

УДК 517.9

Оценка показателей Ляпунова методами символического анализа¹

Г. С. Осипенко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, филиал в Севастополе, Севастополь 299001, *E-mail: george.osipenko@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается задача вычисления характеристических показателей всех траекторий компактного инвариантного множества. Спектр Морса есть множество показателей Ляпунова псевдотраекторий. Показано, что этот спектр можно локализовать, используя символический образ динамической системы, который является ориентированным графом, построенным для конечного покрытия фазового пространства. Исследования символического образа позволяют локализовать цепно-рекуррентное множество и оценить спектр Морса. Точность оценок зависит от диаметра покрытия и модуля непрерывности дифференциала. Приведен численный эксперимент оценки спектра Морса и проверки гиперболичности нетривиального инвариантного множества.

Ключевые слова: псевдотраектория, цепно-рекуррентное множество, проективное расслоение, показатель псевдотраектории, символический образ, оснащенный граф, эквивалентные возвратные вершины, гиперболичность.

Evaluation of the Lyapunov exponents through symbolic analysis methods

G. S. Osipenko

M. V. Lomonosov Moscow State University, branch in Sevastopol, Sevastopol 299001.

Abstract. The problem of calculating the characteristic exponents of all the trajectories of a compact invariant set is considered. Morse spectrum is the set of the exponents of pseudotrajectories. It has been shown that this spectrum can be localized using the symbolic image of a dynamic system which is a directed graph constructed for the finite covering of the phase space. Research of the symbolic image allows estimating the Morse spectrum. The accuracy estimation depends on the diameter of covering and the continuity module of the differential. The numerical experiment of Morse spectrum assessment and verification of hyperbolicity of nontrivial invariant set is given.

Keywords: pseudotrajectory, chain-recurrent set, projective bundle, exponent of pseudotrajectory, symbolic image, equivalent recurrent vertices, hyperbolicity.

MSC 2010: 37C50, 34D08, 37M25

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, грант N 16-01-00452).

1. Введение

Одним из основных понятий теории динамических систем являются характеристические показатели, которые были введены Ляпуновым в 1892 году в его докторской диссертации [4]. Сейчас эти показатели называют ляпуновскими показателями. Если динамическая система является линейной системой дифференциальных уравнений с постоянной матрицей

$$x' = Ax,$$

то характеристические показатели совпадают с действительными частями собственных чисел матрицы A и характеризуют экспоненциальную скорость приближения или удаления траектории от нулевого решения. Если динамическая система является дискретной и задается разностным линейным уравнением

$$x_{n+1} = Bx_n$$

с постоянной матрицей, то характеристические показатели это логарифмы модулей собственных чисел матрицы B . Эти числа также характеризуют экспоненциальную скорость изменения расстояния между траекториями системы. Инвариантное подпространство с отрицательными показателями называют устойчивым, траектории на этом подпространстве экспоненциально стремятся к состоянию равновесия. Инвариантное подпространство с положительными показателями называют неустойчивым, траектории на этом подпространстве экспоненциально уходят от состояния равновесия. Если у линейной системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей имеются положительные и отрицательные показатели и нет нулевых показателей, то состояние равновесия называется гиперболическим.

Если система дифференциальных уравнений является нелинейной

$$x' = F(x), \tag{1.1}$$

то изучение поведения траекторий вблизи решения $\varphi(t)$ сводится к исследованию разности $x - \varphi(t) = y$. Подставляя $x = \varphi(t) + y$ в исходное уравнение, найдем уравнение для y

$$y' = \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t))y + \gamma(t, y),$$

где нелинейная часть $\gamma(t, y)$ есть о-малое от $|y|$. Линейное уравнение

$$y' = \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t))y, \tag{1.2}$$

называют линеаризованной системой вблизи решения $\varphi(t)$. Аналогично, изучение динамики вблизи некоторой траектории разностного уравнения сводится к изучению линейного разностного уравнения вида

$$v_{n+1} = B(n)v_n.$$

Характеристические показатели линеаризованной системы часто определяют геометрическую картину поведения решений вблизи решения исходной нелинейной системы. Например, если линеаризованная система (1.2) является гиперболической, то нелинейная система (1.1) вблизи решения $\varphi(t)$ имеет устойчивое и неустойчивое многообразия, которые являются гладкими аналогами устойчивого и неустойчивого подпространств линеаризованной системы.

Важность и актуальность исследований связанных с показателями Ляпунова невозможно переоценить. В книгах [2, 3, 5] подробно описаны теория и приложения показателей Ляпунова. В настоящее время мы имеем хорошие методы и компьютерные пакеты для вычисления характеристических показателей индивидуальной траектории [3, 7, 16].

Если каждая траектория системы является гиперболической, то устойчивые (неустойчивые) многообразия образуют инвариантное слоение, которое называется устойчивым (неустойчивым) слоением. Описанные системы впервые исследовал Д.В. Аносов [1]. Главным свойством гиперболических инвариантных множеств является их устойчивость относительно возмущений динамической системы. Часто наличие хаотических режимов связано с гиперболичностью инвариантных множеств, а показатели Ляпунова дают существенную информацию о параметрах динамики системы (энтропия, размерность хаотических множеств и т.д.).

В настоящее время актуальной задачей является вычисление показателей Ляпунова всех траекторий из нетривиального инвариантного множества. Как правило, такие множества плотно заполнены периодическими траекториями, при этом периоды траекторий не ограничены в совокупности. В этом случае мы не можем свести изучение показателей Ляпунова к исследованию отдельных траекторий. Кроме того, мы должны учитывать, что исследования осуществляются с помощью компьютера, т.е. всегда с некоторыми малыми погрешностями.

В настоящей работе изучается предельное множество показателей Ляпунова периодических псевдотраекторий (спектр Морса). Псевдотраектории это траектории с малыми погрешностями, что имеет место при компьютерных вычислениях. Периодические псевдотраектории это траектории, которые на компьютере выглядят как периодические, однако они могут и не быть таковыми в реальности. Спектр Морса содержит показатели как настоящих траекторий, так и их возмущений. Он существенно определяет динамику системы, например, отсутствие нуля в спектре Морса гарантирует гиперболичность [13].

2. Спектр Морса

Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.1)$$

порожденную диффеоморфизмом $f : M \rightarrow M$ компактного многообразия. Дифференциал $Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ задает линейное расширение системы

$$v_{n+1} = Df(x_n)v_n, \quad (2.2)$$

на касательном расслоении TM .

Любое невырожденное линейное отображение $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ можно представить в виде:

$$Av = |Av| \cdot Av/|Av| = r|Ae| \cdot Ae/|Ae| = r|Ae| \cdot A_s(e),$$

где $r = |v|$, $|v| \neq 0$, $e = \frac{v}{|v|} \in S^{d-1}$, S^{d-1} - единичная сфера. Таким образом, линейное отображение $A : v \rightarrow Av$ есть произведение двух отображений

$$e \rightarrow A_s(e) = Ae/|Ae| \quad \text{и} \quad r \rightarrow r|Ae|,$$

где первое действует на сфере S^{d-1} , а второе действует на положительной полу-прямой \mathbb{R}^+ . Проективное пространство P^{d-1} может быть получено путем отождествления диаметрально противоположных точек сферы S^{d-1} . Симметричность отображения $A_s(e)$, относительно изменения знака $A_s(\pm e) = \pm A_s(e)$, позволяет нам определить отображение $PA(e) = Ae/|Ae|$ на проективном пространстве P^{d-1} , отождествляя противоположные точки на сфере. Для точек пространства P^{d-1} мы сохраним обозначение e , т. е. e обозначает одномерное подпространство и (или) единичный вектор на нем, что не приводит к недоразумениям. Таким образом, мы получаем отображение

$$Pf(x, e) = (f(x), \frac{Df(x)e}{|Df(x)e|})$$

на проективном расслоении $P = \{(x, e) : x \in M, e \in P^{d-1}(x)\}$, которое порождает дискретную динамическую систему вида

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad e_{n+1} = \frac{Df(x_n)e_n}{|Df(x_n)e_n|} \quad (2.3)$$

на проективном расслоении P . Положительное число $a(x, e) = |Df(x)e|$ есть коэффициент изменения длины на подпространстве e под действием дифференциала в точке x .

Последовательность точек $\{x_n\}$ называется траекторией системы (2.1), если $f(x_n) = x_{n+1}$, для любого n . Аналогично определяется траектория системы (2.3). Если $\xi = \{(x_k, e_k), k = 0, 1, 2, \dots\}$ является полутраекторией системы (2.3), тогда предел

$$\lambda(\xi) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |Df^n(x_0)e_0| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \ln |Df^n(x_0)e_0| \quad (2.4)$$

есть показатель Ляпунова этой полутраектории. Имеем

$$\begin{aligned} |Df^n(x_0)e_0| &= |Df(f^{n-1}(x_0))Df^{n-1}(x_0)e_0| = \\ &= |Df(x_{n-1}) \frac{Df^{n-1}(x_0)e_0}{|Df^{n-1}(x_0)e_0|}| |Df^{n-1}(x_0)e_0| = |Df(x_{n-1})e_{n-1}| |Df^{n-1}(x_0)e_0|. \end{aligned}$$

Применяя полученную рекуррентную формулу, получим

$$|Df^n(x_0)e_0| = \prod_{k=0}^{n-1} |Df(x_k)e_k|$$

и показатель Ляпунова

$$\lambda(\xi) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |Df(x_k)e_k| \quad (2.5)$$

Так как предел (2.5) существует, то найдется подпоследовательность $n_m \rightarrow \infty$, для которой предел

$$\lambda(\xi, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m-1} \ln |Df(x_k)e_k| \quad (2.6)$$

существует и

$$\lambda(\xi, n_m) = \lambda(\xi).$$

Если последовательность $\xi = \{(x_k, e_k)\}$ является p -периодической, то все выше перечисленные пределы существуют и совпадают со средним арифметическим функции $\varphi(x, e) = \ln |Df(x)e|$ по периоду:

$$\lambda(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |Df^n(x_0)e_0| = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \ln |Df(x_k)e_k| = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \varphi(x_k, e_k) \quad (2.7)$$

Для численной оценки показателей Ляпунова удобно расширить множество последовательностей, для которых допускается применение формулы (2.6). Это расширение состоит в следующем: вместо траекторий мы будем рассматривать псевдотраектории (определение см. ниже) и предел (2.6) будет применяться для всех подпоследовательностей, для которых он существует. Ясно, что в этом случае мы будем вычислять более широкое множество чисел, в которое входят показатели Ляпунова траекторий.

Определение 1. Бесконечная в обе стороны последовательность точек $\{x_i\}$ называется ε -траекторией (или псевдотраекторией) системы (2.1), если расстояние $\rho(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ для любого i .

Аналогично определяются псевдотраектория системы (2.3), где расстояние между подпространствами есть угол между ними.

Определение 2. Спектр Морса определяется как

$$\Sigma = \left\{ \lambda \in R : \text{существуют } \varepsilon_k - \text{траектории } \xi_k \text{ системы (2.3) такие, что } \varepsilon_k \rightarrow 0, \lambda(\xi_k) \rightarrow \lambda \text{ при } k \rightarrow \infty \right\}.$$

Предложение 1. Пусть $\xi = \{(x_k, e_k), k \in \mathbb{N}^+\}$ является ε -полутраекторией и существует сходящаяся подпоследовательность

$$\lambda(\xi, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m-1} \ln |Df(x_k)e_k|,$$

тогда найдется последовательность периодических 2ε -траекторий $\{\xi_p\}$ таких что, $\lambda(\xi_p) \rightarrow \lambda(\xi, n_m)$ при $p \rightarrow \infty$.

Доказательство. Не трудно показать, что предел $\lambda(\xi, n_m)$ не зависит от конечного числа начальных точек последовательности $\xi = \{(x_k, e_k), k \in \mathbb{N}^+\}$, т.е., если вместо последовательности ξ рассмотрим последовательность $\xi(N_0) = \{(x_k, e_k), k \geq N_0\}$, то

$$\lambda(\xi, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m - N_0} \sum_{k=N_0}^{n_m-1} \ln |Df(x_k)e_k|, \text{ где } n_m > N_0.$$

Так как последовательность $\{(x_{n_m}, e_{n_m})\}$ лежит на компакте, то существует подпоследовательность сходящаяся к некоей точке (x^*, e^*) . Не ограничивая общности, можно считать, что сама последовательность $\{(x_{n_m}, e_{n_m})\}$ сходится к (x^*, e^*) . По предположению, исходная последовательность ξ является ε -полутраекторией. Пусть U есть $\varepsilon/2$ -окрестность точки (x^*, e^*) . Существует номер N_0 такой, что все $\{(x_{n_m}, e_{n_m}), n_m \geq N_0\}$ лежат в U и, следовательно, расстояние между ними меньше ε . Тогда конечная последовательность $\xi_p = \{(x_k, e_k), N_0 \leq k < n_p\}$ является периодической 2ε -траекторией. Действительно, по предположению, $\{(x_k, e_k)\}$ является ε -траекторией, следовательно надо оценить расстояние между $Pf(x_{n_p-1}, e_{n_p-1})$ и (x_{N_0}, e_{N_0}) . По построению, $\rho((x_{N_0}, e_{N_0}), (x_{n_p}, e_{n_p})) < \varepsilon$ и $\rho(Pf(x_{n_p-1}, e_{n_p-1}), (x_{n_p}, e_{n_p})) < \varepsilon$, тогда $\rho(Pf(x_{n_p-1}, e_{n_p-1}), (x_{N_0}, e_{N_0})) < 2\varepsilon$.

Усреднение на $\xi_p = \{x_k, N_0 \leq k < n_p\}$

$$\lambda(\xi_p) = \frac{1}{n_p - N_0} \sum_{k=N_0}^{n_p-1} \ln |Df(x_k)e_k|.$$

Таким образом, $\lambda(\xi, n_m) = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda(\xi_p)$. Утверждение доказано. Близкое утверждение доказано в работе [9].

Из Утверждения 1 следует, что спектр Σ совпадает с предельным множеством усреднений над периодическими ε -траекториями при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е.

$$\Sigma = \{\lambda \in R : \text{существует последовательность периодических } \varepsilon_n - \text{траекторий } \{\xi_n\}, \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ таких, что } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\xi_n)\}.$$

Таким образом, спектр Морса есть предельное множество показателей Ляпунова периодических ε -траекторий при $\varepsilon \rightarrow 0$. Нашей целью является метод (алгоритм) вычисления спектра Морса динамической системы.

3. Свойства спектра Морса

Определение 3. Точка x называется цепно-рекуррентной, если x является ε -периодической для любого $\varepsilon > 0$, т.е. найдется периодическая ε -траектория, проходящая через точку x .

Цепно-рекуррентное множество состоит из всех цепно-рекуррентных точек и обозначается через CR . Цепно-рекуррентное множество CR является инвариантным замкнутым и содержит все типы возвратных траекторий: периодические, почти-периодические, неблуждающие, гомоклинические и т.д. Отметим, что, если цепно-рекуррентная точка не является периодической и $\dim M > 1$, то существует сколь угодно малое возмущение f в C^0 -топологии, для которого данная точка является периодической [17]. Можно сказать, что цепно-рекуррентные точки порождают периодические траектории при C^0 -возмущениях.

Определение 4. Множество $\Omega \subset CR$ называется компонентой цепно-рекуррентного множества, если любые две точки из Ω можно соединить периодической ε -траекторией для любого $\varepsilon > 0$.

Предложение 2. Пусть $\{\xi_n\}$ последовательность периодических ε_n -траекторий, $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Тогда предельное множество последовательности $\{\xi_n\}$ состоит из цепно-рекуррентных точек.

Доказательство проведем для отображения f , доказательство для Pf осуществляется аналогично. На каждой траектории ξ_n отметим точку x_{n_k} . Так как M - компакт, то существует сходящаяся подпоследовательность такая, что $x_{n_k} \rightarrow x^*$, т.е. точка x^* является предельной. Покажем, что точка x^* является цепно-рекуррентной. Построим последовательность периодических псевдотраекторий $\{\omega_k\}$, заменяя в траектории $\{\xi_{n_k}\}$ точку x_{n_k} на x^* . Покажем, что $\{\omega_k\}$ является ε_k^* -траекторией с $\varepsilon_k^* \leq \varepsilon_{n_k} + \gamma_k$, где $\gamma_k = \max\{\eta_0(\delta_k), \delta_k\}$, δ_k - расстояние между x_{n_k} и x^* , $\eta_0(\rho)$ - модуль непрерывности f . Действительно, по построению, имеем $\rho(f(x_{n_k-1}), x_{n_k}) < \varepsilon_{n_k}$ и $\rho(x_{n_k}, x^*) = \delta_k$, тогда $\rho(f(x_{n_k-1}), x^*) < \varepsilon_{n_k} + \delta_k$. Кроме того, имеем $\rho(f(x_{n_k}), x_{n_k+1}) < \varepsilon_{n_k}$ и $\rho(f(x_{n_k}), f(x^*)) < \eta_0(\delta_k)$, тогда $\rho(f(x^*), x_{n_k+1}) < \varepsilon_{n_k} + \eta_0(\delta_k)$. Так как ε_{n_k} и δ_k сходятся к 0, то $\varepsilon_k^* \rightarrow 0$. Таким образом, последовательность периодических ε_k^* -траекторий $\{\omega_k\}$ такая, что каждая $\{\omega_k\}$ проходит через x^* и $\varepsilon_k^* \rightarrow 0$. Следовательно, x^* является цепно-рекуррентной. Доказательство закончено.

Предельная точка x^* лежит в некоторой компоненте Ω цепно-рекуррентного множества. Если x^{**} другая предельная точка подпоследовательности $\{\xi_{n_k}\}$, то можно показать, что $x^{**} \in \Omega$.

Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\}$ периодических ε_n -траекторий на проективном расслоении P , $\varepsilon_n \rightarrow 0$ такую, что $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\xi_n)$ и ее предельная точка (x^*, e^*) лежит в некоторой компоненте Ω цепно-рекуррентного множества. В этом случае мы будем говорить, что усреднение λ реализуется на компоненте Ω . Отметим, что число λ может реализоваться на разных компонентах цепно-рекуррентного множества.

Предложение 3. Пусть $\{\xi_n\}$ последовательность периодических псевдотраекторий описанных выше. Тогда существует последовательность $\{\omega_n\}$ периодических ε_n^* -траекторий, таких что $(x^*, e^*) \in \omega_n$, $\varepsilon_n^* \rightarrow 0$ и $\lambda(\omega_n) \rightarrow \lambda$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\omega_n\}$, построенную при доказательстве предыдущего Утверждения 2. По построению, каждая псевдотраектория ω_n получена из ξ_n заменой точки (x_n, e_n) на предельную точку (x^*, e^*) , ω_n является периодической ε_n^* -траекторией, $\varepsilon_n^* \rightarrow 0$. Расстояние $\rho((x_n, e_n), (x^*, e^*)) < \delta_n \rightarrow 0$. Если $\xi_n = \{(x_1, e_1), (x_2, e_2), \dots, (x_k, e_k) = (x_0, e_0)\}$ периодическая траектория с отмеченной точкой (x_0, e_0) , которая совпадает с (x_n, e_n) , то $\omega_n = \{(x_1, e_1), (x_2, e_2), \dots, (x_{k-1}, e_{k-1}), (x_k^*, e_k^*) = (x_0^*, e_0^*)\}$, где $(x_0^*, e_0^*) = (x^*, e^*)$ и $\rho((x_0, e_0), (x_0^*, e_0^*)) = \rho((x_n, e_n), (x^*, e^*)) = \delta_n$. Найдем усреднение функции $\varphi(x, e) = \ln |Df(x)e|$

$$\lambda(\xi_n) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_i, e_i) = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \varphi(x_i, e_i) + \varphi(x^*, e^*) \right) + \frac{1}{k} (\varphi(x_n, e_n) - \varphi(x^*, e^*)) =$$

$$= \lambda(\omega_n) + E_n,$$

где $E_n = \frac{1}{k} (\varphi(x_n, e_n) - \varphi(x^*, e^*)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Утверждение доказано.

Предложение 4. Если λ_1 и λ_2 реализуются на компоненте Ω , то любое число λ между λ_1 и λ_2 также реализуется на Ω .

Доказательство. По предположению, существуют две последовательности периодических ε -траекторий $\{\xi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ такие, что

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\xi_n),$$

$$\lambda_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\psi_n).$$

Предельное множество каждой последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ лежит в Ω . Следовательно, найдутся две последовательности точек $\{(x_n, e_n) \in \xi_n\}$ и $\{(y_n, v_n) \in \psi_n\}$, которые сходятся к двум точкам $(x^*, e^*) \in \Omega$ и $(y^*, v^*) \in \Omega$, соответственно. Согласно Утверждению 3 можно считать, что периодические псевдотраектории $\{\xi_n\}$ проходят через (x^*, e^*) и периодические псевдотраектории $\{\psi_n\}$ проходят через (y^*, v^*) . Так как (x^*, e^*) и (y^*, v^*) лежат в одной компоненте Ω , то для любого $\varepsilon_n > 0$ найдется периодическая ε -траектория $\{\xi^*\}$, проходящая через (x^*, e^*) и (y^*, v^*) . При этом переход от (x^*, e^*) к (y^*, v^*) вдоль $\{\xi^*\}$ назовем первой половиной $\{\xi^*\}$, а переход от (y^*, v^*) к (x^*, e^*) назовем второй половиной $\{\xi^*\}$. Построим периодическую псевдо-траекторию χ_n из трех периодических псевдо-траекторий $\{\xi^*\}$, $\{\xi_n\}$ и $\{\psi_n\}$. Начнем с точки (x^*, e^*) и сделаем N число оборотов по ξ_n , затем идем по первой половине траектории $\{\xi^*\}$ до точки (y^*, v^*) , затем делаем K оборотов по ψ_n и возвращаемся к исходной точке (x^*, e^*) по второй половине траектории $\{\xi^*\}$. Усреднение вдоль χ_n зависит от чисел оборотов N и K , которые

можно выбрать произвольно большими. При этом усреднение вдоль соединяющей псевдотраектории ξ^* фиксировано. Любое число λ между λ_1 и λ_2 имеет вид

$$\lambda = \alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2,$$

где $0 < \alpha < 1$. Период построенной траектории χ_n равен $NT_1 + KT_2 + T_3$, где T_1 , T_2 и T_3 периоды $\{\xi_n\}$, $\{\psi_n\}$ и $\{\xi^*\}$, соответственно. Усреднение вдоль χ_n

$$\lambda(\chi_n) = \frac{1}{NT_1 + KT_2 + T_3} \sum_{z=0}^{NT_1+KT_2+T_3-1} \varphi(x_z, e_z). \quad (3.1)$$

Сумма состоит из трех частей, первая часть порождена N оборотами по псевдотраектории ξ_n , вторая часть порождена K оборотами по псевдотраектории ψ_n и последняя часть порождена псевдотраекторией ξ^* . Приведем подобные и перепишем усреднение в виде

$$\lambda(\chi) = \frac{1}{NT_1 + KT_2 + T_3} (NT_1\lambda(\xi_n) + KT_2\lambda(\psi_n) + T_3\lambda(\xi^*)).$$

Выберем числа N и K так, чтобы

$$\begin{aligned} \frac{NT_1}{NT_1 + KT_2 + T_3} &\rightarrow \alpha, \quad \frac{NT_2}{NT_1 + KT_2 + T_3} \rightarrow (1 - \alpha), \\ \frac{T_3}{NT_1 + KT_2 + T_3} &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$ и $K \rightarrow \infty$. Для этого мы построим последовательность целых чисел V и W такую, что $V, W \rightarrow \infty$ и $V/W \rightarrow \alpha$. Так как $0 < \alpha < 1$, то $0 < V < W$. Определим последовательность чисел N и K так, что

$$\frac{NT_1}{NT_1 + KT_2} = \frac{V}{W},$$

например,

$$N = T_2V, \quad K = T_1(W - V). \quad (3.2)$$

Если T_1, T_2 и T_3 фиксированы, то

$$\begin{aligned} \frac{T_3}{NT_1 + KT_2 + T_3} &\rightarrow 0, \\ \frac{NT_1}{NT_1 + KT_2 + T_3} &= \frac{NT_1}{NT_1 + KT_2} \frac{NT_1 + KT_2}{NT_1 + KT_2 + T_3} \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$ и $K \rightarrow \infty$. Выберем последовательности $N_n \rightarrow \infty$ и $K_n \rightarrow \infty$ как описано выше. Таким образом мы получили последовательность χ_n такую, что

$$\lambda(\chi_n) = \alpha\lambda(\xi_n) + (1 - \alpha)\lambda(\psi_n) + \delta_n,$$

где $\delta_n \rightarrow 0$. Отсюда следует, что

$$\lambda(\chi_n) \rightarrow \alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2,$$

при $n \rightarrow \infty$ Утверждение доказано.

Следствие 1. *Каждая компонента Ω цепно-рекуррентного множества порождает отрезок $[a(\Omega), b(\Omega)]$, где $a = \lambda_{\inf}(\Omega)$ и $b = \lambda_{\sup}(\Omega)$ нижняя и верхняя грани усреднений над периодическими псевдотраекториями компоненты Ω .*

Каждая компонента Ω_{ik} цепно-рекуррентного множества $CR(Pf)$ на проективном расслоении P проектируется на некую компоненту Ω_i цепно-рекуррентного множества $CR(f)$ на многообразии M . Число цепно-рекуррентных компонент на M не ограничено. Например, уравнение $x' = x^2 \sin \frac{1}{x}$ имеет бесконечное число состояний равновесия, которые совпадают с цепно-рекуррентными компонентами. Однако, число компонент $\Omega_{ik} \subset P$ проективного расслоения, которые проектируются на фиксированную компоненту $\Omega_i \subset M$ не превышает размерности многообразия M [13]. Таким образом, мы должны оценить бесконечно много интервалов, что невозможно в общем случае. Однако, как мы увидим в нашей ситуации, эти интервалы также как и компоненты цепно-рекуррентного множества сгущаются, как это имеет место в рассмотренном выше примере. Это позволяет для фиксированной величины аппроксимации $\varepsilon > 0$ построить конечное число интервалов, некоторые из которых содержат бесконечно много интервалов спектра. Ясно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ число аппроксимирующих интервалов может расти до бесконечности. Основным инструментом вычисления спектра есть символический образ динамической системы, который является ориентированным графом.

4. Символический образ

В основе дальнейшего изложения лежит понятие символического образа динамической системы [13, 14], которое соединило в себе символическую динамику [8, 10] и численные методы [11].

Пусть $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ есть конечное покрытие многообразия M замкнутыми подмножествами, $M(i)$ будем называть ячейкой индекса i .

Определение 5. [6] Пусть G является ориентированным графом с вершинами $\{i\}$ соответствующими ячейкам $\{M(i)\}$. Вершины i и j связаны ориентированным ребром (дугой) $i \rightarrow j$ тогда и только тогда, когда

$$f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset.$$

Граф G называется символическим образом отображения f для покрытия C .

Символический образ является геометрическим средством для дискретизации динамической системы. Исследование символического образа позволяет получить полезную информацию о глобальной структуре динамики системы. Символический образ зависит от покрытия C , изменение которого меняет символический образ. Существование ребра $i \rightarrow j$ гарантирует существование точки x в ячейке $M(i)$ такой, что ее образ $f(x) \in M(j)$. Другими словами, ребро $i \rightarrow j$ является

следом перехода $x \rightarrow f(x)$, где $x \in M(i)$, $f(x) \in M(j)$. Если ребро $i \rightarrow j$ не существует, то нет точек $x \in M(i)$ таких, что их образ $f(x) \in M(j)$. Пусть покрытие C состоит из ячеек, которые являются параллелепипедами, пересекающимися по граничным дискам. Из этого покрытия мы будем строить разбиение C^* , состоящее из полуоткрытых параллелепипедов, у которых граничные диски принадлежат к одной из примыкающих ячеек.

Определение 6. Бесконечная в обе стороны последовательность $\{z_k\}$ вершин графа G называется путем (или допустимым путем), если для каждого k граф G содержит направленную дугу $z_k \rightarrow z_{k+1}$.

Пусть $\text{diam}M(i) = \max(\rho(x, y) : x, y \in M(i))$ есть диаметр ячейки $M(i)$ и $d = \text{diam}(C) = \max_i \text{diam}M(i)$ назовем диаметром покрытия C . Существует естественное соответствие между допустимыми путями на символическом образе и ε -траекториями отображения f .

Теорема 1. Слабое свойство отслеживания [13]

1. Если последовательность $\{z_k\}$ есть допустимый путь на символическом образе G , тогда существует последовательность точек $\{x_k\}$, $x_k \in M(z_k)$, которая является ε -траекторией f для любого $\varepsilon > d$.

В частности, если последовательность $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ является p -периодической, тогда ε -траектория $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ является p -периодической.

2. Существует число $\rho > 0$ такое, что, если последовательность точек $\{x_k\}$ является ε -траекторией f , $\varepsilon < \rho$ и $x_k \in M(z_k)$, тогда последовательность $\{z_k\}$ является допустимым путем на символическом образе G .

В частности, если ε -траектория $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ является p -периодической, тогда $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ является p -периодическим путем на G .

Грубо говоря, допустимый путь есть след ε -траектории и наоборот. Так что путь на символическом образе можно рассматривать как кодировку траекторий.

Определение 7. Вершину символического образа назовем возвратной, если через нее проходит периодический путь. Множество возвратных вершин обозначается RV . Две возвратные вершины i и j называются эквивалентными, если существует периодический путь, проходящий через i и j .

Множество возвратных вершин RV разбивается на классы эквивалентности $\{H_k\}$. В теории графов H_k называют компонентами сильной связности.

Мы будем применять процесс подразбиения покрытий и строить последовательность символических образов. Рассмотрим главный шаг процесса подразбиения. Пусть $C = \{M(i)\}$ - покрытие и G - символический образ для C . Предположим, что новое покрытие NC является подразбиением покрытия C . Это означает,

что каждая ячейка $M(i)$ подразбивается на ячейки $m(i, k)$, $k = 1, 2, \dots$, т.е.

$$\bigcup_k m(i, k) = M(i).$$

Обозначим NG новый символический образ для покрытия $NC = \{m(i, k)\}$. Вершины NG обозначаются как (i, k) . Такое построение генерирует отображение s из NG на G , которое переводит вершины (i, k) на вершину i . Из

$$f(m(i, k)) \cap m(j, l) \neq \emptyset$$

следует, что

$$f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset$$

Следовательно, ребро $(i, k) \rightarrow (j, l)$ отображается на ребро $i \rightarrow j$. Следовательно, s отображает ориентированный граф NG на ориентированный граф G . Поэтому, каждый допустимый путь на NG преобразуется отображением s на некий допустимый путь на G . В частности, образ периодического пути есть периодический путь, а образ возвратной вершины есть возвратная вершина. Более того, образ класса NH эквивалентных возвратных вершин (на NG) лежит в классе H эквивалентных возвратных вершин на G .

Построим многозначное отображение h из многообразия M на множество вершин $Ver(G)$ символического образа, сопоставляя точке x все вершины i такие, что $x \in M(i)$. Отображение h обладает следующими свойствами:

- если x - цепно-рекуррентная точка и $i \in h(x)$, то i - возвратная вершина,
- если x_1 и x_2 лежат в одной компоненте Ω , а $i_1 \in h(x_1)$ и $i_2 \in h(x_2)$, то i_1 и i_2 эквивалентные возвратные вершины.

Из этих свойств следует, что образ $h(\Omega)$ компоненты Ω лежит в некотором классе эквивалентных возвратных вершин, который будем обозначать $H(\Omega)$, а компонента Ω лежит в $\{\bigcup_i M(i), i \in H(\Omega)\}$.

Обозначим $P(d)$ объединение ячеек $M(i)$, для которых вершина i является возвратной, т.е.

$$P(d) = \left\{ \bigcup M(i) : i - \text{возвратная вершина} \right\}, \quad (4.1)$$

где d - диаметр покрытия. Предположим, что $C = C_0$ является исходным покрытием и C_1, C_2, \dots получены описанным процессом подразбиения, множества P_0, P_1, P_2, \dots построены согласно (4.1).

Теорема 2. Локализация цепно-рекуррентного множества [13] Последовательность множеств P_0, P_1, P_2, \dots обладает следующими свойствами.

1. Каждое P_k есть замкнутая окрестность цепно-рекуррентного множества CR ,

2. P_k вложены друг в друга

$$P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset CR,$$

3. Если диаметры покрытий $d_k \rightarrow 0$, тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \bigcap_k P_k = CR.$$

Следствие 2. Пусть Ω является компонентой CR , $\{\bigcup M(i) : i \in H(\Omega)\} = P(\Omega)$ замкнутая окрестность компоненты Ω . Если диаметр $d_k \rightarrow 0$ тогда

$$P_0(\Omega) \supset P_1(\Omega) \supset P_2(\Omega) \supset \dots \supset \Omega \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(\Omega) = \bigcap_k P_k(\Omega) = \Omega. \quad (4.2)$$

5. Вычисление спектра

Для вычисления спектра мы построим символический образ G отображения Pf и оснащение графа G , фиксируя величину $a[ij]$ для каждого ребра $i \rightarrow j$ следующим образом. Пусть $i \rightarrow j$ - ребро на G . Возьмем точку (x, e) из ячейки $M(i)$ и положим $a[ij] = \ln |Df(x)e| = \varphi(x, e)$. Отметим, что оснащение $a[ij]$ не зависит от j и, если (x^*, e^*) - другая точка в $M(i)$, $a^*[ji] = \varphi(x^*, e^*)$, то мы имеем оценку

$$|a^*[ij] - a[ij]| = |\varphi(x, e) - \varphi(x^*, e^*)| < \eta(d),$$

где $\eta(d)$ есть модуль непрерывности функции φ и d - диаметр покрытия.

Определение 8. Пару G и $\{a[ij]\}$ назовем оснащенный символическим образом и обозначим G_{lb} .

Усреднение оснащения над конечным путем $\omega = \{z_0, z_1, \dots, z_p\}$ есть среднее арифметическое

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p a[z_{k-1}z_k].$$

В частности, если $\omega = \{z_1, \dots, z_p = z_0\}$ является периодическим путем, то $\lambda(\omega)$ есть среднее значение оснащения на периоде. Если $\omega = \{z_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ является бесконечным путем, тогда предел

$$\lambda(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a[z_{k-1}z_k]$$

назовем усреднением над ω , если такой предел существует. В том случае, когда данный предел не существует, то (т. к. оснащение ограничено) найдется подпоследовательность $n_m \rightarrow \infty$, для которой предел

$$\lambda(\omega, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=0}^{n_m-1} a[z_k z_{k+1}] \quad (5.1)$$

существует. Такие подпоследовательности назовем сходящимися. Спектр усреднения оснащения над ω есть предельное множество усреднений над сходящимися подпоследовательностями

$$\Sigma(\omega) = \{\lambda \in R \mid \text{существует } n_m \rightarrow \infty \text{ такие, что } \lambda = \lambda(\omega, n_m)\}.$$

Определение 9. Спектр усреднения оснащенного символического образа G_{lb} есть предельное множество усреднений над всеми допустимыми путями

$$\Sigma(G_{lb}) = \{\lambda \in R \mid \lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m, \lambda_m \in \Sigma(\omega_m), \omega_m \text{-допустимый путь}\}.$$

Предложение 5. Пусть $\omega = \{z_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ является бесконечным путем на G и найдется сходящаяся подпоследовательность (5.1). Тогда найдется последовательность периодических путей $\{\omega_p\}$, $p \rightarrow \infty$ таких что, $\lambda(\omega_p) \rightarrow \lambda(\omega, n_m)$ при $p \rightarrow \infty$.

Доказательство. Не трудно показать, что предел (5.1) не зависит от конечного числа начальных точек последовательности ω , т.е.

$$\lambda(\omega, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m - n_0} \sum_{k=n_0}^{n_m-1} a[z_k z_{k+1}].$$

Так как символический образ содержит конечное число вершин, то найдется вершина $z^* = z_{n_0}$, которая повторяется в ω бесконечно много раз $z^* = z_{n_p}$, $p \rightarrow \infty$. Тогда конечная последовательность $\omega_p = \{z_k, n_0 \leq k \leq n_p\}$ является периодическим путем на G . Усреднение над ω_p

$$\lambda(\omega_p) = \frac{1}{n_p - n_0} \sum_{k=n_0}^{n_p-1} a[z_k z_{k+1}].$$

Таким образом, $\lambda(\omega, n_m) = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda(\omega_p)$. Утверждение доказано.

Следствие 3. Спектр $\Sigma(G_{lb})$ совпадает с предельным множеством усреднений над периодическими путями, т.е.

$$\Sigma(G_{lb}) = \{\lambda \in R \mid \text{существует последовательность периодических путей } \{\omega_n\} \text{ таких, что } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\omega_n)\}.$$

Таким образом, спектр оснащенного символического образа определяется на возвратных вершинах RV . Рассмотрим последовательность периодических путей $\{\omega_n\}$, $n \rightarrow \infty$, на которой достигается $\lambda \in \Sigma(G_{lb})$. Множество RV разбито на конечное число классов эквивалентных возвратных вершин. Каждый класс H содержит некоторое множество элементов последовательности $\{\omega_n\}$. Если это множество конечно, то соответствующие значения $\lambda(\omega_n)$ не влияют на предельное значение λ . Поэтому можно считать, что таких элементов нет. Остаются только

классы, которые содержат бесконечное число элементов последовательности. Если последовательность $\{\omega_k\}$ лежит в классе H и $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(\omega_k)$, то будем говорить, что показатель λ реализуется в классе H . Спектр класса H определяется как

$$\Sigma(H) = \{\lambda \in R \mid \text{существует последовательность периодических путей}$$

$$\{\omega_n \subset H\} \text{ таких, что } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\omega_n)\}.$$

Предложение 6. Если λ_1 и λ_2 реализуются в классе H , то любое число λ между λ_1 и λ_2 также реализуется в классе H .

Доказательство данного утверждения повторяет доказательство Утверждения 4.

Следствие 4. Спектр класса H есть отрезок $[a(H), b(H)]$, где $a = \lambda_{\inf}(H)$ и $b = \lambda_{\sup}(H)$ - нижняя и верхняя грани усреднений над периодическими путями из H .

Периодический путь $\omega = \{z_1, \dots, z_p = z_0\}$ назовем простым или циклом, если его вершины z_1, \dots, z_p являются различными, т.е., $z_i \neq z_j$ для $i \neq j$; $i, j = 1, \dots, p$. Покажем, как любой периодический путь можно разложить в сумму циклов.

Пусть $\omega = \{z_1, \dots, z_p = z_0\}$ является периодическим путем периода p . Если ω не является простым, то существует вершина z^* такая, что $z^* = z_l = z_{l+p_1}$, $0 < p_1 < p$. Рассмотрим две конечные последовательности $\omega^* = \{z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+p_1}, \dots, z_p = z_0\}$ и $\omega^{**} = \{z_{l+1}, \dots, z_{l+p_1} = z_l\}$. Так как путь ω является допустимым, то существуют дуги $z_{l-1} \rightarrow z_l = z_{l+p_1}$ и $z_{l+p_1} = z_l \rightarrow z_{l+1}$, поэтому последовательности ω_1 и ω_2 являются периодическими допустимыми путями с периодами p_1 и $p_2 = p - p_1$, соответственно. Ясно, что $p_1 + p_2 = p$. В этом случае мы будем говорить, что путь ω есть сумма периодических путей ω^* и ω^{**} и писать

$$\omega = \omega^* + \omega^{**}.$$

Мы можем применить описанное разложение к путям ω^* и ω^{**} . Повторяя этот процесс разложения, приходим к разложению ω в сумму периодических путей $\omega_1, \dots, \omega_q$ периодов p_1, \dots, p_q , $p_1 + \dots + p_q = p$. Ясно, что этот процесс конечен и финальное разложение $\omega = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_r$ состоит только из простых периодических путей. Циклы ϕ_1, \dots, ϕ_r могут совпадать. Если путь ω^* повторяется k раз в разложении ω , то мы будем писать ω

$$\omega = k\omega^* + \omega^{**}.$$

Так как число вершин конечно, то число циклов также конечно. Пусть ϕ_1, \dots, ϕ_q есть набор всех циклов класса H и p_1, \dots, p_q являются периодами этих путей, соответственно. Найдем усреднения на этих циклах

$$\lambda(\phi_j) = \frac{1}{p_j} \sum_{k=1}^{p_j} a[z_{k-1}^j z_k^j].$$

Рассмотрим периодический путь $\omega \subset H$ и предположим, что $\omega = k_1\phi_1 + \dots + k_q\phi_q$ есть разложение на простые периодические пути, период ω есть $p = k_1p_1 + \dots + k_qp_q$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что каждый цикл ϕ_j входит в ω с коэффициентом $k_j \geq 0$, при этом случай $k_j = 0$ означает, что ω реально не проходит через ϕ_j . Если $\omega = k_1\phi_1 + \dots + k_q\phi_q$, то будем говорить, что цикл ϕ_j сходит в ω с весом $\mu_j = \frac{k_j p_j}{p}$. Ясно, что $\sum_{j=1}^q \mu_j = 1$. Не трудно доказать следующее.

Предложение 7. Усреднение оснащения над периодическим путем $\omega = k_1\phi_1 + \dots + k_q\phi_q$ вычисляется по формуле

$$\lambda(\omega) = \sum_{j=1}^q \mu_j \lambda(\phi_j),$$

где $\mu_j = \frac{k_j p_j}{p}$.

Пусть

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H) &= \min\{\lambda(\phi_j), j = 1, \dots, q\}, \\ \lambda_{\max}(H) &= \max\{\lambda(\phi_j), j = 1, \dots, q\} \end{aligned}$$

есть минимальное и максимальное значения усреднения на циклах класса H . Из Утверждения 7 следует

Предложение 8. Усреднение $\lambda(\omega)$ над любым периодическим путем ω из класса H удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{\min}(H) \leq \lambda(\omega) \leq \lambda_{\max}(H).$$

Предложение 9. Спектр усреднения класса $\Sigma(H) = [\lambda_{\min}(H), \lambda_{\max}(H)]$, т.е. для любого $\lambda \in [\lambda_{\min}(H), \lambda_{\max}(H)]$ найдется последовательность периодических путей $\{\omega_m\}$ в H таких, что $\lambda(\omega_m) \rightarrow \lambda$ при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство. Без потери общности мы предположим, что $\lambda = \alpha\lambda_{\min}(H) + (1 - \alpha)\lambda_{\max}(H)$, $0 < \alpha < 1$. Пусть $\phi_{\min} = \{z_1^*, \dots, z_l^*\}$ и $\phi_{\max} = \{z_1^{**}, \dots, z_e^{**}\}$ есть циклы реализующие усреднения $\lambda_{\min}(H)$ и $\lambda_{\max}(H)$, соответственно. Так как z_l^* и z_1^{**} являются эквивалентными возвратными вершинами, то существует периодический путь $\psi = \{z_1 = z_1^*, \dots, z_j = z_1^{**}, \dots, z_q\}$, проходящий через вершины z_l^* и z_1^{**} . Построим допустимый периодический путь ω следующим образом. Начинаем с z_l^* и сделаем k^* оборотов по ϕ_{\min} , затем идем по ψ от z_l^* до z_1^{**} , делаем k^{**} оборотов по ϕ_{\max} и возвращаемся по ψ к исходной вершине z_l^* . Построенный периодический путь ω имеет разложение

$$\omega = k^* \phi_{\min} + k^{**} \phi_{\max} + \psi.$$

Пусть p^* , p^{**} и q являются периодами ϕ_{\min} , ϕ_{\max} и ψ , соответственно. В этом случае веса ϕ_{\min} , ϕ_{\max} и ψ имеют значения $\mu(\phi_{\min}) = \frac{k^*p^*}{p}$, $\mu(\phi_{\max}) = \frac{k^{**}p^{**}}{p}$ и $\mu(\psi) = \frac{q}{p}$, где $p = k^*p^* + k^{**}p^{**} + q$ есть период ω . Усреднение над ω

$$\lambda(\omega) = \mu(\phi_{\min})\lambda(\phi_{\min}) + \mu(\phi_{\max})\lambda(\phi_{\max}) + \mu(\psi)\lambda(\psi).$$

Если k^* и $k^{**} \rightarrow \infty$, то $\mu(\psi) = \frac{q}{p} \rightarrow 0$. Выбирая числа k^* и $k^{**} \rightarrow \infty$, как это было сделано при доказательстве Утверждения 4, построим последовательность путей ω так, что

$$\lambda(\omega_m) \rightarrow \alpha\lambda_{\min}(H) + (1 - \alpha)\lambda_{\max}(H) = \lambda.$$

Утверждение доказано.

Следующая теорема является следствием Утверждений 8 и 9.

Теорема 3. *Спектр оснащенного символического образа $\Sigma(G_{lb})$ состоит из интервалов $[\lambda_{\min}(H_k), \lambda_{\max}(H_k)]$, где $\{H_k\}$ есть полное семейство классов эквивалентных возвратных вершин символического образа G .*

Рассмотрим фиксированный символический образ и его оснащение. Согласно предыдущей теореме мы можем найти спектр усреднения оснащенного символического образа за конечное число шагов. Возникает вопрос об оценке спектра Морса через спектр оснащенного символического образа.

Теорема 4. *Спектр Морса Σ лежит в расширенном спектре оснащенного символического образа $\Sigma(G_{lb})$, который состоит из интервалов $[\lambda_{\min}(H_k) - \eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \eta(d)]$, где $\{H_k\}$ есть полное семейство классов эквивалентных возвратных вершин символического образа G , d - диаметр покрытия и $\eta(\cdot)$ - модуль непрерывности функции $\varphi(x, e) = \ln |Df(x)e|$.*

Доказательство. Пусть $\xi = \{(x_1, e_1), (x_2, e_2), \dots, (x_p, e_p) = (x_0, e_0)\}$ есть периодическая ε -траектория отображения Pf . Согласно Теореме 1 об отслеживании, найдется $r > 0$ такое, что если $\varepsilon < r$ и $(x_k, e_k) \in M(z_k)$, то периодический путь $\omega = \{z_1, z_2, \dots, z_p = z_0\}$ является допустимым. Найдем усреднение функции φ на ξ

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \varphi(x_k, e_k)$$

и усреднение оснащения на периодическом пути ω

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p a[z_k, z_{k+1}] = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \varphi(x_k^*, e_k^*),$$

где точки (x_k, e_k) и (x_k^*, e_k^*) лежат в ячейке $M(z_k)$. При этом $\varphi(x_k, e_k) - \varphi(x_k^*, e_k^*) = \alpha_k$, $|\alpha_k| < \eta(d)$. Тогда

$$\lambda(\xi) = \lambda(\omega) + E,$$

где $|E| = |\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \alpha_k| < \eta(d)$. Пусть λ лежит в спектре Σ усреднения функции φ , т.е. существует последовательность периодических ε_n -траекторий $\{\xi_n\}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, таких что $\lambda(\xi_n) \rightarrow \lambda$, при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим ту часть последовательности, где $\varepsilon_n < r$. Построим периодические допустимые пути $\{\omega_n\}$ как это сделано выше. Тогда мы имеем оценку

$$\lambda(\xi_n) = \lambda(\omega_n) + E_n,$$

где $|E_n| < \eta(d)$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что последовательности $\lambda(\omega_n)$ и E_n сходятся к λ^* и E^* . Если это не так, то мы перейдем к подпоследовательностям. Таким образом, мы имеем равенство

$$\lambda = \lambda^* + E^*, \quad |E^*| < \eta(d). \quad (5.2)$$

По определению, предельное значение λ^* лежит в спектре оснащенного символического образа $\Sigma(G_{lb})$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Таким образом, для оценки спектра Морса исходной системы нам нужно найти спектр оснащенного символического образа. Эта задача сводится к нахождению циклов с минимальным и максимальным характеристическим показателями. Понятно, что поиск таких циклов с помощью перебора невозможен в наших условиях, так как при итерационных построениях символического образа число циклов резко возрастает. Поэтому для достижения цели используется метод, сводящий нашу задачу к специальной транспортной задаче линейного программирования [14].

6. Численные эксперименты

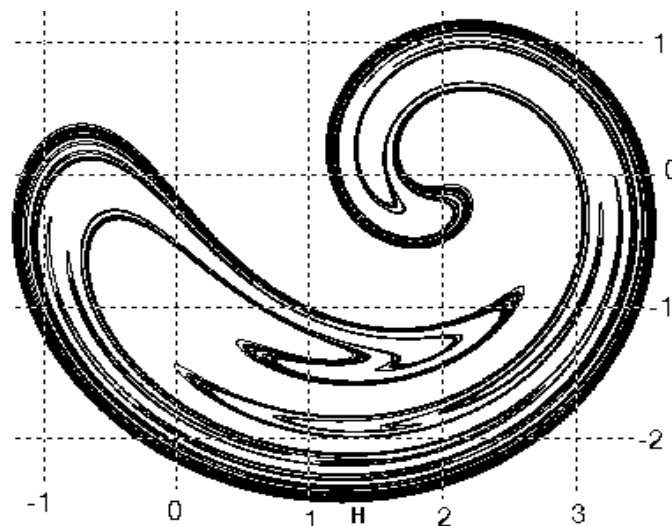


Рис. 1. Аттрактор модифицированного отображения Икеды

Рассмотрим модифицированное отображение Икеды:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 0.9(x \cos \tau(x, y) - y \sin \tau(x, y)) \\ y_1 &= 0.9(x \sin \tau(x, y) + y \cos \tau(x, y)), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где

$$\tau(x, y) = 0.4 - \frac{6}{1 + x^2 + y^2}.$$

Отображение (6.1) обладает свойством сжатия площадей и имеет глобальный аттрактор A_g , см. рис. 1. Существует единственная гиперболическая неподвижная точка $H(1.3815, -2.4746)$. Кроме того, отображение имеет единственную 2-периодическую траекторию $P_2 = \{(0.2338, -0.7031), (1.9995, 0.6681)\}$, устойчивое и неустойчивое многообразия которой пересекаются и образуют гомоклинический цикл.

Известно [13], что, если спектр Морса не содержит нуля, то цепно-рекуррентное множество системы является гиперболическим и, следовательно, Ω -устойчиво. Вычисления показывают, что аттрактор A_g не является гиперболическим. Нам хотелось бы найти нетривиальное инвариантное множество, которое окажется гиперболическим. Мы рассмотрели часть этого аттрактора, а именно, максимальное цепно-рекуррентное множество Ω_0 в области $[-1.1, 3.5] \times [-1.5, 1.8]$. Применение описанной выше техники локализации дает следующие результаты. При начальном разбиении базы 10×10 стартовые размеры ячейки были 0.46×0.33 . После нескольких итераций (при размерах ячейки 0.0071×0.0051) множество Ω_0 распадается на две компоненты Ω_1 и Ω_2 , соответствующие двум компонентам сильной связности на символическом образе.

Инвариантное множество Ω_1 оказалось 6-периодической орбитой. Для лучшей локализации в базе проведено несколько итераций до момента, когда размеры ячейки составили 0.00045×0.00032 . Построение оснащенного символического образа проводилось до момента, пока размер ячейки в проективном пространстве не стал равен 0.0003. При таких данных расстояние между спектром Морса исходной системы и спектром символического образа не превосходит 0.01. В результате вычислений на проективном расслоении получены две компоненты и спектр Морса над множеством Ω_1 содержится в объединении интервалов $[0.522, 0.523]$ и $[-0.734, -0.733]$, т.е. Ω_1 является 6-периодической гиперболической траекторией. Эти вычисления были проверены прямым вычислением показателей Ляпунова 6-периодической траектории.

Инвариантное множество Ω_2 оказалось нетривиальным канторовым множеством. Итерации в базе проводились до размера ячейки 0.00089×0.00058 . Затем строились итерации оснащенного символического образа до размера ячейки по углу 0.00038. Аналогично вычислениям для первой компоненты, при таких данных спектр Морса исходной системы отличается от спектра символического образа на 0.01. В результате получены два интервала $[0.632, 0.793]$ и $[-1.004, -0.843]$, которые являются расширенными интервалами оснащенного символического образа. Эти интервалы не содержат нуля, следовательно, множество Ω_2 является гипер-

болическим и Ω -устойчивым, т.е. оно будет сохраняться при C^1 -возмущениях системы.

7. Заключение

В работе показано, что показатели Ляпунова всех траекторий гладкой динамической системы можно оценить, используя символический образ системы. Теорема 4 описывает набор отрезков, где располагаются показатели Ляпунова псевдотраекторий системы (спектр Морса). Символический образ является ориентированным графом, который строится для замкнутого конечного покрытия фазового пространства. Вершины символического образа соответствуют ячейкам покрытия, а ребра соответствуют динамике (отображению) ячеек. Символический образ стал удобным инструментом для получения теоретических результатов (см. [15]). Предложенные доказательства теорем являются конструктивными и допускают построение соответствующих алгоритмов. Символический образ, как конечный граф, допускает компьютерное изучение, что дает информацию о глобальной динамике системы. Точность такой информации определяется диаметром ячеек покрытия. Таким образом, увеличение точности полученной информации приводит к росту числа ячеек покрытия и, следовательно, к росту вершин графа. Численные эксперименты показывают, что исследования символического образа на современных персональных компьютерах дают хорошие результаты в реальном времени, если число узлов (вершин) не превышает миллион. Для более мощных компьютеров это число может быть увеличено на порядок. При этом, применение последовательности символических образов (как это описано в Теореме 2 о локализации цепно-рекуррентного множества) значительно сокращает время вычисления. Описанный численный эксперимент показывает, что представленная технология позволяет проверить гиперболичность нетривиального инвариантного множества.

Список цитируемых источников

1. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды математического института им. В.А.Стеклова, 90 (1967).
Anosov D. V. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature // Proc. Steklov Inst. Mathematics. 90 (1967).
2. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова // из. Наука, Москва, 1966.
Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytskii V. V. // Theory of Lyapunov Exponents, Nauka, Moscow, 1966.
3. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос // Физматлит, Москва, 2001.
Kuznetsov S. P. Dynamic Chaos // Nauka, Moscow, 2001.
4. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // 1950 Гостехиздат М.–Л.
Lyapunov A. M. The General Problem of the Stability of Motion // Gostechizdat, Moscow, 1950.

5. *Маллинецкий Г. Г., Потанов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики // Едиториал УРСС, Москва, 2002.
Malinetskii G. G., Potanov A. B. Modern problems of nonlinear dynamics // Moscow, 2002.
6. *Осипенко Г. С.* О символическом образе динамической системы // Краевые задачи, Пермь, 1983, 101-105.
Osipenko G. S. On Symbolic Image of Dynamical System // in *Boundary value problems*, Perm, 1983, 101-105.
7. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P. I: Theory. P. II: Numerical applications // *Meccanica*, v. 15 (1980) pp. 930.
8. *Bowen R.* Symbolic Dynamics // *Ann. Math. Soc.* v. 8 (1982), Providence.
9. *Colonius F. and Kliemann W.* The Dynamics of Control // *Burkhauser*, 2000.
10. *Douglas Lind, Brian Marcus* An introduction to symbolic dynamics and coding // *Cambridge University Press*, 1995.
11. *Hsu C. S.* Cell-to-Cell Mapping // *Springer-Verlag*, N.Y., 1987.
12. *Katok A., Hasselblat B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems // *Cambridge University Press*, 1995.
13. *Osipenko George* Dynamical systems, Graphs, and Algorithms // in *Lectures Notes in Mathematics*, v. 1889, *Springer*, Berlin, 2007.
14. *Osipenko G.S., Romanovsky J.V., Ampilova N.B. and Petrenko E.I.* Computation of the Morse Spectrum // *Journal of Mathematical Sciences* – v. 120:2 (2004), 1155 – 1166.
15. *Osipenko George* Symbolic images and invariant measures of dynamical systems // *Ergodic Theory and Dynamical Systems* – v. 30 (2010), 1217 – 1237.
16. *Parter Thomas, Shua Leon* Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems // *Springer-Verlag*, New-York, 1989, 348.
17. *Shub M.* Stabilite globale de systems denamiques // *Asterisque* – v. 56 (1978), 1-21.

Получена 01.03.2016