Динамические системы, 2016, том 6(34), №1, 51–60

УДК 517.9+521.1+531.3

Замкнутые динамические модели[1]

В. Н. Тхай

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Москва 117997. *E-mail: tkhaivn@ipu.ru*

Аннотация. Вводится понятие замкнутой динамической модели. Показывается, что замкнутая динамическая модель стала развитием модели теории возмущений, модели теории вынужденных колебаний и модели теории управления. Формулируются две основные задачи в динамике замкнутой модели. Результаты по ним излагаются для N-планетной задачи и задачи трех тел.

Ключевые слова: замкнутая модель, связь, малый параметр, периодическое решение, устойчивость, резонанс, N-планетная задача, задача трех тел.

Closed dynamical models

V. N. Tkhai

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow 117997.

Abstract. The concept of closed dynamical model is introduced. It is shown that the concept of closed dynamical model is the development of the concept of perturbation theory model, theory of forced oscillations model and control theory model. Two main problems of the closed model dynamics are stated. For the N-planet problem and the three-body problem new results are obtained.

Keywords: closed model, coupling, small parameter, periodic solution, stability, resonance, N-planet problem, three-body problem.

MSC 2010: 34A34, 37C27, 37C80, 70F10

1. Введение

В классической динамике используются модели, которые не содержат в явном виде время (например, уравнения Лагранжа, уравнения Гамильтона, уравнения в квазикоординатах, задача трех тел, уравнения Эйлера-Пуассона и др.). Действие тел, не включенных в данную систему, учитывается в рамках теории возмущений. При этом действующие возмущения обусловлены различными факторами, как, например: 1) изменением параметров системы, 2) переходом в неинерциальную систему координат, 3) слабым действием тел, не включенных в данную систему. Эти возмущения могут быть контролируемыми (малое изменение известных параметров, переход на слабо эллиптическую орбиту в задаче трех тел, малые вибрации точки подвеса маятника и т.д.) или неконтролируемыми (параметры известны приближенно, скорость вращения системы координат измерена неточно, конкретный вид возмущений неясен). Возмущения могут сохранять автономность

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. № 16-01-00587

системы или же приводить к системе, близкой к автономной, — квазиавтономной системе. Другая сторона проблемы связана с учетом математического класса, к которому принадлежит модель, и класса действующих возмущений. Например, модель может описываться гамильтоновыми уравнениями, а возмущения могут или сохранять гамильтоновый характер системы, или же квазиавтономная система будет описываться системой ОДУ в виде Коши. Наконец, динамическая модель может быть гладкой или негладкой, так же как и возмущение, которое может быть различного класса, в том числе, иметь разную степень гладкости. С теоретической точки зрения и для приложений возмущения обычно принимаются принадлежащими к тому же классу, что и модель, или рассматриваются из более широкого класса.

В теории возмущений выделяются [10, 12] грубый случай, когда действие возмущений незначительно количественно меняет динамику модели, и негрубый случай, в котором динамика модели меняется качественно. Следовательно, замыкание модели теории возмущений зависит от интересующего динамического свойства модели, а также от класса действующих возмущений [10, 12]. Эти трудности преодолеваются в теории вынужденных колебаний и теории управления.

2. Замкнутая динамическая модель

В динамической модели учитываются существенные факторы. Учет других — неучтенных факторов становится предметом теории возмущений. Действие возмущений может чуть-чуть количественно изменять динамику систему или принести новое качество. Последнее обычно связано с бифуркацией.

Возмущения возникают из-за малого действия на систему других систем. Поэтому, учитывая это действие, приходим к новой — замкнутой динамической модели. Неучтенное действие на систему теперь учитывается связями между системами: получаются взаимосвязанные системы. В силу малости неучтенных факторов связи между системами здесь малы, т.е. получается замкнутая модель слабо связанных систем. Если величина связи между системами не ограничена условием малости, то получаем просто замкнутую динамическую модель. Взаимосвязанными являются, к примеру, сетевые системы.

Связи между системами зависят от фазовых переменных. Однако взаимодействие систем также может вызываться их ускорениями. Поэтому связи могут содержать и производные от фазовых переменных. Таким образом строится, например, теория неголономных механических систем со связями высокого порядка [4, 2].

Замкнутые динамические модели используются в теории вынужденных колебаний. Путем исчерпывающего задания действия другой системы на модель получается замкнутая модель. Такая же ситуация имеет место в теории управления, в которой другая система действует управлением на модель. В теории управления собственная динамика модели обычно частично учитывается. Иногда используется коррекция модели [5]

В исследовании замкнутой динамической модели ставятся две основные задачи: 1) при каких условиях на связи в замкнутой модели сохраняется свойство динамики, имеющейся в подсистемах системы и 2) какие качественные эффекты в замкнутой модели связаны с наличием связи между подсистемами.

В настоящее время в научной литературе наблюдается бум в исследовании взаимосвязанных и сетевых систем [6]. При этом изучаемые модели и постановки задач отличаются большим многообразием. Ниже на двух основных задачах небесной механики показывается, к каким результатам приводят рассмотрение задач с позиций замкнутой динамической модели.

3. N-планетная задача

В N-планетной задаче изучается движение системы из $N+1$ гравитирующих точек, одна из которых (Солнце) имеет массу, значительно превосходящую массы остальных точек (планет). Значит, здесь при пренебрежении взаимодействием планет между собой получаем N независимых задач двух тел (Солнце-планета), а влияние притяжения других планет на движение данной планеты учитывается малыми связями между этими задачами. В результате имеем замкнутую динамическую модель — слабо связанные системы.

Используем уравнения движения задачи в цилиндрических координатах (см. [1], с.365)

$$\ddot{\rho}_s-\rho_s\dot{\theta}_s^2=\frac{\partial\Omega_s}{\partial\rho_s},\quad \frac{d}{dt}(\rho_s^2\dot{\theta}_s)=\frac{\partial\Omega_s}{\partial\theta_s},\quad \ddot{z}_s=\frac{\partial\Omega_s}{\partial z_s},\quad s=1,\ldots,N, \tag{3.1}$$

$$\Omega_s=\frac{f(m_0+m_s)}{\sqrt{\rho_s^2+z_s^2}}+\Omega_{s1}, \tag{3.2}$$

$$\Omega_{s1}=f\sum_{j=1(s\neq j)}^{N}m_j\left[\frac{1}{\Delta_{sj}}-\frac{\rho_s\rho_j\cos(\theta_s-\theta_j)+z_sz_j}{(\rho_s^2+z_s^2)^{3/2}}\right],$$

$$\Delta_{sj}^2=\rho_s^2+\rho_j^2-2\rho_s\rho_j\cos(\theta_s-\theta_j)+(z_s-z_j)^2, \tag{3.3}$$

где m_0 — масса Солнца, m_s — массы планет ($m_0\gg m_s$).

Приведенная система инвариантна относительно замены:

$$\rho\to\rho,\theta\to\pm\theta,z\to z(-z),t\to -t.$$

Другими словами, N-планетная задача принадлежит к классу механических систем [11].

При $\Omega_{s1}=0$ ($s=1,\ldots,N$) система (3.1), (3.2) распадается на N задач двух тел. Все эти задачи имеют семейство плоских эллиптических орбит, на которых периоды обращения зависят только от больших полуосей a_s эллипсов: эксцентриситеты e_s отвечают за вытянутость орбиты. Плоские периодические орбиты образуют семейство условно-периодических орбит с N частотами. Среди этих орбит существует семейство резонансных периодических орбит, где $a_s=a_s(h), s=1,\ldots,N$:

h — постоянная интеграла энергии. Эти орбиты образут плоское порождающее семейство орбит. Поэтому без ограничения общности полагается: $z_s \equiv 0, s = 1, \ldots, N$.

Эллиптические орбиты задачи двух тел и порождающие плоские периодические орбиты N-планетной задачи относятся к симметричным периодическим движениям [13]. Установлено, что невырожденное семейство симметричных периодических движений обратимой механической системы устойчиво относительно параметрических возмущений системы [13].

В работе [14] доказывалась невырожденность семейства эллиптических орбит задачи двух тел. Таким же будет порождающее семейство в N-планетной задаче [14]. Безразмерные параметры $m_s/m_0, s = 1, \ldots, N$, в исследуемой задаче малы. Следовательно, по указанной выше теореме об устойчивости [13] в N-планетной задаче существуют плоские периодические резонансные орбиты, близкие к орбитам задач двух тел, на которых планеты периодически выстраиваются вдоль одной прямой (парад планет). Парад планет наблюдается на $(N+1)$-параметрическом семействе орбит, а период на нем зависит только от одного параметра – постоянной интеграла энергии.

Таким образом, вопрос переноса динамического свойства задачи двух тел (иметь эллиптические орбиты) на замкнутую модель N-планетной задачи получает решение и приводит к выводу о существовании резонансных периодических орбит N-планетной задачи, на которых наблюдается парад планет.

4. Неограниченная (общая) и ограниченная задачи трех тел

4.1. Задача трех тел

Неограниченная задача трех тел — задача о движении механической системы, состоящей из трех материальных точек $\mathbf{P_0}, \mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}$ с массами M_0, M_1, M_2, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, имеет более чем 300-летную историю и введена в рассмотрение Ньютоном. По содержанию здесь имеем полностью замкнутую динамическую модель.

Ниже задача трех тел рассматривается для закона взаимодействия, когда сила F_{ij} притяжения точек $\mathbf{P_i}$ и $\mathbf{P_j}$ пропорциональна произвольной степени n $(n \neq -1)$ взаимного расстояния r_{ij}

$$F_{ij} = fM_iM_jr_{ij}^n(i, j = 1, 1, 2; i \neq j),$$

где f — некоторая постоянная. Такая постановка задачи восходит к Лапласу [17], Раусу [18] и Ляпунову [3], имеет приложения не только в небесной механике, но и в звездной динамике. Ньютоновскому взаимодействию отвечает значение $n = -2$.

Вместе с неограниченной (общей) задачей трех тел в небесной механике исследуется ограниченная задача трех тел — задача о движении пассивно гравитирующей точки в поле притяжения двух основных тел. Эта задача введена в рассмотрение Эйлером [15] и часто считается основной задачей небесной механики [7]. В задаче пассивно гравитирующая точка не притягивает основные тела:

нарушается закон всемирного тяготения. Модель не замкнута. Модель замыкается, если учесть притяжение основных тел точкой малой массы. В этом случае в задаче трех тел проявляются динамические эффекты, не наблюдаемые в рамках ограниченной задачи трех тел [8].

Ниже будет показано, что неограниченная задача трех тел описывается замкнутой динамической моделью. Эта модель становится слабо связанной, когда масса одной точки мала, а при стремлении указанной массы к нулю в пределе получаем уравнения движения ограниченной задачи трех тел. При этом используются полученные ранее автором результаты [9].

Точки $\mathbf{P_0}, \mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}$ образуют треугольник со сторонами $\mathbf{P_0P_1}$, $\mathbf{P_0P_2}$, $\mathbf{P_1P_2}$ и соответствующими им длинами r_1, r_2, r_3: угол между сторонами обозначим через ψ. Для динамического описания задачи используем независимые переменные r, y, ψ:

$$2r^2 = \mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 + \mu_3 r_3^2, \quad y = \ln \frac{r_2}{r_1},$$

$$m_i = \frac{M_i}{M}, \quad \mu_{i+j} = m_i m_j \quad (i, j = 0, 1, 2; i \neq j), \quad \mu = \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3.$$

Тогда получается такое выражение для функции Рауса [9]

$$R = r^2 + r^2 F_2 + F_1 - \frac{\beta^2}{4r^2} + r^{n+1} F_0 \quad (n \neq -1),$$

где

$$\begin{aligned}
&F_2 = \frac{\mu}{S^2}(\dot{y}^2 + \dot{\psi}^2),\\
&F_1 = -\frac{\beta}{S}[\mu_3(\dot{\psi}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi) - (\mu_2 + \mu_3)\dot{\psi}e^y],\\
&F_0 = -\frac{fM}{n+1}\left(\frac{2}{S}\right)^{(n+1)/2}[\mu_1 e^{-(n+1)y/2} + \mu_2 e^{(n+1)y/2} + \mu_3(e^y + e^{-y} - 2\cos\psi)^{(n+1)/2}],\\
&S = \mu_1 e^{-y} + \mu_2 e^y + \mu_3(e^y + e^{-y} + 2\cos\psi),
\end{aligned}$$

а через β обозначена постоянная интеграла площадей.

4.2. Уравнения движения

Уравнения движения, определяющие изменение конфигурации треугольника, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{\partial F_2}{\partial \dot{\xi}} + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{\xi}}\right) = r^2\frac{\partial F_2}{\partial \xi} + \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + r^{n+1}\frac{\partial F_0}{\partial \xi},$$

где через ξ обозначены переменные y и ψ. Выберем в качестве новой независимой переменной угол θ, определяемый соотношением

$$2r^2 d\theta/dt = \beta.$$

Тогда получим

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{\mu}{S^2}\frac{d\psi}{d\theta}-\frac{\mu_3\cos\psi-(\mu_2+\mu_3)e^y}{S}\right]=\frac{\mu}{2}\frac{\partial F_2^*}{\partial\psi}+\frac{\partial F_1^*}{\partial\psi}+\frac{r^{n+3}}{\beta^2}\frac{\partial F_0^*}{\partial\psi},$$
$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{\mu}{S^2}\frac{dy}{d\theta}-\frac{\mu_3\sin\psi}{S}\right]=\frac{\mu}{2}\frac{\partial F_2^*}{\partial y}+\frac{\partial F_1^*}{\partial y}+\frac{r^{n+3}}{\beta^2}\frac{\partial F_0^*}{\partial y},$$

где теперь

$$F_2^*=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right],$$
$$F_1^*=-\frac{1}{S}[\mu_3(\frac{d\psi}{d\theta}\cos\psi+\frac{dy}{d\theta}\sin\psi)-(\mu_2+\mu_3)e^y\frac{d\psi}{d\theta}],$$
$$F_0^*=-\frac{fM}{n+1}[\mu_1e^{-(n+1)/2}+\mu_2e^{(n+1)/2}+\mu_3(e^y+e^{-y}-2\cos\psi)^{(n+1)/2}]S^{-(n+1)/2}.$$

Здесь через r обозначена величина $r\sqrt{2}$.

Далее после вычисления производных и необходимых преобразований получим систему

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{S^2}\frac{d\psi}{d\theta}\right)&=-\frac{1}{S^2}\frac{dy}{d\theta}+\frac{1}{2}\frac{\partial F_2^*}{\partial\psi}+\frac{r^{n+3}}{\mu\beta^2}\frac{\partial F_0^*}{\partial\psi},\\ \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{S^2}\frac{dy}{d\theta}\right)&=\frac{1}{S^2}\frac{d\psi}{d\theta}+\frac{1}{2}\frac{\partial F_2^*}{\partial y}-\frac{r^{n+3}}{\mu\beta^2}\frac{\partial F_0^*}{\partial y}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Наконец, добавляя к системе (4.1) уравнение для переменной r

$$\ddot r=rF_2+\frac{\beta^2}{r^3}+(n+1)r^nF_0,\tag{4.2}$$

получим полную систему уравнений, описывающих плоскую неограниченную задачу трех тел.

4.3. Распад замкнутой системы на независимые подсистемы

Вычислим производные

$$\frac{\partial F_0*}{\partial\psi}=-fM\mu_3P^{-(n+3)/2}(Pq^{(n-1)/2}-Q)e^y\sin\psi,$$
$$\frac{\partial F_0*}{\partial y}=-fMP^{-(n+3)/2}[\mu_2(Pp^{(n-1)/2}-Q)e^y+\mu_3(Pq^{(n-1)/2}-Q)(e^y-\cos\psi)]e^y,$$
$$P=\mu_1+\mu_2+\mu_3q,\quad Q=\mu_1+\mu_2p^{(n+1)/2}+\mu_3q^{(n+1)/2},\quad p=e^{2y},\quad q=1+e^{2y}-e^y\cos\psi.$$

При $m_2\to 0$ имеем $\mu_2/\mu\to 1/m_1, \mu_3/\mu\to 1/m_0$, и в этом случае система

(4.1),(4.2) распадается на две независимые подсистемы

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\theta}\left(e^{2y}\frac{d\psi}{d\theta}\right) = -2e^{2y}\frac{dy}{d\theta} - \\
&-\frac{fMr_1^{n+3}}{\beta*^2}m_1[(1+e^{2y}-2e^y\cos\psi)^{(n-1)/2}-1](e^y-\cos\psi)e^y, \\
&\frac{d}{d\theta}\left(e^{2y}\frac{dy}{d\theta}\right) = 2e^{2y}\frac{d\psi}{d\theta} + e^{2y}\left[\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2 + [\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right] - \frac{fMr_1^{n+3}}{\beta*^2}\times \\
&\times\{m_0(e^{ny}-e^y)e^y + m_1[(1+e^{2y}-2e^y\cos\psi)^{(n-1)/2}-1](e^y-\cos\psi)e^y\}, \\
&\beta_* = \beta/\mu,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\ddot{r}_1 = \frac{\beta_*^2}{r^2} - fMr_1^n. \tag{4.4}$$

В этом варианте задачи тело $\mathbf{P_2}$ нулевой массы не оказывает влияние на движение тел $\mathbf{P_0}$ и $\mathbf{P_1}$ конечной массы. Следовательно, в пределе $m_2 \to 0$ из уравнений (4.1),(4.2) неограниченной задачи трех тел выводятся уравнения (4.3), (4.4) ограниченной задачи трех тел. В этой задаче изменение конфигурации треугольника и его размера происходит независимо друг от друга. При этом уравнение (4.4), описывающее изменение размера треугольника, интегрируется для всемирного закона притяжения.

Математически системы (4.3), (4.4) независимы друг от друга, поэтому каждая из этих систем – замкнута. С другой стороны, в модели ограниченной задачи трех тел не выполняется третий закон Ньютона. Поэтому отдельно модели (4.3) и (4.4), не учитывающие действие всех факторов, являются не замкнутыми.

4.4. Об одном динамическом свойстве замкнутой модели

Уравнения (4.1), (4.2) допускают частные решения, в которых точки $\mathbf{P_0}, \mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}$ все время образуют равносторонний треугольник. Эти решения называются треугольными точками либрации или лагранжевыми (лапласовыми) решениями. Для ньютоновского закона притяжения существование точек либрации установил Лагранж [16], результат обобщен Лапласом [17] на случай произвольного действительного n.

В окрестности треугольных точек либрации уравнения (4.1) приобретают вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = u\left[\frac{3}{4}(m_1+m_2)x + \frac{\sqrt{3}}{4}(m_1-m_2)y\right] + \ldots, \\
&\frac{d^2y}{dt} - 2\frac{dx}{dt} = u\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(m_1-m_2)x + \left(1 - \frac{3}{4}(m_1+m_2)y\right)\right] + \ldots, \\
&x = \psi - \pi/3, \quad u = fM(1-n)\rho^{n+3}/\beta_*^2, \quad \beta_* = \beta/\nu, \quad \nu = \mu_1+\mu_2+\mu_3,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

а зависимость ρ от θ задаются уравнением

$$\ddot{\rho} = \beta_*^2\rho^{-3} - fM\rho^n, \quad \rho^2\frac{d\theta}{dt} = \beta_*, \quad r = \sqrt{\nu}\rho. \tag{4.6}$$

Рассмотрим постоянные решения, для которых

$$fM\rho^{n+1} = \beta_*^2, \quad u = 1 - n. \tag{4.7}$$

Для системы (4.5) вычислим корни характеристического уравнения

$$\kappa_{1,2}^2 = \frac{-(n+3) \pm \sqrt{(n+3)^2 - 3(n-1)^2\nu}}{2}.$$

Отсюда получаем необходимые условия Рауса-Жуковского

$$\nu < \frac{1}{3}\left(\frac{3+n}{1-n}\right)^2$$

гироскопической стабилизации постоянных треугольных решений.

В случае $n = -2$ имеем: $\nu < 1/27$. В этот интервал входит значение $\nu = 1/36$, для которого имеем корни

$$\kappa_1^2 = -\frac{1}{4}, \quad \kappa_2^2 = -\frac{3}{4}$$

и соответствующие частоты малых колебаний

$$\omega_1 = 1/2, \quad \omega_2 = \sqrt{3/4}.$$

Частота малых колебаний по ρ в окрестности постоянного решения (4.7) равна: $\omega_0 = \sqrt{n+3}$. Для ньютоновского закона притяжения получаем $\omega_0 = 1$.

Таким образом, в задаче об устойчивости постоянных треугольных точек либрации при ньютоновском законе притяжения возникает резонанс третьего порядка: $\omega_0 = 2\omega_1$. В ограниченной задаче трех тел, которая описывается двумя независимыми системами (4.3) и (4.4), этот резонанс не сказывается в независимых моделях (4.3) и (4.4). Если же рассматривать замкнутую систему (4.1), (4.2) с ненулевым значением параметра m_2, тогда резонанс $\omega_0 = 2\omega_1$ приводит [8] к взрывной неустойчивости.

Таким образом, замкнутая модель, описывающая классическую задачу трех тел, обладает новым динамическим свойством — взрывной неустойчивостью, обусловленной одновременным изменением конфигурации треугольника и его размера.

5. Заключение

Понятие замкнутой динамической модели является развитием понятия модели теории возмущений, модели теории вынужденных колебаний и модели теории управления. Из этого понятия естественным образом вытекают сформулированные в настоящей статье две основные задачи динамики для замкнутой модели. Модели возникли в классической небесной механике, в которой введенное понятие замкнутой динамической модели также приводит к новым результатам.

Список цитируемых источников

1. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. — М.: Наука, 1968. — 800 с.

   Duboshin, G.N. (1968). Celestial mechanics. The main tasks and methods (in Russian). Moscow: Nauka.

2. *Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. — СПб: Изд-во С.Петербург. ун-та. 2002. — 276 с.

   Zegzhda S.A., Soltakhanov Sh.Kh., Yushkov M.P. (2002) Equations of motion of nonholonomic systems and variational principles of mechanics (in Russian), St-Peterburg: Izdatelstvo SPB universiteta.

3. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1954. — Т.1. — С.327–401.

   Lyapunov A.M. (1954). On stability of movement in one case of the 3-body problem (in Russian). In Collected Works, vol. 1, Moscow: Izd. Akad. Nauk SSSR, 327-401.

4. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Теоретическая механика. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — 535 с.

   Polyakov N.N., Zegzhda S.A., Yushkov M.P. (1985) Theoretical mechanics (in Russian), Leningrad: Izdatelstvo Leningradskogo universiteta.

5. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. — 1934. — Т. 4, вып.9. — С. 883–885.

   Pontryagin L.S. (1934) On dynamical systems close to Hamiltonian (in Russian), Zhurnal Eksperim. i teoret. phiziki, 4, No.9, 883-885.

6. *Проблемы сетевого управления* / под ред. Фрадкова А.Л. — Москва-Ижевск: Институт компьтерных исследований, 2015. — 392 с.

   Fradkov, A.L. (2015) (Ed.), Problems of network control (in Russian). Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science.

7. *Себехей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. — 656 с.

   Szebehely V. (1967) Theory of orbits. The restricted problem of three bodies. New York and London: Academic Press.

8. *Тхай В.Н.* Об устойчивости постоянных лапласовых решений неограниченной задачи трех тел // Прикладная математика и механика. —1978. — Т.42, вып.6. — С. 1026–1032.

   Tkhai, V.N. (1980). On stability of constant Laplace solutions of the unrestricted three-body problem. J. Appl. Math. Mech. 42, 1123-1130.

9. *Тхай В.Н.* Исследование неограниченной задачи трех тех // Прикладная математика и механика. —1996. —Т. 60, вып.3. — С. 355–374.

   Tkhai, V.N. (1996) A study of the plane unrestricted three-body problem. J. Appl. Math. Mech. 60, No. 3, 349-367.

10. *Тхай В.Н.* О методе Ляпунова-Пуанкаре в теории периодических движений // Прикладная математика и механика. — 1998. — Т.62, вып.3. — С. 355–371.

Thai, V.N. (1998). On Lyapunov-Poincare method in the theory of periodic motions. J. Appl. Math. Mech. 62, No. 3, 325-339.

11. *Тхай В.Н.* Обратимые механические системы // Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. — С. 131–146.

    Tkhai, V. N. (2001). Reversible Mechanical Systems (in Russian). In Non-linear mechanics, Moscow: Fizmatlit, 131-146.

12. *Тхай В.Н.* О грубых по периодическому движению моделях // Автоматика и телемеханика. — 2009. — №9. — С. 162–167.

    Tkhai, V.N. (2009). On models structurally stable in periodic motion. Autom. Remote Control 70, No. 9, 1584-1589.

13. *Тхай В.Н.* О поведении периода симметричных периодических движений // Прикладная математика и механика. — 2012. — Т.76, вып.4. — С. 616–622.

    Tkhai, V.N. (2012). The behaviour of the period of symmetrical periodic motions. J. Appl. Math. Mech. 76, No. 4, 446-450.

14. *Тхай В.Н.* Механическая система, содержащая слабо связанные подсистемы //Прикладная математика и механика. — 2013. — Т.77, вып.6. — С. 822–831.

    Tkhai, V.N. (2013). A mechanical system containing weakly coupled subsystems. J. Appl. Math. Mech. 77, No. 6, 822-831.

15. *Eulero L.* Considerations de matu corporum coelestrium // Novi Comm. Acad. Sci. Petrop. — 1766. — T.10. — 544 p.

16. *Lagrange J.L.* Eassaiis sur le problèm des trois corps // Qeuress. — 1772. — T.6. — P. 233–240.

17. *Laplace P.* Explosition du système du monde. Paris: Bacehlier, 1834. — 418 p.

18. *Routh E.J.* On the Laplace's three particles, with a supplemant on the stability of steady moution // Proc. London Math. Soc. — 1875. — V.6. — P. 86–97.

Получена 02.03.2016