

УДК 517.938

# Рождение сепараторов в магнитных полях<sup>1</sup>

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики,  
Нижний Новгород 603155. E-mail: zhuzhoma@mail.ru, medvedev@unn.ac.ru

**Аннотация.** Мы рассматриваем модель магнитного поля с точечными зарядами, которые моделируют области с интенсивным магнитным потоком. Используя методы теории динамических систем, в статье получены условия отсутствия и наличия сепараторов магнитного поля в хорошо проводящей среде (плазме). Приводится типичная бифуркация рождения сепараторов, когда все заряды лежат в плоскости. Поэтому эта бифуркация может служить моделью рождения сепараторов в фотосфере Солнца.

**Ключевые слова:** динамическая система Морса-Смейла, сепаратор, магнитное поле.

## Birth of separators in magnetic fields

E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev

Higher School of Economics, Nizhniy Novgorod 603155.

**Abstract.** We consider the model of magnetic field with point charges that model regions with an intensive magnetic flux. Using methods of Dynamical Systems Theory, in the paper, one gets the conditions of the absence and existence of separators in a nice conducting fields (plasma). One gives a typical bifurcation of birth separators, when all charges belong to a plane. Therefore, this bifurcation can be the model of birth separators in the photosphere of the Sun.

**Keywords:** Morse-Smale dynamical system, separator, magnetic field.

**MSC 2010:** 37D15, 76W05

## Введение

Общепринятое в наши дни положение современной астрофизики относительно солнечных вспышек состоит в том, что выделение энергии при солнечных вспышках происходит в результате магнитного пересоединения, то есть перераспределения магнитных потоков, приводящее к изменению топологии магнитного поля. Магнитное пересоединение происходит в результате разрыва силовых линий магнитного поля в так называемых нулевых точках, где магнитная индукция  $\mathbf{B} = 0$ , и бифуркации силовых линий (интегральных кривых магнитного поля) в новую топологическую конфигурацию, которая обладает меньшей энергией [12, 15]. Высвобождающийся при этом избыток энергии расходуется на интенсивное излучение электромагнитных волн в различных диапазонах спектра, нагрев плазмы, ускорение заряженных частиц до высоких энергий и т.п. В связи с этим, информация о

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке фондов РФФИ, гранты 15-01-03689-а, 16-51-10005-Ко\_а и РНФ, грант 14-41-00044. Исследование осуществлялось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 и 2016 годах.

количестве и расположении нулевых точек магнитной индукции является критически важной при анализе процессов магнитного пересоединения.

Известно, что в типичной ситуации магнитное поле создается электрическими токами. Магнитное поле является непотенциальным в областях, непосредственно занятых электрическим токами, и потенциальным – вне этих областей. Довольно часто используется модель, в которой токи аппроксимируются точечными «магнитными зарядами» (источниками и стоками) и, таким образом, поле оказывается потенциальным всюду вне этих зарядов. Несмотря на упрощенный характер данной модели, она способна во многих случаях дать интересные физические результаты [1, 4, 9]. При этом, наряду с расчетом конкретных конфигураций магнитного поля, проводившихся различными авторами (см., например [7, 8] и обзор [13], где исследовалась топологическая структура и возможные бифуркации магнитного поля для конкретных значений числа магнитных зарядов и их типов), было бы интересно иметь и некоторые общие критерии, связывающие количество и тип магнитных зарядов с количеством и типом возникающих в таком поле нулевых точек.

Важнейшей характеристикой магнитного поля с точки зрения процессов пересоединения является количество и расположение сепараторов (ниже даны точные определения). Так как сепаратор – это место пересечения двух сепаратрисных поверхностей, то он представляет собой линию, на которой происходит соприкосновение четырех магнитных потоков. Перераспределение этих потоков с течением времени как раз и лежит в основе эффекта магнитного пересоединения; при этом соответствующий сепаратор задает траекторию распространения этого процесса в пространстве. Методы теории динамических систем для исследования вопроса о существовании сепараторов в магнитных полях плазмы применялись в работах [2, 5]. Таким образом, еще одна актуальная задача – нахождение общего соотношения между количеством и типом магнитных зарядов, с одной стороны, и количеством и структурой создаваемых ими сепараторов, с другой стороны. Обе вышеуказанные проблемы будут рассмотрены в настоящей статье.

Дадим некоторые определения и сформулируем основные результаты. Наблюдения показывают, что на поверхности Солнца (фотосфере) наблюдаются места, которые проявляют себя как источники окружающего их магнитного поля короны Солнца. Традиционно эти фрагменты фотосферы называются *зарядами* магнитного поля [6]. Заряд называется *положительным*, если поток поля через сколь угодно малую сферу, окружающую заряд, положительный. Аналогично определяется отрицательный заряд: поток поля через сколь угодно малую сферу, окружающую такой заряд, отрицательный. Поскольку Солнце излучает энергию, то большое практическое значение имеет изучение так называемых положительно несбалансированных групп зарядов.

Группа зарядов  $C$  называется *положительно несбалансированной*, если ее можно заключить в шар  $B$ , на границе которого магнитное поле направлено наружу. Указанный шар  $B = B(C)$  будем называть *источниковой областью группы  $C$* . Аналогично определяется отрицательно несбалансированная группа зарядов, и в

этом случае говорят о стоковой области группы. Изучение отрицательно несбалансированных групп также важно, поскольку внутри положительно несбалансированной группы могут быть семейства отрицательно несбалансированных групп, бифуркации которых могут быть причиной вспышки [11].

Математическая идеализация заряда приводит к понятию точечной особенности векторного поля: положительный заряд рассматривается как источник, а отрицательный – как сток векторного поля. Точка  $p_0$  магнитного поля  $\vec{B}$  называется *нулевой*, если  $\vec{B}(p_0) = 0$ . В типичном случае собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$  в нулевой точке не равны нулю и удовлетворяют соотношению  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ , в силу равенства  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ . Отсюда вытекает, что с точки зрения теории динамических систем нулевая точка является консервативным седлом с одномерной и двумерной сепаратрисами,<sup>2</sup> см. рис. 1 (а). Если силовая магнитная линия одномерной сепаратрисы направлена из нулевой точки, то все магнитные линии на сепаратрисной поверхности направлены к нулевой точке, и наоборот.

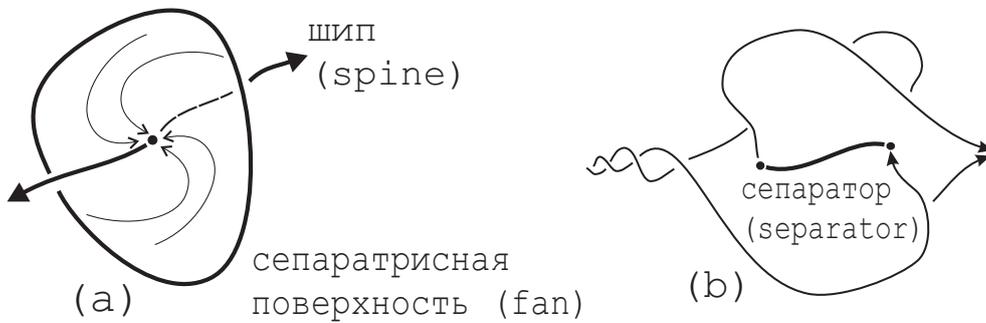


Рис. 1. Структура нулевой точки (а), и гетероклинический сепаратор (b).

Для типичной нулевой точки  $p_0$  возможны (с точностью до переобозначений собственных чисел) лишь следующие варианты: 1)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2, \lambda_3 < 0$ ; 2)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ . В первом случае нулевая точка  $p_0$  называется *положительной*, поскольку  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$ . С точки зрения теории динамических систем, положительная нулевая точка является седлом с индексом Морса единица и топологическим индексом минус единица. Это седло имеет одномерную неустойчивую сепаратрису и двумерную устойчивую сепаратрису, см. рис. 1 (а). Во втором случае точка  $p_0$  называется *отрицательной*, поскольку  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$ . Такая нулевая точка является седлом с индексом Морса два и топологическим индексом плюс единица. Это седло имеет одномерную устойчивую сепаратрису и двумерную неустойчивую сепаратрису.

Следуя [11, 12], будем называть магнитную линию, соединяющую две нулевые точки, *сепаратором* (separator). Сепаратор называется *гетероклиническим*, если он является трансверсальным пересечением сепаратрисных поверхностей, см. рис. 1 (b).

<sup>2</sup>Иногда одномерную сепаратрису называют шипом (spine), а двумерную - веерной поверхностью (fan) [11, 12]

Топологическая структура магнитного поля определяется числом и типом нулевых точек, взаимным расположением шипов и веерных поверхностей, а также линиями трансверсального пересечения веерных поверхностей – гетероклиническими сепараторами.

**Теорема 1.** Пусть имеется положительно несбалансированная группа  $C$ , содержащая  $l \geq 2$  положительных зарядов. Тогда в источниковой области  $V(C)$  этой группы имеется, по крайней мере,  $l - 1$  отрицательных нулевых точек. Если группа  $C$  состоит из  $l$  положительных зарядов и в  $V(C)$  содержится ровно  $l - 1$  нулевых точек, то все нулевые точки являются отрицательными нулевыми точками, и сепараторы в  $V(C)$  отсутствуют. Более того, магнитное поле в области  $V(C)$  имеет единственную с точностью до топологической эквивалентности структуру.

Из этой теоремы вытекают следующие следствия.

**Следствие 1.** Пусть имеется отрицательно несбалансированная группа  $C$ , содержащая  $k \geq 2$  отрицательных зарядов. Тогда в стоковой области  $V(C)$  этой группы имеется по крайней мере  $k - 1$  положительных нулевых точек. Если группа  $C$  состоит из  $k \geq 2$  отрицательных зарядов и в  $V(C)$  содержится ровно  $k - 1$  нулевых точек, то все эти точки являются положительными нулевыми точками, и сепараторы в  $V(C)$  отсутствуют. Более того, магнитное поле в области  $V(C)$  имеет единственную с точностью до топологической эквивалентности структуру.

**Следствие 2.** Пусть имеется положительно несбалансированная группа  $C$ , состоящая из одного (доминантного) положительного заряда и  $k \geq 1$  отрицательных зарядов. Тогда в источниковой области  $V(C)$  этой группы имеется по крайней мере  $k$  положительных нулевых точек. Если  $V(C)$  содержится ровно  $k$  нулевых точек, то все эти точки являются положительными нулевыми точками, и сепараторы в  $V(C)$  отсутствуют. Более того, магнитное поле в области  $V(C)$  имеет единственную с точностью до топологической эквивалентности структуру.

**Следствие 3.** Пусть имеется положительно несбалансированная группа  $C$ , состоящая из  $l \geq 2$  положительных зарядов и  $k \geq 1$  отрицательных зарядов. Тогда в источниковой области  $V(C)$  этой группы имеется, по крайней мере,  $l - 1$  отрицательных нулевых точек и по крайней мере  $k$  положительных нулевых точек.

При минимально возможных количествах как положительных, так и отрицательных нулевых точек (эти минимальные числа определяются в силу следствия 3) сепараторов может не быть. Однако, как показывает следующая теорема, как только появляется хотя бы одна "лишняя" нулевая точка, то необходимо появляется хотя бы один сепаратор. Тип лишней нулевой точки роли не играет (она может быть как положительной, так и отрицательной). Мы для определенности формулируем утверждение, когда лишняя нулевая точка является отрицательной.

**Теорема 2.** Пусть имеется положительно несбалансированная группа  $\mathcal{C}$ , содержащая  $l \geq 2$  положительных и  $k \geq 0$  отрицательных зарядов. Если в  $B(\mathcal{C})$  содержится ровно  $l$  отрицательных нулевых точек, то в  $B(\mathcal{C})$  существует хотя бы один сепаратор.

Следующая теорема демонстрирует один сценарий появления отрицательной нулевой точки, когда возникает семейство сепараторов, количество которых равно числу отрицательных нулевых точек (оно также равно числу положительных зарядов).

**Теорема 3.** Пусть имеется положительно несбалансированная группа  $\mathcal{C}$ , состоящая из  $l \geq 2$  положительных зарядов и  $l - 1$  отрицательных нулевых точек. Тогда существует типичная бифуркация рождения  $l$  гетероклинических сепараторов и одной отрицательной нулевой точки.

*Благодарности.* Авторы благодарят РФФИ, гранты 15-01-03689-а, 16-51-10005-Ко\_а и РНФ, грант 14-41-00044, за финансовую поддержку. Авторы благодарят Ю.В. Думина, внимательно прочитавшего рукопись и сделавшего ряд критических замечаний. Особая благодарность за финансовую поддержку Константину Витальевичу Кирсенко (просветителю и бизнесмену). Исследование осуществлялось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 и 2016 годах.

## 1. Предварительные сведения

Пусть  $f^t$  – поток, индуцированный векторным полем  $\vec{V}$  на трехмерной сфере  $S^3$ . Мы будем предполагать, что  $f^t$  не имеет периодических траекторий. Обозначим через  $Fix(f^t)$  множество состояний равновесия потока  $f^t$ . Для  $p \in Fix(f^t)$  обозначим через  $W^s(p)$  множество траекторий, стремящихся к  $p$  при неограниченном увеличении времени. В частности, если  $p$  – седло, то  $W^s(p) \setminus \{p\}$  является устойчивой сепаратрисой седла  $p$ . Множество  $W^s(p)$  называется *устойчивым многообразием* точки  $p$ . Аналогично, обозначим через  $W^u(p)$  множество траекторий, стремящихся к  $p$  при неограниченном уменьшении времени. В частности, если  $p$  – седло, то  $W^u(p) \setminus \{p\}$  является неустойчивой сепаратрисой седла  $p$ . Множество  $W^u(p)$  называется *неустойчивым многообразием* точки  $p$ . Поток  $f^t$  называется потоком *Морса-Смейла*, если все его состояния равновесия гиперболические, их устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально, и предельное множество любой траектории принадлежит  $Fix(f^t)$  [14]. Соответствующее векторное поле  $\vec{V}$  называется *векторным полем Морса-Смейла*.

Обозначим через  $\vec{v}_{source}$  векторное поле в шаре  $\mathbb{B}^3$ , направленное наружу на границе шара  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$  и имеющее внутри шара ровно один гиперболический источник, рис. 2 (а). Положим  $\vec{v}_{sink} = -\vec{v}_{source}$ . Ясно, что векторное поле  $\vec{v}_{sink}$  имеет внутри шара  $\mathbb{B}^3$  ровно один гиперболический сток, и  $\vec{v}_{sink}$  на границе  $S^2$  направлено внутрь шара  $\mathbb{B}^3$ .

Пусть  $B(\mathcal{C})$  – источниковая область группы зарядов  $\mathcal{C}$ . Обозначим через  $\vec{v}(\mathcal{C})$  магнитное поле в  $B(\mathcal{C})$ , порожденное группой зарядов  $\mathcal{C}$ . Напомним, что векторное поле  $\vec{v}(\mathcal{C})$  направлено наружу на границе  $\partial B(\mathcal{C})$  шара  $B(\mathcal{C})$ . Возьмем шар  $\mathbb{B}^3$  с векторным полем  $\vec{v}_{sink}$ . Если отождествить границы  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$ ,  $\partial B(\mathcal{C})$  шаров  $\mathbb{B}^3$  и  $B(\mathcal{C})$  соответственно, то получим трехмерную сферу  $\mathbb{S}^3$ . Можно подправить поле  $\vec{v}_{sink}$  вблизи границы  $\partial\mathbb{B}^3$  так, чтобы поля  $\vec{v}_{sink}$ ,  $\vec{v}(\mathcal{C})$  образовывали гладкое векторное поле Морса-Смейла на  $\mathbb{S}^3$ , которое мы обозначим через  $\vec{V}(\mathcal{C})$ . Ясно, что при этом можно сохранить глобальную топологическую структуру поля  $\vec{v}_{sink}$ . Тогда состояния равновесия  $\vec{V}(\mathcal{C})$  будут представлять собой объединение состояний равновесия поля  $\vec{v}(\mathcal{C})$  и стока поля  $\vec{v}_{sink}$ . Векторное поле  $\vec{V}(\mathcal{C})$  будем называть *продолжением поля  $\vec{v}(\mathcal{C})$  группы зарядов  $\mathcal{C}$  на трехмерную сферу  $\mathbb{S}^3$* .

**Лемма 1.** *Пусть положительно несбалансированная группа  $\mathcal{C}$  содержит  $N^+$  (соотв.  $N^-$ ) положительных (соотв., отрицательных) зарядов, и  $S^+$  (соотв.  $S^-$ ) положительных (соотв., отрицательных) нулевых точек. Тогда имеет место равенство*

$$1 + N^- - S^+ + S^- - N^+ = 0. \quad (1.1)$$

*Доказательство.* Пусть  $\vec{v}(\mathcal{C})$  – магнитное поле в  $B(\mathcal{C})$ , порожденное группой  $\mathcal{C}$ , и  $\vec{V}(\mathcal{C})$  – продолжение поля  $\vec{v}(\mathcal{C})$  на трехмерную сферу  $\mathbb{S}^3$ . Заряды и нулевые точки магнитного поля векторного поля  $\vec{v}(\mathcal{C})$  являются состояниями равновесия векторного поля Морса-Смейла  $\vec{V}(\mathcal{C})$ . Напомним, что  $\vec{V}(\mathcal{C})$  имеет по сравнению с  $\vec{v}(\mathcal{C})$  дополнительный сток, топологический индекс которого равен единице.

Индекс Морса (размерность неустойчивого многообразия) положительной нуль-точки равен единице. Поэтому топологический индекс такой точки равен минус единице. Аналогично, топологический индекс отрицательной нуль-точки равен единице, поскольку ее индекс Морса равен двум. Индекс Морса отрицательного (соотв., положительного) заряда равен нулю (соотв. трем). Поэтому топологический индекс отрицательного (соотв., положительного) заряда равен единице (соотв. минус единице). Известно, что эйлерова характеристика трехмерной сферы равна нулю. Применяя формулу Эйлера-Пуанкаре, согласно которой сумма топологических индексов состояний равновесия равна эйлеровой характеристике, получаем требуемый результат.  $\square$

**Следствие 4.** *Пусть выполняются условия леммы 1. Если в источниковой области нет отрицательных зарядов,  $N^- = 0$ , то*

$$S^- = (N^+ - 1) + S^+ \geq N^+ - 1.$$

Введем на множестве состояний равновесия  $Fix(f^t)$  потока Морса-Смейла  $f^t$  частичное отношение  $\prec$ . Для  $p, q \in Fix(f^t)$  положим  $p \prec q$ , если  $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$ . Удобно введенное отношение изображать на графе, точки которого отождествляются с состояниями равновесия  $Fix(f^t)$ . Вершины графа, соответствующие  $p$ ,

$q \in \text{Fix}(f^t)$  и связанные отношением  $p \prec q$ , соединяются ребром, направленным из  $q$  к точке  $p$ . Так введенный ориентированный граф  $\Gamma(f^t)$  иногда называют графом (или диаграммой) Смейла.

Обозначим через  $A(f^t)$  объединение всех одномерных неустойчивых многообразий седел и всех стоков потока  $f^t$ . Известно [3], что  $A(f^t)$  является связным одномерным подграфом графа  $\Gamma(f^t)$ , вершины которого отождествляются с соответствующими седлами и стоками. В этом случае, ребра подграфа соответствуют одномерным неустойчивым сепаратрисам, и снабжаются направлением из седел к стокам. Более того,  $A(f^t)$  является притягивающим множеством потока  $f^t$  [3]. Аналогично, обозначим через  $R(f^t)$  объединение всех устойчивых одномерных сепаратрис седел и всех источников. Тогда  $R(f^t)$  суть связный ориентированный подграф, являющийся отталкивающим множеством потока  $f^t$  [3].

Для описания топологической структуры векторных полей нам понадобятся некоторые канонические поля. Напомним, что  $\vec{v}_{source}$  означает векторное поле в шаре  $\mathbb{B}^3$ , направленное наружу на границе шара  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$  и имеющее один источник  $\alpha_0$  внутри шара  $\mathbb{B}^3$ , рис. 2 (а). Будем называть векторное поле  $\vec{v}_{source}$  *источником типа (1;0)*. Рассмотрим векторное поле  $\vec{v}_{uns}$  в шаре  $\mathbb{B}^3$ , направленное наружу на границе шара  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$  и имеющее  $l \geq 2$  источников  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  и  $l - 1$  седел  $\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}$  индекса Морса 2. Такое векторное поле  $\vec{v}_{uns}$  будем называть *источником типа (l;l - 1)*. Структура векторного поля типа (2; 1) изображена на рис. 2 (b).

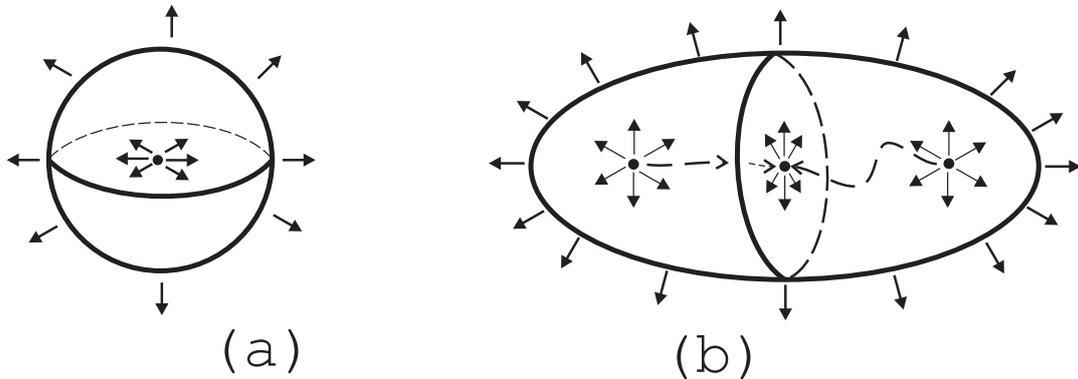


Рис. 2. (а) Векторное поле  $\vec{v}_{source}$ ; (b) Векторное поле  $\vec{v}_{uns}$  типа (2; 1) в шаре  $\mathbb{B}^3$ .

Положим  $\vec{v}_{sink} = -\vec{v}_{source}$ ,  $\vec{v}_{stab} = -\vec{v}_{uns}$ . Векторное поле  $\vec{v}_{sink}$  направлено внутрь на границе шара  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$  и имеет один сток внутри шара  $\mathbb{B}^3$ . Векторное поле  $\vec{v}_{stab}$  направлено внутрь на границе шара  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$ , имеет  $l \geq 2$  стоков  $\omega_1, \dots, \omega_l$  и  $l - 1$  седел индекса Морса 1. Такое векторное поле  $\vec{v}_{uns}$  будем называть *стоком типа (l;l - 1)*. Не уменьшая общности, можно считать (и мы будем так считать), что рассмотренные выше векторные поля ортогональны границе  $\partial\mathbb{B}^3 = S^2$  и являются единичными на этой границе.

При отождествлении границ двух копий шара  $\mathbb{B}^3$  получается 3-сфера  $S^3$ . Если на одной копии шара задан источник типа (l;l - 1), а на другой копии шара задано

поле  $\vec{v}_{sink}$ , то на  $\mathbb{S}^3$  получаем гладкое векторное поле, которое обозначается через  $\vec{V}_{uns}(l; l-1)$ . По существу из [3] (см. также [10]) вытекает следующее утверждение.

**Предложение 1.** Пусть на трехмерной сфере  $\mathbb{S}^3$  задано векторное поле Морса-Смейла  $\vec{V}$ , неблуждающее множество которого состоит из  $l \geq 2$  источников,  $l-1$  седел индекса Морса 2 и одного стока. Тогда  $\vec{V}$  топологически эквивалентно  $\vec{V}_{uns}(l; l-1)$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $f^t$  поток Морса-Смейла, порожденный векторным полем  $\vec{V}$ . Так как число источников превышает на единицу число седел индекса Морса 2, то притягивающее множество  $A(f^t)$  представляет собой отрезок, на котором расположены стоки и седла. При этом, седла чередуются с источниками, и на концевых точках отрезка  $A(f^t)$  расположены источники. Согласно лемме 1.1 [10], множество  $A(f^t)$  имеет шаровую окрестность, которая является источником типа  $(l; l-1)$ . Вне этой окрестности находится сток. Отсюда следует требуемое утверждение.  $\square$

## 2. Доказательство основных результатов

*Доказательство теоремы 1.* Пусть  $\vec{v}(\mathcal{C})$  – магнитное поле в  $B(\mathcal{C})$ , порожденное группой зарядов  $\mathcal{C}$ , и  $\vec{V}(\mathcal{C})$  – продолжение поля  $\vec{v}(\mathcal{C})$  на трехмерную сферу  $\mathbb{S}^3$ . Таким образом, поле  $\vec{V}(\mathcal{C})$  имеет по сравнению с  $\vec{v}(\mathcal{C})$  еще один сток. Нам нужно доказать неравенство  $S^- \geq l-1$ , где  $S^-$  – число отрицательных нулевых точек векторного поля  $\vec{V}(\mathcal{C})$ . Доказательство этого неравенства будем проводить методом математической индукции по числу  $l = N^+$  положительных зарядов (которое равно числу источников поля  $\vec{V}(\mathcal{C})$ ). Напомним, что  $\vec{V}(\mathcal{C})$  является векторным полем Морса-Смейла, который индуцирует поток  $f^t$  Морса-Смейла на  $\mathbb{S}^3$ .

Сперва покажем, что для любого  $l \geq 2$  существует хотя бы одна отрицательная нулевая точка (одновременно доказываем первый шаг индукции для  $l=2$ ). Обозначим через  $A = A(f^t)$  объединение всех стоков и неустойчивых (одномерных) сепаратрис всех седел индекса Морса один. Предположим, что доказываемое утверждение неверно. Тогда дополнение к  $A$  есть объединение непересекающихся неустойчивых (трехмерных) многообразий  $l \geq 2$  источников. Поскольку дополнение к одномерному графу  $A$  является связным множеством, то мы получаем противоречие со связностью множества  $\mathbb{S}^3 \setminus A$ .

Предположим, что утверждение доказано для числа источников  $2, \dots, l \geq 2$ , и покажем, что оно верно для  $l+1 \geq 3$ . Из предыдущего следует существование по крайней мере одного седла  $\sigma$  индекса Морса два. Две (одномерные) устойчивые сепаратрисы  $Sep_1^s, Sep_2^s$  седла  $\sigma$  принадлежат неустойчивым многообразиям источников  $\alpha_1, \alpha_2$  соответственно. Рассмотрим два случая: 1)  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ; 2)  $\alpha_1 = \alpha_2$ . В первом случае множество  $\alpha_1 \cup Sep_1^s \cup \sigma \cup Sep_2^s \cup \alpha_2 = S$  является отталкивающим множеством. Из  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  вытекает, что это множество  $S$  имеет гомеоморфную 3-шару окрестность, которая выглядит как источник. Тогда исходный поток можно заменить на поток, у которого вместо двух источников  $\alpha_1, \alpha_2$  и седла  $\sigma$  появился

один источник. Для полученного потока выполняется предположение индукции. Поскольку этот поток имеет ровно на единицу меньше источников и седел, то мы получаем требуемую оценку для исходного потока. Из приведенного рассуждения вытекает, что если существует седло индекса Морса два, для которого реализуется случай 1), то неравенство  $S^- \geq l - 1$  доказано.

Во втором случае, когда  $\alpha_1 = \alpha_2$ , не уменьшая общности, можно считать, что этот случай реализуется для всех седел индекса Морса два. Тогда каждому такому седлу однозначно ставится в соответствие источник,  $\sigma \mapsto \alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ . Отсюда вытекает более сильное неравенство  $S^- \geq l$ .

Таким образом, неравенство  $S^- \geq l - 1$  доказано для любой группы зарядов, в которой имеется  $l \geq 2$  положительных зарядов. Заметим, что если в группе нет отрицательных зарядов, то  $N^+ = l$  и  $N^- = 0$ , и тогда неравенство  $S^- \geq l - 1$  вытекает из следствия 4.

Если  $S^- = l - 1$ , то из (1.1) следует, что  $S^+ = 0$ , и следовательно, все нулевые точки являются отрицательными нулевыми точками. Поэтому сепараторы в  $B(\mathcal{C})$  отсутствуют.

Утверждение о единственности топологической структуры непосредственно следует из предложения 1.  $\square$

*Доказательство теоремы 2.* Пусть  $\vec{v}(\mathcal{C})$  – магнитное поле в  $B(\mathcal{C})$ , порожденное группой  $\mathcal{C}$ , и  $\vec{V}(\mathcal{C})$  – продолжение поля  $\vec{v}(\mathcal{C})$  на трехмерную сферу  $\mathbb{S}^3$ . По условию  $N^+ = l$ ,  $S^- = l$  и  $N^- = 0$ . Тогда из (1.1) следует, что  $S^+ = 1$ . Обозначим через  $\sigma_0$  единственное седло с топологическим индексом минус единица.

Пусть  $f^t$  – поток Морса-Смейла, индуцированный векторным полем  $\vec{V}(\mathcal{C})$  на трехмерной сфере  $\mathbb{S}^3$ . Рассмотрим связный одномерный граф  $R(f^t)$ , состоящий из всех одномерных устойчивых многообразий седел и всех источников потока  $f^t$ . Напомним, что  $R(f^t)$  является отталкивающим множеством потока  $f^t$ .

**Предложение 2.** Граф  $R(f^t)$  имеет окрестность  $U(R)$  такую, что

- граница  $\partial U(R)$  окрестности  $U(R)$  трансверсальна потоку  $f^t$ , причем траектории потока выходят из  $U(R)$  при увеличении времени;
- окрестность  $U(R)$  гомеоморфна полноторию (следовательно, граница  $\partial U(R)$  гомеоморфна двумерному тору);
- существует седло  $\sigma \in U(R)$  (отрицательная нулевая точка), двумерная неустойчивая сепаратриса  $W^u(\sigma)$  которого пересекает тор  $\partial U(R)$  по замкнутой кривой, гомотопной нулевому меридиану тора  $\partial U(R)$ .

*Доказательство предложения 2.* По условию, вершины графа  $R(f^t)$  состоят из  $l$  седловых и  $l$  источниковых точек, причем в каждую седловую точку входят ровно два ребра, а из каждой источниковой точки выходит хотя бы одно ребро. Тогда  $R(f^t)$  содержит простой цикл  $C$  типа  $(2; 3)$ , к которому подклеивается некоторое (возможно, нулевое) число сегментов, содержащее в каждом сегменте

равное количество источниковых и седловых точек (которое равно числу ребер в сегменте). Цикл  $C$  имеет окрестность, которая гомеоморфна полноторию и из которой траектории выходят при увеличении времени, поскольку  $C$  имеет тип  $(2; 3)$ . Не уменьшая общности, можно считать, что эта окрестность не содержит сток (в противном случае уменьшим окрестность). Каждый из присоединенных сегментов имеет окрестность, гомеоморфную шару, из которой траектории выходят при увеличении времени. Отсюда вытекает существование требуемой окрестности  $U(R)$ , не содержащей стока. Так как  $C$  содержит хотя бы одно седло, то его двумерная неустойчивая сепаратриса должна пересекать  $\partial U(R)$  по замкнутой кривой, гомеоморфной меридиану тора  $\partial U(R)$ . Предложение 2 доказано.  $\diamond$

Заметим, что граф  $A(f^t)$ , являющийся притягивающим множеством множеством потока  $f^t$ , представляет собой простой цикл, состоящий из стока  $\omega_0$ , седла  $\sigma_0$  и двух его одномерных неустойчивых сепаратрис. Следовательно,  $A(f^t)$  имеет окрестность  $U(A)$  гомеоморфную полноторию и такую, что его граница  $\partial U(A)$  трансверсальна потоку  $f^t$ , и траектории входят в  $U(A)$  при увеличении времени. Для достаточно малой окрестности  $U(A)$  двумерная устойчивая сепаратриса седла  $\sigma_0$  пересекает двумерный тор  $\partial U(A)$  по замкнутой простой кривой, гомотопной меридиану тора  $\partial U(A)$ . Обозначим эту кривую через  $\mu_0$ .

Не уменьшая общности, можно считать, что окрестности  $U(R)$  и  $U(A)$  не пересекаются. Поскольку в их объединении лежат все состояния равновесия потока  $f^t$ , то любая положительная полутраектория с начальной точкой на  $\partial U(R)$  должна пересечь тор  $\partial U(A)$ . Отсюда вытекает, что сферу  $\mathbb{S}^3$  можно представить в виде двух полноториев  $U(R)$ ,  $U(A)$  после отождествления их границ  $\partial U(R)$ ,  $\partial U(A)$ . Пусть  $\vartheta : \partial U(A) \rightarrow \partial U(R)$  гомеоморфизм такой, что  $\mathbb{S}^3 = U(A) \cup_{\vartheta} U(R)$ . Известно, что при склейке двух полноториев 3-сфера получается только в том случае, когда меридиан на одном граничном торе отождествляется с параллелью (возможно несколько раз еще прокрученной вдоль меридиана) на другом граничном торе. Следовательно, образ кривой  $\mu_0$  относительно  $\vartheta$  дает замкнутую кривую, которая пересекает любую замкнутую кривую на  $\partial U(R)$ , гомотопную нулевому меридиану тора  $\partial U(R)$ . Отсюда вытекает существование хотя бы одного сепаратора.  $\square$

Непосредственно из доказательства предложения 2 вытекает следующее утверждение, которое нам понадобится в дальнейшем.

**Предложение 3.** Пусть выполняются условия теоремы 2, и пусть  $f^t$  – поток Морса-Смейла, индуцированный векторным полем  $\vec{V}(C)$  на трехмерной сфере  $\mathbb{S}^3$ , которое является продолжением магнитного поля в  $B(C)$ . Предположим, что граф  $A(f^t)$  суть простая замкнутая кривая. Тогда в  $B(C)$  существуют, по крайней мере,  $l$  сепараторов.

*Доказательство.* В обозначениях предложения 2 получаем, что двумерная неустойчивая сепаратриса каждого седла из  $\partial U(R)$  пересекает  $\partial U(R)$  по замкнутой кривой, гомотопной нулевому меридиану тора  $\partial U(R)$ . Поскольку  $\partial U(R)$  содержит  $l$  седел, то существуют, по крайней мере,  $l$  сепараторов.  $\diamond$

*Доказательство теоремы 3.* Для простоты мы построим требуемую бифуркацию для  $l = 2$ . Из построения будет видно, что такую бифуркацию можно построить с произвольным числом  $l \geq 2$  положительных зарядов. Введем две гладкие функции  $a(\mu)$ ,  $b(\mu)$ , зависящие от параметра  $0 \leq \mu \leq 1$  следующим образом:

$$a(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \mu \leq 0.1 \\ \downarrow & \text{при } 0.1 \leq \mu \leq 1 \\ 0 & \text{при } \mu = 1, \end{cases} \quad b(\mu) = \begin{cases} 0.1 & \text{при } \mu = 0 \\ \downarrow & \text{при } 0 \leq \mu \leq 0.1 \\ 0 & \text{при } 0.1 \leq \mu \leq 1 \end{cases}$$

Здесь символ  $\downarrow$  означает, что функция монотонно убывает.

Рассмотрим в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , наделенном цилиндрической системой координат  $(\varrho; \varphi; z)$ , систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\varrho} = [\varrho + b(\mu)] [\varrho - 1 + 2a(\mu)\Psi(\varrho; \varphi) + b(\mu)] \tag{2.1}$$

$$\dot{\varphi} = -\sin 2\varphi \tag{2.2}$$

$$\dot{z} = z, \tag{2.3}$$

где

$$\Psi(\varrho; \varphi) = \sin^2\left(\frac{\varphi - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\varphi - \pi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\varphi - \frac{3\pi}{2}}{2}\right).$$

Все состояния равновесия системы лежат в плоскости  $z = 0$ , которая является репеллером для векторного поля, определяемого данной системой. Поскольку система расщепляется на первые два уравнения (2.1), (2.2) и на третье уравнение (2.3), то достаточно рассмотреть фазовый портрет в плоскости  $z = 0$ . В этой плоскости состояния равновесия могут быть только на лучах  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = \pi$  и  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ .

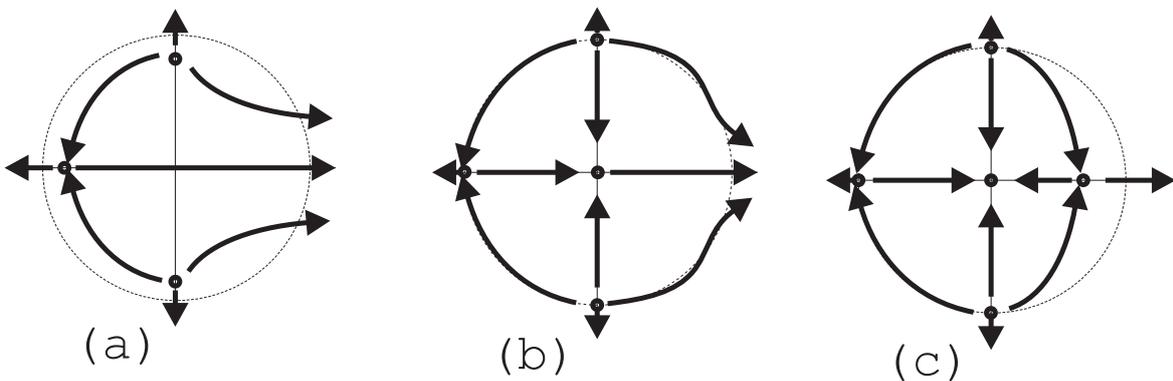


Рис. 3. (a)  $0 \leq \mu < 0,1$ ; (b)  $\mu = 0,1$ ; (c)  $0,1 < \mu \leq 1$ .

При  $0 \leq \mu < 0,1$  функции  $a(\mu) = 1$ ,  $0,1 \geq b = b(\mu) > 0$ . Поэтому уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot{\varrho} = \begin{cases} (\varrho + b)^2 & \text{при } \varphi = 0 \\ (\varrho + b)(\varrho + b - 1) & \text{при } \varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что имеются три состояния равновесия:  $O_2(1 - b; \frac{\pi}{2})$  — источник,  $O_3(1 - b; \pi)$  — седло,  $O_4(1 - b; \frac{3\pi}{2})$  — источник, рис. 3 (а). Седло  $O_3(1 - b; \pi)$  в пространстве имеет индекс Морса два. Поскольку других седел нет, сепараторы отсутствуют.

При  $\mu = 0, 1$  функции  $a(\mu) = 1$ ,  $b(\mu) = 0$ . Тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot{\varrho} = \begin{cases} \varrho^2 & \text{при } \varphi = 0 \\ \varrho(\varrho - 1) & \text{при } \varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \end{cases}$$

К имеющимся уже состояниям равновесия  $O_2(1; \frac{\pi}{2})$ ,  $O_3(1; \pi)$ ,  $O_4(1; \frac{3\pi}{2})$  добавляется седло-узел  $O_0(0; 0)$  в начале координат, рис. 3 (б).

Наконец, при  $0, 1 < \mu \leq 1$  функции  $1 > a(\mu) = a \geq 0$ ,  $b(\mu) = 0$ . Уравнение (2.1) принимает вид

$$\dot{\varrho} = \begin{cases} \varrho(\varrho - 1 + a) & \text{при } \varphi = 0 \\ \varrho(\varrho - 1) & \text{при } \varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \end{cases}$$

В плоскости  $((\varrho; \varphi)$  седло-узел  $O_0(0; 0)$  распадается на сток  $O_0(0; 0)$  и седло  $O_1(1 - a; 0)$ , рис. 3 (с). В результате этой бифуркации появляются два сепаратора.  $\square$

### Список цитируемых источников

1. Горбачев В. С., Кельнер С. Р., Сомов В. В., Шварц А. С. Новый топологический подход к вопросу о триггере солнечных вспышек. // Астрон. журнал, 1988, Т. 65, С. 601–612.  
Gorbachev V. S., Kel'ner S. R., Somov V. V., Shvarts A. S. (1988). A new topological approach to the question of the trigger for solar flares. *Sov. Astron.*, 32, 308-314.
2. Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Зинина С. Х. Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса-Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы. // Нелинейная динамика, 2014, Т. 10, С. 427–438.  
Grines V., Gurevich E., Zhuzhoma E., Zinina S. (2014). Heteroclinic curves of Morse-Smale cascades and separators in magnetic fields of plasma. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 10, 427-438 (in Russian).
3. Гринес В. З., Медведев В. С., Починка О. В., Жужома Е. В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла. // Труды МИАН, 2010, Т. 271, С. 111–133.  
Grines V., Medvedev V., Pochinka O., Zhuzhoma E. (2010). Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 271, 103-124.
4. Brown D. S., Priest E. R. The Topological Behaviour of 3D Null Points in the Sun's Corona. // *Astron. Astrophys.*, 2001, v. 367, p. 339.
5. Grines V., Medvedev T., Pochinka O., Zhuzhoma E. On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2015, v. 294, p. 1–5.
6. Longcope D. W. Topological and current ribbons: a model for current, reconnection and flaring in a complex, evolving corona. // *Solar. Phys.*, 1996, v. 169, p. 91–121.

7. *Maclean R., Beveridge C., Longcope D., Brown D., Priest E.* A topological analysis of the magnetic breakout model for an eruptive solar flare. // Proc. Roy. Soc. London A, 2005, v. 461, p. 2099–2121.
8. *Maclean R., Beveridge C., Priest E.* Coronal magnetic topologies in a spherical geometry II. Four balanced flux sources. // Solar Physics, 2006, v.238, p. 13–27.
9. *Oreshina A. V., Oreshina I. V., Somov B. V.* Magnetic-Topology Evolution in NOAA AR 10501 on 2003 November 18. // Astron. Astrophys., 2012, v. 538, p. A138.
10. *Pilyugin S.* Shadowing in dynamical systems. //Lect. Notes Math., 1999, v. 1706, p. 271.
11. *Priest T.* Solar Magnetohydrodynamics. Dordrecht, Reidel Publ. Company, 1985, 592 p.
12. *Priest E., Forbes T.* Magnetic Reconnection: MHD Theory and Applications, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2005, p. 595.
13. *Priest E., Schivjver C.* Aspects of three-dimensional magnetic reconnection. //Solar Physics, 1999, v. 190, p. 1–24.
14. *Smale S.* Differentiable dynamical systems. //Bull. Amer. Math. Soc., 1967, v. 73, p. 741–817.
15. *Somov B. V.* Plasma Astrophysics, Part II: Reconnection and Flares. NY, Springer, 2006, p. 413.

Получена 12.02.2016