cap \mathcal{F}^u$ ($X^s = C \cap \mathcal{F}^s$) and $X^t = X^u \cap X^s$.

In order to introduce a combinatorial topological invariant of the magnetic field $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ we recall the following definitions.

A *finite graph* Γ is an ordered pair (V, E) , such that the following conditions hold: V is a non-empty finite set of *vertices*; E is a set of pairs of vertices called *edges*.

If a graph contains an edge $e = (a, b)$, then each of the vertices a, b is said to be *incident to the edge* e and the vertices a and b are said to be connected by the edge e .

A *path* in a graph is a finite sequence of its vertices and edges of the form: $b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_k), b_k$, $k \geq 1$. The number k is called *the length of the path*, it is equal to the number of edges involved in the path.

A *cycle of length* k , $k \in \mathbb{N}$ in a graph is a finite subset of vertices and edges of the form $\{b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_0)\}$. A *simple cycle* is a cycle all of whose vertices and edges are pairwise distinct.

A graph Γ is called *multi-color* graph if the set of vertices or edges of Γ is the union of finite number subsets each of which consists of the vertices or edges of the same color.

Two multi-color graphs Γ and Γ' are said to be *isomorphic* if there exists a one-to-one correspondence ξ between the sets of their vertices which preserve the relations of incidence and the color.

For our invariant we will use three colors, we denote these colors by the letters s , t , u and, for brevity, refer to these vertices or edges as s -, t -, u -vertices or s -, t -, u -edges. We construct a multi-color graph Γ_B , corresponding to a magnetic field $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ as follows (see figure 2 where s , t , u are green, blue, red, accordingly):

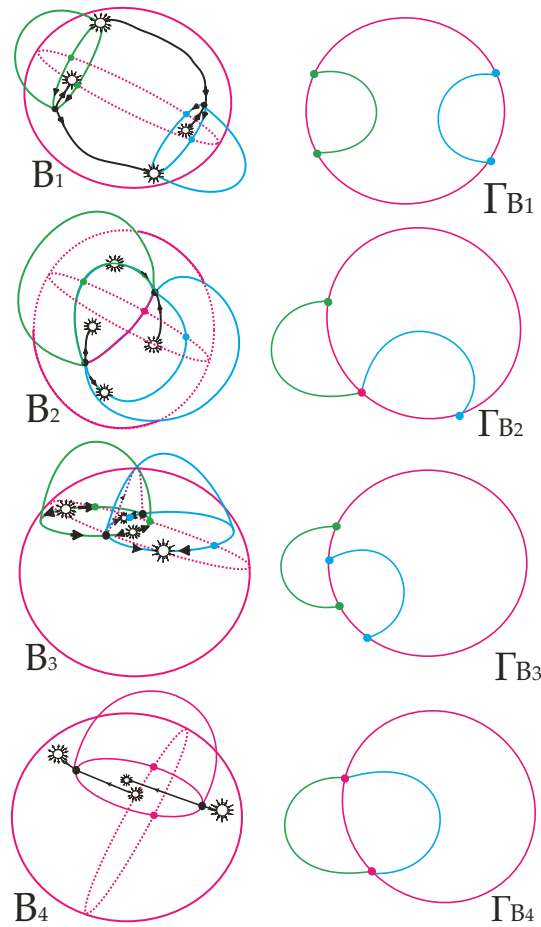


Рис. 2. Magnetic fields and their multi-color graphs

- 1) the t -vertices are in a one-to-one correspondence with the points of the set X^t ;
- 2) the s -vertices (u -vertices) are in a one-to-one correspondence with the points of the set $X^s \setminus X^t$ ($X^u \setminus X^t$);
- 3) the t -edges are in a one-to-one correspondence with the connected components of $C \setminus X$ and two vertices of the graph are incident to an t -edge if the corresponding points are boundary points for corresponding connected component;

4) two vertices of the graph are incident to an s -edge (u -edge) if the corresponding points are exactly $F_p \cap C$ for some null $p \in N^s$ ($p \in N^u$).

Theorem 2. *Magnetic fields \mathbf{B}, \mathbf{B}' from \mathcal{B} are topologically equivalent if and only if their multi-color graphs $\Gamma_B, \Gamma_{B'}$ are isomorphic.*

Theorem 2 motivates to ask the question about the computational complexity of distinguishing two multi-color graphs corresponding to magnetic fields. An algorithm solving the graph isomorphism problem is considered to be efficient if its running time is bounded by a polynomial on the number of vertices of input graphs. This problem can really be solved in polynomial time for the graphs of magnetic fields.

Theorem 3. *Isomorphism of multi-color graphs corresponding to Solar magnetic fields can be recognized in polynomial time.*

2. Necessary and Sufficient conditions for the topological equivalence of magnetic fields from \mathcal{B}

To prove the results we compactify the magnetic field lines in the places of point-charge by the bundle of straight lines, such idea was used in [6] for the finding of the separators of magnetic fields in electrically conducting fluids. Then the magnetic lines of the field \mathbf{B} coincide geometrically on M with trajectories of a three-dimensional flow $f^\tau : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ with the following properties:

- 1) the non-wandering set $\Omega(f^\tau)$ of f^τ consists of finite number hyperbolic equilibrium states² all of them belong to the photosphere P ;
- 2) all trajectories of f^τ are symmetric with respect the photosphere P and number of sinks coincide with number of sources;
- 3) the closures of one-dimensional invariant manifolds of different saddle points are disjoint;
- 4) if two-dimensional invariant manifolds of different saddle points are intersected then they are either coincide, either have contact along one curve on the photosphere or have transversal intersection along two symmetric with respect to the photosphere curves.

Denote by G the set of flows with properties above. By the construction we see the following interrelation between magnetic field $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ and its compactification $f^\tau \in G$:

²An equilibrium state w of the flow f^τ is called *hyperbolic* if it has no eigenvalues with zero real part. Any hyperbolic equilibrium state w of the flow f^τ possesses invariant manifolds: *stable manifold* $W_w^s = \{y \in \mathbb{S}^3 : \lim_{\tau \rightarrow +\infty} d(f^\tau(y), w) = 0\}$, *unstable manifold* $W_w^u = \{y \in \mathbb{S}^3 : \lim_{\tau \rightarrow -\infty} d(f^\tau(y), w) = 0\}$ which are homeomorphic to $\mathbb{R}^{n_s}, \mathbb{R}^{n_u}$, where n_s, n_u — the numbers of the eigenvalues with negative and positive real parts, correspondingly, d — a metric on \mathbb{S}^3 . We will denote by $\dim W_w^s = n_s, \dim W_w^u = n_u$ the dimensions of W_w^s and W_w^u .

- the charges coincide with the sink and source equilibrium states,
- the null points coincide with the saddle equilibrium states,
- the fan (spine) of each null coincides with two-dimensional (one-dimensional) invariant manifold of the corresponding saddle,
- the separators coincide with *heteroclinic curves* — connected component of the intersection of two-dimensional invariant manifolds of the saddle points,
- the magnetic lines of \mathbf{B} coincide with the trajectories of f^τ on M
- magnetic fields \mathbf{B}, \mathbf{B}' are equivalent if and only if corresponding flows f^τ, f'^τ are equivalent.

Let $f^\tau \in G$ and σ be a saddle point of f^τ with the unstable manifold W_σ^u and the stable manifold W_σ^s . Denote by Ω_1 (Ω_2) the set of saddle points σ of f^τ such that $\dim W_\sigma^u = 1$ ($\dim W_\sigma^u = 2$) and by Ω_0 (Ω_3) the set of sinks (sources). Let us set

$$A = \bigcup_{\sigma \in \Omega_1} cl W_\sigma^u, \quad R = \bigcup_{\sigma \in \Omega_2} cl W_\sigma^s.$$

The following proposition is due to [16] (see also [5] for details).

Proposition 1. For each flow $f^\tau \in G$ the following statements hold:

- i) $\mathbb{S}^3 = \bigcup_{x \in \Omega(f^\tau)} W_x^s = \bigcup_{x \in \Omega(f^\tau)} W_x^u$ and each invariant manifold W_x^s (W_x^u) is a submanifold³ of \mathbb{S}^3 ;
- ii) $cl W_x^u \cap W_y^u \neq \emptyset$ if and only if $W_x^u \cap W_y^s \neq \emptyset$;
- iii) the sets A, R are pairwise disjoint and each of them is connected.

Proof of Theorem 1

Theorem 1 follows from lemma below.

Lemma 1. For each flow $f^\tau \in G$ there is a circle $C \subset P$ which is transversal to the flow $f^\tau|_P$ and such that two-dimensional invariant manifold of each saddle point intersects C at exactly two points.

Proof. Let us set $\phi^\tau = f^\tau|_P$. It follows from the description of class G that f^τ is a flow on \mathbb{S}^3 with finite hyperbolic non-wandering set, then by Lefschetz formula $|\Omega_0| - |\Omega_1| + |\Omega_2| - |\Omega_3| = 0$, where $|\cdot|$ is the cardinality. In the other side ϕ^τ is a flow on \mathbb{S}^3 with the same non-wandering set, then $|\Omega_0| - |\Omega_1| - |\Omega_2| + |\Omega_3| = 2$. Thus

$$|\Omega_0| - |\Omega_1| = 1.$$

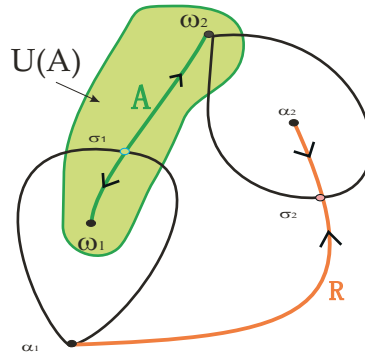


Рис. 3. Neighbourhood $U(A)$

Let us choose neighbourhood $U(A)$ of the set A on P such that $\partial U(A)$ is transversal all trajectories in $(W_A^s \setminus A) \cap P$ (see figure 3). Due to item iii) of Proposition 1, $U(A)$ has euler characteristic 1, it means that $U(A)$ is 2-disk. By item i) of Proposition 1, $W_A^s \setminus A = W_R^u \setminus R$. Set $Q = W_A^s \setminus A$ and $C = \partial U(A)$. By item i) of Proposition 1 and symmetry property of f^τ , each two-dimensional manifold of saddle point intersect $Q \cap P$ along exactly two trajectories. Thus C is required photospheric section. \square

Proof of Theorem 2

We assign a flow $f^\tau \in G$ for each magnetic field $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$, also we have a graph Γ_B corresponding to \mathbf{B} . Then theorem 2 follows from the next lemma.

Lemma 2. *Flows f^τ, f'^τ are topologically equivalent if and only if multi-color graphs $\Gamma_B, \Gamma_{B'}$ are isomorphic.*

Proof. First, we prove necessity. Suppose that f^τ and f'^τ from G are topologically equivalent, that is, there exists a homeomorphism $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ which sends the trajectories of f^τ to trajectories of f'^τ with preservation of orientation. Let us prove that multi-color graphs $\Gamma_B, \Gamma_{B'}$ are isomorphic. We assume without loss of generality that the graph $\Gamma_{B'}$ was constructed by using the photospheric section $C' = h(C)$. Since the conjugating homeomorphism h takes invariant manifolds of fixed points of f^τ to invariant manifolds of f'^τ with preservation of the stability, it follows that this homeomorphism takes X^s, X^t, X^u to X'^s, X'^t, X'^u . Then the required isomorphism $\xi : \Gamma_B \rightarrow \Gamma_{B'}$ is defined by the formula $\xi = \pi_{f'} h \pi_f^{-1}$ where $\pi_f, \pi_{f'}$ are one-to-one maps of the set X, X' onto the sets of vertices of the graph $\Gamma_B, \Gamma_{B'}$, accordingly.

Let us prove sufficiency. Consider the multi-colour graphs $\Gamma_B, \Gamma_{B'}$ of the flows $f^\tau, f'^\tau \in G$, respectively. Suppose that there exists an isomorphism ξ between the sets of vertices of $\Gamma_B, \Gamma_{B'}$ which preserve the relations of incidence and the color. We construct step by step a homeomorphism $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ conjugating f^τ and f'^τ .

³Let $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. A subset Y of \mathbb{S}^3 is said to be its μ -dimensional submanifold if for every point y of the set Y there is a neighbourhood U_y of y and a homeomorphism $\psi_y : U_y \rightarrow \mathbb{R}^3$ for which $\psi_y(U_y \cap Y) = \mathbb{R}^\mu$ where $\mathbb{R}^\mu \subset \mathbb{R}^3$ is the set of points whose last $(3 - \mu)$ coordinates are zero.

Step 1. Set $V = \mathbb{S}^3 \setminus (A \cup R)$. Similar to proof of Lemma 1, for each flow $f^\tau \in G$ there is a 2-sphere $\Sigma \subset M$ which is transversal to the flow $f^\tau|_V$ and such that two-dimensional invariant manifold of each saddle point intersects Σ at exactly one circles. Moreover, it is possible to construct Σ such that $\Sigma \cap P = C$. Set $C^u = \Sigma \cap \mathcal{F}^u$ ($C^s = \Sigma \cap \mathcal{F}^s$), $C^t = Y^u \cap Y^s$ and do the same for f'^τ .

By the construction all vertices and all t -edges the multi-color graph form a simple cycle and ξ preserves such cycle with the preserving of the color of the vertices than there exist an orientation-preserving homeomorphism $h_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ such that $h_\Sigma(C^u) = C'^u$, $h_\Sigma(C^s) = C'^s$ and $h_\Sigma(C^t) = C'^t$. We denote by l_x (l'_x) the trajectory of f^τ (of f'^τ) passing through $x \in \mathbb{S}^3$. According to Proposition 1 there are unique pair of the equilibrium states $\alpha(l_x)$, $\omega(l_x)$ ($\alpha(l'_x)$, $\omega(l'_x)$) such that $l_x \subset (W_{\alpha(l_x)}^u \cap W_{\omega(l_x)}^s)$ ($l'_x \subset (W_{\alpha(l'_x)}^u \cap W_{\omega(l'_x)}^s)$). By Proposition 1 we have the following possibilities for point $x \in \Sigma$:

- $\alpha(l_x) \in \Omega_3$, $\omega(l_x) \in \Omega_0$ for $x \in \Sigma \setminus (C^u \cup C^s)$;
- $\alpha(l_x) \in \Omega_2$, $\omega(l_x) \in \Omega_0$ for $x \in (C^u \setminus C^s)$;
- $\alpha(l_x) \in \Omega_3$, $\omega(l_x) \in \Omega_1$ for $x \in (C^s \setminus C^u)$;
- $\alpha(l_x) \in \Omega_2$, $\omega(l_x) \in \Omega_1$ for $x \in C^t$.

For points $y_1, y_2 \in cl(l_x)$ denote by $[y_1, y_2]$ the length of arc $[y_1, y_2] \subset l_x$. For each point $y \in l_x$ situated between x and $\alpha(l_x)$ ($\omega(l_x)$) set $\rho(y) = \frac{[x, y]}{[x, \alpha(l_x)]}$ ($\rho(y) = \frac{[x, y]}{[x, \omega(l_x)]}$). Similar situation is for points from Σ' . For any point $x \in \Sigma$, we set $x' = h_\Sigma(x)$. As $h_\Sigma(C^s) = C'^s$, $h_\Sigma(C^u) = C'^u$ then on the set l_x a homeomorphism $h_{l_x} : l_x \rightarrow l'_{x'}$ is well-defined by the formula

$$h_{l_x}(y) = y' \quad \text{where} \quad \rho'(y') = \rho(y).$$

Denote by $h_V : V \rightarrow V'$ a map composed from $h_{l_x}, x \in \Sigma$. By the construction h_V is a homeomorphism which sends two-dimensional invariant manifolds of the saddle point σ of f^τ to the two-dimensional invariant manifolds of the saddle point σ' of f'^τ . Let us show that $h_V(\omega(l_x)) = \omega(l'_{x'})$ for each $x \in \Sigma$.

Step 2. Denote by $Q \subset \mathbb{S}^3$ compact 3-ball bounded by Σ and containing Ω_0 . Then $Q \subset W_{\Omega_0 \cup \Omega_1}^s$ and the set $D_\sigma = W_\sigma^s \cap Q$ is a 2-disk for each $\sigma \in \Omega_1$. Denote by Y a connected component of the set $Q \setminus W_{\Omega_1}^s$. Then there is a unique sink $\omega \in \Omega_0$ such that $\omega \in Y \subset W_\omega^s$. Simultaneously there is a unique connected component K_Y of the set $\Sigma \setminus C^s$ belonging Y and such that $Y \setminus A = \bigcup_{x \in K_Y} (l_x \cap Y) \cup \omega$. Similar situation is for flow f'^τ . Since $h_\Sigma(\Sigma \setminus C^s) = \Sigma' \setminus C'^s$ then $h_\Sigma(K_Y)$ is a connected component of $\Sigma' \setminus C'^s$ belonging to a connected component Y' of the set $Q' \setminus W_{\Omega_1}^s$ containing a sink $\omega' \in \Omega'_0$. By the construction $h_V(Y \setminus A) = Y' \setminus A'$ and, hence $h_V(\omega(l_x)) = \omega(l'_{x'})$ for each $x \in (\Sigma \setminus C^s)$. By the continuously $h_V(\omega(l_x)) = \omega(l'_{x'})$ for each $x \in C^s$.

Thus h_V can be uniquely extended to the sets Ω_0, Ω_1 . We keep the notation h_V for the homeomorphism thus obtained and set $p' = H_V(p)$ for each $p \in (\Omega_0 \cup \Omega_1)$.

Step 3. Let $\sigma \in \Omega_1$. Denote A^τ flow in \mathbb{R}^3 generated by a system of linear equations

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = -z. \end{cases}$$

This flow has a unique equilibrium state — hyperbolic saddle located at the origin O .

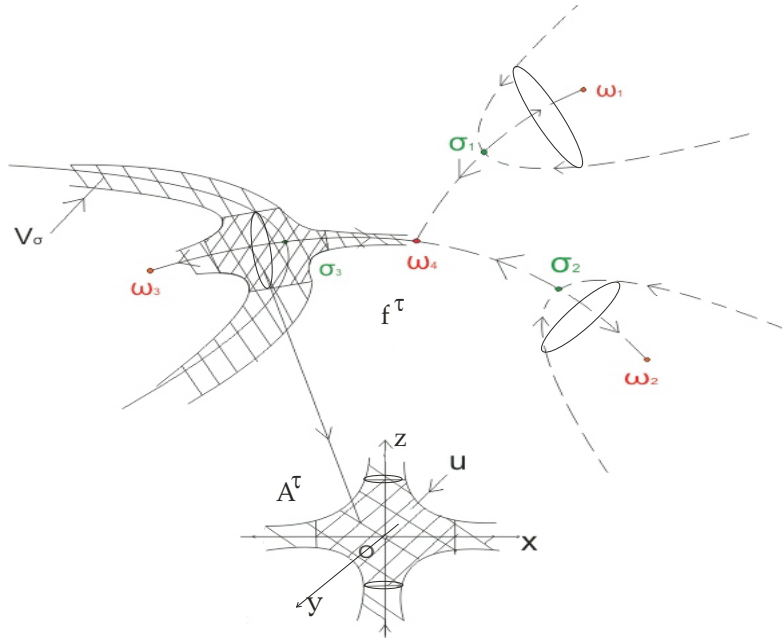


Рис. 4. Linearization of saddle equilibrium state neighborhood

Stable manifold of this saddle is plane XOY , unstable — axis O . Set

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)z^2 \leq 1\}.$$

It is immediately verified that U is invariant with respect to the flow A^τ . Due to [13] there is a neighborhood $V_\sigma \subset \mathbb{S}^3$ of the saddle equilibrium state σ and a homeomorphism $H_\sigma : V_\sigma \rightarrow U$ such that the homeomorphism sends the trajectories of flow $f^\tau|_{V_\sigma}$ to the trajectories of flow $A^\tau|_U$ (see figure 4). Similar neighborhood $V_{\sigma'}$ and a homeomorphism $H_{\sigma'} : V_{\sigma'} \rightarrow U$ exist for flow f'^τ . Set $H_{\sigma,\sigma'} = H_{\sigma'}^{-1}H_\sigma : V_\sigma \rightarrow V_{\sigma'}$. Without loss of generality we can assume that homeomorphism $H_{\sigma,\sigma'}$ sends one-dimensional separatrix of σ which contains a sink ω in its closure to one-dimensional separatrix of σ' which contains a sink ω' in its closure (in opposite case we use ζH_σ instead H_σ where $\zeta(x, y, z) = (x, y, -z)$).

Step 4. For $\mu \in (0, 1)$ let us set

$$U_\mu = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)z^2 \leq \mu\}$$

and $V_{\sigma,\mu} = H_\sigma^{-1}(U_\mu)$. Choose μ such that $H_{\sigma,\sigma'}(V_{\sigma,\mu}) \setminus W_\sigma^u \subset H_V(V_\sigma)$. Set $Z = cl(V_\sigma \setminus V_{\sigma,\mu})$ and $Z' = cl(H_V(V_\sigma) \setminus H_{\sigma,\sigma'}(V_{\sigma,\mu}))$. By the construction the sets Z, Z' consists of

two connected components Z_+, Z_-, Z'_+, Z'_- each of them is homeomorphic to $W = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 \times [0, 1]$. Denote by $H_{Z_+} : Z_+ \rightarrow W$, $H_{Z_-} : Z_- \rightarrow W$, $H_{Z'_+} : Z'_+ \rightarrow W$, $H_{Z'_-} : Z'_- \rightarrow W$ corresponding homeomorphisms sending trajectories of flows to lines $\{s\} \times \mathbb{R}^1 \times \{t\}$. For $t \in [0, 1]$, $\delta \in \{+, -\}$ set $W_t = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \{t\}$ and

$$H_{\delta,0} = H_{Z_\delta} H_{\sigma,\sigma'} H_{Z_\delta}^{-1}|_{W_0} : W_0 \rightarrow W_0, \quad H_{\delta,1} = H_{Z_\delta} H_V H_{Z_\delta}^{-1}|_{W_1} : W_1 \rightarrow W_1.$$

As H_V and $H_{\sigma,\sigma'}$ send trajectories of f^τ to trajectories of f'^τ then $H_{\delta,0}$, $H_{\delta,1}$ have view

$$H_{\delta,0}(s, r, 0) = (H_{\delta,0,s}(s), H_{\delta,0,r}(r), 0), \quad H_{\delta,1}(s, r, 1) = (H_{\delta,1,s}(s), H_{\delta,1,r}(r), 1).$$

Let us define homeomorphism $H_{\delta,t} : W_t \rightarrow W_t$ by formula

$$H_{\delta,t}(s, r, t) = ((1-t)H_{\delta,0,s}(s) + tH_{\delta,1,s}(s), (1-t)H_{\delta,0,r}(r) + tH_{\delta,1,r}(r), t).$$

Denote by $H_{Z_\delta, Z'_\delta} : Z_\delta \rightarrow Z'_\delta$ homeomorphism composed for each $t \in [0, 1]$ by $H_{Z'_\delta}^{-1} H_{\delta,t} H_{Z_\delta} |_{H_{Z'_\delta}^{-1}(W_t)}$. Let us define homeomorphism H_{V_σ} by formula

$$H_{V_\sigma}(x) = \begin{cases} H_{Z_\delta, Z'_\delta}(x), & x \in Z_\delta, \\ H_{\sigma,\sigma'}(x), & x \in V_{\sigma,\mu}. \end{cases}$$

By similar way we can define homeomorphism H_{V_σ} for each $\sigma \in \Omega_2$. The required homeomorphism $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ is defined by

$$h(x) = \begin{cases} H_V(x), & x \in \mathbb{S}^3 \setminus \left(\bigcup_{\sigma \in (\Omega_1 \cup \Omega_2)} V_\sigma \right), \\ H_{V_\sigma}(x), & x \in V_\sigma, \sigma \in (\Omega_1 \cup \Omega_2). \end{cases}$$

□

3. Algorithm to solve the distinguishing problem for multi-color graphs

In this section, we consider the distinguishing problem for multi-color graphs and present an efficient algorithm for its solution. An algorithm to solve the problem is considered to be *efficient* if it occupies polynomial time on the number of vertices of a given graph. The notion of an efficiently solvable problem rises to A. Cobham, who asserts that a problem can be feasibly computed on some computational device only if it can be computed in time, bounded by a polynomial on the length of input data [4]. The complexity status of the general graph isomorphism problem, i.e. for graphs of the general type, is unknown. That is, neither polynomial-time solvability neither intractability was proved for it. The graphs, associated with Solar magnetic fields, have some peculiar combinatorial properties. Namely, they have bounded degrees of vertices. Recall that *degree of a vertex* of a graph is the number of edges incident to it. A finite graph is called *simple* if it does not contain coloured vertices, loops, multiple and directed edges, coloured edges, simultaneously.

Proof of Theorem 3

It is known that for some concrete constant c^* and function $f(\cdot)$ the isomorphism problem can be solved in $O(f(\Delta)n^{c^*\Delta \ln(\Delta)})$ time for simple n -vertex graphs with maximum degree Δ [9]. For each fixed k , this result gives a polynomial-time algorithm to solve the isomorphism problem in the class of all simple graphs having degrees of all vertices at most k . This observation and the facts that the graphs of Solar magnetic fields have degrees of all vertices at most three, the three colors are used to color their vertices and edges lead to the following idea. By the graphs Γ_{B_1} and Γ_{B_2} of magnetic fields B_1 and B_2 , we construct simple graphs Γ'_{B_1} and Γ'_{B_2} such that Γ_{B_1} and Γ_{B_2} are isomorphic if and only if Γ'_{B_1} and Γ'_{B_2} are isomorphic. The graphs Γ'_{B_1} and Γ'_{B_2} will have degrees of all vertices at most 9, which implies polynomial complexity of their distinguishing, by the result of Luks.

Recall that a *multi-color graph* is a graph Γ , equipped by two functions $c_1 : V(\Gamma) \rightarrow \{1, 2, \dots, k_1\}$ and $c_2 : E(\Gamma) \rightarrow \{1, 2, \dots, k_2\}$. Let $\Delta(\Gamma)$ be the maximum degree of vertices of the graph Γ . By Γ , we construct a simple graph Γ' as follows. An *s-star implantation into an edge* (a, b) of a graph is to delete the edge from the graph, add vertices c, c_1, \dots, c_s and the edges $(a, c), (c, b), (c, c_1), (c, c_2), \dots, (c, c_s)$. *Inscribing an s-cycle in a vertex* v of a graph is to add vertices v_1, v_2, \dots, v_{s-1} and the edges $(v, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{s-2}, v_{s-1}), (v_{s-1}, v, v)$ to the graph. For each $v \in V(\Gamma)$, we inscribe a $c_1(v) + 2$ -cycle in v . For each $e \in E(\Gamma)$, we implant a $c_2(e) + \Delta(\Gamma)$ -star into e . Clearly, the number of vertices of Γ' is at most $(k_1 + 2)|V(\Gamma)| + (k_2 + \Delta(\Gamma) + 1)|E(\Gamma)|$ and degrees of all its vertices are at most $k_2 + \Delta(\Gamma) + 2$. As the sum of degrees of vertices of Γ is equal to $2|E(\Gamma)|$, $|E(\Gamma)| \leq \frac{1}{2}\Delta(\Gamma)|V(\Gamma)|$. Hence, $|V(\Gamma')| \leq \frac{1}{2}((k_2 + \Delta(\Gamma) + 1)\Delta(\Gamma) + 2k_1 + 4)|V(\Gamma)|$. Given Γ' , one can uniquely restore Γ as follows. All vertices of Γ' having degrees at least $\Delta(\Gamma) + 3$ are the central vertices of the implanted stars. This observation permits to restore all edges of Γ with their colors. Deleting all vertices of all stars from Γ' produces a disjoint sum of $|V(\Gamma)|$ simple cycles. The number of vertices in each of the cycles determines the color of the corresponding vertex of Γ . Therefore, two multi-color graphs Γ_1 and Γ_2 are isomorphic if and only if the corresponding simple graphs Γ'_1 and Γ'_2 are isomorphic. We may consider that $|V(\Gamma_1)| = |V(\Gamma_2)| = |V|$ and $\Delta(\Gamma_1) = \Delta(\Gamma_2) = \Delta$, $c_1 : V(\Gamma_i) \rightarrow \{1, 2, \dots, k_1\}$ and $c_2 : E(\Gamma_i) \rightarrow \{1, 2, \dots, k_2\}$ for each $i = 1, 2$, otherwise Γ_1 and Γ_2 are not isomorphic. Therefore, isomorphism of Γ_1 and Γ_2 can be tested in $O(f(k_2 + \Delta + 2)(\frac{1}{2}(\Delta(k_2 + \Delta + 1) + 2k_1 + 4))^{c^*(k_2 + \Delta + 2)\ln(k_2 + \Delta + 2)}|V|^{c^*(k_2 + \Delta + 2)\ln(k_2 + \Delta + 2)})$ time. For the graphs of magnetic fields, $\Delta = k_1 = k_2 = 3$.

References

1. Beveridge C., Priest E. R., Brown D. S. Magnetic topologies in the solar corona due to four discrete photospheric flux regions // Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics. — 2005. — V. 98.
2. Beveridge C., Priest E. R., Brown D. S. Magnetic topologies due to two bipolar regions // Solar Physics. — 2002. — V. 209.

3. *Close R. M., Parnell C. E., Priest E. R.* Domain structures in complex 3D magnetic fields // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* — 2005. — V. 99.
4. *Cobham A.* The intrinsic computational difficulty of functions // *Proc. 1964 International Congress for Logic, Methodology, and Philosophy of Science, North-Holland, Amsterdam.* —1964. —P. 24–30.
5. *Grines V., Pochinka O.* Morse-Smale cascades on 3-manifolds // *Russian Mathematical Surveys.* — 2-13. — V. 68, № 1. — P. 117–173.
6. *Grines V., MedvedePj T., Pochinka, O., Zhuzhoma E.* On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 2015. — V. 294.
7. *Longcope D. W.* Topology and current ribbons: a model for current, reconnection and flaring in a complex, evolving corona // *Solar Phys.* — 1996. — V. 169.
8. *Longcope D. W.* Topological Methods for the Analysis of Solar Magnetic Fields // *Solar Phys.* — 2002. — V. 2.
9. *Luks L.* Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time // *Jornal of computer and system sciences.* — 1982. — V. 25.
10. *Maclean R. C., Beveridge C., Hornig G., Priest E. R.* Coronal magnetic topologies in a spherical geometry I. Two bipolar flux sources // *Solar Phys.* — 2006. — V. 235.
11. *Maclean R. C., Beveridge C., Priest E. R.* Coronal magnetic topologies in a spherical geometry II. Four balanced flux sources // *Solar Phys.* — 2006. — V. 238.
12. *Maclean R. C., Priest E. R.* Topological aspects of global magnetic field behaviour in the solar corona // *Solar Phys.* — 2007. — V. 243.
13. *Palis J., de Melo W.* Geometric theory of dynamical systems: An introduction // *Springer, New York.* — 1982.
14. *Poincare H.* Sur les courbes definies par une equation differentielle // *Journal de mathematiques pures et appliquees.* —1882. —V. III, № 8.
15. *Priest E. R., Titov V. S.* Magnetic reconnection at three-dimensional null points // *Phil. Trans. Rog. Soc. Lond. A.* —1996. —V. 354.
16. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // *Bull. Amer. Math. Soc.* —1967. —V. 74, № 6.

Получена 15.03.2016

УДК 517.9

Оценка показателей Ляпунова методами символического анализа¹

Г. С. Осипенко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, филиал в Севастополе, Севастополь 299001, *E-mail: george.osipenko@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается задача вычисления характеристических показателей всех траекторий компактного инвариантного множества. Спектр Морса есть множество показателей Ляпунова псевдотраекторий. Показано, что этот спектр можно локализовать, используя символический образ динамической системы, который является ориентированным графом, построенным для конечного покрытия фазового пространства. Исследования символического образа позволяют локализовать цепно-рекуррентное множество и оценить спектр Морса. Точность оценок зависит от диаметра покрытия и модуля непрерывности дифференциала. Приведен численный эксперимент оценки спектра Морса и проверки гиперболичности нетривиального инвариантного множества.

Ключевые слова: псевдотраектория, цепно-рекуррентное множество, проективное расслоение, показатель псевдотраектории, символический образ, оснащенный граф, эквивалентные возвратные вершины, гиперболичность.

Evaluation of the Lyapunov exponents through symbolic analysis methods

G. S. Osipenko

M. V. Lomonosov Moscow State University, branch in Sevastopol, Sevastopol 299001.

Abstract. The problem of calculating the characteristic exponents of all the trajectories of a compact invariant set is considered. Morse spectrum is the set of the exponents of pseudotrajectories. It has been shown that this spectrum can be localized using the symbolic image of a dynamic system which is a directed graph constructed for the finite covering of the phase space. Research of the symbolic image allows estimating the Morse spectrum. The accuracy estimation depends on the diameter of covering and the continuity module of the differential. The numerical experiment of Morse spectrum assessment and verification of hyperbolicity of nontrivial invariant set is given.

Keywords: pseudotrajectory, chain-recurrent set, projective bundle, exponent of pseudotrajectory, symbolic image, equivalent recurrent vertices, hyperbolicity.

MSC 2010: 37C50, 34D08, 37M25

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, грант N 16-01-00452).

1. Введение

Одним из основных понятий теории динамических систем являются характеристические показатели, которые были введены Ляпуновым в 1892 году в его докторской диссертации [4]. Сейчас эти показатели называют ляпуновскими показателями. Если динамическая система является линейной системой дифференциальных уравнений с постоянной матрицей

$$x' = Ax,$$

то характеристические показатели совпадают с действительными частями собственных чисел матрицы A и характеризуют экспоненциальную скорость приближения или удаления траектории от нулевого решения. Если динамическая система является дискретной и задается разностным линейным уравнением

$$x_{n+1} = Bx_n$$

с постоянной матрицей, то характеристические показатели это логарифмы модулей собственных чисел матрицы B . Эти числа также характеризуют экспоненциальную скорость изменения расстояния между траекториями системы. Инвариантное подпространство с отрицательными показателями называют устойчивым, траектории на этом подпространстве экспоненциально стремятся к состоянию равновесия. Инвариантное подпространство с положительными показателями называют неустойчивым, траектории на этом подпространстве экспоненциально уходят от состояния равновесия. Если у линейной системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей имеются положительные и отрицательные показатели и нет нулевых показателей, то состояние равновесия называется гиперболическим.

Если система дифференциальных уравнений является нелинейной

$$x' = F(x), \tag{1.1}$$

то изучение поведения траекторий вблизи решения $\varphi(t)$ сводится к исследованию разности $x - \varphi(t) = y$. Подставляя $x = \varphi(t) + y$ в исходное уравнение, найдем уравнение для y

$$y' = \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t))y + \gamma(t, y),$$

где нелинейная часть $\gamma(t, y)$ есть о-малое от $|y|$. Линейное уравнение

$$y' = \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t))y, \tag{1.2}$$

называют линеаризованной системой вблизи решения $\varphi(t)$. Аналогично, изучение динамики вблизи некоторой траектории разностного уравнения сводится к изучению линейного разностного уравнения вида

$$v_{n+1} = B(n)v_n.$$

Характеристические показатели линеаризованной системы часто определяют геометрическую картину поведения решений вблизи решения исходной нелинейной системы. Например, если линеаризованная система (1.2) является гиперболической, то нелинейная система (1.1) вблизи решения $\varphi(t)$ имеет устойчивое и неустойчивое многообразия, которые являются гладкими аналогами устойчивого и неустойчивого подпространств линеаризованной системы.

Важность и актуальность исследований связанных с показателями Ляпунова невозможно переоценить. В книгах [2, 3, 5] подробно описаны теория и приложения показателей Ляпунова. В настоящее время мы имеем хорошие методы и компьютерные пакеты для вычисления характеристических показателей индивидуальной траектории [3, 7, 16].

Если каждая траектория системы является гиперболической, то устойчивые (неустойчивые) многообразия образуют инвариантное слоение, которое называется устойчивым (неустойчивым) слоением. Описанные системы впервые исследовал Д.В. Аносов [1]. Главным свойством гиперболических инвариантных множеств является их устойчивость относительно возмущений динамической системы. Часто наличие хаотических режимов связано с гиперболичностью инвариантных множеств, а показатели Ляпунова дают существенную информацию о параметрах динамики системы (энтропия, размерность хаотических множеств и т.д.).

В настоящее время актуальной задачей является вычисление показателей Ляпунова всех траекторий из нетривиального инвариантного множества. Как правило, такие множества плотно заполнены периодическими траекториями, при этом периоды траекторий не ограничены в совокупности. В этом случае мы не можем свести изучение показателей Ляпунова к исследованию отдельных траекторий. Кроме того, мы должны учитывать, что исследования осуществляются с помощью компьютера, т.е. всегда с некоторыми малыми погрешностями.

В настоящей работе изучается предельное множество показателей Ляпунова периодических псевдотраекторий (спектр Морса). Псевдотраектории это траектории с малыми погрешностями, что имеет место при компьютерных вычислениях. Периодические псевдотраектории это траектории, которые на компьютере выглядят как периодические, однако они могут и не быть таковыми в реальности. Спектр Морса содержит показатели как настоящих траекторий, так и их возмущений. Он существенно определяет динамику системы, например, отсутствие нуля в спектре Морса гарантирует гиперболичность [13].

2. Спектр Морса

Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.1)$$

порожденную диффеоморфизмом $f : M \rightarrow M$ компактного многообразия. Дифференциал $Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ задает линейное расширение системы

$$v_{n+1} = Df(x_n)v_n, \quad (2.2)$$

на касательном расслоении TM .

Любое невырожденное линейное отображение $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ можно представить в виде:

$$Av = |Av| \cdot Av/|Av| = r|Ae| \cdot Ae/|Ae| = r|Ae| \cdot A_s(e),$$

где $r = |v|$, $|v| \neq 0$, $e = \frac{v}{|v|} \in S^{d-1}$, S^{d-1} - единичная сфера. Таким образом, линейное отображение $A : v \rightarrow Av$ есть произведение двух отображений

$$e \rightarrow A_s(e) = Ae/|Ae| \quad \text{и} \quad r \rightarrow r|Ae|,$$

где первое действует на сфере S^{d-1} , а второе действует на положительной полу-прямой \mathbb{R}^+ . Проективное пространство P^{d-1} может быть получено путем отождествления диаметрально противоположных точек сферы S^{d-1} . Симметричность отображения $A_s(e)$, относительно изменения знака $A_s(\pm e) = \pm A_s(e)$, позволяет нам определить отображение $PA(e) = Ae/|Ae|$ на проективном пространстве P^{d-1} , отождествляя противоположные точки на сфере. Для точек пространства P^{d-1} мы сохраним обозначение e , т. е. e обозначает одномерное подпространство и (или) единичный вектор на нем, что не приводит к недоразумениям. Таким образом, мы получаем отображение

$$Pf(x, e) = (f(x), \frac{Df(x)e}{|Df(x)e|})$$

на проективном расслоении $P = \{(x, e) : x \in M, e \in P^{d-1}(x)\}$, которое порождает дискретную динамическую систему вида

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad e_{n+1} = \frac{Df(x_n)e_n}{|Df(x_n)e_n|} \quad (2.3)$$

на проективном расслоении P . Положительное число $a(x, e) = |Df(x)e|$ есть коэффициент изменения длины на подпространстве e под действием дифференциала в точке x .

Последовательность точек $\{x_n\}$ называется траекторией системы (2.1), если $f(x_n) = x_{n+1}$, для любого n . Аналогично определяется траектория системы (2.3). Если $\xi = \{(x_k, e_k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ является полутраекторией системы (2.3), тогда предел

$$\lambda(\xi) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |Df^n(x_0)e_0| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \ln |Df^n(x_0)e_0| \quad (2.4)$$

есть показатель Ляпунова этой полутраектории. Имеем

$$\begin{aligned} |Df^n(x_0)e_0| &= |Df(f^{n-1}(x_0))Df^{n-1}(x_0)e_0| = \\ &= |Df(x_{n-1}) \frac{Df^{n-1}(x_0)e_0}{|Df^{n-1}(x_0)e_0|}| |Df^{n-1}(x_0)e_0| = |Df(x_{n-1})e_{n-1}| |Df^{n-1}(x_0)e_0|. \end{aligned}$$

Применяя полученную рекуррентную формулу, получим

$$|Df^n(x_0)e_0| = \prod_{k=0}^{n-1} |Df(x_k)e_k|$$

и показатель Ляпунова

$$\lambda(\xi) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |Df(x_k)e_k| \quad (2.5)$$

Так как предел (2.5) существует, то найдется подпоследовательность $n_m \rightarrow \infty$, для которой предел

$$\lambda(\xi, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m-1} \ln |Df(x_k)e_k| \quad (2.6)$$

существует и

$$\lambda(\xi, n_m) = \lambda(\xi).$$

Если последовательность $\xi = \{(x_k, e_k)\}$ является p -периодической, то все выше перечисленные пределы существуют и совпадают со средним арифметическим функции $\varphi(x, e) = \ln |Df(x)e|$ по периоду:

$$\lambda(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |Df^n(x_0)e_0| = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \ln |Df(x_k)e_k| = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \varphi(x_k, e_k) \quad (2.7)$$

Для численной оценки показателей Ляпунова удобно расширить множество последовательностей, для которых допускается применение формулы (2.6). Это расширение состоит в следующем: вместо траекторий мы будем рассматривать псевдотраектории (определение см. ниже) и предел (2.6) будет применяться для всех подпоследовательностей, для которых он существует. Ясно, что в этом случае мы будем вычислять более широкое множество чисел, в которое входят показатели Ляпунова траекторий.

Определение 1. Бесконечная в обе стороны последовательность точек $\{x_i\}$ называется ε -траекторией (или псевдотраекторией) системы (2.1), если расстояние $\rho(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ для любого i .

Аналогично определяются псевдотраектория системы (2.3), где расстояние между подпространствами есть угол между ними.

Определение 2. Спектр Морса определяется как

$$\Sigma = \left\{ \lambda \in R : \text{существуют } \varepsilon_k - \text{траектории } \xi_k \text{ системы (2.3) такие, что } \varepsilon_k \rightarrow 0, \lambda(\xi_k) \rightarrow \lambda \text{ при } k \rightarrow \infty \right\}.$$

Предложение 1. Пусть $\xi = \{(x_k, e_k), k \in \mathbb{N}^+\}$ является ε -полутраекторией и существует сходящаяся подпоследовательность

$$\lambda(\xi, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m-1} \ln |Df(x_k)e_k|,$$

тогда найдется последовательность периодических 2ε -траекторий $\{\xi_p\}$ таких что, $\lambda(\xi_p) \rightarrow \lambda(\xi, n_m)$ при $p \rightarrow \infty$.

Доказательство. Не трудно показать, что предел $\lambda(\xi, n_m)$ не зависит от конечного числа начальных точек последовательности $\xi = \{(x_k, e_k), k \in \mathbb{N}^+\}$, т.е., если вместо последовательности ξ рассмотрим последовательность $\xi(N_0) = \{(x_k, e_k), k \geq N_0\}$, то

$$\lambda(\xi, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m - N_0} \sum_{k=N_0}^{n_m-1} \ln |Df(x_k)e_k|, \text{ где } n_m > N_0.$$

Так как последовательность $\{(x_{n_m}, e_{n_m})\}$ лежит на компакте, то существует подпоследовательность сходящаяся к некой точке (x^*, e^*) . Не ограничивая общности, можно считать, что сама последовательность $\{(x_{n_m}, e_{n_m})\}$ сходится к (x^*, e^*) . По предположению, исходная последовательность ξ является ε -полутраекторией. Пусть U есть $\varepsilon/2$ -окрестность точки (x^*, e^*) . Существует номер N_0 такой, что все $\{(x_{n_m}, e_{n_m}), n_m \geq N_0\}$ лежат в U и, следовательно, расстояние между ними меньше ε . Тогда конечная последовательность $\xi_p = \{(x_k, e_k), N_0 \leq k < n_p\}$ является периодической 2ε -траекторией. Действительно, по предположению, $\{(x_k, e_k)\}$ является ε -траекторией, следовательно надо оценить расстояние между $Pf(x_{n_p-1}, e_{n_p-1})$ и (x_{N_0}, e_{N_0}) . По построению, $\rho((x_{N_0}, e_{N_0}), (x_{n_p}, e_{n_p})) < \varepsilon$ и $\rho(Pf(x_{n_p-1}, e_{n_p-1}), (x_{n_p}, e_{n_p})) < \varepsilon$, тогда $\rho(Pf(x_{n_p-1}, e_{n_p-1}), (x_{N_0}, e_{N_0})) < 2\varepsilon$.

Усреднение на $\xi_p = \{x_k, N_0 \leq k < n_p\}$

$$\lambda(\xi_p) = \frac{1}{n_p - N_0} \sum_{k=N_0}^{n_p-1} \ln |Df(x_k)e_k|.$$

Таким образом, $\lambda(\xi, n_m) = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda(\xi_p)$. Утверждение доказано. Близкое утверждение доказано в работе [9].

Из Утверждения 1 следует, что спектр Σ совпадает с предельным множеством усреднений над периодическими ε -траекториями при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е.

$$\Sigma = \{\lambda \in R : \text{существует последовательность периодических } \varepsilon_n - \text{траекторий } \{\xi_n\}, \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ таких, что } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\xi_n)\}.$$

Таким образом, спектр Морса есть предельное множество показателей Ляпунова периодических ε -траекторий при $\varepsilon \rightarrow 0$. Нашей целью является метод (алгоритм) вычисления спектра Морса динамической системы.

3. Свойства спектра Морса

Определение 3. Точка x называется цепно-рекуррентной, если x является ε -периодической для любого $\varepsilon > 0$, т.е. найдется периодическая ε -траектория, проходящая через точку x .

Цепно-рекуррентное множество состоит из всех цепно-рекуррентных точек и обозначается через CR . Цепно-рекуррентное множество CR является инвариантным замкнутым и содержит все типы возвратных траекторий: периодические, почти-периодические, неблуждающие, гомоклинические и т.д. Отметим, что, если цепно-рекуррентная точка не является периодической и $\dim M > 1$, то существует сколь угодно малое возмущение f в C^0 -топологии, для которого данная точка является периодической [17]. Можно сказать, что цепно-рекуррентные точки порождают периодические траектории при C^0 -возмущениях.

Определение 4. Множество $\Omega \subset CR$ называется компонентой цепно-рекуррентного множества, если любые две точки из Ω можно соединить периодической ε -траекторией для любого $\varepsilon > 0$.

Предложение 2. Пусть $\{\xi_n\}$ последовательность периодических ε_n -траекторий, $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Тогда предельное множество последовательности $\{\xi_n\}$ состоит из цепно-рекуррентных точек.

Доказательство проведем для отображения f , доказательство для Pf осуществляется аналогично. На каждой траектории ξ_n отметим точку x_n . Так как M - компакт, то существует сходящаяся подпоследовательность такая, что $x_{n_k} \rightarrow x^*$, т.е. точка x^* является предельной. Покажем, что точка x^* является цепно-рекуррентной. Построим последовательность периодических псевдотраекторий $\{\omega_k\}$, заменяя в траектории $\{\xi_{n_k}\}$ точку x_{n_k} на x^* . Покажем, что $\{\omega_k\}$ является ε_k^* -траекторией с $\varepsilon_k^* \leq \varepsilon_{n_k} + \gamma_k$, где $\gamma_k = \max\{\eta_0(\delta_k), \delta_k\}$, δ_k - расстояние между x_{n_k} и x^* , $\eta_0(\rho)$ - модуль непрерывности f . Действительно, по построению, имеем $\rho(f(x_{n_k-1}), x_{n_k}) < \varepsilon_{n_k}$ и $\rho(x_{n_k}, x^*) = \delta_k$, тогда $\rho(f(x_{n_k-1}), x^*) < \varepsilon_{n_k} + \delta_k$. Кроме того, имеем $\rho(f(x_{n_k}), x_{n_k+1}) < \varepsilon_{n_k}$ и $\rho(f(x_{n_k}), f(x^*)) < \eta_0(\delta_k)$, тогда $\rho(f(x^*), x_{n_k+1}) < \varepsilon_{n_k} + \eta_0(\delta_k)$. Так как ε_{n_k} и δ_k сходятся к 0, то $\varepsilon_k^* \rightarrow 0$. Таким образом, последовательность периодических ε_k^* -траекторий $\{\omega_k\}$ такая, что каждая $\{\omega_k\}$ проходит через x^* и $\varepsilon_k^* \rightarrow 0$. Следовательно, x^* является цепно-рекуррентной. Доказательство закончено.

Предельная точка x^* лежит в некоторой компоненте Ω цепно-рекуррентного множества. Если x^{**} другая предельная точка подпоследовательности $\{\xi_{n_k}\}$, то можно показать, что $x^{**} \in \Omega$.

Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\}$ периодических ε_n -траекторий на проективном расслоении P , $\varepsilon_n \rightarrow 0$ такую, что $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\xi_n)$ и ее предельная точка (x^*, e^*) лежит в некоторой компоненте Ω цепно-рекуррентного множества. В этом случае мы будем говорить, что усреднение λ реализуется на компоненте Ω . Отметим, что число λ может реализоваться на разных компонентах цепно-рекуррентного множества.

Предложение 3. Пусть $\{\xi_n\}$ последовательность периодических псевдотраекторий описанных выше. Тогда существует последовательность $\{\omega_n\}$ периодических ε_n^* -траекторий, таких что $(x^*, e^*) \in \omega_n$, $\varepsilon_n^* \rightarrow 0$ и $\lambda(\omega_n) \rightarrow \lambda$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\omega_n\}$, построенную при доказательстве предыдущего Утверждения 2. По построению, каждая псевдотраектория ω_n получена из ξ_n заменой точки (x_n, e_n) на предельную точку (x^*, e^*) , ω_n является периодической ε_n^* -траекторией, $\varepsilon_n^* \rightarrow 0$. Расстояние $\rho((x_n, e_n), (x^*, e^*)) < \delta_n \rightarrow 0$. Если $\xi_n = \{(x_1, e_1), (x_2, e_2), \dots, (x_k, e_k) = (x_0, e_0)\}$ периодическая траектория с отмеченной точкой (x_0, e_0) , которая совпадает с (x_n, e_n) , то $\omega_n = \{(x_1, e_1), (x_2, e_2), \dots, (x_{k-1}, e_{k-1}), (x_k^*, e_k^*) = (x_0^*, e_0^*)\}$, где $(x_0^*, e_0^*) = (x^*, e^*)$ и $\rho((x_0, e_0), (x_0^*, e_0^*)) = \rho((x_n, e_n), (x^*, e^*)) = \delta_n$. Найдем усреднение функции $\varphi(x, e) = \ln |Df(x)e|$

$$\lambda(\xi_n) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_i, e_i) = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \varphi(x_i, e_i) + \varphi(x^*, e^*) \right) + \frac{1}{k} (\varphi(x_n, e_n) - \varphi(x^*, e^*)) =$$

$$= \lambda(\omega_n) + E_n,$$

где $E_n = \frac{1}{k} (\varphi(x_n, e_n) - \varphi(x^*, e^*)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Утверждение доказано.

Предложение 4. Если λ_1 и λ_2 реализуются на компоненте Ω , то любое число λ между λ_1 и λ_2 также реализуется на Ω .

Доказательство. По предположению, существуют две последовательности периодических ε -траекторий $\{\xi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ такие, что

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\xi_n),$$

$$\lambda_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\psi_n).$$

Предельное множество каждой последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ лежит в Ω . Следовательно, найдутся две последовательности точек $\{(x_n, e_n) \in \xi_n\}$ и $\{(y_n, v_n) \in \psi_n\}$, которые сходятся к двум точкам $(x^*, e^*) \in \Omega$ и $(y^*, v^*) \in \Omega$, соответственно. Согласно Утверждению 3 можно считать, что периодические псевдотраектории $\{\xi_n\}$ проходят через (x^*, e^*) и периодические псевдотраектории $\{\psi_n\}$ проходят через (y^*, v^*) . Так как (x^*, e^*) и (y^*, v^*) лежат в одной компоненте Ω , то для любого $\varepsilon_n > 0$ найдется периодическая ε -траектория $\{\xi^*\}$, проходящая через (x^*, e^*) и (y^*, v^*) . При этом переход от (x^*, e^*) к (y^*, v^*) вдоль $\{\xi^*\}$ назовем первой половиной $\{\xi^*\}$, а переход от (y^*, v^*) к (x^*, e^*) назовем второй половиной $\{\xi^*\}$. Построим периодическую псевдо-траекторию χ_n из трех периодических псевдо-траекторий $\{\xi^*\}$, $\{\xi_n\}$ и $\{\psi_n\}$. Начнем с точки (x^*, e^*) и сделаем N число оборотов по ξ_n , затем идем по первой половине траектории $\{\xi^*\}$ до точки (y^*, v^*) , затем делаем K оборотов по ψ_n и возвращаемся к исходной точке (x^*, e^*) по второй половине траектории $\{\xi^*\}$. Усреднение вдоль χ_n зависит от чисел оборотов N и K , которые

можно выбрать произвольно большими. При этом усреднение вдоль соединяющей псевдотраектории ξ^* фиксировано. Любое число λ между λ_1 и λ_2 имеет вид

$$\lambda = \alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2,$$

где $0 < \alpha < 1$. Период построенной траектории χ_n равен $NT_1 + KT_2 + T_3$, где T_1 , T_2 и T_3 периоды $\{\xi_n\}$, $\{\psi_n\}$ и $\{\xi^*\}$, соответственно. Усреднение вдоль χ_n

$$\lambda(\chi_n) = \frac{1}{NT_1 + KT_2 + T_3} \sum_{z=0}^{NT_1+KT_2+T_3-1} \varphi(x_z, e_z). \quad (3.1)$$

Сумма состоит из трех частей, первая часть порождена N оборотами по псевдотраектории ξ_n , вторая часть порождена K оборотами по псевдотраектории ψ_n и последняя часть порождена псевдотраекторией ξ^* . Приведем подобные и перепишем усреднение в виде

$$\lambda(\chi) = \frac{1}{NT_1 + KT_2 + T_3} (NT_1\lambda(\xi_n) + KT_2\lambda(\psi_n) + T_3\lambda(\xi^*)).$$

Выберем числа N и K так, чтобы

$$\begin{aligned} \frac{NT_1}{NT_1 + KT_2 + T_3} &\rightarrow \alpha, \quad \frac{NT_2}{NT_1 + KT_2 + T_3} \rightarrow (1 - \alpha), \\ \frac{T_3}{NT_1 + KT_2 + T_3} &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$ и $K \rightarrow \infty$. Для этого мы построим последовательность целых чисел V и W такую, что $V, W \rightarrow \infty$ и $V/W \rightarrow \alpha$. Так как $0 < \alpha < 1$, то $0 < V < W$. Определим последовательность чисел N и K так, что

$$\frac{NT_1}{NT_1 + KT_2} = \frac{V}{W},$$

например,

$$N = T_2V, \quad K = T_1(W - V). \quad (3.2)$$

Если T_1, T_2 и T_3 фиксированы, то

$$\begin{aligned} \frac{T_3}{NT_1 + KT_2 + T_3} &\rightarrow 0, \\ \frac{NT_1}{NT_1 + KT_2 + T_3} &= \frac{NT_1}{NT_1 + KT_2} \frac{NT_1 + KT_2}{NT_1 + KT_2 + T_3} \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$ и $K \rightarrow \infty$. Выберем последовательности $N_n \rightarrow \infty$ и $K_n \rightarrow \infty$ как описано выше. Таким образом мы получили последовательность χ_n такую, что

$$\lambda(\chi_n) = \alpha\lambda(\xi_n) + (1 - \alpha)\lambda(\psi_n) + \delta_n,$$

где $\delta_n \rightarrow 0$. Отсюда следует, что

$$\lambda(\chi_n) \rightarrow \alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2,$$

при $n \rightarrow \infty$ Утверждение доказано.

Следствие 1. *Каждая компонента Ω цепно-рекуррентного множества порождает отрезок $[a(\Omega), b(\Omega)]$, где $a = \lambda_{\inf}(\Omega)$ и $b = \lambda_{\sup}(\Omega)$ нижняя и верхняя грани усреднений над периодическими псевдотраекториями компоненты Ω .*

Каждая компонента Ω_{ik} цепно-рекуррентного множества $CR(Pf)$ на проективном расслоении P проектируется на некую компоненту Ω_i цепно-рекуррентного множества $CR(f)$ на многообразии M . Число цепно-рекуррентных компонент на M не ограничено. Например, уравнение $x' = x^2 \sin \frac{1}{x}$ имеет бесконечное число состояний равновесия, которые совпадают с цепно-рекуррентными компонентами. Однако, число компонент $\Omega_{ik} \subset P$ проективного расслоения, которые проектируются на фиксированную компоненту $\Omega_i \subset M$ не превышает размерности многообразия M [13]. Таким образом, мы должны оценить бесконечно много интервалов, что невозможно в общем случае. Однако, как мы увидим в нашей ситуации, эти интервалы также как и компоненты цепно-рекуррентного множества сгущаются, как это имеет место в рассмотренном выше примере. Это позволяет для фиксированной величины аппроксимации $\varepsilon > 0$ построить конечное число интервалов, некоторые из которых содержат бесконечно много интервалов спектра. Ясно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ число аппроксимирующих интервалов может расти до бесконечности. Основным инструментом вычисления спектра есть символический образ динамической системы, который является ориентированным графом.

4. Символический образ

В основе дальнейшего изложения лежит понятие символического образа динамической системы [13, 14], которое соединило в себе символическую динамику [8, 10] и численные методы [11].

Пусть $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ есть конечное покрытие многообразия M замкнутыми подмножествами, $M(i)$ будем называть ячейкой индекса i .

Определение 5. [6] Пусть G является ориентированным графом с вершинами $\{i\}$ соответствующими ячейкам $\{M(i)\}$. Вершины i и j связаны ориентированным ребром (дугой) $i \rightarrow j$ тогда и только тогда, когда

$$f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset.$$

Граф G называется символическим образом отображения f для покрытия C .

Символический образ является геометрическим средством для дискретизации динамической системы. Исследование символического образа позволяет получить полезную информацию о глобальной структуре динамики системы. Символический образ зависит от покрытия C , изменение которого меняет символический образ. Существование ребра $i \rightarrow j$ гарантирует существование точки x в ячейке $M(i)$ такой, что ее образ $f(x) \in M(j)$. Другими словами, ребро $i \rightarrow j$ является

следом перехода $x \rightarrow f(x)$, где $x \in M(i)$, $f(x) \in M(j)$. Если ребро $i \rightarrow j$ не существует, то нет точек $x \in M(i)$ таких, что их образ $f(x) \in M(j)$. Пусть покрытие C состоит из ячеек, которые являются параллелепипедами, пересекающимися по граничным дискам. Из этого покрытия мы будем строить разбиение C^* , состоящее из полуоткрытых параллелепипедов, у которых граничные диски принадлежат к одной из примыкающих ячеек.

Определение 6. Бесконечная в обе стороны последовательность $\{z_k\}$ вершин графа G называется путем (или допустимым путем), если для каждого k граф G содержит направленную дугу $z_k \rightarrow z_{k+1}$.

Пусть $\text{diam}M(i) = \max(\rho(x, y) : x, y \in M(i))$ есть диаметр ячейки $M(i)$ и $d = \text{diam}(C) = \max_i \text{diam}M(i)$ назовем диаметром покрытия C . Существует естественное соответствие между допустимыми путями на символическом образе и ε -траекториями отображения f .

Теорема 1. Слабое свойство отслеживания [13]

1. Если последовательность $\{z_k\}$ есть допустимый путь на символическом образе G , тогда существует последовательность точек $\{x_k\}$, $x_k \in M(z_k)$, которая является ε -траекторией f для любого $\varepsilon > d$.

В частности, если последовательность $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ является p -периодической, тогда ε -траектория $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ является p -периодической.

2. Существует число $\rho > 0$ такое, что, если последовательность точек $\{x_k\}$ является ε -траекторией f , $\varepsilon < \rho$ и $x_k \in M(z_k)$, тогда последовательность $\{z_k\}$ является допустимым путем на символическом образе G .

В частности, если ε -траектория $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ является p -периодической, тогда $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ является p -периодическим путем на G .

Грубо говоря, допустимый путь есть след ε -траектории и наоборот. Так что путь на символическом образе можно рассматривать как кодировку траекторий.

Определение 7. Вершину символического образа назовем возвратной, если через нее проходит периодический путь. Множество возвратных вершин обозначается RV . Две возвратные вершины i и j называются эквивалентными, если существует периодический путь, проходящий через i и j .

Множество возвратных вершин RV разбивается на классы эквивалентности $\{H_k\}$. В теории графов H_k называют компонентами сильной связности.

Мы будем применять процесс подразбиения покрытий и строить последовательность символических образов. Рассмотрим главный шаг процесса подразбиения. Пусть $C = \{M(i)\}$ - покрытие и G - символический образ для C . Предположим, что новое покрытие NC является подразбиением покрытия C . Это означает,

что каждая ячейка $M(i)$ подразбивается на ячейки $m(i, k)$, $k = 1, 2, \dots$, т.е.

$$\bigcup_k m(i, k) = M(i).$$

Обозначим NG новый символический образ для покрытия $NC = \{m(i, k)\}$. Вершины NG обозначаются как (i, k) . Такое построение генерирует отображение s из NG на G , которое переводит вершины (i, k) на вершину i . Из

$$f(m(i, k)) \cap m(j, l) \neq \emptyset$$

следует, что

$$f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset$$

Следовательно, ребро $(i, k) \rightarrow (j, l)$ отображается на ребро $i \rightarrow j$. Следовательно, s отображает ориентированный граф NG на ориентированный граф G . Поэтому, каждый допустимый путь на NG преобразуется отображением s на некий допустимый путь на G . В частности, образ периодического пути есть периодический путь, а образ возвратной вершины есть возвратная вершина. Более того, образ класса NH эквивалентных возвратных вершин (на NG) лежит в классе H эквивалентных возвратных вершин на G .

Построим многозначное отображение h из многообразия M на множество вершин $Ver(G)$ символического образа, сопоставляя точке x все вершины i такие, что $x \in M(i)$. Отображение h обладает следующими свойствами:

- если x - цепно-рекуррентная точка и $i \in h(x)$, то i - возвратная вершина,
- если x_1 и x_2 лежат в одной компоненте Ω , а $i_1 \in h(x_1)$ и $i_2 \in h(x_2)$, то i_1 и i_2 эквивалентные возвратные вершины.

Из этих свойств следует, что образ $h(\Omega)$ компоненты Ω лежит в некотором классе эквивалентных возвратных вершин, который будем обозначать $H(\Omega)$, а компонента Ω лежит в $\{\bigcup_i M(i), i \in H(\Omega)\}$.

Обозначим $P(d)$ объединение ячеек $M(i)$, для которых вершина i является возвратной, т.е.

$$P(d) = \left\{ \bigcup M(i) : i - \text{возвратная вершина} \right\}, \quad (4.1)$$

где d - диаметр покрытия. Предположим, что $C = C_0$ является исходным покрытием и C_1, C_2, \dots получены описанным процессом подразбиения, множества P_0, P_1, P_2, \dots построены согласно (4.1).

Теорема 2. Локализация цепно-рекуррентного множества [13] Последовательность множеств P_0, P_1, P_2, \dots обладает следующими свойствами.

1. Каждое P_k есть замкнутая окрестность цепно-рекуррентного множества CR ,

2. P_k вложены друг в друга

$$P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset CR,$$

3. Если диаметры покрытий $d_k \rightarrow 0$, тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \bigcap_k P_k = CR.$$

Следствие 2. Пусть Ω является компонентой CR , $\{\bigcup M(i) : i \in H(\Omega)\} = P(\Omega)$ замкнутая окрестность компоненты Ω . Если диаметр $d_k \rightarrow 0$ тогда

$$P_0(\Omega) \supset P_1(\Omega) \supset P_2(\Omega) \supset \dots \supset \Omega \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(\Omega) = \bigcap_k P_k(\Omega) = \Omega. \quad (4.2)$$

5. Вычисление спектра

Для вычисления спектра мы построим символический образ G отображения Pf и оснащение графа G , фиксируя величину $a[ij]$ для каждого ребра $i \rightarrow j$ следующим образом. Пусть $i \rightarrow j$ - ребро на G . Возьмем точку (x, e) из ячейки $M(i)$ и положим $a[ij] = \ln |Df(x)e| = \varphi(x, e)$. Отметим, что оснащение $a[ij]$ не зависит от j и, если (x^*, e^*) - другая точка в $M(i)$, $a^*[ji] = \varphi(x^*, e^*)$, то мы имеем оценку

$$|a^*[ij] - a[ij]| = |\varphi(x, e) - \varphi(x^*, e^*)| < \eta(d),$$

где $\eta(d)$ есть модуль непрерывности функции φ и d - диаметр покрытия.

Определение 8. Пару G и $\{a[ij]\}$ назовем оснащенный символическим образом и обозначим G_{lb} .

Усреднение оснащения над конечным путем $\omega = \{z_0, z_1, \dots, z_p\}$ есть среднее арифметическое

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p a[z_{k-1}z_k].$$

В частности, если $\omega = \{z_1, \dots, z_p = z_0\}$ является периодическим путем, то $\lambda(\omega)$ есть среднее значение оснащения на периоде. Если $\omega = \{z_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ является бесконечным путем, тогда предел

$$\lambda(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a[z_{k-1}z_k]$$

назовем усреднением над ω , если такой предел существует. В том случае, когда данный предел не существует, то (т. к. оснащение ограничено) найдется подпоследовательность $n_m \rightarrow \infty$, для которой предел

$$\lambda(\omega, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m-1} a[z_k z_{k+1}] \quad (5.1)$$

существует. Такие подпоследовательности назовем сходящимися. Спектр усреднения оснащения над ω есть предельное множество усреднений над сходящимися подпоследовательностями

$$\Sigma(\omega) = \{\lambda \in R \mid \text{существует } n_m \rightarrow \infty \text{ такие, что } \lambda = \lambda(\omega, n_m)\}.$$

Определение 9. Спектр усреднения оснащенного символического образа G_{lb} есть предельное множество усреднений над всеми допустимыми путями

$$\Sigma(G_{lb}) = \{\lambda \in R \mid \lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m, \lambda_m \in \Sigma(\omega_m), \omega_m \text{-допустимый путь}\}.$$

Предложение 5. Пусть $\omega = \{z_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ является бесконечным путем на G и найдется сходящаяся подпоследовательность (5.1). Тогда найдется последовательность периодических путей $\{\omega_p\}$, $p \rightarrow \infty$ таких что, $\lambda(\omega_p) \rightarrow \lambda(\omega, n_m)$ при $p \rightarrow \infty$.

Доказательство. Не трудно показать, что предел (5.1) не зависит от конечного числа начальных точек последовательности ω , т.е.

$$\lambda(\omega, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m - n_0} \sum_{k=n_0}^{n_m-1} a[z_k z_{k+1}].$$

Так как символический образ содержит конечное число вершин, то найдется вершина $z^* = z_{n_0}$, которая повторяется в ω бесконечно много раз $z^* = z_{n_p}$, $p \rightarrow \infty$. Тогда конечная последовательность $\omega_p = \{z_k, n_0 \leq k \leq n_p\}$ является периодическим путем на G . Усреднение над ω_p

$$\lambda(\omega_p) = \frac{1}{n_p - n_0} \sum_{k=n_0}^{n_p-1} a[z_k z_{k+1}].$$

Таким образом, $\lambda(\omega, n_m) = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda(\omega_p)$. Утверждение доказано.

Следствие 3. Спектр $\Sigma(G_{lb})$ совпадает с предельным множеством усреднений над периодическими путями, т.е.

$$\Sigma(G_{lb}) = \{\lambda \in R \mid \text{существует последовательность периодических путей } \{\omega_n\} \text{ таких, что } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\omega_n)\}.$$

Таким образом, спектр оснащенного символического образа определяется на возвратных вершинах RV . Рассмотрим последовательность периодических путей $\{\omega_n\}$, $n \rightarrow \infty$, на которой достигается $\lambda \in \Sigma(G_{lb})$. Множество RV разбито на конечное число классов эквивалентных возвратных вершин. Каждый класс H содержит некоторое множество элементов последовательности $\{\omega_n\}$. Если это множество конечно, то соответствующие значения $\lambda(\omega_n)$ не влияют на предельное значение λ . Поэтому можно считать, что таких элементов нет. Остаются только

классы, которые содержат бесконечное число элементов последовательности. Если последовательность $\{\omega_k\}$ лежит в классе H и $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(\omega_k)$, то будем говорить, что показатель λ реализуется в классе H . Спектр класса H определяется как

$$\Sigma(H) = \{\lambda \in R \mid \text{существует последовательность периодических путей}$$

$$\{\omega_n \subset H\} \text{ таких, что } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\omega_n)\}.$$

Предложение 6. Если λ_1 и λ_2 реализуются в классе H , то любое число λ между λ_1 и λ_2 также реализуется в классе H .

Доказательство данного утверждения повторяет доказательство Утверждения 4.

Следствие 4. Спектр класса H есть отрезок $[a(H), b(H)]$, где $a = \lambda_{\inf}(H)$ и $b = \lambda_{\sup}(H)$ - нижняя и верхняя грани усреднений над периодическими путями из H .

Периодический путь $\omega = \{z_1, \dots, z_p = z_0\}$ назовем простым или циклом, если его вершины z_1, \dots, z_p являются различными, т.е., $z_i \neq z_j$ для $i \neq j$; $i, j = 1, \dots, p$. Покажем, как любой периодический путь можно разложить в сумму циклов.

Пусть $\omega = \{z_1, \dots, z_p = z_0\}$ является периодическим путем периода p . Если ω не является простым, то существует вершина z^* такая, что $z^* = z_l = z_{l+p_1}$, $0 < p_1 < p$. Рассмотрим две конечные последовательности $\omega^* = \{z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+p_1}, \dots, z_p = z_0\}$ и $\omega^{**} = \{z_{l+1}, \dots, z_{l+p_1} = z_l\}$. Так как путь ω является допустимым, то существуют дуги $z_{l-1} \rightarrow z_l = z_{l+p_1}$ и $z_{l+p_1} = z_l \rightarrow z_{l+1}$, поэтому последовательности ω_1 и ω_2 являются периодическими допустимыми путями с периодами p_1 и $p_2 = p - p_1$, соответственно. Ясно, что $p_1 + p_2 = p$. В этом случае мы будем говорить, что путь ω есть сумма периодических путей ω^* и ω^{**} и писать

$$\omega = \omega^* + \omega^{**}.$$

Мы можем применить описанное разложение к путям ω^* и ω^{**} . Повторяя этот процесс разложения, приходим к разложению ω в сумму периодических путей $\omega_1, \dots, \omega_q$ периодов p_1, \dots, p_q , $p_1 + \dots + p_q = p$. Ясно, что этот процесс конечен и финальное разложение $\omega = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_r$ состоит только из простых периодических путей. Циклы ϕ_1, \dots, ϕ_r могут совпадать. Если путь ω^* повторяется k раз в разложении ω , то мы будем писать ω

$$\omega = k\omega^* + \omega^{**}.$$

Так как число вершин конечно, то число циклов также конечно. Пусть ϕ_1, \dots, ϕ_q есть набор всех циклов класса H и p_1, \dots, p_q являются периодами этих путей, соответственно. Найдем усреднения на этих циклах

$$\lambda(\phi_j) = \frac{1}{p_j} \sum_{k=1}^{p_j} a[z_{k-1}^j z_k^j].$$

Рассмотрим периодический путь $\omega \subset H$ и предположим, что $\omega = k_1\phi_1 + \dots + k_q\phi_q$ есть разложение на простые периодические пути, период ω есть $p = k_1p_1 + \dots + k_qp_q$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что каждый цикл ϕ_j входит в ω с коэффициентом $k_j \geq 0$, при этом случай $k_j = 0$ означает, что ω реально не проходит через ϕ_j . Если $\omega = k_1\phi_1 + \dots + k_q\phi_q$, то будем говорить, что цикл ϕ_j сходит в ω с весом $\mu_j = \frac{k_j p_j}{p}$. Ясно, что $\sum_{j=1}^q \mu_j = 1$. Не трудно доказать следующее.

Предложение 7. Усреднение оснащения над периодическим путем $\omega = k_1\phi_1 + \dots + k_q\phi_q$ вычисляется по формуле

$$\lambda(\omega) = \sum_{j=1}^q \mu_j \lambda(\phi_j),$$

где $\mu_j = \frac{k_j p_j}{p}$.

Пусть

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H) &= \min\{\lambda(\phi_j), j = 1, \dots, q\}, \\ \lambda_{\max}(H) &= \max\{\lambda(\phi_j), j = 1, \dots, q\} \end{aligned}$$

есть минимальное и максимальное значения усреднения на циклах класса H . Из Утверждения 7 следует

Предложение 8. Усреднение $\lambda(\omega)$ над любым периодическим путем ω из класса H удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{\min}(H) \leq \lambda(\omega) \leq \lambda_{\max}(H).$$

Предложение 9. Спектр усреднения класса $\Sigma(H) = [\lambda_{\min}(H), \lambda_{\max}(H)]$, т.е. для любого $\lambda \in [\lambda_{\min}(H), \lambda_{\max}(H)]$ найдется последовательность периодических путей $\{\omega_m\}$ в H таких, что $\lambda(\omega_m) \rightarrow \lambda$ при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство. Без потери общности мы предположим, что $\lambda = \alpha\lambda_{\min}(H) + (1 - \alpha)\lambda_{\max}(H)$, $0 < \alpha < 1$. Пусть $\phi_{\min} = \{z_1^*, \dots, z_l^*\}$ и $\phi_{\max} = \{z_1^{**}, \dots, z_e^{**}\}$ есть циклы реализующие усреднения $\lambda_{\min}(H)$ и $\lambda_{\max}(H)$, соответственно. Так как z_l^* и z_1^{**} являются эквивалентными возвратными вершинами, то существует периодический путь $\psi = \{z_1 = z_1^*, \dots, z_j = z_1^{**}, \dots, z_q\}$, проходящий через вершины z_1^* и z_1^{**} . Построим допустимый периодический путь ω следующим образом. Начинаем с z_l^* и сделаем k^* оборотов по ϕ_{\min} , затем идем по ψ от z_l^* до z_1^{**} , делаем k^{**} оборотов по ϕ_{\max} и возвращаемся по ψ к исходной вершине z_l^* . Построенный периодический путь ω имеет разложение

$$\omega = k^* \phi_{\min} + k^{**} \phi_{\max} + \psi.$$

Пусть p^* , p^{**} и q являются периодами ϕ_{\min} , ϕ_{\max} и ψ , соответственно. В этом случае веса ϕ_{\min} , ϕ_{\max} и ψ имеют значения $\mu(\phi_{\min}) = \frac{k^*p^*}{p}$, $\mu(\phi_{\max}) = \frac{k^{**}p^{**}}{p}$ и $\mu(\psi) = \frac{q}{p}$, где $p = k^*p^* + k^{**}p^{**} + q$ есть период ω . Усреднение над ω

$$\lambda(\omega) = \mu(\phi_{\min})\lambda(\phi_{\min}) + \mu(\phi_{\max})\lambda(\phi_{\max}) + \mu(\psi)\lambda(\psi).$$

Если k^* и $k^{**} \rightarrow \infty$, то $\mu(\psi) = \frac{q}{p} \rightarrow 0$. Выбирая числа k^* и $k^{**} \rightarrow \infty$, как это было сделано при доказательстве Утверждения 4, построим последовательность путей ω так, что

$$\lambda(\omega_m) \rightarrow \alpha\lambda_{\min}(H) + (1 - \alpha)\lambda_{\max}(H) = \lambda.$$

Утверждение доказано.

Следующая теорема является следствием Утверждений 8 и 9.

Теорема 3. *Спектр оснащенного символического образа $\Sigma(G_{lb})$ состоит из интервалов $[\lambda_{\min}(H_k), \lambda_{\max}(H_k)]$, где $\{H_k\}$ есть полное семейство классов эквивалентных возвратных вершин символического образа G .*

Рассмотрим фиксированный символический образ и его оснащение. Согласно предыдущей теореме мы можем найти спектр усреднения оснащенного символического образа за конечное число шагов. Возникает вопрос об оценке спектра Морса через спектр оснащенного символического образа.

Теорема 4. *Спектр Морса Σ лежит в расширенном спектре оснащенного символического образа $\Sigma(G_{lb})$, который состоит из интервалов $[\lambda_{\min}(H_k) - \eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \eta(d)]$, где $\{H_k\}$ есть полное семейство классов эквивалентных возвратных вершин символического образа G , d - диаметр покрытия и $\eta(\cdot)$ - модуль непрерывности функции $\varphi(x, e) = \ln |Df(x)e|$.*

Доказательство. Пусть $\xi = \{(x_1, e_1), (x_2, e_2), \dots, (x_p, e_p) = (x_0, e_0)\}$ есть периодическая ε -траектория отображения Pf . Согласно Теореме 1 об отслеживании, найдется $r > 0$ такое, что если $\varepsilon < r$ и $(x_k, e_k) \in M(z_k)$, то периодический путь $\omega = \{z_1, z_2, \dots, z_p = z_0\}$ является допустимым. Найдем усреднение функции φ на ξ

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \varphi(x_k, e_k)$$

и усреднение оснащения на периодическом пути ω

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p a[z_k, z_{k+1}] = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \varphi(x_k^*, e_k^*),$$

где точки (x_k, e_k) и (x_k^*, e_k^*) лежат в ячейке $M(z_k)$. При этом $\varphi(x_k, e_k) - \varphi(x_k^*, e_k^*) = \alpha_k$, $|\alpha_k| < \eta(d)$. Тогда

$$\lambda(\xi) = \lambda(\omega) + E,$$

где $|E| = |\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \alpha_k| < \eta(d)$. Пусть λ лежит в спектре Σ усреднения функции φ , т.е. существует последовательность периодических ε_n -траекторий $\{\xi_n\}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, таких что $\lambda(\xi_n) \rightarrow \lambda$, при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим ту часть последовательности, где $\varepsilon_n < r$. Построим периодические допустимые пути $\{\omega_n\}$ как это сделано выше. Тогда мы имеем оценку

$$\lambda(\xi_n) = \lambda(\omega_n) + E_n,$$

где $|E_n| < \eta(d)$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что последовательности $\lambda(\omega_n)$ и E_n сходятся к λ^* и E^* . Если это не так, то мы перейдем к подпоследовательностям. Таким образом, мы имеем равенство

$$\lambda = \lambda^* + E^*, \quad |E^*| < \eta(d). \quad (5.2)$$

По определению, предельное значение λ^* лежит в спектре оснащенного символического образа $\Sigma(G_{lb})$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Таким образом, для оценки спектра Морса исходной системы нам нужно найти спектр оснащенного символического образа. Эта задача сводится к нахождению циклов с минимальным и максимальным характеристическим показателями. Понятно, что поиск таких циклов с помощью перебора невозможен в наших условиях, так как при итерационных построениях символического образа число циклов резко возрастает. Поэтому для достижения цели используется метод, сводящий нашу задачу к специальной транспортной задаче линейного программирования [14].

6. Численные эксперименты

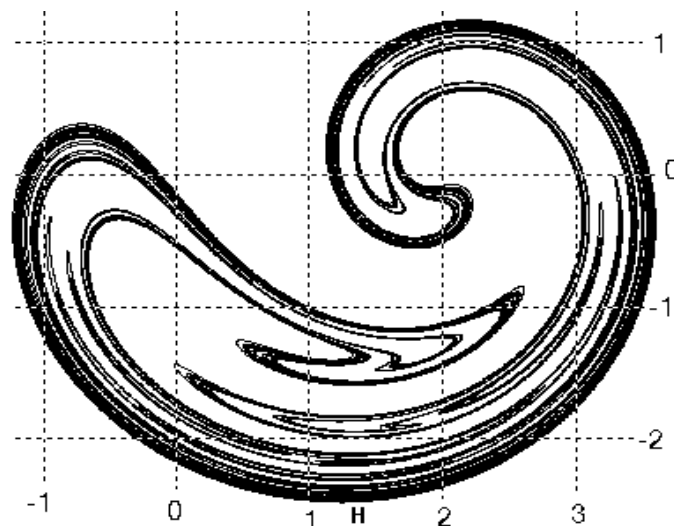


Рис. 1. Аттрактор модифицированного отображения Икеды

Рассмотрим модифицированное отображение Икеды:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 0.9(x \cos \tau(x, y) - y \sin \tau(x, y)) \\ y_1 &= 0.9(x \sin \tau(x, y) + y \cos \tau(x, y)), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где

$$\tau(x, y) = 0.4 - \frac{6}{1 + x^2 + y^2}.$$

Отображение (6.1) обладает свойством сжатия площадей и имеет глобальный аттрактор A_g , см. рис. 1. Существует единственная гиперболическая неподвижная точка $H(1.3815, -2.4746)$. Кроме того, отображение имеет единственную 2-периодическую траекторию $P_2 = \{(0.2338, -0.7031), (1.9995, 0.6681)\}$, устойчивое и неустойчивое многообразия которой пересекаются и образуют гомоклинический цикл.

Известно [13], что, если спектр Морса не содержит нуля, то цепно-рекуррентное множество системы является гиперболическим и, следовательно, Ω -устойчиво. Вычисления показывают, что аттрактор A_g не является гиперболическим. Нам хотелось бы найти нетривиальное инвариантное множество, которое окажется гиперболическим. Мы рассмотрели часть этого аттрактора, а именно, максимальное цепно-рекуррентное множество Ω_0 в области $[-1.1, 3.5] \times [-1.5, 1.8]$. Применение описанной выше техники локализации дает следующие результаты. При начальном разбиении базы 10×10 стартовые размеры ячейки были 0.46×0.33 . После нескольких итераций (при размерах ячейки 0.0071×0.0051) множество Ω_0 распадается на две компоненты Ω_1 и Ω_2 , соответствующие двум компонентам сильной связности на символическом образе.

Инвариантное множество Ω_1 оказалось 6-периодической орбитой. Для лучшей локализации в базе проведено несколько итераций до момента, когда размеры ячейки составили 0.00045×0.00032 . Построение оснащенного символического образа проводилось до момента, пока размер ячейки в проективном пространстве не стал равен 0.0003. При таких данных расстояние между спектром Морса исходной системы и спектром символического образа не превосходит 0.01. В результате вычислений на проективном расслоении получены две компоненты и спектр Морса над множеством Ω_1 содержится в объединении интервалов $[0.522, 0.523]$ и $[-0.734, -0.733]$, т.е. Ω_1 является 6-периодической гиперболической траекторией. Эти вычисления были проверены прямым вычислением показателей Ляпунова 6-периодической траектории.

Инвариантное множество Ω_2 оказалось нетривиальным канторовым множеством. Итерации в базе проводились до размера ячейки 0.00089×0.00058 . Затем строились итерации оснащенного символического образа до размера ячейки по углу 0.00038. Аналогично вычислениям для первой компоненты, при таких данных спектр Морса исходной системы отличается от спектра символического образа на 0.01. В результате получены два интервала $[0.632, 0.793]$ и $[-1.004, -0.843]$, которые являются расширенными интервалами оснащенного символического образа. Эти интервалы не содержат нуля, следовательно, множество Ω_2 является гипер-

болическим и Ω -устойчивым, т.е. оно будет сохраняться при C^1 -возмущениях системы.

7. Заключение

В работе показано, что показатели Ляпунова всех траекторий гладкой динамической системы можно оценить, используя символический образ системы. Теорема 4 описывает набор отрезков, где располагаются показатели Ляпунова псевдотраекторий системы (спектр Морса). Символический образ является ориентированным графом, который строится для замкнутого конечного покрытия фазового пространства. Вершины символического образа соответствуют ячейкам покрытия, а ребра соответствуют динамике (отображению) ячеек. Символический образ стал удобным инструментом для получения теоретических результатов (см. [15]). Предложенные доказательства теорем являются конструктивными и допускают построение соответствующих алгоритмов. Символический образ, как конечный граф, допускает компьютерное изучение, что дает информацию о глобальной динамике системы. Точность такой информации определяется диаметром ячеек покрытия. Таким образом, увеличение точности полученной информации приводит к росту числа ячеек покрытия и, следовательно, к росту вершин графа. Численные эксперименты показывают, что исследования символического образа на современных персональных компьютерах дают хорошие результаты в реальном времени, если число узлов (вершин) не превышает миллион. Для более мощных компьютеров это число может быть увеличено на порядок. При этом, применение последовательности символических образов (как это описано в Теореме 2 о локализации цепно-рекуррентного множества) значительно сокращает время вычисления. Описанный численный эксперимент показывает, что представленная технология позволяет проверить гиперболичность нетривиального инвариантного множества.

Список цитируемых источников

1. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. // Труды математического института им. В. А. Стеклова. — 1967. — Т.90.
Anosov D. V. (1967). Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature. Proc. Steklov Mathematics Inst. 90.
2. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова. — М.: Наука, 1966.
Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytskii V. V. (1966). Theory of Lyapunov Exponents. Moscow: Nauka.
3. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2001.
Kuznetsov S. P. (2001). Dynamical Chaos (in Russian). Moscow: Nauka.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
Lyapunov A. M. (1950). The General Problem of the Stability of Motion (in Russian). Moscow: Gostechizdat.

5. *Маллинецкий Г. Г., Потанов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. — М.: Едиториал УРСС, 2002.
Malinetskii G. G., Potanov A. B. (2002). Modern problems of nonlinear dynamics. Moscow: Editorial URSS.
6. *Осипенко Г. С.* О символическом образе динамической системы // Краевые задачи — Пермь, 1983. — С. 101-105.
Osipenko G. S. (1983). On Symbolic Image of Dynamical System (in Russian). In Kraevye zadachi (pp. 101-105). Perm.
7. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P. I: Theory. P. II: Numerical applications // Meccanica. — 1980, — Vol. 15. — 930.
8. *Bowen R.* Symbolic Dynamics // Ann. Math. Soc. — 1982. — Vol. 8.
9. *Colonius F. and Kliemann W.* The Dynamics of Control. — Basel: Burkhauser, 2000.
10. *Douglas Lind, Brian Marcus* An introduction to symbolic dynamics and coding. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
11. *Hsu C. S.* Cell-to-Cell Mapping. — New York: Springer-Verlag, 1987.
12. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
13. *Osipenko George* Dynamical systems, Graphs, and Algorithms. In Lectures Notes in Mathematics 1889. — Berlin: Springer, 2007.
14. *Osipenko G.S., Romanovsky J.V., Ampilova N.B. and Petrenko E.I.* Computation of the Morse Spectrum // Journal of Mathematical Sciences — 2004. — Vol. 120, no.2. — P. 1155-1166.
15. *Osipenko George* Symbolic images and invariant measures of dynamical systems // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2010. — Vol. 30. — P. 1217-1237.
16. *Parter Thomas, Shua Leon* Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. — New York: Springer-Verlag, 1989.
17. *Shub M.* Stabilite globale de systems denamiques // Asterisque — 1978. — Vol. 56. — P. 1-21.

Получена 01.03.2016

УДК 517.938

Рождение сепараторов в магнитных полях¹

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики,
Нижний Новгород 603155. E-mail: zhuzhoma@mail.ru, medvedev@unn.ac.ru

Аннотация. Мы рассматриваем модель магнитного поля с точечными зарядами, которые моделируют области с интенсивным магнитным потоком. Используя методы теории динамических систем, в статье получены условия отсутствия и наличия сепараторов магнитного поля в хорошо проводящей среде (плазме). Приводится типичная бифуркация рождения сепараторов, когда все заряды лежат в плоскости. Поэтому эта бифуркация может служить моделью рождения сепараторов в фотосфере Солнца.

Ключевые слова: динамическая система Морса-Смейла, сепаратор, магнитное поле.

Birth of separators in magnetic fields

E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev

Higher School of Economics, Nizhniy Novgorod 603155.

Abstract. We consider the model of magnetic field with point charges that model regions with an intensive magnetic flux. Using methods of Dynamical Systems Theory, in the paper, one gets the conditions of the absence and existence of separators in a nice conducting fields (plasma). One gives a typical bifurcation of birth separators, when all charges belong to a plane. Therefore, this bifurcation can be the model of birth separators in the photosphere of the Sun.

Keywords: Morse-Smale dynamical system, separator, magnetic field.

MSC 2010: 37D15, 76W05

Введение

Общепринятое в наши дни положение современной астрофизики относительно солнечных вспышек состоит в том, что выделение энергии при солнечных вспышках происходит в результате магнитного пересоединения, то есть перераспределения магнитных потоков, приводящее к изменению топологии магнитного поля. Магнитное пересоединение происходит в результате разрыва силовых линий магнитного поля в так называемых нулевых точках, где магнитная индукция $\mathbf{B} = 0$, и бифуркации силовых линий (интегральных кривых магнитного поля) в новую топологическую конфигурацию, которая обладает меньшей энергией [12, 15]. Высвобождающийся при этом избыток энергии расходуется на интенсивное излучение электромагнитных волн в различных диапазонах спектра, нагрев плазмы, ускорение заряженных частиц до высоких энергий и т.п. В связи с этим, информация о

¹Работа выполнена при финансовой поддержке фондов РФФИ, гранты 15-01-03689-а, 16-51-10005-Ко_а и РНФ, грант 14-41-00044. Исследование осуществлялось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 и 2016 годах.

количестве и расположении нулевых точек магнитной индукции является критически важной при анализе процессов магнитного пересоединения.

Известно, что в типичной ситуации магнитное поле создается электрическими токами. Магнитное поле является непотенциальным в областях, непосредственно занятых электрическим токами, и потенциальным – вне этих областей. Довольно часто используется модель, в которой токи аппроксимируются точечными «магнитными зарядами» (источниками и стоками) и, таким образом, поле оказывается потенциальным всюду вне этих зарядов. Несмотря на упрощенный характер данной модели, она способна во многих случаях дать интересные физические результаты [1, 4, 9]. При этом, наряду с расчетом конкретных конфигураций магнитного поля, проводившихся различными авторами (см., например [7, 8] и обзор [13], где исследовалась топологическая структура и возможные бифуркации магнитного поля для конкретных значений числа магнитных зарядов и их типов), было бы интересно иметь и некоторые общие критерии, связывающие количество и тип магнитных зарядов с количеством и типом возникающих в таком поле нулевых точек.

Важнейшей характеристикой магнитного поля с точки зрения процессов пересоединения является количество и расположение сепараторов (ниже даны точные определения). Так как сепаратор – это место пересечения двух сепаратрисных поверхностей, то он представляет собой линию, на которой происходит соприкосновение четырех магнитных потоков. Перераспределение этих потоков с течением времени как раз и лежит в основе эффекта магнитного пересоединения; при этом соответствующий сепаратор задает траекторию распространения этого процесса в пространстве. Методы теории динамических систем для исследования вопроса о существовании сепараторов в магнитных полях плазмы применялись в работах [2, 5]. Таким образом, еще одна актуальная задача – нахождение общего соотношения между количеством и типом магнитных зарядов, с одной стороны, и количеством и структурой создаваемых ими сепараторов, с другой стороны. Обе вышеуказанные проблемы будут рассмотрены в настоящей статье.

Дадим некоторые определения и сформулируем основные результаты. Наблюдения показывают, что на поверхности Солнца (фотосфере) наблюдаются места, которые проявляют себя как источники окружающего их магнитного поля короны Солнца. Традиционно эти фрагменты фотосферы называются *зарядами* магнитного поля [6]. Заряд называется *положительным*, если поток поля через сколь угодно малую сферу, окружающую заряд, положительный. Аналогично определяется отрицательный заряд: поток поля через сколь угодно малую сферу, окружающую такой заряд, отрицательный. Поскольку Солнце излучает энергию, то большое практическое значение имеет изучение так называемых положительно несбалансированных групп зарядов.

Группа зарядов C называется *положительно несбалансированной*, если ее можно заключить в шар B , на границе которого магнитное поле направлено наружу. Указанный шар $B = B(C)$ будем называть *источниковой областью группы C* . Аналогично определяется отрицательно несбалансированная группа зарядов, и в

этом случае говорят о стоковой области группы. Изучение отрицательно несбалансированных групп также важно, поскольку внутри положительно несбалансированной группы могут быть семейства отрицательно несбалансированных групп, бифуркации которых могут быть причиной вспышки [11].

Математическая идеализация заряда приводит к понятию точечной особенности векторного поля: положительный заряд рассматривается как источник, а отрицательный – как сток векторного поля. Точка p_0 магнитного поля \vec{B} называется *нулевой*, если $\vec{B}(p_0) = 0$. В типичном случае собственные числа λ_1, λ_2 и λ_3 в нулевой точке не равны нулю и удовлетворяют соотношению $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, в силу равенства $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Отсюда вытекает, что с точки зрения теории динамических систем нулевая точка является консервативным седлом с одномерной и двумерной сепаратрисами,² см. рис. 1 (а). Если силовая магнитная линия одномерной сепаратрисы направлена из нулевой точки, то все магнитные линии на сепаратрисной поверхности направлены к нулевой точке, и наоборот.

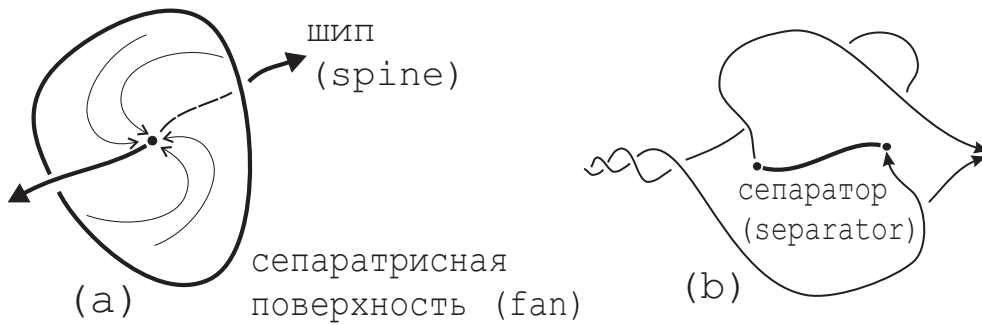


Рис. 1. Структура нулевой точки (а), и гетероклинический сепаратор (b).

Для типичной нулевой точки p_0 возможны (с точностью до переобозначений собственных чисел) лишь следующие варианты: 1) $\lambda_1 > 0, \lambda_2, \lambda_3 < 0$; 2) $\lambda_1 < 0, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. В первом случае нулевая точка p_0 называется *положительной*, поскольку $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$. С точки зрения теории динамических систем, положительная нулевая точка является седлом с индексом Морса единица и топологическим индексом минус единица. Это седло имеет одномерную неустойчивую сепаратрису и двумерную устойчивую сепаратрису, см. рис. 1 (а). Во втором случае точка p_0 называется *отрицательной*, поскольку $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$. Такая нулевая точка является седлом с индексом Морса два и топологическим индексом плюс единица. Это седло имеет одномерную устойчивую сепаратрису и двумерную неустойчивую сепаратрису.

Следуя [11, 12], будем называть магнитную линию, соединяющую две нулевые точки, *сепаратором* (separator). Сепаратор называется *гетероклиническим*, если он является трансверсальным пересечением сепаратрисных поверхностей, см. рис. 1 (b).

²Иногда одномерную сепаратрису называют шипом (spine), а двумерную - веерной поверхностью (fan) [11, 12]

Топологическая структура магнитного поля определяется числом и типом нулевых точек, взаимным расположением шипов и веерных поверхностей, а также линиями трансверсального пересечения веерных поверхностей – гетероклиническими сепараторами.

Теорема 1. Пусть имеется положительно несбалансированная группа \mathcal{C} , содержащая $l \geq 2$ положительных зарядов. Тогда в источниковой области $V(\mathcal{C})$ этой группы имеется, по крайней мере, $l - 1$ отрицательных нулевых точек. Если группа \mathcal{C} состоит из l положительных зарядов и в $V(\mathcal{C})$ содержится ровно $l - 1$ нулевых точек, то все нулевые точки являются отрицательными нулевыми точками, и сепараторы в $V(\mathcal{C})$ отсутствуют. Более того, магнитное поле в области $V(\mathcal{C})$ имеет единственную с точностью до топологической эквивалентности структуру.

Из этой теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Пусть имеется отрицательно несбалансированная группа \mathcal{C} , содержащая $k \geq 2$ отрицательных зарядов. Тогда в стоковой области $V(\mathcal{C})$ этой группы имеется по крайней мере $k - 1$ положительных нулевых точек. Если группа \mathcal{C} состоит из $k \geq 2$ отрицательных зарядов и в $V(\mathcal{C})$ содержится ровно $k - 1$ нулевых точек, то все эти точки являются положительными нулевыми точками, и сепараторы в $V(\mathcal{C})$ отсутствуют. Более того, магнитное поле в области $V(\mathcal{C})$ имеет единственную с точностью до топологической эквивалентности структуру.

Следствие 2. Пусть имеется положительно несбалансированная группа \mathcal{C} , состоящая из одного (доминантного) положительного заряда и $k \geq 1$ отрицательных зарядов. Тогда в источниковой области $V(\mathcal{C})$ этой группы имеется по крайней мере k положительных нулевых точек. Если $V(\mathcal{C})$ содержится ровно k нулевых точек, то все эти точки являются положительными нулевыми точками, и сепараторы в $V(\mathcal{C})$ отсутствуют. Более того, магнитное поле в области $V(\mathcal{C})$ имеет единственную с точностью до топологической эквивалентности структуру.

Следствие 3. Пусть имеется положительно несбалансированная группа \mathcal{C} , состоящая из $l \geq 2$ положительных зарядов и $k \geq 1$ отрицательных зарядов. Тогда в источниковой области $V(\mathcal{C})$ этой группы имеется, по крайней мере, $l - 1$ отрицательных нулевых точек и по крайней мере k положительных нулевых точек.

При минимально возможных количествах как положительных, так и отрицательных нулевых точек (эти минимальные числа определяются в силу следствия 3) сепараторов может не быть. Однако, как показывает следующая теорема, как только появляется хотя бы одна "лишняя" нулевая точка, то необходимо появляется хотя бы один сепаратор. Тип лишней нулевой точки роли не играет (она может быть как положительной, так и отрицательной). Мы для определенности формулируем утверждение, когда лишняя нулевая точка является отрицательной.

Теорема 2. Пусть имеется положительно несбалансированная группа \mathcal{C} , содержащая $l \geq 2$ положительных и $k \geq 0$ отрицательных зарядов. Если в $B(\mathcal{C})$ содержится ровно l отрицательных нулевых точек, то в $B(\mathcal{C})$ существует хотя бы один сепаратор.

Следующая теорема демонстрирует один сценарий появления отрицательной нулевой точки, когда возникает семейство сепараторов, количество которых равно числу отрицательных нулевых точек (оно также равно числу положительных зарядов).

Теорема 3. Пусть имеется положительно несбалансированная группа \mathcal{C} , состоящая из $l \geq 2$ положительных зарядов и $l - 1$ отрицательных нулевых точек. Тогда существует типичная бифуркация рождения l гетероклинических сепараторов и одной отрицательной нулевой точки.

Благодарности. Авторы благодарят РФФИ, гранты 15-01-03689-а, 16-51-10005-Ко_а и РНФ, грант 14-41-00044, за финансовую поддержку. Авторы благодарят Ю.В. Думина, внимательно прочитавшего рукопись и сделавшего ряд критических замечаний. Особая благодарность за финансовую поддержку Константину Витальевичу Кирсенко (просветителю и бизнесмену). Исследование осуществлялось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 и 2016 годах.

1. Предварительные сведения

Пусть f^t – поток, индуцированный векторным полем \vec{V} на трехмерной сфере S^3 . Мы будем предполагать, что f^t не имеет периодических траекторий. Обозначим через $Fix(f^t)$ множество состояний равновесия потока f^t . Для $p \in Fix(f^t)$ обозначим через $W^s(p)$ множество траекторий, стремящихся к p при неограниченном увеличении времени. В частности, если p – седло, то $W^s(p) \setminus \{p\}$ является устойчивой сепаратрисой седла p . Множество $W^s(p)$ называется *устойчивым многообразием* точки p . Аналогично, обозначим через $W^u(p)$ множество траекторий, стремящихся к p при неограниченном уменьшении времени. В частности, если p – седло, то $W^u(p) \setminus \{p\}$ является неустойчивой сепаратрисой седла p . Множество $W^u(p)$ называется *неустойчивым многообразием* точки p . Поток f^t называется потоком *Морса-Смейла*, если все его состояния равновесия гиперболические, их устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально, и предельное множество любой траектории принадлежит $Fix(f^t)$ [14]. Соответствующее векторное поле \vec{V} называется *векторным полем Морса-Смейла*.

Обозначим через \vec{v}_{source} векторное поле в шаре \mathbb{B}^3 , направленное наружу на границе шара $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$ и имеющее внутри шара ровно один гиперболический источник, рис. 2 (а). Положим $\vec{v}_{sink} = -\vec{v}_{source}$. Ясно, что векторное поле \vec{v}_{sink} имеет внутри шара \mathbb{B}^3 ровно один гиперболический сток, и \vec{v}_{sink} на границе S^2 направлено внутрь шара \mathbb{B}^3 .

Пусть $B(\mathcal{C})$ – источниковая область группы зарядов \mathcal{C} . Обозначим через $\vec{v}(\mathcal{C})$ магнитное поле в $B(\mathcal{C})$, порожденное группой зарядов \mathcal{C} . Напомним, что векторное поле $\vec{v}(\mathcal{C})$ направлено наружу на границе $\partial B(\mathcal{C})$ шара $B(\mathcal{C})$. Возьмем шар \mathbb{B}^3 с векторным полем \vec{v}_{sink} . Если отождествить границы $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$, $\partial B(\mathcal{C})$ шаров \mathbb{B}^3 и $B(\mathcal{C})$ соответственно, то получим трехмерную сферу \mathbb{S}^3 . Можно подправить поле \vec{v}_{sink} вблизи границы $\partial\mathbb{B}^3$ так, чтобы поля \vec{v}_{sink} , $\vec{v}(\mathcal{C})$ образовывали гладкое векторное поле Морса-Смейла на \mathbb{S}^3 , которое мы обозначим через $\vec{V}(\mathcal{C})$. Ясно, что при этом можно сохранить глобальную топологическую структуру поля \vec{v}_{sink} . Тогда состояния равновесия $\vec{V}(\mathcal{C})$ будут представлять собой объединение состояний равновесия поля $\vec{v}(\mathcal{C})$ и стока поля \vec{v}_{sink} . Векторное поле $\vec{V}(\mathcal{C})$ будем называть *продолжением поля $\vec{v}(\mathcal{C})$ группы зарядов \mathcal{C} на трехмерную сферу \mathbb{S}^3* .

Лемма 1. *Пусть положительно несбалансированная группа \mathcal{C} содержит N^+ (соотв. N^-) положительных (соотв., отрицательных) зарядов, и S^+ (соотв. S^-) положительных (соотв., отрицательных) нулевых точек. Тогда имеет место равенство*

$$1 + N^- - S^+ + S^- - N^+ = 0. \quad (1.1)$$

Доказательство. Пусть $\vec{v}(\mathcal{C})$ – магнитное поле в $B(\mathcal{C})$, порожденное группой \mathcal{C} , и $\vec{V}(\mathcal{C})$ – продолжение поля $\vec{v}(\mathcal{C})$ на трехмерную сферу \mathbb{S}^3 . Заряды и нулевые точки магнитного поля векторного поля $\vec{v}(\mathcal{C})$ являются состояниями равновесия векторного поля Морса-Смейла $\vec{V}(\mathcal{C})$. Напомним, что $\vec{V}(\mathcal{C})$ имеет по сравнению с $\vec{v}(\mathcal{C})$ дополнительный сток, топологический индекс которого равен единице.

Индекс Морса (размерность неустойчивого многообразия) положительной нуль-точки равен единице. Поэтому топологический индекс такой точки равен минус единице. Аналогично, топологический индекс отрицательной нуль-точки равен единице, поскольку ее индекс Морса равен двум. Индекс Морса отрицательного (соотв., положительного) заряда равен нулю (соотв. трем). Поэтому топологический индекс отрицательного (соотв., положительного) заряда равен единице (соотв. минус единице). Известно, что эйлерова характеристика трехмерной сферы равна нулю. Применяя формулу Эйлера-Пуанкаре, согласно которой сумма топологических индексов состояний равновесия равна эйлеровой характеристике, получаем требуемый результат. \square

Следствие 4. *Пусть выполняются условия леммы 1. Если в источниковой области нет отрицательных зарядов, $N^- = 0$, то*

$$S^- = (N^+ - 1) + S^+ \geq N^+ - 1.$$

Введем на множестве состояний равновесия $Fix(f^t)$ потока Морса-Смейла f^t частичное отношение \prec . Для $p, q \in Fix(f^t)$ положим $p \prec q$, если $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$. Удобно введенное отношение изображать на графе, точки которого отождествляются с состояниями равновесия $Fix(f^t)$. Вершины графа, соответствующие p ,

$q \in \text{Fix}(f^t)$ и связанные отношением $p \prec q$, соединяются ребром, направленным из q к точке p . Так введенный ориентированный граф $\Gamma(f^t)$ иногда называют графом (или диаграммой) Смейла.

Обозначим через $A(f^t)$ объединение всех одномерных неустойчивых многообразий седел и всех стоков потока f^t . Известно [3], что $A(f^t)$ является связным одномерным подграфом графа $\Gamma(f^t)$, вершины которого отождествляются с соответствующими седлами и стоками. В этом случае, ребра подграфа соответствуют одномерным неустойчивым сепаратрисам, и снабжаются направлением из седел к стокам. Более того, $A(f^t)$ является притягивающим множеством потока f^t [3]. Аналогично, обозначим через $R(f^t)$ объединение всех устойчивых одномерных сепаратрис седел и всех источников. Тогда $R(f^t)$ суть связный ориентированный подграф, являющийся отталкивающим множеством потока f^t [3].

Для описания топологической структуры векторных полей нам понадобятся некоторые канонические поля. Напомним, что \vec{v}_{source} означает векторное поле в шаре \mathbb{B}^3 , направленное наружу на границе шара $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$ и имеющее один источник α_0 внутри шара \mathbb{B}^3 , рис. 2 (а). Будем называть векторное поле \vec{v}_{source} *источником типа (1;0)*. Рассмотрим векторное поле \vec{v}_{uns} в шаре \mathbb{B}^3 , направленное наружу на границе шара $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$ и имеющее $l \geq 2$ источников $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ и $l - 1$ седел $\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}$ индекса Морса 2. Такое векторное поле \vec{v}_{uns} будем называть *источником типа (l;l - 1)*. Структура векторного поля типа (2; 1) изображена на рис. 2 (b).

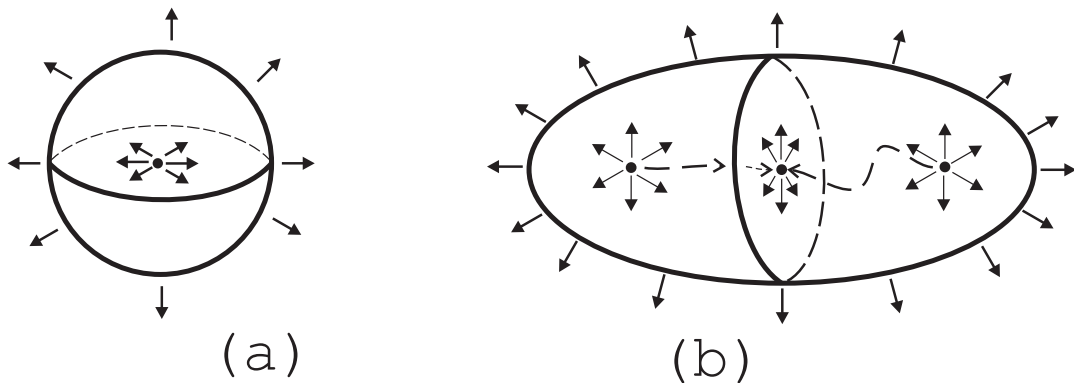


Рис. 2. (а) Векторное поле \vec{v}_{source} ; (b) Векторное поле \vec{v}_{uns} типа (2; 1) в шаре \mathbb{B}^3 .

Положим $\vec{v}_{sink} = -\vec{v}_{source}$, $\vec{v}_{stab} = -\vec{v}_{uns}$. Векторное поле \vec{v}_{sink} направлено внутрь на границе шара $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$ и имеет один сток внутри шара \mathbb{B}^3 . Векторное поле \vec{v}_{stab} направлено внутрь на границе шара $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$, имеет $l \geq 2$ стоков $\omega_1, \dots, \omega_l$ и $l - 1$ седел индекса Морса 1. Такое векторное поле \vec{v}_{uns} будем называть *стоком типа (l;l - 1)*. Не уменьшая общности, можно считать (и мы будем так считать), что рассмотренные выше векторные поля ортогональны границе $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$ и являются единичными на этой границе.

При отождествлении границ двух копий шара \mathbb{B}^3 получается 3-сфера S^3 . Если на одной копии шара задан источник типа (l;l - 1), а на другой копии шара задано

поле \vec{v}_{sink} , то на \mathbb{S}^3 получаем гладкое векторное поле, которое обозначается через $\vec{V}_{uns}(l; l-1)$. По существу из [3] (см. также [10]) вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть на трехмерной сфере \mathbb{S}^3 задано векторное поле Морса-Смейла \vec{V} , неблуждающее множество которого состоит из $l \geq 2$ источников, $l-1$ седел индекса Морса 2 и одного стока. Тогда \vec{V} топологически эквивалентно $\vec{V}_{uns}(l; l-1)$.

Доказательство. Обозначим через f^t поток Морса-Смейла, порожденный векторным полем \vec{V} . Так как число источников превышает на единицу число седел индекса Морса 2, то притягивающее множество $A(f^t)$ представляет собой отрезок, на котором расположены стоки и седла. При этом, седла чередуются с источниками, и на конечных точках отрезка $A(f^t)$ расположены источники. Согласно лемме 1.1 [10], множество $A(f^t)$ имеет шаровую окрестность, которая является источником типа $(l; l-1)$. Вне этой окрестности находится сток. Отсюда следует требуемое утверждение. \square

2. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Пусть $\vec{v}(\mathcal{C})$ – магнитное поле в $B(\mathcal{C})$, порожденное группой зарядов \mathcal{C} , и $\vec{V}(\mathcal{C})$ – продолжение поля $\vec{v}(\mathcal{C})$ на трехмерную сферу \mathbb{S}^3 . Таким образом, поле $\vec{V}(\mathcal{C})$ имеет по сравнению с $\vec{v}(\mathcal{C})$ еще один сток. Нам нужно доказать неравенство $S^- \geq l-1$, где S^- – число отрицательных нулевых точек векторного поля $\vec{V}(\mathcal{C})$. Доказательство этого неравенства будем проводить методом математической индукции по числу $l = N^+$ положительных зарядов (которое равно числу источников поля $\vec{V}(\mathcal{C})$). Напомним, что $\vec{V}(\mathcal{C})$ является векторным полем Морса-Смейла, который индуцирует поток f^t Морса-Смейла на \mathbb{S}^3 .

Сперва покажем, что для любого $l \geq 2$ существует хотя бы одна отрицательная нулевая точка (одновременно доказываем первый шаг индукции для $l=2$). Обозначим через $A = A(f^t)$ объединение всех стоков и неустойчивых (одномерных) сепаратрис всех седел индекса Морса один. Предположим, что доказываемое утверждение неверно. Тогда дополнение к A есть объединение непересекающихся неустойчивых (трехмерных) многообразий $l \geq 2$ источников. Поскольку дополнение к одномерному графу A является связным множеством, то мы получаем противоречие со связностью множества $\mathbb{S}^3 \setminus A$.

Предположим, что утверждение доказано для числа источников $2, \dots, l \geq 2$, и покажем, что оно верно для $l+1 \geq 3$. Из предыдущего следует существование по крайней мере одного седла σ индекса Морса два. Две (одномерные) устойчивые сепаратрисы Sep_1^s, Sep_2^s седла σ принадлежат неустойчивым многообразиям источников α_1, α_2 соответственно. Рассмотрим два случая: 1) $\alpha_1 \neq \alpha_2$; 2) $\alpha_1 = \alpha_2$. В первом случае множество $\alpha_1 \cup Sep_1^s \cup \sigma \cup Sep_2^s \cup \alpha_2 = S$ является отталкивающим множеством. Из $\alpha_1 \neq \alpha_2$ вытекает, что это множество S имеет гомеоморфную 3-шару окрестность, которая выглядит как источник. Тогда исходный поток можно заменить на поток, у которого вместо двух источников α_1, α_2 и седла σ появился

один источник. Для полученного потока выполняется предположение индукции. Поскольку этот поток имеет ровно на единицу меньше источников и седел, то мы получаем требуемую оценку для исходного потока. Из приведенного рассуждения вытекает, что если существует седло индекса Морса два, для которого реализуется случай 1), то неравенство $S^- \geq l - 1$ доказано.

Во втором случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2$, не уменьшая общности, можно считать, что этот случай реализуется для всех седел индекса Морса два. Тогда каждому такому седлу однозначно ставится в соответствие источник, $\sigma \mapsto \alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. Отсюда вытекает более сильное неравенство $S^- \geq l$.

Таким образом, неравенство $S^- \geq l - 1$ доказано для любой группы зарядов, в которой имеется $l \geq 2$ положительных зарядов. Заметим, что если в группе нет отрицательных зарядов, то $N^+ = l$ и $N^- = 0$, и тогда неравенство $S^- \geq l - 1$ вытекает из следствия 4.

Если $S^- = l - 1$, то из (1.1) следует, что $S^+ = 0$, и следовательно, все нулевые точки являются отрицательными нулевыми точками. Поэтому сепараторы в $B(\mathcal{C})$ отсутствуют.

Утверждение о единственности топологической структуры непосредственно следует из предложения 1. \square

Доказательство теоремы 2. Пусть $\vec{v}(\mathcal{C})$ – магнитное поле в $B(\mathcal{C})$, порожденное группой \mathcal{C} , и $\vec{V}(\mathcal{C})$ – продолжение поля $\vec{v}(\mathcal{C})$ на трехмерную сферу \mathbb{S}^3 . По условию $N^+ = l$, $S^- = l$ и $N^- = 0$. Тогда из (1.1) следует, что $S^+ = 1$. Обозначим через σ_0 единственное седло с топологическим индексом минус единица.

Пусть f^t – поток Морса-Смейла, индуцированный векторным полем $\vec{V}(\mathcal{C})$ на трехмерной сфере \mathbb{S}^3 . Рассмотрим связный одномерный граф $R(f^t)$, состоящий из всех одномерных устойчивых многообразий седел и всех источников потока f^t . Напомним, что $R(f^t)$ является отталкивающим множеством потока f^t .

Предложение 2. Граф $R(f^t)$ имеет окрестность $U(R)$ такую, что

- граница $\partial U(R)$ окрестности $U(R)$ трансверсальна потоку f^t , причем траектории потока выходят из $U(R)$ при увеличении времени;
- окрестность $U(R)$ гомеоморфна полноторию (следовательно, граница $\partial U(R)$ гомеоморфна двумерному тору);
- существует седло $\sigma \in U(R)$ (отрицательная нулевая точка), двумерная неустойчивая сепаратриса $W^u(\sigma)$ которого пересекает тор $\partial U(R)$ по замкнутой кривой, гомотопной нулевому меридиану тора $\partial U(R)$.

Доказательство предложения 2. По условию, вершины графа $R(f^t)$ состоят из l седловых и l источниковых точек, причем в каждую седловую точку входят ровно два ребра, а из каждой источниковой точки выходит хотя бы одно ребро. Тогда $R(f^t)$ содержит простой цикл C типа $(2; 3)$, к которому подклеивается некоторое (возможно, нулевое) число сегментов, содержащее в каждом сегменте

равное количество источниковых и седловых точек (которое равно числу ребер в сегменте). Цикл C имеет окрестность, которая гомеоморфна полноторию и из которой траектории выходят при увеличении времени, поскольку C имеет тип $(2; 3)$. Не уменьшая общности, можно считать, что эта окрестность не содержит сток (в противном случае уменьшим окрестность). Каждый из присоединенных сегментов имеет окрестность, гомеоморфную шару, из которой траектории выходят при увеличении времени. Отсюда вытекает существование требуемой окрестности $U(R)$, не содержащей стока. Так как C содержит хотя бы одно седло, то его двумерная неустойчивая сепаратриса должна пересекать $\partial U(R)$ по замкнутой кривой, гомеоморфной меридиану тора $\partial U(R)$. Предложение 2 доказано. \diamond

Заметим, что граф $A(f^t)$, являющийся притягивающим множеством множеством потока f^t , представляет собой простой цикл, состоящий из стока ω_0 , седла σ_0 и двух его одномерных неустойчивых сепаратрис. Следовательно, $A(f^t)$ имеет окрестность $U(A)$ гомеоморфную полноторию и такую, что его граница $\partial U(A)$ трансверсальна потоку f^t , и траектории входят в $U(A)$ при увеличении времени. Для достаточно малой окрестности $U(A)$ двумерная устойчивая сепаратриса седла σ_0 пересекает двумерный тор $\partial U(A)$ по замкнутой простой кривой, гомотопной меридиану тора $\partial U(A)$. Обозначим эту кривую через μ_0 .

Не уменьшая общности, можно считать, что окрестности $U(R)$ и $U(A)$ не пересекаются. Поскольку в их объединении лежат все состояния равновесия потока f^t , то любая положительная полутраектория с начальной точкой на $\partial U(R)$ должна пересечь тор $\partial U(A)$. Отсюда вытекает, что сферу \mathbb{S}^3 можно представить в виде двух полноториев $U(R)$, $U(A)$ после отождествления их границ $\partial U(R)$, $\partial U(A)$. Пусть $\vartheta : \partial U(A) \rightarrow \partial U(R)$ гомеоморфизм такой, что $\mathbb{S}^3 = U(A) \cup_{\vartheta} U(R)$. Известно, что при склейке двух полноториев 3-сфера получается только в том случае, когда меридиан на одном граничном торе отождествляется с параллелью (возможно несколько раз еще прокрученной вдоль меридиана) на другом граничном торе. Следовательно, образ кривой μ_0 относительно ϑ дает замкнутую кривую, которая пересекает любую замкнутую кривую на $\partial U(R)$, гомотопную нулевому меридиану тора $\partial U(R)$. Отсюда вытекает существование хотя бы одного сепаратора. \square

Непосредственно из доказательства предложения 2 вытекает следующее утверждение, которое нам понадобится в дальнейшем.

Предложение 3. Пусть выполняются условия теоремы 2, и пусть f^t – поток Морса-Смейла, индуцированный векторным полем $\vec{V}(C)$ на трехмерной сфере \mathbb{S}^3 , которое является продолжением магнитного поля в $B(C)$. Предположим, что граф $A(f^t)$ суть простая замкнутая кривая. Тогда в $B(C)$ существуют, по крайней мере, l сепараторов.

Доказательство. В обозначениях предложения 2 получаем, что двумерная неустойчивая сепаратриса каждого седла из $\partial U(R)$ пересекает $\partial U(R)$ по замкнутой кривой, гомотопной нулевому меридиану тора $\partial U(R)$. Поскольку $\partial U(R)$ содержит l седел, то существуют, по крайней мере, l сепараторов. \diamond

Доказательство теоремы 3. Для простоты мы построим требуемую бифуркацию для $l = 2$. Из построения будет видно, что такую бифуркацию можно построить с произвольным числом $l \geq 2$ положительных зарядов. Введем две гладкие функции $a(\mu)$, $b(\mu)$, зависящие от параметра $0 \leq \mu \leq 1$ следующим образом:

$$a(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \mu \leq 0.1 \\ \downarrow & \text{при } 0.1 \leq \mu \leq 1 \\ 0 & \text{при } \mu = 1, \end{cases} \quad b(\mu) = \begin{cases} 0.1 & \text{при } \mu = 0 \\ \downarrow & \text{при } 0 \leq \mu \leq 0.1 \\ 0 & \text{при } 0.1 \leq \mu \leq 1 \end{cases}$$

Здесь символ \downarrow означает, что функция монотонно убывает.

Рассмотрим в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , наделенном цилиндрической системой координат $(\varrho; \varphi; z)$, систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varrho} = [\varrho + b(\mu)] [\varrho - 1 + 2a(\mu)\Psi(\varrho; \varphi) + b(\mu)] \tag{2.1}$$

$$\dot{\varphi} = -\sin 2\varphi \tag{2.2}$$

$$\dot{z} = z, \tag{2.3}$$

где

$$\Psi(\varrho; \varphi) = \sin^2\left(\frac{\varphi - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\varphi - \pi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\varphi - \frac{3\pi}{2}}{2}\right).$$

Все состояния равновесия системы лежат в плоскости $z = 0$, которая является репеллером для векторного поля, определяемого данной системой. Поскольку система расщепляется на первые два уравнения (2.1), (2.2) и на третье уравнение (2.3), то достаточно рассмотреть фазовый портрет в плоскости $z = 0$. В этой плоскости состояния равновесия могут быть только на лучах $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$ и $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

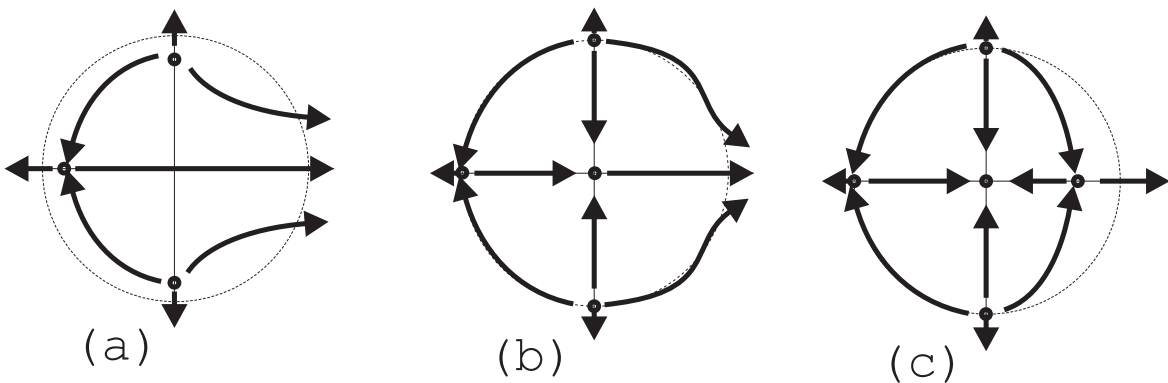


Рис. 3. (a) $0 \leq \mu < 0,1$; (b) $\mu = 0,1$; (c) $0,1 < \mu \leq 1$.

При $0 \leq \mu < 0,1$ функции $a(\mu) = 1$, $0,1 \geq b = b(\mu) > 0$. Поэтому уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot{\varrho} = \begin{cases} (\varrho + b)^2 & \text{при } \varphi = 0 \\ (\varrho + b)(\varrho + b - 1) & \text{при } \varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что имеются три состояния равновесия: $O_2(1 - b; \frac{\pi}{2})$ — источник, $O_3(1 - b; \pi)$ — седло, $O_4(1 - b; \frac{3\pi}{2})$ — источник, рис. 3 (а). Седло $O_3(1 - b; \pi)$ в пространстве имеет индекс Морса два. Поскольку других седел нет, сепараторы отсутствуют.

При $\mu = 0, 1$ функции $a(\mu) = 1$, $b(\mu) = 0$. Тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot{\varrho} = \begin{cases} \varrho^2 & \text{при } \varphi = 0 \\ \varrho(\varrho - 1) & \text{при } \varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \end{cases}$$

К имеющимся уже состояниям равновесия $O_2(1; \frac{\pi}{2})$, $O_3(1; \pi)$, $O_4(1; \frac{3\pi}{2})$ добавляется седло-узел $O_0(0; 0)$ в начале координат, рис. 3 (б).

Наконец, при $0, 1 < \mu \leq 1$ функции $1 > a(\mu) = a \geq 0$, $b(\mu) = 0$. Уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot{\varrho} = \begin{cases} \varrho(\varrho - 1 + a) & \text{при } \varphi = 0 \\ \varrho(\varrho - 1) & \text{при } \varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \end{cases}$$

В плоскости $((\varrho; \varphi)$ седло-узел $O_0(0; 0)$ распадается на сток $O_0(0; 0)$ и седло $O_1(1 - a; 0)$, рис. 3 (с). В результате этой бифуркации появляются два сепаратора. \square

Список цитируемых источников

1. Горбачев В. С., Кельнер С. Р., Сомов В. В., Шварц А. С. Новый топологический подход к вопросу о триггере солнечных вспышек. // Астрон. журнал, 1988, Т. 65, С. 601–612.
Gorbachev V. S., Kel'ner S. R., Somov V. V., Shvarts A. S. (1988). A new topological approach to the question of the trigger for solar flares. Sov. Astron., 32, 308-314.
2. Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Зинина С. Х. Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса-Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы. // Нелинейная динамика, 2014, Т. 10, С. 427–438.
Grines V., Gurevich E., Zhuzhoma E., Zinina S. (2014). Heteroclinic curves of Morse-Smale cascades and separators in magnetic fields of plasma. Rus. J. Nonlin. Dyn., 10, 427-438 (in Russian).
3. Гринес В. З., Медведев В. С., Починка О. В., Жужома Е. В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла. // Труды МИАН, 2010, Т. 271, С. 111–133.
Grines V., Medvedev V., Pochinka O., Zhuzhoma E. (2010). Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms. Proc. Steklov Inst. Math., 271, 103-124.
4. Brown D. S., Priest E. R. The Topological Behaviour of 3D Null Points in the Sun's Corona. // Astron. Astrophys., 2001, v. 367, p. 339.
5. Grines V., Medvedev T., Pochinka O., Zhuzhoma E. On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids. // Physica D: Nonlinear Phenomena, 2015, v. 294, p. 1–5.
6. Longcope D. W. Topological and current ribbons: a model for current, reconnection and flaring in a complex, evolving corona. // Solar. Phys., 1996, v. 169, p. 91–121.

7. *Maclean R., Beveridge C., Longcope D., Brown D., Priest E.* A topological analysis of the magnetic breakout model for an eruptive solar flare. // Proc. Roy. Soc. London A, 2005, v. 461, p. 2099–2121.
8. *Maclean R., Beveridge C., Priest E.* Coronal magnetic topologies in a spherical geometry II. Four balanced flux sources. // Solar Physics, 2006, v.238, p. 13–27.
9. *Oreshina A. V., Oreshina I. V., Somov B. V.* Magnetic-Topology Evolution in NOAA AR 10501 on 2003 November 18. // Astron. Astrophys., 2012, v. 538, p. A138.
10. *Pilyugin S.* Shadowing in dynamical systems. //Lect. Notes Math., 1999, v. 1706, p. 271.
11. *Priest T.* Solar Magnetohydrodynamics. Dordrecht, Reidel Publ. Company, 1985, 592 p.
12. *Priest E., Forbes T.* Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2005, p. 595.
13. *Priest E., Schivjver C.* Aspects of three-dimensional magnetic reconnection. //Solar Physics, 1999, v. 190, p. 1–24.
14. *Smale S.* Differentiable dynamical systems. //Bull. Amer. Math. Soc., 1967, v. 73, p. 741–817.
15. *Somov B. V.* Plasma Astrophysics, Part II: Reconnection and Flares. NY, Springer, 2006, p. 413.

Получена 12.02.2016

УДК 517.9+521.1+531.3

Замкнутые динамические модели¹

В. Н. Тхай

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Москва 117997. E-mail: tkhai@ipu.ru

Аннотация. Вводится понятие замкнутой динамической модели. Показывается, что замкнутая динамическая модель стала развитием модели теории возмущений, модели теории вынужденных колебаний и модели теории управления. Формулируются две основные задачи в динамике замкнутой модели. Результаты по ним излагаются для N -планетной задачи и задачи трех тел.

Ключевые слова: замкнутая модель, связь, малый параметр, периодическое решение, устойчивость, резонанс, N -планетная задача, задача трех тел.

Closed dynamical models

V. N. Tkhai

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow 117997.

Abstract. The concept of closed dynamical model is introduced. It is shown that the concept of closed dynamical model is the development of the concept of perturbation theory model, theory of forced oscillations model and control theory model. Two main problems of the closed model dynamics are stated. For the N -planet problem and the three-body problem new results are obtained.

Keywords: closed model, coupling, small parameter, periodic solution, stability, resonance, N -planet problem, three-body problem.

MSC 2010: 34A34, 37C27, 37C80, 70F10

1. Введение

В классической динамике используются модели, которые не содержат в явном виде время (например, уравнения Лагранжа, уравнения Гамильтона, уравнения в квазикоординатах, задача трех тел, уравнения Эйлера-Пуассона и др.). Действие тел, не включенных в данную систему, учитывается в рамках теории возмущений. При этом действующие возмущения обусловлены различными факторами, как, например: 1) изменением параметров системы, 2) переходом в неинерциальную систему координат, 3) слабым действием тел, не включенных в данную систему. Эти возмущения могут быть контролируруемыми (малое изменение известных параметров, переход на слабо эллиптическую орбиту в задаче трех тел, малые вибрации точки подвеса маятника и т.д.) или неконтролируемыми (параметры известны приближенно, скорость вращения системы координат измерена неточно, конкретный вид возмущений неясен). Возмущения могут сохранять автономность

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. № 16-01-00587

системы или же приводить к системе, близкой к автономной, — квазиавтономной системе. Другая сторона проблемы связана с учетом математического класса, к которому принадлежит модель, и класса действующих возмущений. Например, модель может описываться гамильтоновыми уравнениями, а возмущения могут или сохранять гамильтоновый характер системы, или же квазиавтономная система будет описываться системой ОДУ в виде Коши. Наконец, динамическая модель может быть гладкой или негладкой, так же как и возмущение, которое может быть различного класса, в том числе, иметь разную степень гладкости. С теоретической точки зрения и для приложений возмущения обычно принимаются принадлежащими к тому же классу, что и модель, или рассматриваются из более широкого класса.

В теории возмущений выделяются [10, 12] грубый случай, когда действие возмущений незначительно количественно меняет динамику модели, и негрубый случай, в котором динамика модели меняется качественно. Следовательно, замыкание модели теории возмущений зависит от интересующего динамического свойства модели, а также от класса действующих возмущений [10, 12]. Эти трудности преодолеваются в теории вынужденных колебаний и теории управления.

2. Замкнутая динамическая модель

В динамической модели учитываются существенные факторы. Учет других — неучтенных факторов становится предметом теории возмущений. Действие возмущений может чуть-чуть количественно изменять динамику систему или принести новое качество. Последнее обычно связано с бифуркацией.

Возмущения возникают из-за малого действия на систему других систем. Поэтому, учитывая это действие, приходим к новой — замкнутой динамической модели. Неучтенное действие на систему теперь учитывается связями между системами: получаются взаимосвязанные системы. В силу малости неучтенных факторов связи между системами здесь малы, т.е. получается замкнутая модель слабо связанных систем. Если величина связи между системами не ограничена условием малости, то получаем просто замкнутую динамическую модель. Взаимосвязанными являются, к примеру, сетевые системы.

Связи между системами зависят от фазовых переменных. Однако взаимодействие систем также может вызываться их ускорениями. Поэтому связи могут содержать и производные от фазовых переменных. Таким образом строится, например, теория неголономных механических систем со связями высокого порядка [4, 2].

Замкнутые динамические модели используются в теории вынужденных колебаний. Путем исчерпывающего задания действия другой системы на модель получается замкнутая модель. Такая же ситуация имеет место в теории управления, в которой другая система действует управлением на модель. В теории управления собственная динамика модели обычно частично учитывается. Иногда используется коррекция модели [5]

В исследовании замкнутой динамической модели ставятся две основные задачи: 1) при каких условиях на связи в замкнутой модели сохраняется свойство динамики, имеющейся в подсистемах системы и 2) какие качественные эффекты в замкнутой модели связаны с наличием связи между подсистемами.

В настоящее время в научной литературе наблюдается бум в исследовании взаимосвязанных и сетевых систем [6]. При этом изучаемые модели и постановки задач отличаются большим многообразием. Ниже на двух основных задачах небесной механики показывается, к каким результатам приводят рассмотрение задач с позиций замкнутой динамической модели.

3. N -планетная задача

В N -планетной задаче изучается движение системы из $N + 1$ гравитирующих точек, одна из которых (Солнце) имеет массу, значительно превосходящую массы остальных точек (планет). Значит, здесь при пренебрежении взаимодействием планет между собой получаем N независимых задач двух тел (Солнце-планета), а влияние притяжения других планет на движение данной планеты учитывается малыми связями между этими задачами. В результате имеем замкнутую динамическую модель — слабо связанные системы.

Используем уравнения движения задачи в цилиндрических координатах (см. [1], с.365)

$$\ddot{\rho}_s - \rho_s \dot{\theta}_s^2 = \frac{\partial \Omega_s}{\partial \rho_s}, \quad \frac{d}{dt}(\rho_s^2 \dot{\theta}_s) = \frac{\partial \Omega_s}{\partial \theta_s}, \quad \ddot{z}_s = \frac{\partial \Omega_s}{\partial z_s}, \quad s = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

$$\Omega_s = \frac{f(m_0 + m_s)}{\sqrt{\rho_s^2 + z_s^2}} + \Omega_{s1}, \quad (3.2)$$

$$\Omega_{s1} = f \sum_{j=1(s \neq j)}^N m_j \left[\frac{1}{\Delta_{sj}} - \frac{\rho_s \rho_j \cos(\theta_s - \theta_j) + z_s z_j}{(\rho_s^2 + z_s^2)^{3/2}} \right],$$

$$\Delta_{sj}^2 = \rho_s^2 + \rho_j^2 - 2\rho_s \rho_j \cos(\theta_s - \theta_j) + (z_s - z_j)^2, \quad (3.3)$$

где m_0 — масса Солнца, m_s — массы планет ($m_0 \gg m_s$).

Приведенная система инвариантна относительно замены:

$$\rho \rightarrow \rho, \theta \rightarrow \pm\theta, z \rightarrow z(-z), t \rightarrow -t.$$

Другими словами, N -планетная задача принадлежит к классу механических систем [11].

При $\Omega_{s1} = 0$ ($s = 1, \dots, N$) система (3.1), (3.2) распадается на N задач двух тел. Все эти задачи имеют семейство плоских эллиптических орбит, на которых периоды обращения зависят только от больших полуосей a_s эллипсов: эксцентриситеты e_s отвечают за вытянутость орбиты. Плоские периодические орбиты образуют семейство условно-периодических орбит с N частотами. Среди этих орбит существует семейство резонансных периодических орбит, где $a_s = a_s(h)$, $s = 1, \dots, N$:

h — постоянная интеграла энергии. Эти орбиты образуют плоское порождающее семейство орбит. Поэтому без ограничения общности полагается: $z_s \equiv 0, s = 1, \dots, N$.

Эллиптические орбиты задачи двух тел и порождающие плоские периодические орбиты N -планетной задачи относятся к симметричным периодическим движениям [13]. Установлено, что невырожденное семейство симметричных периодических движений обратимой механической системы устойчиво относительно параметрических возмущений системы [13].

В работе [14] доказывалась невырожденность семейства эллиптических орбит задачи двух тел. Таким же будет порождающее семейство в N -планетной задаче [14]. Безразмерные параметры $m_s/m_0, s = 1, \dots, N$, в исследуемой задаче малы. Следовательно, по указанной выше теореме об устойчивости [13] в N -планетной задаче существуют плоские периодические резонансные орбиты, близкие к орбитам задач двух тел, на которых планеты периодически выстраиваются вдоль одной прямой (парад планет). Парад планет наблюдается на $(N + 1)$ -параметрическом семействе орбит, а период на нем зависит только от одного параметра — постоянной интеграла энергии.

Таким образом, вопрос переноса динамического свойства задачи двух тел (иметь эллиптические орбиты) на замкнутую модель N -планетной задачи получает решение и приводит к выводу о существовании резонансных периодических орбит N -планетной задачи, на которых наблюдается парад планет.

4. Неограниченная (общая) и ограниченная задачи трех тел

4.1. Задача трех тел

Неограниченная задача трех тел — задача о движении механической системы, состоящей из трех материальных точек $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ с массами M_0, M_1, M_2 , взаимно притягивающихся по закону Ньютона, имеет более чем 300-летнюю историю и введена в рассмотрение Ньютоном. По содержанию здесь имеем полностью замкнутую динамическую модель.

Ниже задача трех тел рассматривается для закона взаимодействия, когда сила F_{ij} притяжения точек \mathbf{P}_i и \mathbf{P}_j пропорциональна произвольной степени n ($n \neq -1$) взаимного расстояния r_{ij}

$$F_{ij} = f M_i M_j r_{ij}^n (i, j = 1, 2; i \neq j),$$

где f — некоторая постоянная. Такая постановка задачи восходит к Лапласу [17], Раусу [18] и Ляпунову [3], имеет приложения не только в небесной механике, но и в звездной динамике. Ньютоновскому взаимодействию отвечает значение $n = -2$.

Вместе с неограниченной (общей) задачей трех тел в небесной механике исследуется ограниченная задача трех тел — задача о движении пассивно гравитирующей точки в поле притяжения двух основных тел. Эта задача введена в рассмотрение Эйлером [15] и часто считается основной задачей небесной механики [7]. В задаче пассивно гравитирующая точка не притягивает основные тела:

нарушается закон всемирного тяготения. Модель не замкнута. Модель замыкается, если учесть притяжение основных тел точкой малой массы. В этом случае в задаче трех тел проявляются динамические эффекты, не наблюдаемые в рамках ограниченной задачи трех тел [8].

Ниже будет показано, что неограниченная задача трех тел описывается замкнутой динамической моделью. Эта модель становится слабо связанной, когда масса одной точки мала, а при стремлении указанной массы к нулю в пределе получаем уравнения движения ограниченной задачи трех тел. При этом используются полученные ранее автором результаты [9].

Точки $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ образуют треугольник со сторонами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ и соответствующими им длинами r_1, r_2, r_3 : угол между сторонами обозначим через ψ . Для динамического описания задачи используем независимые переменные r, y, ψ :

$$2r^2 = \mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 + \mu_3 r_3^2, \quad y = \ln \frac{r_2}{r_1},$$

$$m_i = \frac{M_i}{M}, \quad \mu_{i+j} = m_i m_j \quad (i, j = 0, 1, 2; i \neq j), \quad \mu = \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3.$$

Тогда получается такое выражение для функции Рауса [9]

$$R = r^2 + r^2 F_2 + F_1 - \frac{\beta^2}{4r^2} + r^{n+1} F_0 \quad (n \neq -1),$$

где

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{\mu}{S^2} (\dot{y}^2 + \dot{\psi}^2), \\ F_1 &= -\frac{\beta}{S} [\mu_3 (\dot{\psi} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi) - (\mu_2 + \mu_3) \dot{\psi} e^y], \\ F_0 &= -\frac{fM}{n+1} \left(\frac{2}{S} \right)^{(n+1)/2} [\mu_1 e^{-(n+1)y/2} + \mu_2 e^{(n+1)y/2} + \mu_3 (e^y + e^{-y} - 2 \cos \psi)^{(n+1)/2}], \\ S &= \mu_1 e^{-y} + \mu_2 e^y + \mu_3 (e^y + e^{-y} + 2 \cos \psi), \end{aligned}$$

а через β обозначена постоянная интеграла площадей.

4.2. Уравнения движения

Уравнения движения, определяющие изменение конфигурации треугольника, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{\partial F_2}{\partial \dot{\xi}} + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{\xi}} \right) = r^2 \frac{\partial F_2}{\partial \xi} + \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + r^{n+1} \frac{\partial F_0}{\partial \xi},$$

где через ξ обозначены переменные y и ψ . Выберем в качестве новой независимой переменной угол θ , определяемый соотношением

$$2r^2 d\theta/dt = \beta.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\mu}{S^2} \frac{d\psi}{d\theta} - \frac{\mu_3 \cos \psi - (\mu_2 + \mu_3)e^y}{S} \right] &= \frac{\mu}{2} \frac{\partial F_2^*}{\partial \psi} + \frac{\partial F_1^*}{\partial \psi} + \frac{r^{n+3}}{\beta^2} \frac{\partial F_0^*}{\partial \psi}, \\ \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\mu}{S^2} \frac{dy}{d\theta} - \frac{\mu_3 \sin \psi}{S} \right] &= \frac{\mu}{2} \frac{\partial F_2^*}{\partial y} + \frac{\partial F_1^*}{\partial y} + \frac{r^{n+3}}{\beta^2} \frac{\partial F_0^*}{\partial y}, \end{aligned}$$

где теперь

$$\begin{aligned} F_2^* &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right], \\ F_1^* &= -\frac{1}{S} \left[\mu_3 \left(\frac{d\psi}{d\theta} \cos \psi + \frac{dy}{d\theta} \sin \psi \right) - (\mu_2 + \mu_3) e^y \frac{d\psi}{d\theta} \right], \\ F_0^* &= -\frac{fM}{n+1} \left[\mu_1 e^{-(n+1)/2} + \mu_2 e^{(n+1)/2} + \mu_3 (e^y + e^{-y} - 2 \cos \psi)^{(n+1)/2} \right] S^{-(n+1)/2}. \end{aligned}$$

Здесь через r обозначена величина $r\sqrt{2}$.

Далее после вычисления производных и необходимых преобразований получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{S^2} \frac{d\psi}{d\theta} \right) &= -\frac{1}{S^2} \frac{dy}{d\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_2^*}{\partial \psi} + \frac{r^{n+3}}{\mu\beta^2} \frac{\partial F_0^*}{\partial \psi}, \\ \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{S^2} \frac{dy}{d\theta} \right) &= \frac{1}{S^2} \frac{d\psi}{d\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_2^*}{\partial y} - \frac{r^{n+3}}{\mu\beta^2} \frac{\partial F_0^*}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Наконец, добавляя к системе (4.1) уравнение для переменной r

$$\ddot{r} = rF_2 + \frac{\beta^2}{r^3} + (n+1)r^n F_0, \quad (4.2)$$

получим полную систему уравнений, описывающих плоскую неограниченную задачу трех тел.

4.3. Распад замкнутой системы на независимые подсистемы

Вычислим производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0^*}{\partial \psi} &= -fM\mu_3 P^{-(n+3)/2} (Pq^{(n-1)/2} - Q) e^y \sin \psi, \\ \frac{\partial F_0^*}{\partial y} &= -fMP^{-(n+3)/2} [\mu_2 (Pp^{(n-1)/2} - Q) e^y + \mu_3 (Pq^{(n-1)/2} - Q) (e^y - \cos \psi)] e^y, \\ P &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 q, \quad Q = \mu_1 + \mu_2 p^{(n+1)/2} + \mu_3 q^{(n+1)/2}, \quad p = e^{2y}, \quad q = 1 + e^{2y} - e^y \cos \psi. \end{aligned}$$

При $m_2 \rightarrow 0$ имеем $\mu_2/\mu \rightarrow 1/m_1$, $\mu_3/\mu \rightarrow 1/m_0$, и в этом случае система

(4.1),(4.2) распадается на две независимые подсистемы

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(e^{2y} \frac{d\psi}{d\theta} \right) &= -2e^{2y} \frac{dy}{d\theta} - \\ &- \frac{fMr_1^{n+3}}{\beta_*^2} m_1 [(1 + e^{2y} - 2e^y \cos \psi)^{(n-1)/2} - 1] (e^y - \cos \psi) e^y, \\ \frac{d}{d\theta} \left(e^{2y} \frac{dy}{d\theta} \right) &= 2e^{2y} \frac{d\psi}{d\theta} + e^{2y} \left[\left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right] - \frac{fMr_1^{n+3}}{\beta_*^2} \times \\ &\times \{ m_0 (e^{ny} - e^y) e^y + m_1 [(1 + e^{2y} - 2e^y \cos \psi)^{(n-1)/2} - 1] (e^y - \cos \psi) e^y \}, \\ \beta_* &= \beta/\mu, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\ddot{r}_1 = \frac{\beta_*^2}{r^2} - fMr_1^n. \quad (4.4)$$

В этом варианте задачи тело \mathbf{P}_2 нулевой массы не оказывает влияние на движение тел \mathbf{P}_0 и \mathbf{P}_1 конечной массы. Следовательно, в пределе $m_2 \rightarrow 0$ из уравнений (4.1),(4.2) неограниченной задачи трех тел выводятся уравнения (4.3), (4.4) ограниченной задачи трех тел. В этой задаче изменение конфигурации треугольника и его размера происходит независимо друг от друга. При этом уравнение (4.4), описывающее изменение размера треугольника, интегрируется для всемирного закона притяжения.

Математически системы (4.3), (4.4) независимы друг от друга, поэтому каждая из этих систем – замкнута. С другой стороны, в модели ограниченной задачи трех тел не выполняется третий закон Ньютона. Поэтому отдельно модели (4.3) и (4.4), не учитывающие действие всех факторов, являются не замкнутыми.

4.4. Об одном динамическом свойстве замкнутой модели

Уравнения (4.1), (4.2) допускают частные решения, в которых точки $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ все время образуют равносторонний треугольник. Эти решения называются треугольными точками либрации или лагранжевыми (лапласовыми) решениями. Для ньютоновского закона притяжения существование точек либрации установил Лагранж [16], результат обобщен Лапласом [17] на случай произвольного действительного n .

В окрестности треугольных точек либрации уравнения (4.1) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} &= u \left[\frac{3}{4}(m_1 + m_2)x + \frac{\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2)y \right] + \dots, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} &= u \left[\frac{\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2)x + \left(1 - \frac{3}{4}(m_1 + m_2)y \right) \right] + \dots, \\ x = \psi - \pi/3, \quad u &= fM(1 - n)\rho^{n+3}/\beta_*^2, \quad \beta_* = \beta/\nu, \quad \nu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \end{aligned} \quad (4.5)$$

а зависимость ρ от θ задаются уравнением

$$\ddot{\rho} = \beta_*^2 \rho^{-3} - fM\rho^n, \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \beta_*, \quad r = \sqrt{\nu}\rho. \quad (4.6)$$

Рассмотрим постоянные решения, для которых

$$fM\rho^{n+1} = \beta_*^2, \quad u = 1 - n. \quad (4.7)$$

Для системы (4.5) вычислим корни характеристического уравнения

$$\kappa_{1,2}^2 = \frac{-(n+3) \pm \sqrt{(n+3)^2 - 3(n-1)^2\nu}}{2}.$$

Отсюда получаем необходимые условия Рауса-Жуковского

$$\nu < \frac{1}{3} \left(\frac{3+n}{1-n} \right)^2$$

гироскопической стабилизации постоянных треугольных решений.

В случае $n = -2$ имеем: $\nu < 1/27$. В этот интервал входит значение $\nu = 1/36$, для которого имеем корни

$$\kappa_1^2 = -\frac{1}{4}, \quad \kappa_2^2 = -\frac{3}{4}$$

и соответствующие частоты малых колебаний

$$\omega_1 = 1/2, \quad \omega_2 = \sqrt{3/4}.$$

Частота малых колебаний по ρ в окрестности постоянного решения (4.7) равна: $\omega_0 = \sqrt{n+3}$. Для ньютоновского закона притяжения получаем $\omega_0 = 1$.

Таким образом, в задаче об устойчивости постоянных треугольных точек либрации при ньютоновском законе притяжения возникает резонанс третьего порядка: $\omega_0 = 2\omega_1$. В ограниченной задаче трех тел, которая описывается двумя независимыми системами (4.3) и (4.4), этот резонанс не сказывается в независимых моделях (4.3) и (4.4). Если же рассматривать замкнутую систему (4.1), (4.2) с ненулевым значением параметра m_2 , тогда резонанс $\omega_0 = 2\omega_1$ приводит [8] к взрывной неустойчивости.

Таким образом, замкнутая модель, описывающая классическую задачу трех тел, обладает новым динамическим свойством — взрывной неустойчивостью, обусловленной одновременным изменением конфигурации треугольника и его размера.

5. Заключение

Понятие замкнутой динамической модели является развитием понятия модели теории возмущений, модели теории вынужденных колебаний и модели теории управления. Из этого понятия естественным образом вытекают сформулированные в настоящей статье две основные задачи динамики для замкнутой модели. Модели возникли в классической небесной механике, в которой введенное понятие замкнутой динамической модели также приводит к новым результатам.

Список цитируемых источников

1. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. — М.: Наука, 1968. — 800 с.
Duboshin, G.N. (1968). Celestial mechanics. The main tasks and methods (in Russian). Moscow: Nauka.
2. *Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. — СПб: Изд-во С.Петербург. ун-та. 2002. — 276 с.
Zegzhda S.A., Soltakhanov Sh.Kh., Yushkov M.P. (2002) Equations of motion of nonholonomic systems and variational principles of mechanics (in Russian), St-Peterburg: Izdatelstvo SPB universiteta.
3. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1954. — Т.1. — С.327–401.
Lyapunov A.M. (1954). On stability of movement in one case of the 3-body problem (in Russian). In Collected Works, vol. 1, Moscow: Izd. Akad. Nauk SSSR, 327-401.
4. *Поляков Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Теоретическая механика. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — 535 с.
Polyakov N.N., Zegzhda S.A., Yushkov M.P. (1985) Theoretical mechanics (in Russian), Leningrad: Izdatelstvo Leningradskogo universiteta.
5. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. — 1934. — Т. 4, вып.9. — С. 883–885.
Pontryagin L.S. (1934) On dynamical systems close to Hamiltonian (in Russian), Zhurnal Eksperim. i teoret. phiziki, 4, No.9, 883-885.
6. *Проблемы сетевого управления /* под ред. Фрадкова А.Л. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. — 392 с.
Fradkov, A.L. (2015) (Ed.), Problems of network control (in Russian). Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science.
7. *Себекей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. — 656 с.
Szebehely V. (1967) Theory of orbits. The restricted problem of three bodies. New York and London: Academic Press.
8. *Тхай В.Н.* Об устойчивости постоянных лапласовых решений неограниченной задачи трех тел // Прикладная математика и механика. —1978. — Т.42, вып.6. — С. 1026–1032.
Tkhai, V.N. (1980). On stability of constant Laplace solutions of the unrestricted three-body problem. J. Appl. Math. Mech. 42, 1123-1130.
9. *Тхай В.Н.* Исследование неограниченной задачи трех тел // Прикладная математика и механика. —1996. —Т. 60, вып.3. — С. 355–374.
Tkhai, V.N. (1996) A study of the plane unrestricted three-body problem. J. Appl. Math. Mech. 60, No. 3, 349-367.
10. *Тхай В.Н.* О методе Ляпунова-Пуанкаре в теории периодических движений // Прикладная математика и механика. — 1998. — Т.62, вып.3. — С. 355–371.

- Thai, V.N. (1998). On Lyapunov-Poincare method in the theory of periodic motions. J. Appl. Math. Mech. 62, No. 3, 325-339.
11. *Тхай В.Н.* Обратимые механические системы // Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. — С. 131–146.
- Tkhai, V. N. (2001). Reversible Mechanical Systems (in Russian). In Non-linear mechanics, Moscow: Fizmatlit, 131-146.
12. *Тхай В.Н.* О грубых по периодическому движению моделях // Автоматика и телемеханика. — 2009. — №9. — С. 162–167.
- Tkhai, V.N. (2009). On models structurally stable in periodic motion. Autom. Remote Control 70, No. 9, 1584-1589.
13. *Тхай В.Н.* О поведении периода симметричных периодических движений // Прикладная математика и механика. — 2012. — Т.76, вып.4. — С. 616–622.
- Tkhai, V.N. (2012). The behaviour of the period of symmetrical periodic motions. J. Appl. Math. Mech. 76, No. 4, 446-450.
14. *Тхай В.Н.* Механическая система, содержащая слабо связанные подсистемы // Прикладная математика и механика. — 2013. — Т.77, вып.6. — С. 822–831.
- Tkhai, V.N. (2013). A mechanical system containing weakly coupled subsystems. J. Appl. Math. Mech. 77, No. 6, 822-831.
15. *Eulero L.* Considerations de matu corporum coelestrium // Novi Comm. Acad. Sci. Petrop. — 1766. — Т.10. — 544 p.
16. *Lagrange J.L.* Eassais sur le problèm des trois corps // Qeuress. — 1772. — Т.6. — P. 233–240.
17. *Laplace P.* Exposition du systèm du monde. Paris: Bacehlier, 1834. — 418 p.
18. *Routh E.J.* On the Laplace's three particles, with a supplement on the stability of steady moution // Proc. London Math. Soc. — 1875. — V.6. — P. 86–97.

Получена 02.03.2016

MSC 2010: 34C05, 92D25

Extinction and coexistence of predators

A. V. Osipov*, G. J. Söderbacka**

*Saint Petersburg University,

Staryi Peterhof 198504, RUSSIA. *E-mail:* av_osipov@mail.ru

** Åbo Akademi, Åbo,

Turku 20500, FINLAND. *E-mail:* gsoderba@abo.fi

Abstracts. We study conditions for extinction and coexistence of predators in a general family of systems with many predators feeding on the same prey. We call the system degenerated in the case some predators go extinct and the essential dynamics occurs in a lower dimensional subspace.

Keywords: predator, prey, extinction, dissipativity, periodic solution.

1. Introduction

We consider the $(n + 1)$ -dimensional system

$$\dot{x}_i = \phi_i(s)x_i, \quad \dot{s} = h(s) - \sum_{i=1}^n \psi_i(s)x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

A_1 : All the considered functions are of the class $C^2[0, \infty)$ and the variables x_i and s are non-negative: $x_i \geq 0$, $s \geq 0$.

A_2 : $\psi_i(0) = 0$, $\psi'_i(s) > 0$ for $s > 0$.

Here and further we will suppose that i takes values from the set $\{1, 2, \dots, n\}$.

A_3 : $\phi'_i(s) > 0$ for $s > 0$ and there exists $\lambda_i > 0$ such that $\phi_i(\lambda_i) = 0$.

A_4 : $h(0) = h(1) = 0$, $h'(1) < 0$ and $h''(s) < 0$ for $s > 0$.

A_5 : $0 < \lambda_n < \dots < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$.

These and analogous systems for different assumptions on the right hand sides have been considered by many authors [1]-[5] of both mathematical and application view point. We note that our reference list cannot be full. It should be too large.

Analogous systems are considered from another point of view in [6, 7]. However the questions of dissipativity and existing of inner set are on the first place here also.

Systems with the following special choice of functions

$$h(s) = \gamma s(K - s), \quad \psi_i(s) = \alpha_i \frac{s}{s + a_i}, \quad \phi_i(s) = m_i \psi_i(s) - d_i, \quad (1.2)$$

where all introduced parameters are positive, have been examined more extensively.

It is important to say, that this special choice of model is interesting from the mathematical point of view even in the three dimensional case. For instance, in [8, 9] the questions, connected with the problem of the limit cycle uniqueness in the coordinate planes are considered. This problem is connected with the stability of the planes and, consequently, with the problem of the inner set existing.

Such systems can have chaotic regimes. They were studied in detail in [11, 12]. Particularly bifurcation diagrams with a chain of period doubling bifurcations for system (1.1) with (1.2) were given. The functions

$$h(s) = s(1 - s), \quad \phi_i(s) = \frac{s - \lambda_i}{s + a_i}, \quad \psi_i(s) = \frac{s}{s + a_i} \quad (1.3)$$

were chosen as an example. In this paper system 1.1 with these functions will be called *standard system*. We consider a broad class of systems of type (1.1), including right hand sides of type (1.2) and standard system as main example.

The conditions assumed for the system are divided into two groups. In the first group we have assumptions of general type (A_1 - A_5). In the other group we have assumptions of technical type arising in the formulation of statements (D_6 - D_7 and A_6 - A_7). It is easy to verify that all standard systems are included.

It follows from A_1 - A_5 that the system has $n + 1$ equilibria:

$O(0, \dots, 0, 0)$ which is a saddle with n -dimensional stable manifold $s = 0$ and one dimensional unstable manifold: $x_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), $0 < s < 1$.

$O'(0, \dots, 0, 1)$ which is a saddle with one dimensional stable manifold $x_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) and n -dimensional unstable manifold, which we will denote by $W^u(O')$.

One point in each hyperplane: $O_i: s = \lambda_i, x_j = 0, j \neq i, x_i = \frac{h(\lambda_i)}{\psi_i(\lambda_i)}$.

The Jacobian matrix has the form

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_1' x_1 \\ 0 & \phi_2 & \dots & \phi_2' x_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -\psi_1 & -\psi_2 & \dots & h' - \sum_{i=1}^n \psi_i' x_i \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

2. Dissipativity

A compact set in a phase space is called a *Levinson set*, if it is positively invariant and has a base of globally absorbing neighbourhoods.

A typical problem is to construct a good Levinson set. Below we give one result in this direction. Let $T(O')$ be the tangent plane to the unstable manifold $W^u(O')$ in the point O' . We introduce also a couple of technical conditions:

D_1 : If $s < 1$, then $h(s)\psi_1(1) \geq -h'(s)(1 - s)\psi_1(s)$.

D_2 : If $s < 1$, then $\phi_i(s)\psi_i(1) - \phi_i(1)\psi_i(s) < 0$.

Let us note that the conditions D_1, D_2 are satisfied for standard system (1.3).

Now let V_0 is the simplex determined by the vertices $O, O', \bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n$, where

$$\bar{q}_i = (0, \dots, q_i, \dots), \quad q_i = \frac{\phi_i(1) - h'(1)}{\psi_i(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

Theorem 1. *Let us consider system (1.1) satisfying conditions A_1 - A_5 and D_1 - D_2 .*

The trajectories intersect the tangent plane $T(O')$ transversally, except at O' . Moreover at any point, except at O' , the trajectories intersect this plane in the direction inside a simplex V_0 , which is a Levinson set.

Proof. The Jacobian matrix at the point O' has the form

$$\begin{pmatrix} \phi_1(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_2(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\psi_1(1) & -\psi_2(1) & \dots & h'(1) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

where all the numbers on the diagonal are positive except $h'(1)$. The tangent plane is defined by the equation

$$\frac{x_1}{q_1} + \frac{x_2}{q_2} + \dots + \frac{x_n}{q_n} + s = 1, \quad (2.3)$$

where q_i are defined by (2.1), so that the vector orthogonal to this plane and directed outside the simplex can be written as

$$\left(\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \dots, \frac{1}{q_n}, 1 \right). \quad (2.4)$$

At any point of this plane the scalar product (let us denote it by A) of this vector with the vector of the system (1.1) is given by

$$\begin{aligned} A &= \left\langle \left(\frac{1}{q_1}, \dots, \frac{1}{q_n}, 1 \right), \left(\phi_1(s)x_1, \dots, \phi_n(s)x_n, h(s) - \sum_{i=1}^n \psi_i(s)x_i \right) \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i(s)}{q_i} x_i + h(s) - \sum_{i=1}^n \psi_i(s)x_i. \end{aligned}$$

Consider now the family of the parallel planes

$$\frac{x_1}{q_1} + \frac{x_2}{q_2} + \dots + \frac{x_n}{q_n} + s = V, \quad (2.5)$$

where $V \geq 1$. It can be checked directly, that if $s = 1$ then $A < 0$ except at O' , where $A = 0$. In other points we get

$$A = h(s) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\phi_i(s)}{q_i} - \psi_i(s) \right] x_i =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h(s)}{1-s}(1-V) + \frac{h(s)}{1-s}(V-s) + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{q_i} [\phi_i(s) - q_i\psi_i(s)] = \\
&= \frac{h(s)}{1-s}(1-V) + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{q_i} \left[\frac{h(s)}{1-s} + \phi_i(s) - q_i\psi_i(s) \right] < \\
&< \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{q_i} \left[-\frac{h'(1)\psi_i(s)}{\psi_i(1)} - q_i\psi_i(s) + \phi_i(s) \right] =
\end{aligned}$$

– we use D_1 here –

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{q_i} \left[-\frac{\psi_i(s)}{\psi_i(1)} (-\phi_i(1) + h'(1) - h'(1)) + \phi_i(s) \right] = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{q_i} \left[-\frac{\phi_i(s)\psi_i(1) - \phi_i(1)\psi_i(s)}{\psi_i(1)} \right].
\end{aligned}$$

By assumption D_2 the proof is complete. \square

An example. Now, as in [2] we consider the system

$$\dot{x} = (m\phi(s) - d)x, \quad \dot{s} = h(s) - \psi(s)x, \quad (2.6)$$

with

$$h(s) = s(1-s), \quad \psi(s) = \frac{s}{s+a}, \quad m = 1, \quad a = 0.5, \quad d = 0.25.$$

Hence,

$$h'(1) = -1, \quad \phi(1) = 7/12, \quad \psi(1) = 2/3 \quad \Rightarrow \quad q = 19/8.$$

Therefore the Levinson simplex in this case is defined by the straight line $s = 1 - 8x/19$. The estimate in [2] gives the region bounded by lines $s = 1$, $x + s = 5$.

3. Degeneracy

Definition 1. An invariant set of system 1.1 will be called an *inner set* if its closure does not intersect with the boundary of R_{n+1}^+ . If a system does not have inner sets it will be called *degenerated*.

Definition 2. The vector function $F = F(s) = (F_1, \dots, F_n)$ is called *linearly determined on the interval* $I = [a, b]$, or the function collection F_1, \dots, F_n is called *linearly determined on I* , if there exists a vector $k = (k_1, \dots, k_n)$ such that $\langle k, F(s) \rangle \leq 0$ for all $s \in I$ and the inequality does not degenerate to equality on any subinterval $I_1 \subset I$. A collection F_1, \dots, F_n which is not linearly determined will be called *linearly connected*.

Further we will consider only functions defined on the interval $I = [0, 1]$.

Theorem 2. *If the function $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ is linearly determined on I , then system (1.1) is degenerated.*

Proof. We suppose the opposite, that is, that there exists a trajectory $(\xi, \zeta) = (\xi_1, \dots, \xi_n, \zeta)$, with closure wholly included in $V = \text{int}R_{n+1}^+$.

We consider the function $L(x, s) = \ln(x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n})$ on V , where $k = (k_1, \dots, k_n)$ is the vector making ϕ determined. The derivative of L along the trajectory (ξ, ζ) equals $\dot{L} = \langle k, \phi(\zeta(t)) \rangle \leq 0$ and, consequently, L is a Lyapunov function. The limit set of the trajectory (ξ, ζ) is contained in the set $W = \{(x, s) | \dot{L} = 0\}$. (This can be proved by standard methods. See for instance [10].)

But any connected component of W is contained in one hyperplane $s = \text{const} > 0$, which cannot contain whole trajectories except singular points. Because V does not contain any equilibrium the theorem is proved. \square

We will now look at conditions for linear connectedness.

Statement 1. *In the case $n = 1$, the function ϕ is linearly connected if and only if system (1.1) is degenerated.*

Statement 2. *Suppose $n > 1$. If there exists a linearly determined subcollection $\phi_{j_1}, \dots, \phi_{j_k}$, $k < n$ for the collection $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, then the collection ϕ is linearly determined.*

Thus we can assumed that the functions are numbered according to condition A_5 . Remark also that $\phi_i(0) < 0$, $\phi_i(1) > 0$.

In connection to ϕ we consider the functions

$$f = (f_1, \dots, f_n), \quad g = (g_1, \dots, g_n), \quad f_i(s) = \frac{\phi_i(s)}{\phi_i(0)}, \quad g_i(s) = \frac{\phi_i(s)}{\phi_i(1)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definition 3. We will say that *scalar the functions $p = p(s)$ and $q = q(s)$ intersect at some point of the interval I* , if in any neighbourhood of this point there exist s_1 and s_2 , such that $p(s_1) - q(s_1) < 0$ and $p(s_2) - q(s_2) > 0$.

We will say that *the functions p and q intersect on the interval I* , if either there exists a point, where they intersect, or a subinterval $I_1 \subset I$, where they are linearly dependent.

Statement 3. *If the collection $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ is linearly connected, then any functions of the collections ϕ, f and g intersect pairwise.*

Proof. We assume the opposite. For example, that the functions f_1 and f_2 do not intersect. This means that $f_1(s) - f_2(s) \neq 0$ on I . If $f_1(s) - f_2(s) \leq 0$ then

$$k_1\phi_1(s) + k_2\phi_2(s) \geq 0, \quad \forall s \in I, \quad \text{where} \quad k_1 = -\frac{1}{\phi_1(0)}, \quad k_2 = \frac{1}{\phi_2(0)}$$

and the inequality does not degenerate to equality on any interval.

Choosing $k_i = 0$ for $i > 2$, when $n > 2$, we get $\langle k, \phi(s) \rangle \geq 0$, which is a contradiction. Statement is proved. \square

In order to get explicit conditions for the linear connectedness of ϕ , we introduce more assumptions.

A_6 : The equation $k_i\phi_i = k_j\phi_j$ does not have more than two solutions on I for any indices i, j , $i \neq j$, and any constants k_i and k_j , such that at least one of them is non-zero.

A_7 : The equation $c_i\phi_i + c_j\phi_j + c_k\phi_k = 0$ does not have more than three solutions on the interval I for any indices i, j, k and for any constants c_i, c_j, c_k , such that at least one of them is non-zero.

It is easily verified that the standard functions $\phi_i = \frac{s - \lambda_i}{s + a_i}$ satisfy these conditions. We also notice that if all numbers a_i are different, then the collection of functions of type (1.3) are not linearly dependent on any subinterval.

We introduce the notations $\alpha_i = g_i(0)$, $\beta_i = f_i(1) = \alpha_i^{-1}$.

Theorem 3. *We assume that the functions ϕ satisfy the conditions $A_1 - A_6$.*

If ϕ is linearly connected on I , then

- 1) $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n, \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$.

- 2) *The functions f_i , $i = 1, \dots, n$, intersect pairwise exactly one time on $(0, 1)$, and if θ_{ij} is the intersection point of f_i and f_j ($i < j$), then $\theta_{ij} \in (\lambda_i, 1)$.*

Analogously, the functions g_i , $i = 1, \dots, n$, intersect pairwise exactly one time on $(0, 1)$, and if τ_{ij} is the intersection point of the functions g_i and g_j ($i < j$), then $\tau_{ij} \in (0, \lambda_j)$.

- 3) *If $n > 2$, and the function ϕ satisfy condition A_7 and θ_{ik} and θ_{jk} are the intersection points of f_i and f_j with f_k and $i < j < k$, then $\theta_{ik} > \theta_{jk}$.*

Analogously, if τ_{ik} and τ_{jk} are intersection points of g_i , g_j with g_k , and $i < j < k$, then $\tau_{ik} > \tau_{jk}$.

Proof. Statement 2) follows from the pairwise linearly connectedness of the functions ϕ_i and ϕ_j . We show this for the functions f_1 and f_2 . Clearly these functions must have an intersection and according to A_6 only one. We suppose the intersection is not in $I_1 = (\lambda_1, 1)$. Then $f_2 < f_1$ in I_1 .

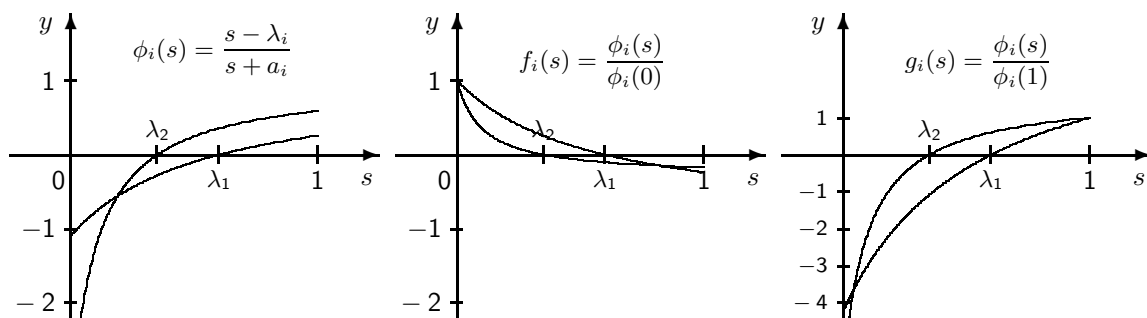


Рис. 1. $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0.35$, $a_1 = 0.55$, $a_2 = 0.1$

We consider the minimal $k > 0$ such, that $kf_2(s) \leq f_1(s)$ for all $s \in I_1$. Evidently

$k < 1$. From A_6 and $kf_2(0) < f_1(0)$ and $kf_2(\lambda_2) < f_1(\lambda_2)$ follows that the same inequality is satisfied in $s \in [0, \lambda_2]$.

The inequality is automatically satisfied in the segment $[\lambda_2, \lambda_1]$. We obtain that $kf_2(s) \leq f_1(s)$ everywhere in I , which contradicts the linear connectedness of ϕ . Analogously, 2) is proved for any pair from collection g . Further:

$$\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow f_1(\lambda_1) > f_2(\lambda_1) \Rightarrow f_1(1) < f_2(1) \Rightarrow \beta_1 < \beta_2.$$

We get similar inequalities for the functions g_1, g_2 from which follows $\alpha_1 > \alpha_2$. Thus 1) is proved.

We now prove 3) for any three functions from collection f . For example, for f_1, f_2, f_3 . We assume the opposite, that is, $\theta_{13} < \theta_{23}$. We define $c^0 = f_2(\lambda_3)/f_1(\lambda_3)$. Clearly, $0 < c^0 < 1$. We consider the function $l_c(s) = f_2(s) - cf_1(s) - (1 - c)f_3(s)$. It is clear, that $l_c(0) = 0$ and $l_c(\theta_{13}) < 0$ for any $c \in [0, 1]$. Moreover, $l_{c^0}(\lambda_3) = 0$.

We consider the intervals on which $l_{c^0}(s) > 0$ (if such do not exist, proof is finished). According to A_7 the function $l_{c^0}(s)$ does not have more than three zeros and thus there are no more than three of such intervals, and if they are two, then their closure contains λ_3 .

In this case there exists a $c < c^0$ such that again there are two of these intervals, but $l_c(\lambda_3) < 0$, and thus their closure does not contain λ_3 .

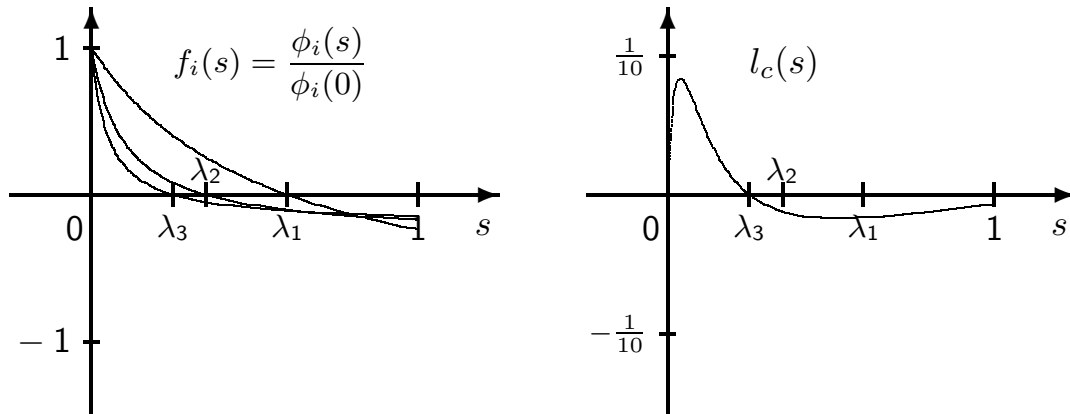


Рис. 2. $\lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = 0.35, \lambda_3 = 0.25, a_1 = 0.55, a_2 = 0.1, a_3 = 0.05$

Consequently l_c does not have less than four zeros, which contradicts assumption. It remains to consider the case, when there are only one interval of positiveness. We note that this should be satisfied for all $c \in [0, c^0]$. Moreover the interval of positiveness intersect for nearby values of parameters. Consequently the interval should be on the left for $c = 0$, because the interval is to left of θ_{13} for $c = c^0$.

On the other side, the inequality $l_0(1) > 0$ is satisfied and we get a contradiction proving 3). Theorem is proved. \square

We now consider sufficient conditions.

Theorem 4. *Suppose function ϕ satisfies conditions $A_1 - A_5$. Then*

in the case when $n = 2$, one of the conditions $\beta_1 > \beta_2$ or $\alpha_1 > \alpha_2$ is sufficient for linear connectedness;

for the case $n = 3$, one of conditions $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$, $\theta_{13} > \theta_{23}$ or $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$, $\tau_{13} < \tau_{23}$ is sufficient for linear connectedness.

Proof. Let $n = 2$ and $\beta_1 > \beta_2$. We suppose that the function f is linearly determined, that is that $k_1 f_1(s) + k_2 f_2(s) \leq 0$ for some vector k , $|k| \neq 0$. Substituting $s = 0, \lambda_2, \lambda_1, 1$, we get a contradiction with the inequality for k , which proves this part of the theorem.

Let $n = 3$ and $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$. We assume that the function f is linearly determined, that is that $k_1 f_1(s) + k_2 f_2(s) + k_3 f_3(s) \leq 0$ for some vector k , $|k| \neq 0$. Substituting $s = 0$, we get $k_1 + k_2 + k_3 \geq 0$. Substituting $s = \theta_{23}$, we get $k_1 \mu + k_2 + k_3 \leq 0$, where $\mu = f_1(\theta_{23})/f_2(\theta_{23}) < 1$, from which follows $k_1 > 0$.

Analogously, substituting θ_{12} , we get $k_3 > 0$ and, automatically, $k_2 < 0$.

On the other side, for $s = \theta_{13}$ we get $(k_1 + k_3)f_1(\theta_{13}) + k_2 f_2(\theta_{13}) \leq 0$. But then $0 < f_1(\theta_{13}) < f_2(\theta_{13})$, leads to a contradiction proving the theorem. \square

4. Standard three dimensional system (n=2)

We use here some ideas and methods of [12], where sufficient conditions for degeneracy of the standard system were obtained.

Explicit formulas for degeneracy in the standard system were obtained in [?]-[12] for $n = 2$ and moreover theorem 2 was proved for this system. Concretely it was shown that, when $\lambda_2 < \lambda_1$, if one of the following conditions

- 1) $a_1 < a_2$,
- 2) $a_1 \lambda_2 - a_2 \lambda_1 \leq 0$,
- 3) $a_1 a_2 (\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 (a_1 - a_2) \geq a_1 \lambda_2 - a_2 \lambda_1$,

is satisfied then one of the coordinate plane is globally attracting in $\text{int}R_3^+$.

We introduce the notations

$$\gamma = \frac{\lambda_2 a_1}{\lambda_1 a_2}, \quad \alpha = \frac{1 - \lambda_2}{1 + a_2} \cdot \frac{1 + a_1}{1 - \lambda_1}.$$

In case $\lambda_1 > \lambda_2$ it follows directly from theorems 3-4 that the function

$$\phi(s) = (\phi_1(s), \phi(s)) = \left(\frac{s - \lambda_1}{s + a_1}, \frac{s - \lambda_2}{s + a_2} \right)$$

is linearly connected if $\gamma > \alpha$.

We show that then $\alpha > 1$. We first prove that $a_1 > a_2$. Indeed, let $a_1 \leq a_2$. Then

$$\frac{\lambda_2}{1 - \lambda_2} \cdot \frac{a_1}{1 + a_1} \leq \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1} \cdot \frac{a_2}{1 + a_2} \Leftrightarrow \frac{\lambda_2 a_1}{\lambda_1 a_2} \leq \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1} \cdot \frac{1 + a_1}{1 + a_2}.$$

We got a contradiction.

Further:

$$\lambda_1 > \lambda_2, \quad a_1 > a_2 \Rightarrow \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1} > 1 \ \& \ \frac{1 + a_1}{1 + a_2} > 1 \Rightarrow \alpha > 1.$$

Thus the condition $\lambda_1 > \lambda_2$ is equivalent to $\gamma > \alpha > 1$ in the case of linear connectedness.

Simple transforms show that the complement to these inequalities coincides with the set of parameters given by 1) – 3).

5. Conclusion

We have obtained conditions for dissipativity and degeneracy (meaning extinction of some predators) for a general family of predator-prey systems with many predators and one prey. Considering degeneracy we have only used the properties of the equations of the predators. Using the equation for the prey will give better results. Finally we include figure 3 for the standard three dimensional system showing results of numerical experiments for the regions of degeneracy of one predators and for existence of inner solutions. In region 1 predator x_2 goes extinct and x_1 in region 4. An inner solution exists in regions 2 and 3 and on the boundary between them there is a period doubling bifurcation. The regions are shown in the parameter plane of parameters λ_1 and λ_2 keeping a_1 and a_2 fixed.

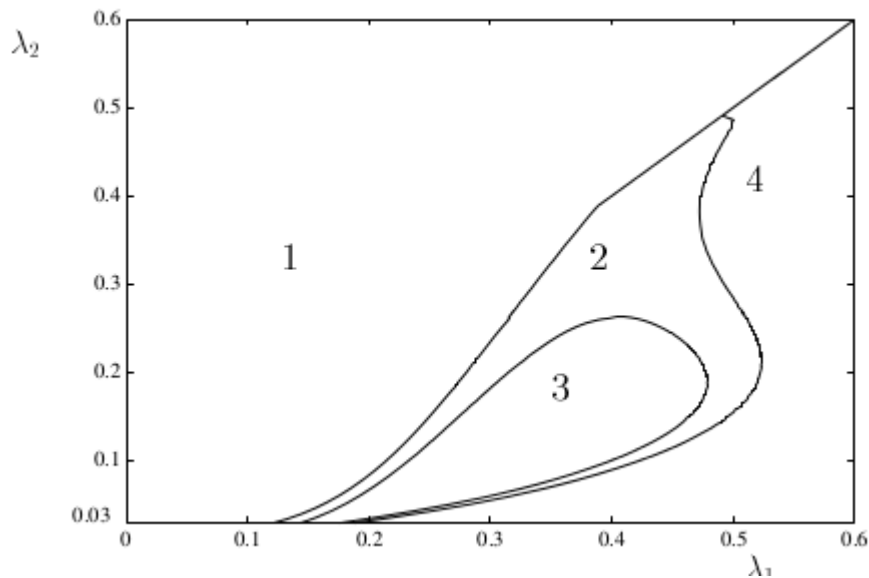


Рис. 3. Regions of extinction and coexistence for $a_1 = 0.2, a_2 = 0.02$

We observe that condition 1) in previous section implies condition 2) which implies condition 3) and condition 3) implies $x_1 \rightarrow 0$. Condition 3) in the figure gives a subregion of region 4. We also observe that changing the order of variables we get

analogous conditions in the case when $\lambda_1 < \lambda_2$ and then corresponding condition 1) gives $x_2 \rightarrow 0$ for $a_1 > a_2$. This corresponds to a subregion of region 1.

References

1. *Hofbauer J., Sigmund K.* The theory of evolution and dynamical systems. Cambridge - New York: Cambridge Univ. Press, 1988.
2. *Pospišil Z.* Remark on the Dissipativity of an N Prey – One Predator System. *Math. Biosci.*, 1996, 31, 173-183.
3. *Yang F., Ruan S.* A generalization of the Butler-McGehee lemma and its applications in persistence theory. *Differential and Integral Equations.* – 1996 – 9, 6, 1321-1330.
4. *Smith H.L., Waltman P.* The theory of the chemostat: dynamics of microbial competition. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
5. *Alebraheem Jawdat, Abu-Hasan Yahya.* Persistence of Predators in a Two Predators-One Prey Model with Non-Periodic Solution. *Applied Mathematical Sciences.* – 2012. – Vol. 6, no.19, 943 - 956.
6. *Geritz S., Gyllenberg M.* A mechanistic derivation of the DeAngelis-Beddington functional response. *J. Theoret. Biol.* – 2012. – 314, pp. 106–108.
7. *Hirsch M.W., Smith H.L.* Competitive and Cooperative Systems: a mini-review. – 2003. – Springer.
8. *Nåsell I.* Extinction and Quasi-stationarity in the Verhulst Logistic Model. // *J. theor. Biol.* – 2001. – 211, 11-27.
9. *Torsten Lindström T., Cheng Yuanji* Uniqueness of limit cycles for a limiting case of the chemostat: does it justify the use of logistic growth rates? // *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.* – 2015. – No. 47, 1–14.
10. *Demidovich B.P.* Lectures on mathematical theory of stability (in Russian). Moscow: Nauka, 1969.
11. *Eirola T., Osipov A.V., Söderbacka G.* On chaotic coexistence for the systems of "two predators – one prey" type. // Intern. Congress on Computer Systems and Appl. Math., – 1993. – St. Petersburg, 19-23 July, 1993.
12. *Eirola T., Osipov A.V., Söderbacka G.* On the appearance of the chaotic regime in one dynamical system of "two predators – one prey" type. (in Russian). In compendium: "Actualnye problemy sovremennoj matematiki (ed. – A.V. Osipov). – 1996. – I, 39-70.

Получена 03.03.2016

УДК 517.9

Процесс разделения видов в слабо неоднородной среде¹

С. Д. Глызин^{*,**}, В. Е. Фролов^{**}

*НЦ РАН,

Черноголовка 142432. *E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru*

**Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,

Ярославль 150003. *E-mail: onsol.tu@gmail.com*

Аннотация. В работе рассмотрена математическая модель процесса разделения вида на два новых в слабо неоднородной среде. В моделирующей такую экосистему краевой задаче при критических значениях параметров реализуется резонанс 1:1. Построена нормальная форма изучаемой краевой задачи и получены условия, при которых устойчиво состояние равновесия, соответствующее синфазным колебаниям исходной системы. Анализ полученных асимптотических формул показал, что процесс видообразования, по всей вероятности, наиболее интенсивен у массовых видов животных, которые достаточно плодовиты и у которых коэффициент подвижности относительно мал. Это дает основание говорить, что получено еще одно объяснение многочисленности близких видов у плодовитых животных. В этом объяснении важную роль играет величина неоднородного сопротивления внешней среды. Этот результат в определенной степени сближает симпатрический и географический принципы видообразования.

Ключевые слова: запаздывание; краевая задача; нормальная форма; бифуркации; автоколебания; задача о конкуренции видов; видообразование.

The Process of Speciation in a Weakly Inhomogeneous Medium

S. D. Glyzin, V. E. Frolov

*NTSCh, Chernogolovka 142432,

**P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

Abstract. We consider a mathematical model of a species separation into two new species in a weakly inhomogeneous environment. The boundary value problem modeling such an ecosystem exhibits for the critical parameter values resonance of 1:1. The normal form of the considered boundary value problem was constructed and the conditions were obtained under which the stationary state corresponding to in-phase oscillations of the original system is stable one. Analysis of obtained asymptotic formulae shows that the speciation process is the most intensive for species with high population density which are fertile enough and whose mobility coefficient is sufficiently small. This gives another explanation of diversity of close species of the fertile animals. In this explanation the value of nonuniform external environment resistance plays an important role. This result brings together sympatric and geographic speciation principles.

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00158).

Keywords: delay, boundary value problem, normal form, bifurcations, auto-oscillations, interspecific competition, speciation.

MSC 2010: 34K10, 34K13, 34K25, 92D25, 92D40

Введение

Проблема видообразования является одной из центральных в эволюционной теории [11]. К настоящему времени удалось сильно продвинуться в понимании основных механизмов генетических изменений в популяциях (см., например, [14, 15]), однако до конца не известно как происходит их закрепление. Учитывая, что эти изменения в конечном итоге ведут к образованию нового вида, остается не вполне понятным феномен видообразования. Одной из наиболее естественных и плодотворных идей в этом направлении является предположение, что процесс видообразования происходит за счет стремления экосистемы повысить степень своей устойчивости, которое выражается в повышении средней численности и уменьшении размаха ее колебаний.

В статьях [6, 7, 8] и книге [5] был изложен единый подход к моделированию динамики популяций на основе логистического уравнения с запаздыванием. В рамках этого подхода в статье [8] и была предложена идея, рассматривать видообразование как результат стремления экосистемы повысить степень своей устойчивости. Более того, в работах [2, 9] эта идея была применена к объяснению эволюционного процесса, для этого была проанализирована простейшая математическая модель и было показано, что расщепление вида в пределах ареала обитания на два новых приводит к уменьшению размаха колебаний.

В настоящей работе рассмотрена более сложная математическая модель, учитывающая диффузию и неоднородное сопротивление внешней среды. Модель, составленная в соответствии с общей идеологией работы [7], позволила показать, как ведут себя относительно друг друга вновь образовавшиеся виды. В частности, показано, что в слабо неоднородной среде процесс видообразования особенно эффективен для массовых видов животных, которые достаточно плодовиты и у которых коэффициент подвижности относительно мал.

Отметим, что предположение о видообразовании как процессе, направленном на увеличение устойчивости экосистемы в целом, встречается во многих классических работах по эволюционной биологии и динамике популяций (см. уже цитированные книги [14, 15], а также [12, 13] и списки литературы в них).

1. Постановка задачи

В работе [9] для описания динамики изменения численности вида, обитающего в неоднородной среде, была предложена краевая задача

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N + r[1 - AN(t - h, x_1, x_2)]N, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь Γ — граница ограниченной области Ω , ν — направление нормали к Γ , $N = N(t, x_1, x_2)$ — плотность численности популяции, функция $A = A(x_1, x_2)$ определяет неоднородность сопротивления среды, D — коэффициент подвижности, r — мальтузианский коэффициент линейного роста, h — возраст производителей. Предположим, что вид разделился на два подвида, причем у одного из них изменился коэффициент подвижности D . Очевидно, что вновь образовавшиеся виды должны конкурировать за общую пищу. Модель этого процесса в однородной среде была рассмотрена в [9]. В данном случае математическая модель имеет вид:

$$\dot{N}_1 = D_1 \Delta N_1 + r_1 \left[1 + a_1 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} \right) - \frac{1 + a_1}{\beta_1} A N_1(t - h_1, x_1, x_2) \right] N_1, \quad (1.3)$$

$$\dot{N}_2 = D_2 \Delta N_2 + r_2 \left[1 + a_2 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} \right) - \frac{1 + a_2}{\beta_2} A N_2(t - h_2, x_1, x_2) \right] N_2, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial N_2}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (1.5)$$

Здесь $N_1(t, x_1, x_2)$, $N_2(t, x_1, x_2)$ — плотности численности видов, K_1, K_2 — их средние по времени значения, a_1, a_2 — коэффициенты конкуренции, β_1, β_2 — положительные числа такие, что $\beta_1 + \beta_2 = 1$. При $a_1 = a_2 = 0$ эти числа — доли, на которые условно разделен вид. Кроме того, $r_1(1 + a_1) = r_2(1 + a_2) = r$, $h_1 = h_2 = 1$ (последнее — удобная нормировка).

Ниже считаем, что

$$a_1 = \eta, \quad a_2 = a\eta, \quad r = \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad (1.6)$$

$$D_1 = D + d, \quad D_2 = D, \quad (1.7)$$

$$A(x_1, x_2) = 1 + \mu A_1(x_1, x_2), \quad (1.8)$$

где a — некоторое число, $\eta, \mu, d, \varepsilon$ — малые положительные параметры, причем

$$d \sim \frac{\eta}{\varepsilon} \ll 1 \quad \left(\text{при } \eta \rightarrow 0 \quad \frac{\eta}{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ и } d \rightarrow 0 \right). \quad (1.9)$$

Кроме того,

$$\iint_{\Omega} A_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0. \quad (1.10)$$

При $\eta = 0$ имеем, очевидно, один вид, условно разделенный на два, а (1.3) — (1.5) распадается на две независимые краевые задачи, каждая из которых имеет [7] в окрестности состояния равновесия единственное (с точностью до сдвигов по времени) устойчивое периодическое решение

$$N_j = K_j [1 + n_j(t + \varphi_j, x)] \quad (j = 1, 2), \quad (1.11)$$

Проблема заключается в следующем: при $\eta > 0$ найти, от каких решений семейства (1.11) ответвляются периодические решения и какова их асимптотика.

2. Асимптотический анализ модели

Среднее значение численности одного вида K_D является решением краевой задачи

$$D\Delta K_D + r(1 - AK_D)K_D = 0, \quad \frac{\partial K_D}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (2.1)$$

Из самой структуры системы (1.3) – (1.5) следует

$$K_j = \frac{\beta_j}{1 + a_j} K_{D_j} + O(\eta) \quad (j = 1, 2). \quad (2.2)$$

Учитывая (2.2), выполним в (1.3) – (1.5) замены

$$N_j = \frac{\beta_j}{1 + a_j} K_{D_j} (1 + n_j) \quad (j = 1, 2). \quad (2.3)$$

В результате, вспоминая о (1.6), (1.9) и отбрасывая слагаемые с малыми параметрами высокого порядка малости (это не повлияет на окончательный результат), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} = D_1 \Delta n_1 - \left[\tilde{\eta} n_2 + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 \right) AK_{D_1} n_1(t-1, x_1, x_2) \right] (1 + n_1) + \\ + \frac{2D_1}{K_{D_1}} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial K_{D_1}}{\partial x_j} \frac{\partial n_1}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_2}{\partial t} = D_2 \Delta n_2 - \left[a\tilde{\eta} n_1 + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 \right) AK_{D_2} n_2(t-1, x_1, x_2) \right] (1 + n_2) + \\ + \frac{2D_2}{K_{D_2}} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial K_{D_2}}{\partial x_j} \frac{\partial n_2}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial n_2}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (2.6)$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \tilde{\eta}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon - a\tilde{\eta}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\pi}{2}\eta. \quad (2.7)$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \tilde{\eta} = \mu = 0$ в задаче об устойчивости нулевого решения системы (2.4) – (2.6) имеет место критический случай двух совпадающих пар чисто мнимых корней $\pm i\pi/2$ с элементарными делителями. Тем самым, к краевой задаче (2.4) – (2.6) применим асимптотический метод построения устойчивого интегрального многообразия и соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений на нем (используется алгоритм, развитый в работе [7] в варианте, предложенном в [1]). Для этого выполним в (2.4) – (2.6) замену переменных

$$n_1(t, x_1, x_2) = \xi_1 \cos \frac{\pi}{2} \tau_1 + \sum_{i,j=1}^2 \xi_i \xi_j u_{ij}^{(1)} + \dots, \quad (2.8)$$

$$n_2(t, x_1, x_2) = \xi_2 \cos \frac{\pi}{2} \tau_2 + \sum_{i,j=1}^2 \xi_i \xi_j u_{ij}^{(2)} + \dots, \quad (2.9)$$

где $u_{ij}^{(1)}(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2)$, $u_{ij}^{(2)}(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2)$ принадлежат классу тригонометрических полиномов аргументов τ_1, τ_2 , а ξ_1, ξ_2 — функции времени. Из условий разрешимости соответствующих задач в этом классе получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \varphi_1 \varepsilon_1 \xi_1 + \varphi_2 (D_1) \mu^2 \xi_1 + \varphi_3 \xi_1^3 + b \tilde{\eta} \xi_2 \cos \left(\frac{\pi}{2} (\tau_2 - \tau_1) + \gamma \right), \\ \dot{\xi}_2 &= \varphi_1 \varepsilon_2 \xi_2 + \varphi_2 (D_2) \mu^2 \xi_2 + \varphi_3 \xi_2^3 + ab \tilde{\eta} \xi_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} (\tau_1 - \tau_2) + \gamma \right), \\ \dot{\tau}_1 &= 1 + \frac{4}{\pi^2} f(D_1) \mu^2 + c_1 \varepsilon_1 + c_3 \xi_1^2 + \frac{2}{\pi} b \tilde{\eta} \frac{\xi_2}{\xi_1} \sin \left(\frac{\pi}{2} (\tau_2 - \tau_1) + \gamma \right), \\ \dot{\tau}_2 &= 1 + \frac{4}{\pi^2} f(D_2) \mu^2 + c_1 \varepsilon_2 + c_3 \xi_2^2 + \frac{2}{\pi} ab \tilde{\eta} \frac{\xi_1}{\xi_2} \sin \left(\frac{\pi}{2} (\tau_1 - \tau_2) + \gamma \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

в которой отброшены слагаемые высших порядков малости. Здесь

$$f(D) = D \iint_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial K_D^{(1)}}{\partial x_j} \right)^2 dx_1 dx_2,$$

где $K_D^{(1)}$ — решение эллиптической краевой задачи

$$\begin{aligned} D \Delta K_D^{(1)} - \frac{\pi}{2} (K_D^{(1)} + A_1) &= 0, \quad \frac{\partial K_D^{(1)}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0, \\ \varphi_1 &= \frac{2\pi}{4 + \pi^2}, \quad \varphi_2(D) = -\varphi_1 \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) f(D), \\ b &= \frac{2}{\sqrt{4 + \pi^2}}, \quad \varphi_3 = -\frac{\pi(3\pi - 2)}{20(4 + \pi^2)}, \\ \gamma &= \arccos \left(-\frac{2}{\sqrt{4 + \pi^2}} \right), \\ c_1 &= \frac{8}{\pi(4 + \pi^2)}, \quad c_3 = -\frac{\pi + 6}{10(4 + \pi^2)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Положим $\eta_1 = \tilde{\eta}/\varepsilon$. В силу (1.9) η_1 — малый параметр. Ниже считаем, что $\mu^2 = m\eta_1$. При этом условии найдем то значение a , при котором уравнения для медленных переменных имеют устойчивое состояние равновесия, которому соответствуют синхронизированные по времени колебания

$$\tau_1 - \tau_2 = 0. \quad (2.12)$$

Непосредственные выкладки показывают, что равенство (2.12) возможно только при

$$a = 1 + 2.429m df'(D). \quad (2.13)$$

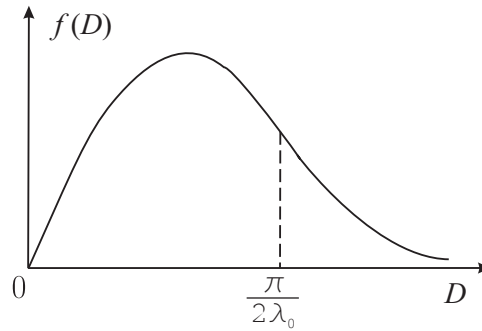


Рис. 1.

Если же (2.13) выполнено, то

$$\xi_j = \sqrt{\frac{40\varepsilon}{3\pi - 2}} (1 + b_j^{(1)}\eta_1 + o(\eta_1)) \quad (j = 1, 2),$$

$$b_1^{(1)} = -\frac{\pi + 1}{4} - 0.818f(D)m - 0.818dmf'(D) + o(d),$$

$$b_2^{(1)} = -\frac{\pi + 1}{4} - 0.818f(D)m - 2.515dmf'(D) + o(d),$$

Для анализа вида функции $f(D)$ введем в рассмотрение ненулевые собственные числа и соответствующие им собственные функции краевой задачи (см. [7])

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n, \quad \frac{\partial e_n}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2.14)$$

где $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$. Решение краевой задачи (2.11) выражается тогда формулой

$$K_D^{(1)} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{D\lambda_n + \pi/2} e_n,$$

где α_n ($n = 0, 1, \dots$) — коэффициенты разложения $A_1(x_1, x_2)$ в ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи (2.14). Отсюда получаем

$$f(D) = \frac{\pi^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D\lambda_n}{(D\lambda_n + \pi/2)^2} \alpha_n^2. \quad (2.15)$$

Опираясь на представление (2.15), нетрудно видеть, что $f(D)$ имеет вид, представленный на рис. 1. Точка $D = \pi/(2\lambda_0)$ находится на ниспадающем участке кривой $f(D)$, поскольку из формулы (2.15) следует, что $f'(\frac{\pi}{2\lambda_0}) < 0$, напомним, что λ_0 — наибольшее из собственных чисел краевой задачи (2.14).

Выберем D такое, что $f'(D) \neq 0$. Из (2.13) тогда вытекает, что $a > 1$ (< 1) при $f'(D) > 0$ (< 0). Таким образом, при $f'(D) > 0$ более подвижный вид оказывает большее давление на менее подвижный вид. Однако размах колебаний у него

больше. Если же $f'(D) < 0$, то у обоих видов колебания гасятся менее эффективно. Процесс видообразования наиболее интенсивен у массовых видов животных, которые достаточно плодовиты и у которых коэффициент подвижности D относительно мал. В силу показанного на рисунке у таких видов $f'(D) > 0$.

Заключение

Таким образом, при наличии неоднородного сопротивления среды процесс видообразования у плодовитых видов с малым коэффициентом подвижности приводит к стабилизации колебаний и, следовательно, увеличению устойчивости системы в целом. Тем самым, получено еще одно объяснение многочисленности близких видов у массовых видов животных. В этом объяснении важную роль играет величина неоднородного сопротивления внешней среды. Ярким примером, иллюстрирующим данное явление, является существование большого числа близких видов среди мышевидных, которые как раз обладают высокой плодовитостью.

Отметим еще, что полученный результат сближает симпатрический и географический принципы видообразования.

Динамические свойства рассмотренной модели изучены в данной постановке еще далеко не полностью. В частности, для системы (2.10) необходимо выполнить численный анализ, цель которого состоит в нахождении ее грубых устойчивых режимов. На основании утверждения о соответствии существование грубых режимов нормальной формы (2.10) влечет существование грубых режимов той же устойчивости у краевой задачи (1.3) – (1.5). Такое исследование представляет несомненный интерес. Особую ценность имело бы сопоставление устойчивых решений, полученных для нормальной формы, и устойчивых режимов исходной краевой задачи. Это позволит прогнозировать вид пространственно неоднородных режимов краевой задачи (1.3) – (1.5) и находить режимы в максимальной степени соответствующие поставленной задаче о повышении степени устойчивости экосистемы. Непосредственное изучение распределенных задач популяционной динамики сталкивается с существенными трудностями (см., например, [16, 10, 4, 3]), некоторых из которых можно избежать за счет предварительного изучения нормальной формы задачи.

Список цитируемых источников

1. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие. — Ярославль: ЯрГУ, 2006. — 92 с.
Glyzin S.D., Kolesov A.Yu. (2006). Local methods for analyzing dynamical systems (in Russian). Yaroslavl': YarGU.
2. Глызин С.Д. О стабилизирующей роли процесса видообразования // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1983. — С. 101–106.
Glyzin S.D. (1983). On the stabilizing role of the speciation process (in Russian) // Issledovaniya po ustoychivosti i teorii kolebaniy. Yaroslavl', 101-106.

3. Глызин С. Д. Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. — 2009. — Т. 16, № 3. — С. 96–116.
Glyzin S. D. (2009). Difference approximations of “reaction – diffusion” equation on a segment (in Russian). Modeling and Analysis of Information Systems, 16:3, 96-116.
4. Глызин С. Д. Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. — 2007. — Т. 14, № 3. — С. 29 – 42.
Glyzin S.D. A registration of age groups for the Hutchinson’s equation (in Russian). Modeling and Analysis of Information Systems, 14:3, 29-42.
5. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии — М.: Наука, 1993. (Тр. МИАН. — Т. 199. — С. 3–124.)
Kolesov A. Yu., Kolesov Yu. S. (1995). Relaxational oscillations in mathematical models of ecology. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 199, 1–126.
6. Колесов Ю. С. Инварианты экологических уравнений // Математические модели в биологии и медицине. Институт математики и кибернетики АН Лит. ССР, Вильнюс, 1985. — № 1. — С. 30–59.
Kolesov Yu.S. (1985). Invariants of ecological equations (in Russian). Matematicheskie modeli v biologii i medicine. — Institut matematiki i kibernetiki AN Lit. SSR, Vilnyus, no.1, 30–59.
7. Колесов Ю. С. Математические модели экологии // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1979. — С. 3 – 40.
Kolesov Yu.S. (1979) Mathematical models of ecology (in Russian). Issledovaniya po ustaychivosti i teorii kolebaniyj. — Yaroslavl’, 3–40.
8. Колесов Ю. С. Некоторые задачи математической экологии // Дифференциальные уравнения и их применение. Вильнюс, 1981. — Вып. 29. — С. 27–34.
Kolesov Yu.S. (1981). Some problems of mathematical ecology (in Russian). Differentsial’nyye uravneniya i ikh primeneniye. Vil’nyus, 29, 27-34.
9. Колесов Ю. С., Федотов Н. Б. К проблеме видообразования // Дифференциальные уравнения и их применение. Вильнюс, 1981. — Вып. 29. — С. 41–49.
Kolesov YU.S., Fedotov N.B. (1981). To the problem of speciation (in Russian). Differentsial’nyye uravneniya i ikh primeneniye. Vil’nyus, 29, 41-49.
10. de Aguiar M.Á. M., Baranger M., Baptistini E. M., Kaufman L., Bar-Yam Y. Global patterns of speciation and diversity // Nature. — 2009. — V. 460. — P. 384-387.
11. Darwin C. R. The origin of species by means of natural selection, or the preservation of favoured races in the struggle for life. — London: John Murray. 6th edition; with additions and corrections. — 1872.
12. deQueiroz, K. Species concepts and species delimitation // Systematic Biology, — 2007. — V. 56. — P. 879–886.
13. Eldredge, N. Macroevolutionary Dynamics: Species, Niches, and Adaptive Peaks. — New York, McGraw-Hill Publishers, 1989. — 226 p.
14. Evolutionary Biology: Genome Evolution, Speciation, Coevolution and Origin of Life / Editors: Pierre Pontarotti. — Springer, 2014.

15. *Mayr E.* Animal Species and Evolution. — Cambridge, Belknap, 1963. — 811 p.
16. *Sayama H, de Aguiar M.A.M., Bar-Yam Y., Baranger M.* Spontaneous pattern formation and genetic invasion in locally mating and competing populations // Physical Review E 65 (5). — 051919.

Получена 22.02.2016

УДК 519.713.5+519.713.6

Модель поведения стохастических ε -автоматов в задаче автономного выбора рабочих частот

А. А. Короткин

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль 150003. E-mail: alakor@yandex.ru

Аннотация. Автономный выбор рабочих частот в заданной сетке радиоканалов для группы радиоэлектронных средств (РЭС) рассматривается как поведение некоторой локально организованной интеллектуальной (многоагентной) системы. Агентами системы являются стохастические автоматы с простейшей тактикой поведения — т.н. ε -автоматы. Агенты, выбирая частоты, определяют взаимные помехи, возникающие на входе приемников РЭС, передатчики которых работают на совпадающих частотах. Агенты взаимодействуют через среду, т. е. каждый автомат получает на вход лишь некоторый суммарный результат своих действий и действий партнеров. Приводятся результаты компьютерного моделирования динамики рассматриваемой системы, показывающие способность системы ε -автоматов к достижению стационарного состояния, обладающего свойством целесообразности.

Ключевые слова: теория игр, назначение рабочих частот, коллективное поведение автоматов, когнитивное радио

A stochastic behavior model of ε -automata in the problem of autonomous frequency assignment

A. A. Korotkin

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

Abstract. The autonomous frequency assignment problem for a group of transmitters is considered as the behavior of some multiagent system. The agents of this system are stochastic automata with simple tactics of behavior — so-called ε -automata. Agents determine mutual interference at the input of the receivers, which transmitters operate on matching or close frequencies. Agents interact only through an environment, i.e. each automaton receives only some net result of their actions and those of partners. The computer simulation show the ability of the ε -automata system to achieve as $\varepsilon \rightarrow 0$ the stationary state that has the property of feasibility.

Keywords: game theory, frequency assignment, collective behavior of automata, cognitive radio.

MSC 2010: 91A80

1. Введение

В последнее время интенсивно разрабатывается новый подход к проблеме выбора рабочих частот (радиоканалов) для обеспечения совместимости в коллективах РЭС, основанный на следующей идее автономного управления. Каждое РЭС

условно наделяется способностью к адаптивному выбору рабочей частоты, т. е. ассоциируется с некоторым активным агентом, осуществляющим этот выбор в пределах заданной сетки радиоканалов, а сам процесс определения частотных назначений рассматривается как коллективное поведение взаимодействующих агентов. Такой подход получил название технологии *когнитивного радио* [7, 9].

В определенном смысле адекватной математической моделью такого рода процессов является бескоалиционная игра $n > 2$ агентов (игроков) с непротивоположными интересами. Основная задача, решаемая в рамках такого подхода — это нормативный анализ игры, т. е. определение условий, при которых существует распределение частот, обладающее свойством устойчивости, под которым обычно понимают равновесие по Нэшу [4].

Теоретические работы в этом направлении несомненно полезны, однако при этом за скобками остается главный вопрос — какой стратегии поведения должен придерживаться каждый агент, чтобы за конечное время вся система пришла в глобально устойчивое состояние. Сложность этой задачи определяется спецификой описываемой ситуации, заключающейся в отсутствии у агента какой-либо информации о количестве остальных агентов, их характеристиках, целевых функциях и выбираемых ими стратегиях поведения во времени. Единственная информация, доступная агенту — это уровень помехи на входе приемника РЭС, ассоциированного с агентом.

В данной работе для решения задачи автономного выбора рабочих частот предлагается модель многоагентной системы, в которой каждый агент реализован как стохастический автомат, внутреннее состояние которого может изменяться в дискретные моменты времени $t = 0, 1, \dots$ под влиянием получаемых им эффектов, связанных с действиями других агентов-автоматов. В качестве такого автомата предлагается использовать т.н. ε -автомат [5]. Будет показано, что несмотря на примитивную локальную тактику выбора частоты отдельным агентом, в целом многоагентная система при $\varepsilon \rightarrow 0$ демонстрирует целесообразное (в указанном ниже смысле) поведение, заканчивающееся через конечное число шагов в стационарном состоянии. Отметим, что математическим моделям, связанным с коллективным поведением агентов (автоматов) посвящено много работ, среди которых можно отметить работы [1, 2] и особенно упомянутую выше монографию [5].

2. Анализ игровой модели выбора радиоканалов

Пусть имеется группа n РЭС, каждое из которых представляет собой пару «приемник-передатчик». Для данной группы выделена сетка радиоканалов $F = \{f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_K^{(0)}\}$, $f_{k+1}^{(0)} = f_k^{(0)} + \Delta_k$, $k = 1, \dots, K - 1$. При каждом РЭС может использоваться не более одного канала связи. РЭС, использующие общий радиоканал, создают друг другу взаимные помехи. Далее будем рассматривать следующую простейшую модель взаимного влияния РЭС.

Пусть ν_{ij} — мощность помехи, создаваемая передатчиком i -го РЭС на входе приемника j -го РЭС при использовании ими одного и того же радиоканала

$f_k^{(0)} \in F$, при этом величина ν_{ij} не зависит от номера k радиоканала. При работе на разных каналах взаимные помехи в дуэльной ситуации i -е РЭС $\Leftrightarrow j$ -е РЭС отсутствуют, т. е. $\nu_{ij} = \nu_{ji} = 0$.

Всюду далее будем предполагать аддитивность помех в следующем смысле: если j -е РЭС и РЭС с номерами $i \in K \subset N$ работают на одном и том же радиоканале, то результирующая помеха на приемнике j -го РЭС определяется величиной $\mathcal{N}_j = \sum_{i \in K} \nu_{ij}$.

Пусть $f_j \in F$ означает радиоканал, на котором работает j -е РЭС. Далее, для удобства, введем функцию $\delta(a, b)$, равную 1, если $a = b$, и 0, если $a \neq b$. Тогда результирующую помеху для приемника j -го РЭС можно записать как

$$\mathcal{N}_j(f_1, \dots, f_j, \dots, f_n) = \sum_{i=1}^n \nu_{ij} \delta(f_i, f_j). \quad (1)$$

Величина \mathcal{N}_j определяет «потери» j -го РЭС — чем больше \mathcal{N}_j , тем ниже качество передачи информации в паре приемник-передатчик j -го РЭС. Матрицу взаимных помех в дуэльных ситуациях будем обозначать как $\mathcal{N} = (\nu_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, при этом естественно $\nu_{ii} = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим децентрализованный выбор радиоканалов в совокупности как бескоалиционную игру. Пусть $I = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество участников игры или агентов. В нашем случае агенты ассоциируются с РЭС. Агент j имеет в своем распоряжении стратегии $f_j \in F$. Стратегии, входящие в F , принято называть чистыми стратегиями. Каждый из агентов выбирает чистую стратегию, не зная выборов партнеров. В результате в игре возникает набор стратегий $f = (f_1, \dots, f_j, \dots, f_n)$, называемый ситуацией или профилем игры.

Введем следующие обозначения: для агента j через f_{-j} будем обозначать набор стратегий агентов из $I \setminus \{j\}$, далее (f'_j, f_{-j}) обозначает ситуацию $(f_1, \dots, f_{j-1}, f'_j, f_{j+1}, \dots, f_n)$. (Заметим, что в этих обозначениях $f = (f_j, f_{-j})$).

У каждого агента j имеется, определенная на множестве ситуаций $F \times F \times \dots \times F = F^n$ функция потерь $\mathcal{N}_j(f)$, которую агент стремится, по возможности, минимизировать. Функции потерь $\mathcal{N}_j(x)$ в рассматриваемой задаче определены соотношением (1). Предполагается, что агенты не образуют коалиций, направленных против других агентов.

Нормативная теория бескоалиционных игр предписывает каждому агентам выбирать свои стратегии так, что получаемая ситуация образует ситуацию равновесия по Нэшу [3]. Формально ситуация $f^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ является равновесной по Нэшу, если выполняется система неравенств

$$\mathcal{N}_j(f^*) \leq \mathcal{N}_j(f_j, f_{-j}^*) \quad \forall f_j \in F_j, \forall j \in I. \quad (2)$$

Согласно этому определению, равновесие Нэша — это стабильная ситуация в том смысле, что у любого j -го агента отсутствует стимул к отклонению от f_j^* , учитывая, что все остальные агенты продолжают следовать равновесной политике.

Рассмотрим случай, когда матрица $\mathcal{N} = (\nu_{ij})$ попарных взаимных влияний является симметричной: $\nu_{ij} = \nu_{ji} \quad \forall i, j \in I$. Покажем, что в этом случае в игре существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. Для этого достаточно показать, что рассматриваемая игра относится к классу т.н. *потенциальных* игр. По определению бескоалиционная игра называется потенциальной, если для нее существует функция $\Phi(f)$ такая, что для любого игрока j и любой ситуации f

$$\mathcal{N}_j(f'_j, f_{-j}) - \mathcal{N}_j(f''_j, f_{-j}) = \Phi(f'_j, f_{-j}) - \Phi(f''_j, f_{-j}).$$

Справедливо утверждение: потенциальная игра всегда имеет по крайней мере одну ситуацию равновесия в чистых стратегиях [8].

Для рассматриваемой игры \mathfrak{G} определим $\Phi(f)$ следующим образом

$$\Phi(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{N}_j(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_{ij} \delta(f_i, f_j).$$

Тогда в разности $\Delta = \Phi(f'_j, f_{-j}) - \Phi(f''_j, f_{-j})$ слагаемые, не содержащие индекс j , взаимно уничтожаются

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_{ij} \delta(f_i, f'_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_{ji} \delta(f'_j, f_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_{ij} \delta(f_i, f''_j) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nu_{ji} \delta(f''_j, f_i).$$

В силу симметричности матрицы \mathcal{N} и функций $\delta(\cdot, \cdot)$ первые две суммы совпадают, так же как и третья с четвертой. Тогда разность $\Phi(f'_j, f_{-j}) - \Phi(f''_j, f_{-j})$ будет равна разности функции потерь $\mathcal{N}_j(f'_j, f_{-j}) - \mathcal{N}_j(f''_j, f_{-j})$. Следовательно, игра \mathfrak{G} потенциальная и у нее существует по крайней мере одна ситуация равновесия в чистых стратегиях.

Заметим что условие симметричности матрицы \mathcal{N} довольно редко выполняется на практике. При отсутствия симметрии взаимного влияния ситуации равновесия Нэша в чистых стратегиях, могут не существовать. Так, например, нетрудно проверить, что для игры с $n = 3$, $F = \{f_1, f_2\}$ и матрицей \mathcal{N} , элементы которой удовлетворяют неравенствам

$$\nu_{21} > \nu_{31}, \quad \nu_{13} > \nu_{23}, \quad \nu_{32} > \nu_{12},$$

нет ни одной ситуации равновесия в чистых стратегиях.

В общем случае отсутствия в рассматриваемой игре равновесия Нэша в чистых стратегиях можно определить смешанные стратегии, когда каждый агент выбирает свою чистую стратегию случайным образом в соответствии с некоторым распределением вероятностей $\pi_j = (\pi_{j1}, \pi_{j2}, \dots, \pi_{jK})$, где π_{jk} — вероятность выбора j -м агентом k -го радиоканала $f_k^{(0)}$. В этом случае результирующие потери агента j оцениваются математическим ожиданием суммарного уровня помех на входе приемника

$$\bar{\mathcal{N}}_j(\pi_1, \dots, \pi_n) = \sum_{i=1}^n \nu_{ij} \sum_{k=1}^K \pi_{ik} \pi_{jk}. \quad (3)$$

Основная теорема бескоалиционных игр n агентов утверждает, что для игр с конечным множеством чистых стратегий всегда существует равновесие Нэша в смешанных стратегиях $\pi^* = (\pi_1^*, \dots, \pi_n^*)$. Для рассматриваемой игры можно показать, что при равновероятном выборе агентами своих чистых стратегий $\pi_j^* = (1/K, \dots, 1/K)$ ($j = 1, \dots, n$) образуется равновесие Нэша, причем ситуация $\pi^* = (\pi_1^*, \dots, \pi_n^*)$ — единственное равновесие среди всех вполне смешанных ситуаций, т. е. ситуаций, в которых $\pi_{jk} > 0$ для всех $j = 1, \dots, n$ и $k = 1, \dots, K$. Очевидно, что в ситуации равновесия π^* математическое ожидание потерь игрока j ($j = 1, \dots, n$) равно

$$\bar{N}_j(\pi_1^*, \dots, \pi_n^*) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^n \nu_{ij}. \quad (4)$$

3. Выбор частот коллективом ε -автоматов

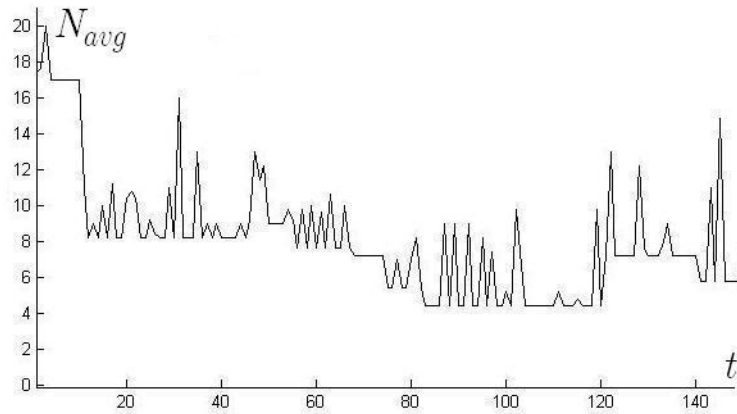
Будем рассматривать многоагентную систему \mathcal{S} , в которой каждый агент, ассоциированный с конкретным РЭС, в последовательные моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots$ выбирает рабочую частоту из заданной сетки F радиоканалов. В качестве агента рассмотрим ε -автомат [5], имеющий K возможных действий $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_K^{(0)}$. По определению ε -автомат хранит в памяти уровни помех за действия, выбранные в последовательные моменты времени $t - 1$ и t . Пусть эти действия — суть $f(t - 1) \in F$ и $f(t) \in F$ и соответствующие им уровни помех — $\mathcal{N}(t - 1)$ и $\mathcal{N}(t)$. С вероятностью $1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, автомат в момент $t + 1$ совершает то из действий $f(t - 1)$ и $f(t)$, уровень помех при котором был меньше (если же $\mathcal{N}(t - 1) = \mathcal{N}(t)$, то с вероятностью $1 - \varepsilon$ автомат совершает действие $f(t)$), а с вероятностью ε — любое из K возможных действий. Будем обозначать автомат подобного вида как $\mathcal{A}_2(\varepsilon)$, где нижний индекс соответствует размеру памяти автомата.

Таким образом, рассматриваемая многоагентная система представляет собой коллектив агентов, однородных по своему составу (все автоматы коллектива одинаковые по конструкции) и состоящих из автоматов, которые взаимодействуют только через среду, т. е. каждый автомат получает на вход лишь некоторый суммарный результат своих действий и действий партнеров.

Динамику поведения \mathcal{S} можно характеризовать функцией $\mathcal{N}_{avg}(t)$, равной среднему (по ансамблю автоматов) уровню помех на шаге t

$$\mathcal{N}_{avg}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(t). \quad (5)$$

Будем называть систему \mathcal{S} стационарной в среднем, если начиная с некоторого момента средний уровень помех в системе перестает меняться, т. е. существуют $t_0 > 1$ и $\mathcal{N}_0 \geq 0$ такие, что $\mathcal{N}_{avg}(t) = \mathcal{N}_0$ при $t \geq t_0$. При фиксированном значении параметра ε система, вообще говоря, не является стационарной в среднем. На рис.

Рис. 1. Поведение системы при $\varepsilon = 0.25$

1 приведен типичный график изменения $\mathcal{N}_{avg}(t)$, иллюстрирующий это утверждение. Для обеспечения стационарности системы рассмотрим в качестве агента т.н. 0-автомат $\mathcal{A}_2(0)$, являющийся предельным вариантом ε -автомата $\mathcal{A}_2(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. $\mathcal{A}_2(0)$ является детерминированным автоматом, который на шаге $t + 1$ выбирает одно из двух действий $f(t - 1)$ и $f(t)$ по правилу

$$f(t + 1) = \begin{cases} f(t - 1), & \text{если } \mathcal{N}(t - 1) < \mathcal{N}(t), \\ f(t), & \text{если } \mathcal{N}(t - 1) \geq \mathcal{N}(t). \end{cases}$$

Очевидно, что диапазон возможных действий автомата $\mathcal{A}_2(0)$ по сравнению с $\mathcal{A}_2(\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$, значительно уже. Однако система из $\mathcal{A}_2(0)$ обладает важным свойством, которое устанавливается следующим утверждением ([5, с. 56, Лемма 2.1])

В произвольной игре 0-автоматов из любого начального состояния коллектив из n 0-автоматов не более чем за $n + 1$ шаг обязательно перейдет в некоторое стационарное состояние, в котором он будет находиться неограниченно долго.

Свойство стационарности системы, состоящей из взаимодействующих через среду агентов типа $\mathcal{A}_2(0)$, позволяет построить следующую схему ее функционирования. Пусть $\varepsilon(t)$ — неотрицательная монотонно невозрастающая на последовательности $t = 0, 1, 2, \dots$ функция такая, что $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 1 < \varepsilon(2) < \varepsilon(3) < \dots$, причем $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

Начиная с момента $t = 0$, агенты системы будут действовать как автоматы $\mathcal{A}_2(\varepsilon(t))$. Очевидно, что на первых двух шагах $t = 0$ и $t = 1$ агенты определяют свои действия случайным образом — равновероятно выбирают значения рабочих частот из сетки $F = \{f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_K^{(0)}\}$, после чего определяют соответствующие значения уровни помех $\mathcal{N}(0)$ и $\mathcal{N}(1)$ на входе соответствующих приемников и заносят их в память. Далее с течением времени агенты по своему действию все больше приближаются к автоматам $\mathcal{A}_2(0)$, а результат их работы — к стационарному состоянию системы.

Стационарность в среднем рассматриваемой многоагентной системы \mathcal{S} являет-

ся необходимым условием ее пригодности для решения задачи автономного выбора рабочих частот, но отнюдь не достаточным. Определим «качество» стационарного решения следующим образом. Как было сказано выше, агенты могут использовать в игре оптимальные смешанные стратегии π_j^* , реализуя равновероятный случайный выбор частот в пределах заданной сетки радиоканалов. Здесь оптимальность понимается в том смысле, что образуемая при таком выборе ситуация $\pi^* = (\pi_1^*, \dots, \pi_n^*)$ является равновесием Нэша в смешанных стратегиях. Средние потери $\bar{N}_j(\pi^*)$ каждого агента при этом определяются равенством (4). Средние потери агентов всей системы \mathcal{S} будут равны величине

$$\bar{N}_S = \frac{1}{nK} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \nu_{ij}.$$

Будем называть поведение многоагентной системы \mathcal{S} *целесообразным*, если $N_{avg}(t) \leq \bar{N}_S$, начиная с момента установки в \mathcal{S} стационарного в среднем режима. Целесообразность поведения означает, что агенты системы, реализованные как ε -автоматы, ведут себя в среднем не хуже, чем агенты, разыгрывающие случайный равновероятный выбор частот из сетки радиоканалов $\{f_1^{(0)}, \dots, f_K^{(0)}\}$.

4. Компьютерное моделирование системы ε -автоматов.

Для проведения вычислительного эксперимента с компьютерной моделью системы ε -автоматов были сгенерированы комплекты матриц взаимных помех в дуэльных ситуациях четырех типов: \mathcal{N}_{asym} , \mathcal{N}_{sym} , \mathcal{N}_{hrom2} , \mathcal{N}_{hrom3} . Матрицы комплектов \mathcal{N}_{asym} и \mathcal{N}_{sym} — это соответственно асимметричные и симметричные матрицы размера 10×10 , элементы которых генерировались с помощью датчика случайных чисел в диапазоне $[0, 10]$.

Матрицы комплекта \mathcal{N}_{hrom2} — это случайные асимметричные матрицы 10×10 , содержащие нулевые элементы так, что соответствующий граф взаимовлияний $n = 10$ РЭС обладал хроматическим числом $\chi = 2$. В этом случае для такой группы РЭС возможно «идеальное» назначение частот из сетки, содержащей только два канала $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}$, при котором каждое из десяти РЭС работало бы без взаимных помех [6].

Аналогично для матриц комплекта \mathcal{N}_{hrom3} возможно «идеальное» назначение рабочих частот из сетки, содержащей только три канала $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, f_3^{(0)}$. Выбор таких тестовых матриц объясняется желанием проверить способность системы установить эти назначения в жестких условиях ограниченного выбора действий. Функция $\varepsilon(t)$, определяющая скорость убывания параметра ε , была выбрана следующей

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, 1; \\ \max\{0.5 - 0.01t, 0\}, & t \geq 2. \end{cases}$$

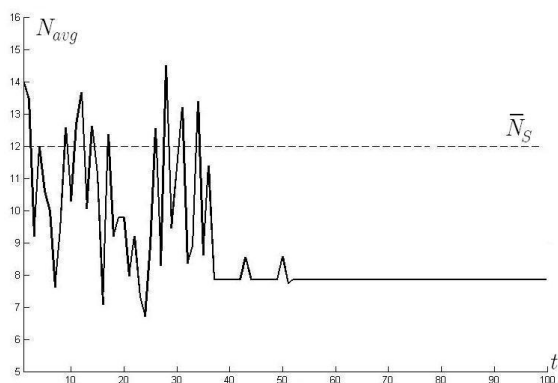


Рис. 2. Матрица взаимных помех из комплекта \mathcal{N}_{asym} ; число радиоканалов в сетке = 4

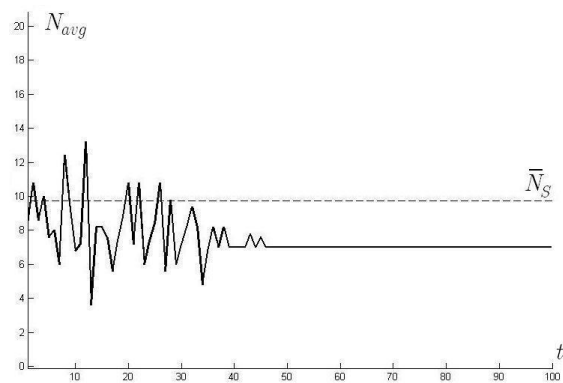


Рис. 3. Матрица взаимных помех из комплекта \mathcal{N}_{sym} ; число радиоканалов = 4

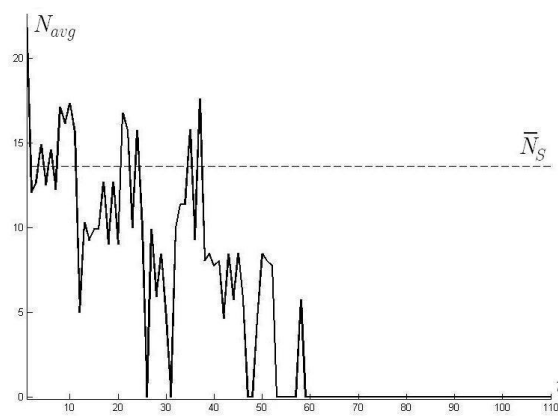


Рис. 4. Матрица взаимных помех из комплекта \mathcal{N}_{hrom2} ; число радиоканалов = 2

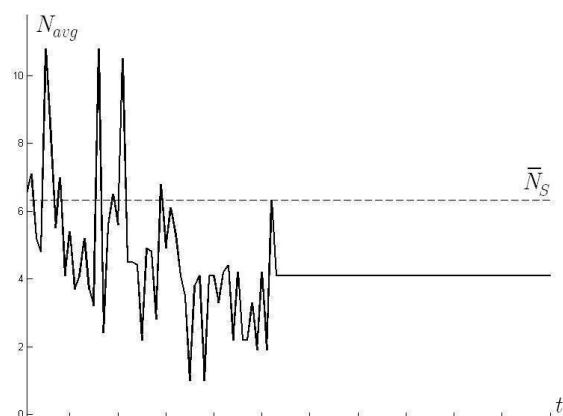


Рис. 5. Матрица взаимных помех из комплекта \mathcal{N}_{hrom3} ; число радиоканалов = 3

На рисунках 2 – 5 приведены типичные графики для матриц взаимных помех в дуэльных ситуациях для всех четырех типов. Во всех тестовых примерах стационарное в среднем состояние системы автоматов достигалось за число шагов не более 80. Во всех случаях поведение систем было целесообразным. Для матриц из классов \mathcal{N}_{hrom2} и \mathcal{N}_{hrom3} только в четверти тестов стационарное состояние системы совпадало с «идеальным» (на рис. 4 показан удачный пример, когда стационарное состояние соответствует «идеальному» назначению частот, на рис. 5 — неудачный). В любом случае целесообразность поведения системы из ε -автоматов в указанном выше смысле позволяет говорить о перспективности ее использования в развиваемой в последние годы технологии когнитивного радио.

5. Заключение

Для задачи автономного выбора рабочих частот в группировке РЭС, создающих взаимные помехи, в работе предлагается концепция многоагентной системы,

элементами (агентами) которой являются т.н. ε -автоматы. Вводится числовая характеристика системы — средний уровень помех в системе в момент времени t и на ее основе определяются понятия стационарности в среднем и целесообразности поведения системы.

Приводятся результаты компьютерного моделирования системы при различных исходных данных. Показано, что несмотря на простоту поведения отдельного ε -автомата система демонстрирует целесообразное поведение.

Список цитируемых источников

1. *Малишевский А. В.* Модели совместного функционирования многих целенаправленных элементов. I, II // Автоматика и телемеханика. — 1972. — №11. — С. 92–110, №12. — С. 108–128.
Malishevskii A. V. (1972). Models of many goal-seeking elements combined functioning. I, II. *Avtomat. i Telemekh.*, I – 11, 92–110, II –12, 108–128 (in Russian).
2. *Опоицев В. И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. — М.: Наука, 1977. — 245 с.
Opoitsev V. I. (1977). Equilibrium and stability in models of collective behavior. Moscow: Nauka (in Russian).
3. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. — М.: Мир, 1985. — 200 с.
Moulin H. (1981) *Théorie des jeux pour l'économie et la politique*. Paris: Hermann.
4. *Соловьев В. В.* Методы оптимального присвоения частот. — М.: Изд-во Гейзер, 2000, — 133 с.
Soloviev V. V. (2000). Optimal methods of frequency assignment. Moscow: Geysar (in Russian).
5. *Стефанюк В. Л.* Локальная организация интеллектуальных систем. — Moscow: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 328 с.
Stefaniuk V. L. (2004). The local organization of intellectual systems. M.: FIZMATLIT (in Russian).
6. *Chartrand G., Zhang P.* (2007). Radio Colorings of Graphs — A Survey. *International Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2 (3), 237–325.
7. *Haykin S.* (2005). Cognitive Radio: Brain-Empowered Wireless Communications. *IEEE Journal on selected areas in communications*, 23 (2), 201–220.
8. *Monderer, D., Shapley, L.* (1996). Potential games. *Games and economic behavior* 143 (14), 124–143.
9. *Yan Zhang* (2009). Spectrum handoff in cognitive radio networks: opportunistic and negotiated situations. *IEEE International Conference on Communications, ICC' 09, Dresden, Germany*, 1–6.

Получена 17.03.2016

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.938

Д. МАЛЫШЕВ, О. ПОЧИНКА. **Описание структуры доменов в короне Солнца посредством многоцветных графов** (английский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №1. — С. 3–14.

Многие энергетические процессы в солнечной короне (вспышки, протуберанцы и др.) объясняются в магнитно зарядной топологии изменением структуры доменов, связанным с появлением или исчезновением сепараторов. Известно, что большинство нулей магнитного поля лежат на фотосфере, в этой работе доказывается, что топология доменов поля с такими нулями полностью описывается многоцветным графом. Также дается эффективный алгоритм различения таких графов.

Ключевые слова: магнитные поля, модель короны, магнитные пересоединения фотосферы, динамика протуберанцев, многоцветный граф, полиномиальный по времени алгоритм.

Ил. 4. Библиогр. 16 назв.

УДК 517.9

Г. С. ОСИПЕНКО. **Оценка показателей Ляпунова методами символического анализа** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №1. — С. 15–35.

Рассматривается задача вычисления характеристических показателей всех траекторий компактного инвариантного множества. Спектр Морса есть множество показателей Ляпунова псевдотраекторий. Показано, что этот спектр можно локализовать, используя символический образ динамической системы, который является ориентированным графом, построенным для конечного покрытия фазового пространства. Исследования символического образа позволяют локализовать цепно-рекуррентное множество и оценить спектр Морса. Точность оценок зависит от диаметра покрытия и модуля непрерывности дифференциала. Приведен численный эксперимент оценки спектра Морса и проверки гиперболичности нетривиального инвариантного множества.

Ключевые слова: псевдотраектория, цепно-рекуррентное множество, проективное расслоение, показатель псевдотраектории, символический образ, оснащенный граф, эквивалентные возвратные вершины, гиперболичность.

Ил. 1. Библиогр. 17 назв.

УДК 517.938

Е. В. ЖУЖОМА, В. С. МЕДВЕДЕВ. **Рождение сепараторов в магнитных полях** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №1. — С. 37–49.

Мы рассматриваем модель магнитного поля с точечными зарядами, которые моделируют области с интенсивным магнитным потоком. Используя методы теории динамических систем, в статье получены условия отсутствия и наличия сепараторов магнитного поля в хорошо проводящей среде (плазме). Приводится типичная бифуркация рождения сепараторов, когда все заряды лежат в плоскости. Поэтому эта бифуркация может служить моделью рождения сепараторов в фотосфере Солнца.

Ключевые слова: динамическая система Морса-Смейла, сепаратор, магнитное поле.

Ил. 3. Библиогр. 15 назв.

УДК 517.9+521.1+531.3

В. Н. ТХАЙ. **Замкнутые динамические модели** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №1. — С. 51–60.

Вводится понятие замкнутой динамической модели. Показывается, что замкнутая динамическая модель стала развитием модели теории возмущений, модели теории вынужденных колебаний и модели теории управления. Формулируются две основные задачи в динамике замкнутой модели. Результаты по ним излагаются для N -планетной задачи и задачи трех тел.

Ключевые слова: замкнутая модель, связь, малый параметр, периодическое решение, устойчивость, резонанс, N -планетная задача, задача трех тел.

Библиогр. 18 назв.

УДК 517.9+519.6

А. В. ОСИПОВ, Г. СЕДЕРБАККА. **Вымирание и сосуществование хищников** (английский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №1. — С. 61–70.

Изучаются условия вымирания и сосуществования хищников в общем семействе систем с несколькими хищниками, питающихся одним типом жертв. Рассматриваемая система называется вырожденной, если часть хищников вымирает и основная динамика системы происходит в пространстве меньшей размерности.

Ключевые слова: хищник, жертва, вымирание, диссипативность, периодическое решение.

Ил. 3. Библиогр. 12 назв.

УДК 517.9

С. Д. ГЛЫЗИН, В. Е. ФРОЛОВ. **Процесс разделения видов в слабо неоднородной среде** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №1. — С. 71–79.

В работе рассмотрена математическая модель процесса разделения вида на два новых в слабо неоднородной среде. В моделирующей такую экосистему краевой задаче при критических значениях параметров реализуется резонанс 1:1. Построена нормальная форма изучаемой краевой задачи и получены условия, при которых устойчиво состояние равновесия, соответствующее синфазным колебаниям исходной системы. Анализ полученных асимптотических формул показал, что процесс видообразования, по всей вероятности, наиболее интенсивен у массовых видов животных, которые достаточно плодовиты и у которых коэффициент подвижности относительно мал. Это дает основание говорить, что получено еще одно объяснение многочисленности близких видов у плодовитых животных. В этом объяснении важную роль играет величина неоднородного сопротивления внешней среды. Этот результат в определенной степени сближает симпатрический и географический принципы видообразования.

Ключевые слова: запаздывание; краевая задача; нормальная форма; бифуркации; автоколебания; задача о конкуренции видов; видообразование.

Ил. 1. Библиогр. 16 назв.

УДК 519.713.5+519.713.6

А. А. КОРОТКИН. **Модель поведения стохастических ε -автоматов в задаче автономного выбора рабочих частот** (русский) // Динамические системы, 2016. — Том 6(34), №1. — С. 81–89.

Автономный выбор рабочих частот в заданной сетке радиоканалов для группы радиоэлектронных средств (РЭС) рассматривается как поведение некоторой локально организованной интеллектуальной (многоагентной) системы. Агентами системы являются стохастические автоматы с простейшей тактикой поведения — т.н. ε -автоматы. Агенты, выбирая частоты, определяют

взаимные помехи, возникающие на входе приемников РЭС, передатчики которых работают на совпадающих частотах. Агенты взаимодействуют через среду, т. е. каждый автомат получает на вход лишь некоторый суммарный результат своих действий и действий партнеров. Приводятся результаты компьютерного моделирования динамики рассматриваемой системы, показывающие способность системы ε -автоматов к достижению стационарного состояния, обладающего свойством целесообразности.

Ключевые слова: теория игр, назначение рабочих частот, коллективное поведение автоматов, когнитивное радио

Ил. 5. Библиогр. 9 назв.

ABSTRACTS

MSC 2010: 37D05

D. MALYSHEV, O. POCHINKA. **Description of domain structures in the Solar Corona by means multi-color graphs** (English). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.1, 3–14 (2016).

Magnetic charging topology explains many energy processes (flares, prominences, etc.) in the solar corona by changing the domain structure associated with the appearance or disappearance of the separators. It is known that at most of the nulls of the magnetic field are prone. In this paper it is proved that a topology of the domains of a field with the prone nulls is completely described by a multi-color graph. In addition, we give an efficient algorithm for distinguishing of these graphs.

Keywords: magnetic fields, model of corona, photosphere magnetic reconnection, dynamics prominences, multi-color graph, polynomial-time algorithm.

Fig. 4. Ref. 16.

MSC 2010: 37C50, 34D08, 37M25

G. S. OSIPENKO. **Evaluation of the Lyapunov exponents through symbolic analysis methods** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.1, 15–35 (2016).

The problem of calculating the characteristic exponents of all the trajectories of a compact invariant set is considered. Morse spectrum is the set of the exponents of pseudotrajectories. It has been shown that this spectrum can be localized using the symbolic image of a dynamic system which is a directed graph constructed for the finite covering of the phase space. Research of the symbolic image allows estimating the Morse spectrum. The accuracy estimation depends on the diameter of covering and the continuity module of the differential. The numerical experiment of Morse spectrum assessment and verification of hyperbolicity of nontrivial invariant set is given.

Keywords: pseudotrajectory, chain-recurrent set, projective bundle, exponent of pseudotrajectory, symbolic image, equivalent recurrent vertices, hyperbolicity.

Fig. 1. Ref. 17.

MSC 2010: 37D15, 76W05

E. V. ZHUZHOMA, V. S. MEDVEDEV. **Birth of separators in magnetic fields** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.1, 37–49 (2016).

We consider the model of magnetic field with point charges that model regions with an intensive magnetic flux. Using methods of Dynamical Systems Theory, in the paper, one gets the conditions of the absence and existence of separators in a nice conducting fields (plasma). One gives a typical bifurcation of birth separators, when all charges belong to a plane. Therefore, this bifurcation can be the model of birth separators in the photosphere of the Sun.

Keywords: Morse-Smale dynamical system, separator, magnetic field.

Fig. 3. Ref. 15.

MSC 2010: 34A34, 37C27, 37C80, 70F10

V. N. TKHAI. **Closed dynamical models** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.1, 51–60 (2016).

The concept of closed dynamical model is introduced. It is shown that the concept of closed dynamical model is the development of the concept of perturbation theory model, theory of forced

oscillations model and control theory model. Two main problems of the closed model dynamics are stated. For the N -planet problem and the three-body problem new results are obtained.

Keywords: closed model, coupling, small parameter, periodic solution, stability, resonance, N -planet problem, three-body problem.

Ref. 18.

MSC 2010: 34C05, 92D25

A. V. OSIPOV, G. S. SÖDERBACKA. **Extinction and coexistence of predators** (English). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.1, 61–70 (2016).

We study conditions for extinction and coexistence of predators in a general family of systems with many predators feeding on the same prey. We call the system degenerated in the case some predators go extinct and the essential dynamics occurs in a lower dimensional subspace.

Keywords: predator, prey, extinction, dissipativity, periodic solution.

Fig. 3. Ref. 12.

MSC 2010: 34K10, 34K13, 34K25, 92D25, 92D40

S. D. GLYZIN, V. E. FROLOV. **The Process of Speciation in a Weakly Inhomogeneous Medium** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.1, 71–79 (2016).

We consider a mathematical model of a species separation into two new species in a weakly inhomogeneous environment. The boundary value problem modeling such an ecosystem exhibits for the critical parameter values resonance of 1:1. The normal form of the considered boundary value problem was constructed and the conditions were obtained under which the stationary state corresponding to in-phase oscillations of the original system is stable one. Analysis of obtained asymptotic formulae shows that the speciation process is the most intensive for species with high population density which are fertile enough and whose mobility coefficient is sufficiently small. This gives another explanation of diversity of close species of the fertile animals. In this explanation the value of nonuniform external environment resistance plays an important role. This result brings together sympatric and geographic speciation principles.

Keywords: delay, boundary value problem, normal form, bifurcations, auto-oscillations, interspecific competition, speciation.

Fig. 1. Ref. 16.

MSC 2010: 91A80

A. A. KOROTKIN. **A stochastic behavior model of ε -automata in the problem of autonomous frequency assignment** (Russian). *Dinamicheskie Sistemy* **6(34)**, no.1, 81–89 (2016).

The autonomous frequency assignment problem for a group of transmitters is considered as the behavior of some multiagent system. The agents of this system are stochastic automata with simple tactics of behavior — so-called ε -automata. Agents determine mutual interference at the input of the receivers, which transmitters operate on matching or close frequencies. Agents interact only through an environment, i.e. each automaton receives only some net result of their actions and those of partners. The computer simulation show the ability of the ε -automata system to achieve as $\varepsilon \rightarrow 0$ the stationary state that has the property of feasibility.

Keywords: game theory, frequency assignment, collective behavior of automata, cognitive radio.

Fig. 5. Ref. 9.

Динамические системы

Том 6(34) №1

2016

Содержание

D. MALYSHEV, O. POCHINKA. Description of domain structures in the Solar Corona by means multi-color graphs	3
Г. С. ОСИПЕНКО. Оценка показателей Ляпунова методами символического анализа	15
Е. В. ЖУЖОМА, В. С. МЕДВЕДЕВ. Рождение сепараторов в магнитных полях	37
В. Н. ТХАЙ. Замкнутые динамические модели	51
A. V. OSIPOV, G. J. SÖDERBACKA. Extinction and coexistence of predators	61
С. Д. ГЛЫЗИН, В. Е. ФРОЛОВ. Процесс разделения видов в слабо неоднородной среде	71
А. А. КОРОТКИН. Модель поведения стохастических ε -автоматов в задаче автономного выбора рабочих частот	81

Dinamicheskie sistemy (Dynamical Systems)

Volume 6(34) no.1

2016

Table of Contents

D. MALYSHEV, O. POCHINKA. Description of domain structures in the Solar Corona by means multi-color graphs	3
G. S. OSIPENKO. Evaluation of the Lyapunov exponents through symbolic analysis methods	15
E. V. ZHUZHOMA, V. S. MEDVEDEV. Birth of separators in magnetic fields	37
V. N. TKHAI. Closed dynamical models	51
A. V. OSIPOV, G. S. SÖDERBACKA. Extinction and coexistence of predators	61
S. D. GLYZIN, V. E. FROLOV. The Process of Speciation in a Weakly Inhomogeneous Medium	71
A. A. KOROTKIN. A stochastic behavior model of ε -automata in the problem of autonomous frequency assignment	81