Динамические системы, 2016, том 6(34), №2, 161–177

УДК 517.98

Интеграл Бохнера в линейных норамированных конусах[1]

Ф. С. Стонякин, А. Н. Степанов

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007.
E-mail: fedyor@mail.ru
E-mail: stepanov.student@gmail.com

Аннотация. В классе линейных нормированных конусов (ЛНК) вводится аналог понятия интеграла Бохнера для отображений вещественного отрезка со значениями в абстрактных конусах. Исследованы общие свойства интеграла Бохнера, в том числе свойство полноты конуса интегрируемых отображений. Для этого случая рассмотрена известная проблема Радона-Никодима, связанная с отсутствием представимости отображения ограниченной вариации в виде неопределенного интеграла Бохнера. В настоящей работе указанная выше проблема в определённом смысле решена для отображений с p-вариацией для $p \geqslant 1$. Эти результаты новы даже в классе банаховых пространств.

Ключевые слова: абстрактный выпуклый конус, линейный нормированный конус, закон сокращения, интеграл Бохнера, метрическая топология.

The Bochner integral in Linear Normed Cones

F. S. Stonyakin, A N. Stepanov

Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. The analogue of Bochner integral for mappings of real segment with values in abstract cones in the special class of linear normed cones is introduced in the paper. The general properties of Bochner integral, including the property of completeness of cone of integrable mappings, are studied. For this case the known Radon-Nikodym problem is considered. We solved this problem in a sense for mappings with p-variation for $p \geqslant 1$. These results are new even in the class of Banach spaces.

Keywords: abstract convex cone, linear normed cone, cancellation law, Bochner integral, metric topology.

MSC 2010: 46G05, 46G10, 46T20

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук, проект МК-2915.2015.1

© *Ф. С. СТОНЯКИН, А. Н. СТЕПАНОВ*

Введение

Основы теории интегрирования в бесконечномерных векторных пространствах были заложены Дж. Грейвсом, Т. Гильдебрандтом, С. Бохнером [9], Дж. Биркгофом [8]. Н. Данфордом, И. М. Гельфандом [1] – [2]. Б. Дж. Петтисом [16], Дж. Прайсом [18], С. Риккартом, Р. С. Филлипсом [17].

Векторное интегрирование активно используется при решении самых разнообразных математических задач и ему посвящены крупные разделы в монографиях Э. Хилле и Р. С. Филлипса [14], К. Иосиды [3], Н. Данфорда и Дж. Т. Шварца [10], Э. Эдвардса [12], а также известная монография Дж. Дистеля и Дж. Ула [11].

При этом среди сильных типов интеграла отображений отрезка в банаховы пространства выделяют интеграл Бохнера, который наиболее близок к классическому интегралу Лебега.

В последние десятилетия активно развивается теория так называемых локально выпуклых конусов. В частности этой теорией занимались такие известные математики, как J. Radstrom [19], B. Fuchssteiner [13], K. Keimel [15], W. Roth [20, 21] и другие.

Недавно И. В. Орловым [5] были введены так называемые субнормированные и банаховы конусы и на их базе построена теория компактных субдифференциалов с приложениями к вариационным задачам.

Предлагаемая работа посвящена известной проблеме Радона-Никодима, свойственной для интеграла Бохнера отображений даже в классе банаховых пространств. Кратко сформулируем эту проблему.

Подобно интегралу Лебега в вещественном случае, неопределённый интеграл Бохнера отображений в банаховы пространства является абсолютно непрерывным отображением относительно нормы. Однако, в отличие от вещественного случая, уже не всякое абсолютно непрерывное отображение представимо в виде неопределённого интеграла Бохнера [3, 14].

Для отображений в банаховы пространства эта тематика изучалась в диссертации Ф. С. Стонякина [7]. Предложенный там подход основан на усилении понятия абсолютной непрерывности отображения $f\colon I \to E$. Суть этого подхода, в основном, заключается в замене обычной нормы на норму в некотором банаховом пространстве, порожденном выпуклым симметричным компактом в E. Как оказалось, такая абсолютная непрерывность в определенном смысле снимает проблему в классе банаховых пространств. Мы продолжим эти исследования в следующих направлениях.

Во-первых, в классе банаховых пространств данной работы мы рассмотрим класс отображений с так называемой p-вариацией при $p \in (+1;\infty)$. Пусть на сегменте $[a;b]$ задано отображение $F : I \to E$ (E — банахово пространство). Разложим $[a;b]$ на части точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ и составим сумму ($p \geqslant 1$)

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|F(x_{k+1}) - F(x_k)\|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}}.$$

Точная верхняя граница множества всевозможных сумм V называется полной p-вариацией отображения $F(x)$ и обозначается через $V^p(F,[a;b])$. Для таких отображений получено условие представимости в виде интеграла Бохнера с L_p-оценкой

$$\int\limits_a^b \|F'(t)\|dt < +\infty$$

для отображений $F : I \to E$ в банаховы пространства (теорема 6).

Поскольку всякое липшицево отображение имеет конечную p-вариацию для всякого $p \in [1;+\infty)$, то упомянутая проблема Радона-Никодима вполне актуальна и для класса отображений $F : I \to X$ с конечной p-вариацией. Как показано в [3, 14], липшицево отображение $f : I \to E$ может быть нигде не дифференцируемым.

По аналогии с [7] мы вводим понятие отображения с компактной p-вариацией и доказываем теорему о дифференцируемости таких отображений почти всюду и представимости в виде интеграла Бохнера таких отображений $F : I \to E$ с L_p-оценкой $\int\limits_a^b \|F'(t)\|^p\, dt < +\infty$ (теорема 7).

Во-вторых, упомянутая проблематика рассмотрена в специальном классе линейных нормированных конусов с метрической топологией. На этот случай перенесена теорема 7 и получена теорема 8. Отдельно рассмотрен случай абсолютно непрерывного отображения в ЛНК, т.е. специфичный случай $p = 1$ (теорема 9).

Работа состоит из введения, трех основных разделов и заключения.

В разделе 1 рассматриваются базовые вопросы теории абстрактных выпуклых конусов, выделен специальный класс линейных нормированных конусов (ЛНК), для которых существует линейное инъективное изометричное вложение в банахово пространство. Рассмотрено несколько примеров абстрактных выпуклых конусов с нормой, которые могут как входить в класс ЛНК, так и нет.

В разделе 2 вводятся аналоги интеграла Лебега для отображений вещественного отрезка в ЛНК — интегралы типа Бохнера и Петтиса. Исследованы базовые свойства таких интегралов, получен критерий интегрируемости отображений по Бохнеру.

Раздел 3 посвящен описанной выше проблеме Радона-Никодима для отображений вещественного отрезка в ЛНК. В частности, получены условия дифференцируемости отображений с конечной p-вариацией ($p \geqslant 1$) и представимости их в виде интеграла Бохнера с L_p-оценкой на подинтегральное отображение.

1. Линейные нормированные конусы

В известной работе [19] доказано, что если в абстрактном выпуклом конусе имеется метрика $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$d(x,y) = d(x+z, y+z), \quad d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x,y), \quad \forall x,y,z \in X,\ \lambda \geqslant 0, \tag{1.1}$$

а также шар $\{x \in X \mid d(0,x) < \varepsilon\}$ — поглощающее множество при всех $\varepsilon > 0$, то такой конус X линейно, инъективно и изометрично (относительно метрики) вложен в некоторое линейное *нормированное* пространство E_X.

Интересно записать условия (1.1) в виде условий на какой-то аналог нормы в самом конусе X. Мы рассмотрим следующий аналог понятия нормы в выпуклых конусах, который предложен Ф.С. Стонякиным в [22].

Определение 1. Нормой в выпуклом конусе X называется функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим аксиомам $\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \geqslant 0$:

1) $\|x\| \geqslant 0;\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|;$

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|;$

4) $x + y = 0 \Rightarrow \|x\| = \|y\|.$

Определение 2. X называется выпуклым нормированным конусом (ВНК), если X — выпуклый конус и существует норма на X.

Отметим, что аксиома 4) определения 1 в выпуклых конусах, вообще говоря, не следует из остальных. Приведём соответствующий пример.

Пример 1. Пусть X — набор чисел $x \in [0; +\infty)$. Умножение на неотрицательный скаляр вводится стандартно. Сложение $x_1 \oplus x_2$ введем следующим образом:

$$x_1 \oplus x_2 := \min\{x_1, x_2\}.$$

Ведем естественную норму в выпуклом конусе X: $\|x\| := x \geqslant 0$. Аксиомы нормы выполнены, но $\|0\| \neq \|1\|$, хотя $0 \oplus 1 = 0$.

Заметим, что в случае операции сложения $x_1 \oplus x_2 := \max\{x_1, x_2\}$ множество $X =$
$= [0; +\infty)$ будет выпуклым нормированным конусом. Приведем некоторые другие естественные примеры выпуклых нормированных конусов.

Пример 2. Пусть $X = F$ — набор неотрицательных ограниченных вещественных функций $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляр. В этом случае мы рассматриваем обычную норму $\|f\|_F := \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$.

Пример 3. Пусть $X = K$ — набор выпуклых компактных подмножеств A некоторого нормированного линейного пространства E с операцией сложения по Минковскому и обычного умножения на скаляр. Норму в K введем стандартно: $\|A\|_K := \max\limits_{a \in A} \|a\|_E$.

Определение 3. Если в выпуклом нормированном конусе X существует метрика d, удовлетворяющая условиям (1.1), причём $d(0,x) = \|x\|$ для всякого $x \in X$, то назовём X *линейным нормированным конусом* (ЛНК).

Из известного результата [19] следует, что всякий ЛНК можно линейно инъективно изометрично вложить в некоторое банахово пространство E_X. Поэтому в X существует метрика $X \times X \to \mathbb{R}^+$ и естественно рассмотреть топологию, которая порождается системой окрестностей точки $x_0 \in X$ вида

$$B_\varepsilon(x_0) = \{y \in X \mid d(y, x_0) < \varepsilon\}.$$

Будем называть эту топологию *метрической*.

В качестве нетривиального примера ЛНК можно привести конус выпуклых компактных подмножеств банахова пространства E. Приведем нетривиальный пример ЛНК.

Пример 4. Пусть E — банахово пространство, а $K(E)$ — набор выпуклых компактов E. Как известно [6], $K(E)$ изометрично вложено в линейное пространство $L(E)$ классов эквивалентности (A, B) для $A, B \in K(E)$:

$$\forall A_1, A_2, B_1, B_2 \in K(E) \quad (A_1, B_1) \sim (A_2, B_2), \text{ если } A_1 + B_2 = A_2 + B_1.$$

Нулевой элемент $L(E)$ определяется так: $O_{L(E)} := \{(A, A) \mid A \in K(E)\}$. В пространстве $L(E)$ можно ввести норму: $||(A, B)||_{L(E)} := h(A, B)$, равную метрике Хаусдорфа множеств A и B. $K(E)$ изоморфно выпуклому конусу $\mathbb{K} := \{(A, \{0\}) \mid A \in K(E)\} \subset L(E)$. Вообще говоря, $L(E)$ не полно, но конус $\mathbb{K}$ секвенциально полон в $L(E)$.

Интересно также привести пример выпуклого конуса с нормой, не являющегося ЛНК.

Пример 5. Пусть X — набор пар неотрицательных чисел (a, b), для которых $a = 0$ тогда и только тогда, когда $b = 0$: $(a, b) = 0 \iff a = 0$. Введем норму следующим образом: $\|(a, b)\|_X := a$.

Ясно, что X линейно инъективно вложено в линейное пространство E пар вещественных чисел (a, b). Более того, всякое соответствующее линейное инъективное вложение $\varphi((a, b)) = (\alpha_1 a + \beta_1 b, \alpha_2 a + \beta_2 b)$ не изометрично, где $\alpha_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$ — фиксированные вещественные числа, для которых $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ и $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$. Действительно, для всякой возможной нормы $q(\cdot)$ на E

$$q(\varphi(a, b)) = q((\alpha_1, \alpha_2)a + (\beta_1, \beta_2)b) \geqslant q((\beta_1, \beta_2))b - q((\alpha_1, \alpha_2))a$$

и $\lim\limits_{b \to +\infty} q((\alpha a, \beta b)) = +\infty$ для любого фиксированного числа a. Поэтому существует такая пара $(a, b) \in X$, что $q((a, b)) \neq \|(a, b)\|_X$, то есть вложение φ не изометрично.

Ясно, что в случае существования линейного инъективного изометричного вложения $\varphi : X \to E_X$ можно ввести метрику $d(x, y) = \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{E_X}$. Стоит заметить, что существование линейного инъективного изометрического вложения $\varphi : X \to E_X$ означает, что на класс ЛНК с законом сокращения можно перенести все версии теоремы Хана-Банаха об отделимости выпуклых множеств. В частности, это касается известного результата о функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества, который мы будем использовать в дальнейшем.

Определение 4. Множество $A \subset X$ назовем *замкнутым*, если для всякой d-сходящейся последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ её предел x_0 лежит в A.

Теорема 1. *Пусть X — ЛНК с законом сокращения, $A \subset X$ — замкнутое выпуклое множество, $x_0 \notin A$. Тогда существует $\ell \in X^*$ такой, что $\ell(x_0) > \ell(A)$.*

2. Интеграл Бохнера в ЛНК: определение и свойства

Существует множество аналогов классического интеграла Лебега для отображений в бесконечномерные пространства Фреше. Наиболее известным и широко употребляемым является интеграл Бохнера, поскольку он сохраняет практически все свойства интеграла Лебега [4, 12, 14]. Однако класс интегрируемых по Бохнеру отображений не является достаточно широким для многих задач функционального анализа и его приложений [4, 12, 23].

В связи с этим наряду с интегралом Бохнера активно изучаются и используются другие понятия интеграла для отображений в бесконечномерные пространства Фреше [4, 12, 23]. В частности, хорошо известна теория интеграла Петтиса [4, 14, 23]. Класс интегрируемых по Петтису отображений существенно шире класса отображений, интегрируемых по Бохнеру. Но при этом интеграл Петтиса теряет множество существенных свойств интеграла Бохнера.

В данном разделе статьи мы введём аналоги понятий интегралов Петтиса и Бохнера для отображений $f : I = [a; b] \to X$, где X — ЛНК с законом сокращения. Наши рассуждения основаны на существовании линейного инъективного изометричного вложения всякого такого конуса в банахово пространство.

Для метрической топологии понятие интеграла Бохнера отображений $f : I \to X$ можно ввести, заменив местами сходимость по норме в X на сходимость по метрике. Этому посвящен пункт 2.2 данного раздела. Что же касается других типов сходимости, то тут мы вынуждены рассмотреть всю схему построения интеграла (от понятия измеримости и слабого интеграла), чему более подробно посвящен п. 2.3 настоящего раздела работы. Обе концепции интеграла Бохнера опираются на понятие и простейшие свойства интеграла Петтиса (п. 2.1.).

2.1. Интеграл Петтиса в ЛНК

Вслед за стандартной схемой построения интегралов [14] отображений в банаховы пространства будем вводить слабый интеграл Петтиса и сильный интеграл Бохнера отображений $f : I \to X$. Здесь мы снова используем существование линейного инъективного изометричного вложения X в банахово пространство E_X. Будем обозначать через X^* набор линейных ограниченных функционалов $\ell : X \to \mathbb{R}^+$ (т.е. $|\ell(x)| \leqslant C \cdot \|x\|$ для всякого $x \in X$ при некотором $C > 0$).

Определение 5. Отображение f будем называть интегрируемым по Петтису на измеримом по Лебегу множестве A, если всякому существует $x_A \in X$ такой, что

$$\ell(x_A) = \int_A \ell(f(t))dt \quad \forall \ell \in X^*,$$

где интеграл справа понимается в смысле Лебега. Примем обозначение:

$$(P)\int_A f(t)dt =: x_A.$$

По стандартной схеме [14] можно проверить следующий факт.

Теорема 2. *Если $f : I \to X$ интегрируема по Петтису на всяком измеримом по Лебегу подмножестве $A \subset I$, то функция множества*

$$\Phi(A) = (P)\int_A f(t)\,dt$$

сильно счетно аддитивна и абсолютно непрерывна относительно классической меры Лебега mes, заданной на борелевской σ-алгебре подмножеств I.

2.2. Интеграл Бохнера в ЛНК

Напомним, что наличие метрики $d : X \times X \to \mathbb{R}$ с соответствующими условиями позволяет линейно инъективно изометрично вложить X в некоторое банахово пространство E_X.

Введем понятие интеграла Бохнера для метрической топологии. По сути, это — обычное понятие интеграла Бохнера для отображения $f : I \to E_X$. Начнём с определения интеграла Бохнера простых отображений.

Определение 6. Через mes будем обозначать классическую меру Лебега на числовой прямой, I_k, A — измеримые по Лебегу подмножества I, $\chi_A(\cdot)$ — характеристическая функция множества A.

Простое отображение $f(t) := \sum\limits_{k=1}^{N} c_k\chi_{I_k}(t)$, где $c_k \in X$ (X — ЛНК),
$I = \bigcup\limits_{k=0}^{N} I_k$, $mes(I_0) = 0$, назовем интегрируемым по Бохнеру, если его норма $\|f(t)\| : I \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. В таком случае

$$(B)\int\limits_A f(t)\,dt := \sum_{k=1}^{N} c_k mes(A \cap I_k). \tag{2.1}$$

Определение 7. Будем считать, что X — ЛНК с законом сокращения. Тогда существует линейное инъективное изометричное вложение $\varphi : X \to E_X$.

Положим $d(x, y) := \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{E_X}$. Отображение $f : I \to X$ (X — ЛНК с законом сокращения) будем называть интегрируемым по Бохнеру, если существует такая последовательность простых отображений $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, что для почти всех $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n(t), f(t)) = 0, \ \lim_{n\to\infty}\int d(f_n(t), f(t)) = 0, \tag{2.2}$$

а также существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(B)\int\limits_I f_n(t)\,dt$. В таком случае по определению для всякого измеримого по Лебегу множества $A\subset I$

$$(B)\int\limits_A f(t)\,dt := \lim_{n\to\infty}(B)\int\limits_A f_n(t)\,dt. \tag{2.3}$$

Замечание 1. Условие существования предела $\lim\limits_{n\to\infty}(B)\int\limits_I f_n(t)\,dt$ можно заменить на условие полноты X как метрического пространства. Независимо от этого условия такой предел будет единственным, что обосновывает корректность определения 7.

Если $f: I\to X$ интегрируемо по Бохнеру в любой из нормированных топологий, то из условия $f(t)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ для почти всюду $t\in I$ (f_n — простые) следует, что для всякого $\ell\in X^*$ $\ell(f(t))=\lim\limits_{n\to}\ell(f_n(t))$ для почти всюду $t\in I$, откуда

$$\ell\left((B)\int\limits_I f_n(t)\,dt\right)=\int\limits_I \ell(f_n(t))\,dt\to\int\limits_I \ell(f(t))\,dt.$$

Теперь в силу непрерывности функционала ℓ

$$\ell\left((B)\int\limits_I f(t)\,dt\right)=\int\limits_I \ell(f(t))\,dt\quad \forall\ell\in X^*,$$

то есть любая интегрируемая по Бохнеру функция интегрируема и по Петтису, причем значения обоих интегралов совпадают. Это, в частности, означает, что функция множества ($A\subset I, A$ измеримо по Лебегу).

$$\Phi(A)=(B)\int\limits_A f(t)\,dt$$

сильно счетно-аддитивна и абсолютно непрерывна относительно меры mes.

Стандартно проверяется для всякого измеримого $A\subset I$.

Предложение 1. (i) $\int\limits_A \|f(t)\|\,dt \geqslant \|(B)\int\limits_A f(t)\,dt\|$;
(ii) $\int\limits_A(\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt=\alpha\int\limits_A f(t\,dt+\beta\int g(t)\,dt\quad \forall\alpha,\beta\geqslant 0)$.

Стандартным способом [14] проверяется критерий интегрируемости по Бохнеру отображений $F: I\to X$.

Теорема 3. *Пусть X — d-полное метрическое пространство. Отображение $f: I\to X$ интегрируемо по Бохнеру тогда и только тогда, когда f почти всюду есть предел последовательности простых отображений метрической топологии и функция $\|f(t)\|$ суммируема по Лебегу.*

Если X — d-полное метрическое пространство, то конус интегрируемых по Бохнеру отображений $f : I \to X$ снова будет полным метрическим пространством с метрикой

$$d(f,g) = \int\limits_I \rho(f(t),g(t))\,dt = \int\limits_I \|\varphi(f(t)) - \varphi(g(t))\|\,dt,$$

где $\varphi : X \to E_X$ — линейное инъективное непрерывное вложение. Это следует из соответствующего свойства интеграла Бохнера отображений в банаховых пространствах.

Аналогично проверяется, что для интеграла Бохнера можно усилить теорему 2.

Теорема 4. *Пусть $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, A и A_n — измеримы по Лебегу. Тогда для интегрируемого по Бохнеру отображения f на I в метрической топологии верно*

$$\int_A f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f(t)\,dt.$$

Доказательство. Отметим лишь, что из интегрируемости по Бохнеру на всём множестве вытекает интегрируемость на всяком его измеримом подмножестве. Это следует из свойств интеграла Бохнера отображений вещественного отрезка в банаховы пространства и доказывается по стандартной схеме [14]. □

3. Проблема Радона-Николима и p-вариация

3.1. Постановка задачи, решение проблемы в банаховом случае

Теперь вспомним о проблеме Радона-Никодима, которая для отображений $F : I \to E$ (E — ЛВП) была исследована Ф. С. Стонякиным ранее. Для банахова пространства E, в частности, рассматривалось семейство абсолютно выпуклых компактов $\mathcal{C}(E)$. Отображение $F : I \to E$ называлось в [7] компактно абсолютно непрерывным, если $F : I \to F(a) + E_C$ для некоторого $C \in \mathcal{C}(E), E_C = (sp\,C, \|\cdot\|_C)$, и $p_C(\cdot)$ — функционал Минковского множества $C \in \mathcal{C}(E)$. В частности, было доказано, что

Теорема 5. *Если $F : I \to E$ компактно абсолютно непрерывно, то*

$$F(x) = F(a) + (B)\int\limits_a^x F'(t)\,dt \quad (F' \text{ существует почти всюду на } I).$$

Введем понятие сильно абсолютно непрерывного отображения $F : I = [a;b] \to X$ в метрической топологии.

Определение 8. $F : I \to X$ назовем (сильно) абсолютно непрерывным, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left(\forall \bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k; \beta_k) \subset I : \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < \delta \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p} d(F(\alpha_k), F(\beta_k)) < \varepsilon.$$

Легко проверить, что всякий неопределенный интеграл Бохнера

$$F(x) = (B) \int\limits_{a}^{x} f(t)\, dt$$

отображения $f : I = [a; b] \to X$ сильно абсолютно непрерывен в метрической топологии.

Для ЛНК X зафиксируем банахово пространство E_X такое, что существует линейное инъективное изометричное вложение $\varphi : X \to E_X$. Тогда для всякого выпуклого симметричного компакта $C \subset E_X$ можно ввести метрику для $x, y \in X$:

$$d_C(x, y) := \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_C, \tag{3.1}$$

равную $+\infty$ в случае $\varphi(x) - \varphi(y) \notin span\, C \subset E_X$.

Теперь введем понятие компактно абсолютно непрерывного отображения.

Определение 9. $F : I \to X$ назовем компактно абсолютно непрерывным ($F \in AC_K(I, X)$), если для некоторого выпуклого компакта $C \subset X$ $\varphi(F) : I \to \varphi(F(a)) + E_C$, причем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left(\forall \bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k; \beta_k) \subset I : \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < \delta \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p} d(F(\alpha_k), F(\beta_k)) < \varepsilon.$$

Отметим простейшие свойства класса $AC_K(I, X)$.

Предложение 2. Справедливо включение $AC_K(I, X) \subset AC(I, X)$. В случае, когда X линейно инъективно и непрерывно вложен в конечномерное пространство $dim E < \infty$, классы $AC_K(I, X)$ и $AC(I, X)$ совпадают.

Для переноса теоремы 5 существенна непрерывность вложения ЛНК X в банахово пространство E_X. Это сразу приводит к необходимости учитывать выбор топологии в ЛНК X. Поэтому мы переходим к проблеме переноса теоремы 5 на отображения в ЛНК.

Попутно мы рассматриваем обобщение понятия абсолютно непрерывного отображения — отображения с p-вариацией ($p \in (1; +\infty)$) и ставим проблему представимости таких отображений в виде интеграла Бохнера. В этом плане удалось получить теоремы о представимости отображений с компактной p-вариацией в виде интеграла, которые новы даже для банаховых пространств (теоремы 7, 8).

3.2. Об отображениях с конечной p-вариацией со значениями в банаховых пространствах

Данный раздел посвящен переносу известной теоремы Ф. Рисса об описании вещественных функций, имеющих конечную p-вариацию на случай отображений в банаховы пространства.

Определение 10. Пусть на сегменте $[a; b]$ задано отображение $F : I \to E$ (E — банахово пространство). Разложим $[a; b]$ на части точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ и составим сумму

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|F(x_{k+1}) - F(x_k)\|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}},\ p \geqslant 1.$$

Точная верхняя граница множества всевозможных сумм V называется полной p-вариацией отображения F и обозначается через $V^p(F, [a; b])$.

Лемма 1. *Непосредственно проверяются основные свойства для отображений с конечной p-вариацией:*

- $F, g \in BV^p \Rightarrow F \pm g \in BV^p$, $\lambda F \in BV^p$ *(BV^p означает, что F имеет конечную p-вариацию);*
- $F \in BV^p \Rightarrow F \in AC$ *(AC — класс абсолютно непрерывных функций);*
- $F \in Lip \Rightarrow F \in BV^p$, $1 < p < \infty$ *(Lip — класс липшицевых функций).*

Хорошо известно, что липшицево отображение может быть нигде не дифференцируемым [2]. Оказывается, что условие ограниченной p-вариации сильнее условия абсолютной непрерывности, но слабее условия Липшица, поэтому исходная проблематика переносится и на случай p-вариации. Иными словами, отображение с конечной p-вариацией может также быть нигде не дифференцируемым.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Если функция $F : [a; b] \to E$ (где E — банахово пространство) имеет конечную полную p-вариацию, почти всюду дифференцируема на $[a; b]$, тогда*

$$F(x) = F(a) + (B)\int_a^x f(t)\,dt,$$

где $\int_a^x \|f(t)\|^p\,dt < \infty$.

Доказательство. В неравенстве

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|F(x_{k+1}) - F(x_k)\|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}} \leqslant K$$

(где K не зависит от способа разложения $[a, b]$, причем за число K можно принять интеграл $\int\limits_a^b \|f(t)\|^p\,dt$) для любой конечной системы взаимно неналегающих интервалов (a_k, b_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$, содержащейся в $[a, b]$, будет

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\|F(b_k) - F(a_k)\|^p}{(b_k - a_k)^{p-1}} \leqslant K.$$

Но в силу сумматорного неравенства Гёльдера

$$\sum_{k=1}^{n} \|F(b_k) - F(a_k)\| = \sum_{k=1}^{n} \frac{\|F(b_k) - F(a_k)\|}{(b_k - a_k)^{\frac{p-1}{p}}} (b_k - a_k)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} \frac{\|F(b_k) - F(a_k)\|^p}{(b_k - a_k)^{p-1}}} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)}, \quad \text{где } q = \frac{p}{p-1}$$

и, стало быть,

$$\sum_{k=1}^{n} \|F(b_k) - F(a_k)\| \leqslant \sqrt[p]{K} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)},$$

откуда вытекает абсолютная непрерывность функции $F(x)$.

Значения функции $F(x)$ содержатся в некотором замкнутом сепарабельном подпространстве E_0 пространства E. Так как слабые пределы элементов из E_0 заключены в E_0, то почти все значения $F(x)$ содержатся в E_0. Таким образом, $F(x)$ слабо измерима, почти сепарабельнозначна и, следовательно, сильно измерима.

Положим $f_n(t) = 2^n[F(k2^{-n}) - F((k-1)2^{-n})]$ при $(k-1)2^{-n} \leqslant t < k2^{-n}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

$$2^{-n} = x_{k+1} - x_k.$$

Следовательно,

$$f_n(t) = \frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \ \lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t).$$

При этом

$$\int\limits_a^b \|f_n(t)\|^p\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} \|f_n(t)\|^p\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})\|^p}{(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)})^{p-1}} \leqslant K$$

и, стало быть,

$$\int\limits_a^b \|f(t)\|^p\,dt < +\infty.$$

Далее, $f_n(t)$ почти всюду сходится слабо к $f(t)$, поэтому почти всюду $\|f(t)\| \leqslant \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|f_n(t)\|$. Для любого линейного непрерывного функционала $\ell \in E^*$

$$\ell(F(b) - F(a)) = \int\limits_a^x \ell(f(t))\,dt = \ell\left((B)\int\limits_a^x f(t)\,dt\right).$$

Поэтому

$$F(b) - F(a) = (B)\int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Теорема доказана. □

3.3. Отображения с компактной p-вариацией в ЛНК: метрическая топология

Введем понятие отображения с компактной p-вариацией при $p \in [1; +\infty)$. Если E — банахово пространство, то для всякого выпуклого симметричного компакта $C \subset E$ полной p-вариацией в E_C отображения $F : I \to F(a) + E_C$ будем называть

$$\sup \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\|F(x_k) - F(x_{k-1})\|_C^p}{(x_k - x_{k-1})^{p-1}}, \tag{3.2}$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка $[a; b] : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Если полная вариация конечна, то отображение F будем называть отображением с компактной p-вариацией. При $p > 1$ всякое такое отображение будет компактно абсолютно непрерывным. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть $F : I \to E$ имеет компактную p-вариацию ($p > 1$). Тогда*

$$F(x) = F(a) + (B)\int\limits_a^x F'(t)\,dt, \tag{3.3}$$

причем $\int \|F'(t)\|_C^p\,dt < +\infty$ для соответствующего выпуклого компакта $C \subset E$.

Доказательство. Данное утверждение следует из того, что $F \in AC_K(I, E)$ (см. лемму 1). Далее нужно комбинировать теоремы 5 и 6. □

Тогда условие компактной p-вариации для $F : I = [a;b] \to X$ можно ввести так:

$$\sup \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_C^p\left(F(x_k), F(x_{k-1})\right)}{(x_k - x_{k-1})^{p-1}} < +\infty, \tag{3.4}$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка $[a;b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Примем обозначение $F \in BV^p(I, X, C)$.

Из $F \in BV^p(I, X, C)$ следует $F \in AC_k(I, E_X)$ и далее, комбинируя теоремы 5 и 6, получаем следующий результат.

Теорема 8. *Пусть X — d-полное метрическое пространство. Если при $p > 1$ $F \in BV^p(X, C)$ для некоторого выпуклого симметричного компакта $C \subset E_X$, то F почти всюду дифференцируемо в X и верно равенство*

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x F'(t)\, dt, \tag{3.5}$$

где $\int_a^b d_C^p(0, F'(t))\, dt = \int_a^b \|\varphi(F'(t))\|_C^p dt < +\infty$.

Отметим, что d-полнота существенна для принадлежности $F'(t) \in X$.

Замечание 2. Покажем класс примеров применимости данного результата. Отображение $F : I \to X$ будет иметь компактную p-вариацию, если

$$F(x) = F(a) + \Phi(x)C \ (a \leqslant x \leqslant b)$$

для некоторого компакта $C \subset X$ и

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\, dt, \quad \varphi : I \to \mathbb{R}, \quad \varphi \in L_p([a;b]).$$

Из доказанной нами теоремы 5 следует, что такое отображение почти всюду имеет производную F' в метрической топологии ЛНК X, причем

$$\int_a^b \|F'(t)\|^p\, dt < +\infty.$$

Отметим, что при $p = 1$ отображение ограниченной вариации может не быть абсолютно непрерывным, поэтому в таком случае стоит потребовать абсолютную непрерывность отображения F.

Теорема 9. *Пусть X — d-полное метрическое пространство. Если для некоторого выпуклого симметричного компакта $C \subset E_X$ верно*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left(\forall \bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k; \beta_k) \subset I : \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < \delta \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} d_C(F(\alpha_k), F(\beta_k)) < \varepsilon, \tag{3.6}$$

то F почти всюду дифференцируемо в X и верно

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x F'(t)\, dt, \tag{3.7}$$

где $\int\limits_a^b d_C(0, F'(t))\, dt = \int\limits_a^b \|\varphi(F'(t))\|_C dt < +\infty$.

Доказательство. Условие 3.6 гарантирует компактную абсолютную непрерывность отображения $\varphi(F) : I = [a; b] \to E_X$. Далее нужно воспользоваться теоремой 5 и полнотой метрического пространства X. □

Полученный результат можно использовать для отображения в конус выпуклых компактов любого банахова пространства со стандартной нормой и метрикой Хаусдорфа (см. пример 5).

Заключение

В работе рассмотрено понятие линейного нормированного конуса (ЛНК). Для отображений в ЛНК X с законом сокращения введен и исследован аналог понятия интеграла Бохнера для отображений $f : I = [a; b] \to X$ в метрической топологии.

Была затронута известная проблема Радона-Никодима о представимости абсолютно непрерывных отображений в виде интеграла Бохнера. Для отображений в банаховы пространства эта проблема была исследована Ф. С. Стонякиным в его кандидатской диссертации [7].

Мы развили эти исследования в новом направлении. Во-первых, в классе банаховых пространств работы мы рассмотрели класс отображений с так называемой p-вариацией при $p \in [1; +\infty)$. В работе получены условия дифференцируемости таких отображений почти всюду и представимости в виде интеграла Бохнера, которые новы даже для банаховых пространств.

Во-вторых, упомянутая проблематика рассмотрена в классе ЛНК с метрической топологией. На этот случай перенесена теорема 7 — сформулирована теорема 8. Дано замечание о содержательном классе примеров (см. замечание 2). Отдельно рассмотрен случай $p = 1$, т.е. сильно абсолютно непрерывного отображения в ЛНК (теорема 9).

Список цитируемых источников

1. *Гельфанд И. М.* Abstracte Funktionen und lineare Operatoren. // Математический сборник. – 1938. – Т. 4(46). – С. 235-286.

   Gel'fand I. M. (1938). Abstracte Funktionen und lineare Operatoren. Math. Sb. 46 (4), 235-287.

2. *Гельфанд И. М, Яглом А. М.* Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике // Успехи мат. наук. – 1956. – Т.11, вып. 1(67). – С. 77-114.

   Gel'fand I. M., Yaglom A. M. (1956). Integration in functional spaces and its application in quantum physics (in Russian). Uspekhi Mat. Nauk 11:1, 77-114.

3. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир,1967. — 624 с.

   Yosida K. (1965). Functional analysis. Berlin: Springer.

4. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа. Учебное пособие. — Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. — 600 с.

   Kadets V. M. (2006). Course of Functional Analysis. Textbook (in Russian). Kharkov.

5. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ. // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — Т. 53. — С. 64-132.

   Orlov I. V. (2014). Introduction to the sublinear analysis(in Russian). Sovr. matem. Fund. Napravleniya 53, 64-132.

6. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — Москва: Физматлит, 2007 — 440 с.

   Polovinkin E. S., Balashov M. V., (2007). Elements of convex and strongly convex analysis (in Russian). Moscow: Fizmatlit.

7. *Стонякин Ф. С.* Компактные характеристики отображений в локально выпуклых пространствах и их приложения в векторном интегрировании. // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 – Симферополь: 2011. — 161 с.

   Stonyakin F. S. (2011). Compact properties of mappings in locally convex spaces and their applications in vector integration (in Russian). PhD Thesis, Simferopol.

8. *Birkhoff G.* Integration of functions with values in a Banach space. — Trans. Amer. Math. Soc. — 1935. — Vol.38. — P. 357–378.

9. Bochner S. Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vectorraumes. — Fund. Math. — 1933. — Vol.20. — P. 262-276.

10. *Dunford N., Shwarcz J. T.* Linear operators. General theory. — New York: Interscience Publishers, 1958.

11. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector Measures. — Providence: Amer. Math. Soc., 1977.

12. *Edwards R.*, Functional Analysis. Theory andapplications, Holt, Rinehart and Winston, New York – London, 1965.

13. *Fuchssteiner B., Lusky W.* Convex cones, North Holland Math. Stud., 56, North Holland, Amsterdam, 1981.

14. *Hille E., Phillips R. S.* Functional Analysis and Semigroups, Lect. Notes in Math, no. 481, Springer Verlag, New York, 1975.

15. *Keimel K., Roth W.* Ordered cones and approximation, Lecture Notes in Math., 1517, Springer, Berlin, 1992.
16. *Pettis B. J.* On integration in vector space, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), no. 2, 277-304.
17. *Phillips R. S.* On weakly compact subsets of a Banach space, Amer. J. Math., 65 (1943), no. 3, 108-136.
18. *Price G. B.*, The theory of integration, Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942), 498-521.
19. *Rädström J. H.* An embedding theorem for space of convex sets, Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 165-169.
20. *Roth W.* A combined approach to the fundamental theorems for normed spaces, Bulletin Acad. Sinica, 11(1994), 83-89.
21. *Roth W.* Hahn-Banach type theorems for locally convex cones, Journal of the Australian Math. Soc. (Ser. A), 68 (2000), no. 1, 104-125.
22. *Stonyakin F. S.* An analogue of the Hahn-Banach theorem for functionals on abstract convex cones. // Eurasian Math. J. — Vol.7, no.3. — P. 89-99.
23. *Vachaniya N. N., Tarieladze V. I., Chobanyan S. A.* Probabilistic distributions in Banach spaces (in Russian). Moscow: Nauka, 1985.

Получена 25.04.2016