

УДК 531.38

Об одном алгоритме оптимального управления поворотом твердого диска с упругим стержнем

Е. П. Кубышкин, П. А. Солодовников

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль 150000. E-mail: kubysh.e@yandex.ru, hellyeahdominate@gmail.com

Аннотация. В работе предложен алгоритм построения оптимального управления поворотом твердого диска с упругим стержнем постоянного сечения, жестко прикрепленным к боковой поверхности диска в направлении его радиуса. Поворот осуществляется моментом внешних сил, приложенным к оси, проходящей через центр диска перпендикулярно средней линии стержня. Изучаются задача перевода механической системы из начального фазового состояния в конечное в заданный момент времени с минимизацией величины управляющего момента (нормы управляющего момента в пространстве L_∞) и задача быстродействия при ограничении величины управляющего момента. Сформулирован принцип максимума, предложен эффективный алгоритм решения указанных задач.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума, твердое тело с упругим стержнем.

An algorithm for optimal control of the hard disk turning with elastic rod

E. P. Kubyshkin, P. A. Solodovnikov

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl 150003.

Abstract. The paper proposes an algorithm for constructing optimal control for turning of the hard disk with a constant section elastic rod rigidly attached to the side surface of the disk in the radial direction thereof. Turning is carried out by the momentum of external forces, acted to an axis passing through the center of the disk perpendicularly to the middle line of the rod. The problem of translating a mechanical system from the initial phase state to the final state at a given time while minimizing the amount for the governing moment (norm of the governing moment in L_∞ space) is studied. The problem of the speed while confining the amount of governing moment is also studied. Optimal control construction problem is reduced to the solution of moment problem in the corresponding functional space. Maximum principle is formulated, an effective algorithm for construction of optimal controls in the series form with in advance known functional terms is proposed. Existence of controls with large number of shifts is noticed.

Keywords: optimal control, maximum principle, solid body with flexible rod.

MSC 2010: 47N10, 49J20, 49J35, 93C20, 70E99

1. Постановка задачи и формулировка результата

Рассматривается начально-краевая задача

$$J\ddot{\theta} + \int_0^1 (x+a)y_{tt}(x,t)dx = M(t), \quad (1)$$

$$y_{tt} + b^2 y_{xxxx} = -(x+a)\ddot{\theta}, \quad (2)$$

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0, y_{xx}(1,t) = y_{xxx}(1,t) = 0, \quad (3)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = \dot{y}_0(x), \quad (4)$$

для определения функций $\theta(t), y(x,t)$ ($0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1$), в которой $J = J_0 + a^2 + a + 1/3$, где J_0, a — положительные параметры, $\theta_0, \dot{\theta}_0, M(t), y_0(x), \dot{y}_0(x)$ — заданные постоянные и функции.

Начально-краевая задача (1)–(4) описывает поворот механической системы, состоящей из твердого диска радиуса r и толщины h с прямолинейным упругим стержнем, который одним концом жестко прикреплен к боковой поверхности диска в направлении радиуса. Упругий стержень моделируется балкой Эйлера-Бернулли в рамках гипотез малого изгиба, имеет постоянное круговое сечение диаметра d и равномерно распределенную по длине массу. Точка заделки стержня в диск и его центр масс находятся на одной прямой со средней линией недеформированного стержня. Поворот осуществляется вокруг оси, проходящей через центр масс диска перпендикулярно средней линии недеформированного стержня моментом внешних сил $M'(t')$, приложенным к оси вращения. Положение механической системы характеризуется двумя функциями $\theta(t'), y'(x', t')$, определяющими соответственно в момент времени t' угол поворота системы относительно инерциального пространства и величину поперечной деформации стержня в точке с координатой x' на оси OX' , проходящей вдоль средней оси стержня от его точки заделки в диске. Вывод уравнений движения рассматриваемой механической системы, имеется, например, в [2]. Рассматриваемая механическая система может служить, например, механической моделью руки манипулятора, обладающей упругой податливостью.

Начально-краевая задача (1)–(4) приведена в безразмерных переменных

$$x = \frac{x'}{l}, \quad t = \frac{t'}{t_0}, \quad a = \frac{r}{l}, \quad y(x,t) = \frac{y'(x', t')}{l}, \quad J_0 = \frac{2\rho_d r^4 h}{d^2 \rho_b l^3}, \quad b^2 = \frac{E d^2 t_0^2}{16 \rho_b l^4}, \quad (5)$$

где ρ_d, ρ_b — соответственно удельные плотности материала стержня и материала диска, E — модуль упругости материала стержня, t_0 — временной масштаб. Величина J характеризует момент инерции всей системы относительно оси вращения.

В дальнейшем, как обычно, $L_2(0, T)$ — пространство определенных на $(0, T)$ вещественнозначных интегрируемых по Лебегу функций $u(t)$, для которых $\|u(t)\|_{L_2(0, T)} = (u(t), u(t))_{L_2(0, T)}^{1/2} < \infty$, где $(u_1(t), u_2(t))_{L_2(0, T)} = \int_0^T u_1(t)u_2(t)dt$, $L_\infty(0, T)$ — подпространство функций из $L_2(0, T)$, для которых $\|u(t)\|_{L_\infty(0, T)} = \text{vrai sup}_{0 \leq t \leq T} |u(t)| < \infty$ (существенный supremum).

Для начально-краевой задачи (1)–(4) рассмотрены следующие задачи оптимального управления.

Задача 1. Определить функцию управления $M(t) \in L_\infty(0, T)$, переводящую решение начально-краевой задачи (1)–(4) из начального состояния (4) в конечное

$$\theta(T) = \theta_T, \quad \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T, \quad y(x, T) = y_T(x), \quad y_t(x, T) = \dot{y}_T(x) \quad (6)$$

в заданный момент времени T и минимизирующую функционал

$$\Phi(M) = \|M(t)\|_{L_\infty(0, T)}. \quad (7)$$

Задача 2 (Задача быстрогодействия). Определить функцию управления $M(t) \in L_\infty(0, T)$, $\Phi(M) \leq L < \infty$, переводящую решение начально-краевой задачи (1)–(4) из (4) в (6) за минимальное время T .

Ниже для решения задач 1,2 используется идеология работ [6]–[8], позволяющая свести решение задач оптимального управления поведением решений начально-краевых задач вида (1)–(4) к решению проблемы моментов в соответствующих функциональных пространствах. Для оптимального управления сформулирован принцип максимума, предложен эффективный алгоритм построения оптимального управления в виде ряда по заранее построенным функциям. В задаче 2 значение минимального времени определяется как корень некоторого нелинейного алгебраического уравнения.

2. Построение решения начально-краевой задачи (1)–(4)

Выразим $\theta_{tt}(x, t)$ из (1) и подставим в уравнение (2). В результате имеем для определения $y(x, t)$ следующую начально-краевую задачу:

$$y_{tt} - J^{-1}(x+a) \int_0^1 (x_1+a)y_{tt}(x_1, t)dx_1 + b^2 y_{xxxx} = -J^{-1}(x+a)M(t), \quad (8)$$

$$y(0, t) = y_x(0, t) = 0, \quad y_{xx}(1, t) = y_{xxx}(1, t) = 0, \quad (9)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x) \quad (10)$$

Положим сначала $M(t) \equiv 0$. Определяя решение $y(x, t)$ в виде $y(x, t) = v(x)s(t)$, подставим его в краевую задачу (8)–(10). В результате получим для определения $v(x)$ спектральную краевую задачу

$$b^2 v^{IV}(x) = \lambda(v(x) - J^{-1}(x+a) \int_0^1 (x_1+a)v(x_1)dx_1), \quad (11)$$

$$v(0) = v'(0) = 0, \quad v''(1) = v'''(1) = 0, \quad (12)$$

а для $s(t)$ — следующее уравнение:

$$\ddot{s}(t) + \lambda s(t) = 0.$$

Изучим спектральную краевую задачу (11)–(12). Интегральный оператор

$$Av(x) \equiv v(x) - J^{-1}(x+a) \int_0^1 (x_1+a)v(x_1)dx_1 \equiv v(x) - J^{-1}(x+a)(x_1+a, v(x))_{L_2(0,1)},$$

действующий в $L_2(0,1)$, является ограниченным, симметричным и положительно определенным:

$$\begin{aligned} \|Av\|_{L_2(0,1)}^2 &= \|v\|_{L_2(0,1)}^2 - (J_0 + J)J^{-2}(x+a, v)_{L_2(0,1)}^2 \leq \|v\|_{L_2(0,1)}^2, \\ (Av, u)_{L_2(0,1)} &= (v, u)_{L_2(0,1)} - J^{-1}(x+a, v)_{L_2(0,1)}(x+a, u)_{L_2(0,1)} = (v, Au)_{L_2(0,1)}, \\ (Av, v)_{L_2(0,1)} &= (v, v)_{L_2(0,1)} - J^{-1}(x+a, v)_{L_2(0,1)}^2 \geq \\ &\geq (v, v)_{L_2(0,1)} - J^{-1}(x+a, x+a)_{L_2(0,1)}^2 (v, v)_{L_2(0,1)} = J_0 J^{-1}(v, v)_{L_2(0,1)}. \end{aligned}$$

При этом $A^{-1}v(x) \equiv v(x) + J_0^{-1}(x+a)(x_1+a, v(x))_{L_2(0,1)}$. Оператор $Bv(x) \equiv v^{IV}(x)$, действующий в $L_2(0,1)$ с областью определения $D(B) = \{v(x) \in W_2^4(0,1), v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0\}$ является симметричным и положительно определенным. Расширим его до самосопряженного в энергетическом пространстве $H_B \subset W_2^2(0,1)$, при этом B^{-1} вполне непрерывный оператор. Запишем спектральную краевую задачу(11)–(12) в операторной форме

$$Bv = \tilde{\lambda}Av, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{b}. \quad (13)$$

Выполнив в (13) замену $B^{1/2}v = u \in L_2(0,1)$, где $B^{1/2}$ положительный корень из оператора B ($v = B^{-1/2}u$), получим спектральную задачу

$$\mu u = B^{-1/2}AB^{-1/2}u, \quad \mu = \tilde{\lambda}^{-1} \quad (14)$$

для вполне непрерывного самосопряженного и положительно определенного оператора $B^{-1/2}AB^{-1/2}$. Такая спектральная задача имеет (см., например, [1]) счетное число вещественных положительных конечнократных точек спектра $\mu_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, которым соответствуют линейно независимые, ортогональные в $L_2(0,1)$ собственные функции $u_j = u_j(x)$. Ниже будет показано, что точки спектра однократны. Для $v_j = B^{-1/2}u_j$ согласно (13) имеем

$$(u_j, u_k)_{L_2(0,1)} = (B^{1/2}v_j, B^{1/2}v_k)_{L_2(0,1)} = \tilde{\lambda}_j(Av_j, v_k)_{L_2(0,1)} = \tilde{\lambda}_j \langle v_j, v_k \rangle = \tilde{\lambda}_j \delta_{kj}, \quad (15)$$

где скалярное произведение

$$\langle v, u \rangle = (v, u)_{L_2(0,1)} - J^{-1}(x+a, v)_{L_2(0,1)}(x+a, u)_{L_2(0,1)}, \quad (16)$$

δ_{kj} – символ Кронекера. Отметим, что $v_j(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(0,1)$ и ортогональный в H_B – энергетическом пространстве оператора B .

Для построения функций $v_j(x)$ применим к обеим частям уравнения (11) оператор A^{-1} . В результате получим эквивалентное (11) уравнение

$$v^{IV}(x) - J_0^{-1}(x+a)(av'''(0) - v''(0)) = \tilde{\lambda}v(x). \quad (17)$$

Покажем, что собственные значения $\tilde{\lambda}_j$ однократны. Предположим, что для некоторого $\tilde{\lambda}_k$ имеется две линейно независимых собственных функции $v_{k1}(x)$ и $v_{k2}(x)$. Возьмем их линейную комбинацию $\tilde{v}_k(x) = (av'''_{k2}(0) - v''_{k2}(0))v_{k1}(x) - (av'''_{k1}(0) - v''_{k1}(0))v_{k2}(x)$ и подставим ее в уравнение (16). В результате получим, что $\tilde{v}_k^{IV}(x) = \tilde{\lambda}_k \tilde{v}_k(x)$. Таким образом, $\tilde{v}_k(x)$ является балочной функцией, удовлетворяющей краевым условиям (12), т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k(x) &= w_k(x) / \langle w_k(x), w_k(x) \rangle^{1/2}, \\ w_k(x) &= (\text{sh}(\beta_k) + \sin(\beta_k))(\text{ch}(\beta_k x) - \cos(\beta_k x)) - \\ &\quad - (\text{ch}(\beta_k) + \cos(\beta_k))(\text{sh}(\beta_k x) - \sin(\beta_k x)), \end{aligned} \tag{18}$$

а $\beta_k > 0$ корень уравнения $\text{ch}(\beta) \cos(\beta) + 1 = 0$ ([3]). Для любого β_k : $aw'''_k(0) - w''_k(0) = -2(a\beta_k^3(\text{ch}(\beta_k) + \cos(\beta_k)) + \beta_k^2(\text{sh}(\beta_k) + \sin(\beta_k))) < 0$. Получили противоречие.

Положим в $\tilde{\lambda} = \beta^4$ и заметим, что общее решение уравнения (17) имеет вид

$$\begin{aligned} v(\beta x) &= A \text{ch}(\beta x) + B \text{sh}(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) - \\ &\quad - \frac{1}{J_0 \beta^2} (x + a)(a\beta(B - D) - A + C). \end{aligned} \tag{19}$$

Подставив (19) в краевые условия (12), получим для определения A, B, C, D линейную однородную алгебраическую систему. Равенство нулю определителя матрицы этой системы дает характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} &\text{ch}(\beta) \cos(\beta) + 1 + J_0^{-1} \{ 2a\beta^{-2} \text{sh}(\beta) \sin(\beta) + \\ &+ \beta^{-3} [(a^2 \beta^2 + 1) \text{ch}(\beta) \sin(\beta) + (a^2 \beta^2 - 1) \text{sh}(\beta) \cos(\beta)] \} = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

положительные корни которого определяют точки спектра $0 < \tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2 < \dots < \tilde{\lambda}_n < \dots$ ($\tilde{\lambda}_n = \beta_n^4$) спектральной краевой задачи (11)–(12). Ненулевые решения линейной алгебраической системы при соответствующем β_n имеют вид

$$\begin{aligned} A_n &= \text{sh}(\beta_n) + [1 - 2a(J_0 \beta_n^2)^{-1}] \sin(\beta_n) - 2a^2 (J_0 \beta_n)^{-1} \cos(\beta_n), \\ B_n &= -\text{ch}(\beta_n) - [1 + 2a(J_0 \beta_n^2)^{-1}] \cos(\beta_n) - 2(J_0 \beta_n^3)^{-1} \sin(\beta_n), \\ C_n &= -\sin(\beta_n) - [1 + 2a(J_0 \beta_n^2)^{-1}] \text{sh}(\beta_n) - 2a^2 (J_0 \beta_n)^{-1} \text{ch}(\beta_n), \\ D_n &= \cos(\beta_n) + [1 - 2a(J_0 \beta_n^2)^{-1}] \text{ch}(\beta_n) - 2(J_0 \beta_n^3)^{-1} \text{sh}(\beta_n). \end{aligned} \tag{21}$$

и, будучи подставленные в (18), определяют собственные функции

$$v_n(x) = v(\beta_n x) / \langle v(\beta_n x), v(\beta_n x) \rangle^{1/2} \tag{22}$$

спектральной краевой задачи (11)–(12).

Перейдем к построению решения начально-краевой задачи (8)–(9), считая $M(t) \in L_\infty(0, T)$. Для его определения введем следующие функциональные пространства. В дальнейшем $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$. Обозначим

через $H(0, 1)$ пространство функций $u(x) \in L_2(0, 1)$, снабженное скалярным произведением (16) и нормой $\|u(x)\|_{H(0,1)} = \langle u(x), u(x) \rangle^{1/2}$. Через $H_j(0, 1)$ ($j = 1, 2, 3$) обозначим пространства функций вида

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n(x), u_n = \langle u(x), v_n(x) \rangle, \|u(x)\|_{H_j(0,1)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^j u_n^2 \right)^{1/2} < \infty, \omega_n = \beta_n^2 b$$

Отметим, что эти пространства являются соответственно замкнутыми подпространствами $W_2^j(0, 1) = \left\{ u(x) : \|u(x)\|_{W_2^j(0,1)} = \left(\sum_{k=0}^j \|u^{(k)}(x)\|_{L_2(0,1)}^2 \right)^{1/2} \right\}$.

Через $H(Q_T)$ обозначим пространство $L_2(Q_T)$ функций $y(x, t)$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u(x, t), v(x, t))_{H(Q_T)} = \int_0^T \langle u(x, t), v(x, t) \rangle dt, \|y(x, t)\|_{H(Q_T)} = (y(x, t), y(x, t))_{H(Q_T)}^{1/2}.$$

Через $H_2(Q_T)$ обозначим гильбертово пространство функций $y(x, t)$, полученное замыканием множества соответствующее число раз непрерывно дифференцируемых функций $y(x, t) \in C^{3,1}(\bar{Q}_T)$, $y(0, t) = y_x(0, t) = 0$, $y_{xx}(1, t) = y_{xxx}(1, t) = 0$ в норме

$$\begin{aligned} \|y(x, t)\|_{H_2(Q_T)} &= (y(x, t), y(x, t))_{H_2(Q_T)}^{1/2}, \\ (u(x, t), v(x, t))_{H_2(Q_T)} &= (u_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(Q_T)} + (u_t(x, t), v_t(x, t))_{H(Q_T)} \end{aligned}$$

Умножим обе части уравнения (8) на функцию

$$v(x, t) \in H_2(Q_T), \quad v(x, T) \equiv 0 \quad (23)$$

и проинтегрируем по $(x, t) \in Q_T$. В результате, вычисляя интегралы по частям при учете краевых и начальных условий (9)–(10), условия (23), а также учтя соотношение $J_0(x+a, v(x, t))_{L_2(0,1)} = J\langle x+a, v(x, t) \rangle$, получим интегральное равенство

$$\begin{aligned} \int_0^T (y_t(x, t), v_t(x, t)) - (y_{xx}(x, t), v_{xx}(x, t))_{L_2(0,1)} - J_0^{-1} \langle x+a, v(x, t) \rangle M(t) dt + \\ + \langle \dot{y}_0(x), v(x, 0) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть

$$y_0(x) \in H_2(0, 1), \quad \dot{y}_0(x) \in H(0, 1) \quad (25)$$

Под решением начально-краевой задачи (8)–(10), определенным в области $Q(T)$, с начальными условиями (25) будем понимать функцию $y(x, t) \in H_2(Q_T)$, $y(x, 0) = y_0(x)$, удовлетворяющую интегральному соотношению (24) для любой функции $v(x, t)$ вида (23).

Представим

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^{-1} a_{0n} v_n(x), \quad a_{0n} = \omega_n \langle y_0(x), v_n(x) \rangle, \quad \|y_0(x)\|_{H_2(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}^2, \\
 y_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n} v_n(x), \quad b_{0n} = \langle y_1(x), v_n(x) \rangle, \quad \|y_1(x)\|_{H(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}^2 \quad (26) \\
 x + a &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x), \quad d_n = \langle x + a, v_n(x) \rangle, \quad \|x + a\|_{H(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2.
 \end{aligned}$$

Теорема 1. *Решение $y(x, t) \in H_2(Q_T)$ начально-краевой задачи (8)–(10) с начальными условиями (25) существует, единственно и представимо в виде*

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \omega_n^{-1} \left(a_{0n} \cos(\omega_n t) + \right. \\
 &\quad \left. + b_{0n} \sin(\omega_n t) - J_0^{-1} d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) M(\tau) d\tau \right) \quad (27)
 \end{aligned}$$

где a_{0n}, b_{0n}, d_n определены в (26). При этом справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 \|y(x, t)\|_{H_2(Q_T)} \leq C \left(\|y_0(x)\|_{H_2(0,1)}^2 + \|y_1(x)\|_{H(0,1)}^2 + \right. \\
 \left. + \|x + a\|_{H(0,1)}^2 \|M(t)\|_{L_\infty(0,T)}^2 \right)^{1/2}, \quad (28)
 \end{aligned}$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная.

Доказательство теоремы имеется в работе [8].

Неравенство (28) обеспечивает корректность поставленной начально-краевой задачи (8)–(10).

Построим теперь решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (4). Пусть функция

$$p(t) \in W_2^1(0, T), \quad p(T) = 0. \quad (29)$$

Умножим уравнение (1) на $p(t)$ и проинтегрируем по $t \in [0, T]$. Вычисляя интегралы, входящие в полученное равенство по частям, будем иметь

$$\begin{aligned}
 -J \int_0^T \dot{\theta}(t) \dot{p}(t) dt - J\theta_1 p(0) - p(0) \int_0^1 (x + a) \dot{y}_0(x) dx - \\
 - \int_0^T \dot{p}(t) \int_0^1 (x + a) y_t(x, t) dx dt = \int_0^T M(t) p(t) dt,
 \end{aligned}$$

что эквивалентно равенству

$$\int_0^T (J\dot{\theta}(t)\dot{p}(t) + JJ_0^{-1}\langle x + a_1, y_t(x, t) \rangle \dot{p}(t)) dt + \\ + (J\theta_1 + JJ_0^{-1}\langle x + a, \dot{y}_0(x) \rangle)p(0) + \int_0^T M(t)p(t)dt = 0. \quad (30)$$

Под решением уравнения (1) будем понимать функцию $\theta(t) \in W_2^1(0, T)$, $\theta(0) = \theta_0$, удовлетворяющую интегральному равенству (30) для любой функции $p(t)$ вида (29).

Легко видеть, что искомым решением уравнения (1) будет функция

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + J_0^{-1}(\langle x + a, \dot{y}_0(x) \rangle t - \int_0^t \langle x + a, y_{t_1}(x, t_1) \rangle dt_1) + \\ + J^{-1} \int_0^t (t - t_1)M(t_1)dt_1 = \theta_0 + \theta_1 t + J_0^{-1}(\langle x + a, \dot{y}_0(x) \rangle t - \\ - \langle x + a, y(x, t) \rangle + \langle x + a, y_0(x) \rangle) + J^{-1} \int_0^t (t - t_1)M(t_1)dt_1. \quad (31)$$

3. Построение оптимального управления

Выберем

$$y_0(x), y_T(x) \in H_3(0, 1), \quad \dot{y}_0(x), \dot{y}_T(x) \in H_1(0, 1) \quad (32)$$

и переформулируем с учетом (27), (31) задачу 1 следующим образом: найти минимум функционала (7) при ограничениях

$$\dot{\theta}_T = \dot{\theta}_0 + J_0^{-1}(\langle x + a, \dot{y}_0(x) \rangle - \langle x + a, \dot{y}_T(x) \rangle) + J^{-1} \int_0^T M(\tau)d\tau, \\ \theta_T = \theta_0 + \dot{\theta}_0 T + J_0^{-1}(\langle x + a, \dot{y}_0(x) \rangle T + \langle x + a, y_0(x) \rangle - \langle x + a, y_T(x) \rangle) + \\ + J^{-1} \int_0^T (T - \tau)M(\tau)d\tau,$$

$$\begin{aligned}
 a_{Tn} &= a_{0n} \cos(\omega_n T) + b_{0n} \sin(\omega_n T) - J_0^{-1} d_n \int_0^T \sin(\omega_n(T - \tau)) M(\tau) d\tau, \\
 b_{Tn} &= -a_{0n} \sin(\omega_n T) + b_{0n} \cos(\omega_n T) - J_0^{-1} d_n \int_0^T \cos(\omega_n(T - \tau)) M(\tau) d\tau, \\
 a_{Tn} &= \omega_n \langle y_T(x), v_n(x) \rangle, \quad b_{Tn} = \langle \dot{y}_T(x), v_n(x) \rangle \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (33)
 \end{aligned}$$

Теорема 2.

$$d_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad d_n = O(n^{-1}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$\omega_n^2 d_n = -(av_n'''(0) - v_n''(0)), \quad (35)$$

которое получается, если в уравнение (17) подставить $v(x) = v_n(x)$, $\lambda = \omega_n^2$, полученное равенство умножить на $x + a$ и проинтегрировать по отрезку $[0, 1]$ с учетом краевых условий (12). Предположим, что для некоторого n $d_n = 0$. Из (35) следует, что $av_n'''(0) - v_n''(0) = 0$. Это равенство совместно с первой частью краевых условий (12) влечет выполнение следующих равенств

$$A_n + C_n = 0, \quad B_n + D_n = 0, \quad (36)$$

для коэффициентов, фигурирующих в определении $v_n(x)$ в соответствии с (20)–(22). Подставим в (36) выражения для A_n и C_n , определяемые согласно (21). В результате получим выражение

$$-2a(J_0\beta_n)^{-1}[\beta_n^{-1}(\sin(\beta_n) + \text{sh}(\beta_n)) + a(\cos(\beta_n) + \text{ch}(\beta_n))] < 0.$$

Получили противоречие. Для получения второго соотношения (34) заметим, что при $\beta \rightarrow \infty$ характеристическое уравнение (20) имеет вид $\cos(\beta) + O(\beta^{-1}) = 0$. В соответствии с этим $\beta_n \sim \pi/2(2n + 1)$ при $n \rightarrow \infty$, а соответствующие собственные функции $v_n(x)$ близки к балочным функциям (18), в которых $\langle w_k(x), w_k(x) \rangle^{1/2} = \exp(\beta_n)/2(1 + O(\beta_n^{-1}))$ при $n \rightarrow \infty$. С учетом этого, вида функций (18) и равенства (35) имеем второе соотношение (34). \square

Отметим, что первое условие (34) является необходимым условием управляемости поведением решений начально-краевой задачи (1)–(4).

Преобразуем равенства (3) с учетом (26) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_0^T M(t)dt &= \alpha_1(T) = J(\dot{\theta}_T - \dot{\theta}_0) + JJ_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n(b_{Tn} - b_{0n}), \\ \int_0^T tdt &= \alpha_2(T) = J(\theta_0 - \theta_T - \dot{\theta}_T T) + JJ_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n(a_{0n}\omega_n^{-1} - a_{Tn} - b_{Tn}T), \\ \int_0^T \sin(\omega_n t)M(t)dt &= \alpha_{2n+1}(T) = J_0 d_n^{-1}(a_{Tn} \cos(\omega_n T) - b_{Tn} \sin(\omega_n T) - a_{0n}), \\ \int_0^T \cos(\omega_n t)M(t)dt &= \alpha_{2n+2}(T) = J_0 d_n^{-1}(-a_{Tn} \sin(\omega_n T) - b_{Tn} \cos(\omega_n T) + b_{0n}) \end{aligned} \quad (37)$$

($n=1, 2, \dots$).

Отметим, что согласно (32), (35) справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2(T) < \infty. \quad (38)$$

Линейный непрерывный функционал в $L_1(0, T)$ имеет вид

$$F(u) = \int_0^T u(t)M(t)dt, \quad M(t) \in L_{\infty}(0, T), \quad \|F\| = \|M(t)\|_{L_{\infty}}. \quad (39)$$

Обозначим

$$\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = t, \varphi_{2n+1}(t) = \sin(\omega_n t), \varphi_{2n+2}(t) = \cos(\omega_n t) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (40)$$

С учетом (37), (39)–(40) задача 1 может быть сформулирована как следующая проблема моментов в $L_1(0, T)$.

Задача. Найти функционал вида (39), удовлетворяющий условиям

$$F(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (41)$$

и имеющий минимальную норму $\|F\|_{min} = m(T)$.

Отметим, что указанная проблема моментов при конечном числе ограничений (41) рассмотрена в [5]. Некоторые результаты [5] могут быть распространены на рассматриваемый случай.

Обозначим через $Q_2(0, T)$ подпространство $L_2(0, T)$, являющееся замкнутой в норме этого пространства линейной оболочкой функций (40).

Теорема 3. *Функции (40) образуют базис Рисса в $Q_2(0, T)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что для некоторого n функции

$$\varphi_{2(n+j)+1}(t), \varphi_{2(n+j)+2}(t) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (42)$$

образуют базис Рисса в подпространстве $Q_2^n(0, T)$, являющимся замкнутой линейной оболочкой функций (42). Согласно [1, с. 56], для этого необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матриц Грамма

$$G_m^n = \{g_{pq}\}, g_{pq} = (\varphi_p(t), \varphi_q(t))_{L_2(0, T)}, (p, q = 2(n+j)+1, 2(n+j)+2, j = 1, 2, \dots, m)$$

были в совокупности отделены от нуля и бесконечности. Из вида функции (40) с учетом соотношения $\omega_n \sim b[\pi/2(2n+1)]^2$ при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$g_{2(n+j)+1, 2(n+j)+1}, g_{2(n+j)+2, 2(n+j)+2} = T/2 + O((n+j)^{-2}), g_{2(n+j)+1, 2(n+j)+2} = O((n+j)^{-2})$$

при $(n+j) \rightarrow \infty$, и

$$g_{2(n+j)+1, 2(n+k)+1}, g_{2(n+j)+1, 2(n+k)+2} = O([(2n+j+k)(j-k)]^{-1})$$

при $j \neq k, j, k = 1, 2, \dots, m, |(2n+j+k)(j-k)| \rightarrow \infty$.

В связи с этим характеристическое уравнение матрицы G_m^n порядка $2m$ будет иметь вид $(T/2 - \lambda)^{2m} + O(n^{-1})$. Отсюда следует совокупная отделенность от нуля и бесконечности собственных значений матриц G_m^n . Таким образом, функции (42) образуют базис Рисса в $Q_2^n(0, T)$. Добавление к функциям (42) конечного числа линейно независимых функций не меняет свойства базиса. Следовательно функции (40) образуют базис Рисса в $Q_2(0, T)$. Это означает, что собственные значения $\lambda_j > 0$ бесконечной матрицы Грамма G , построенной по системе функций (40), в совокупности отделены от нуля и бесконечности, т.е. существуют постоянные $m_g, M_g > 0$, для которых $m_g < \lambda_j < M_g$ ($j = 1, 2, \dots$). Таким образом справедливо неравенство

$$m_g \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \sum_{j, k=1}^{\infty} g_{j, k} \xi_j \xi_k < M_g \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2. \quad (43)$$

для любого $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2, \|\xi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 < \infty. \quad \square$

Обозначим через $Q_1(0, T)$ подпространство $L_1(0, T)$, полученное замыканием в норме пространства $L_1(0, T)$ множества функций вида $u_N(t) = \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j(t), \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$. В силу соотношения $\|u_N(t)\|_{L_1(0, T)} \leq T^{1/2} \|u_N(t)\|_{L_2(0, T)}$ и неравенства (43), $Q_1(0, T)$ является замкнутым линейным подпространством $L_1(0, T)$.

Введем двойственную к проблеме моментов задачу.

Задача. Найти

$$\min_{\xi \in l_2} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0, T)} = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^* \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0, T)} = \|u^*(t)\|_{L_1(0, T)} = l^{-1}(T), \quad (44)$$

при условии $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) = 1$.

Утверждение 1. $m(T) = l(T)$.

Доказательство. Для любых $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ и $N > 0$ согласно (41)

$$\left| \sum_{j=1}^N \xi_j \alpha_j(T) \right| = \left| F \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j \right) \right| \leq \|F\| \left\| \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j \right\|_{L_1(0,T)} \leq \|F\| \left\| \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j \right\|_{L_1(0,T)}.$$

Отсюда

$$\|F\|^{-1} \leq \min_{\xi \in l_2} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} / \left| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) \right| = \min_{\xi \in l_2, \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) = 1} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)}.$$

Таким образом, $\|F\| \geq l(T)$ и $m(T) \geq l(T)$.

Определим в $Q_1(0, T)$ функционал $\Phi(u) = \Phi(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T)$ ($\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$). Норма $\Phi(u)$ в $Q_1(0, T)$ равна

$$\|\Phi\| = \sup_{u \in Q_1(0,T)} |\Phi(u)| / \|u\|_{L_1(0,T)} = \sup_{\xi \in l_2} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j(T) \right| / \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} = l(T). \quad (45)$$

Продолжим функционал $\Phi(u)$ на все пространство $L_1(0, T)$ с сохранением нормы (теорема Хана-Банаха, см. [4, с. 244]). Этот функционал обозначим $F(u)$. Соответственно имеем $F(u_j) = \alpha_j(T)$ ($j = 1, 2, \dots$). Следовательно, $m(T) = l(T)$. \square

Отсюда на основании (39), (44) имеем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Решение задачи 1 дается формулой*

$$M^*(t) = l(T) \text{sign}(u^*(t)). \quad (46)$$

Отметим, что на основании (45)

$$|F(u^*)| = l(T) \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)} = 1. \quad (47)$$

Очевидно, что справедливо и обратное. Если для некоторого элемента $u^*(t) \in Q_1(0, T)$ выполнено (47), то для $u^*(t)$ выполнено (45) и $u^*(t)$ является решением двойственной задачи.

Пространство $L_1(0, T)$ не является строго нормированным. Поэтому равенство (47) и соответственно решение двойственной задачи (44) справедливо не для единственного элемента.

Пусть $u^*(t)$ и $v^*(t)$ — решения (44). Тогда для функционала $F(u)$ вида (39), дающего решение проблемы моментов (41), в котором $M^*(t)$ определяется согласно (46), справедливы на основании (45), (47) равенства $|F(u^*)| = |F(v^*)| = 1$. Но тогда на основании (39) почти всюду $l(T) \text{sign}(u^*(t)) = l(T) \text{sign}(v^*(t))$. Таким образом, решение задачи 1 единственно.

Обозначим через $S(l(T))$ множество функционалов вида (39), имеющих норму $l(T)$. Элемент $u_0(t) = u^*(t) / \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)}$, где $u^*(t)$ — решение задачи (44), назовем экстремальным.

На основании (47) справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3 (Принцип максимума). *Оптимальный функционал $F_*(u)$ вида (39), определяемый функцией $M^*(t)$, выделяется из всех функционалов вида (39), имеющих ту же норму $l(T)$, следующим свойством максимума на любом экстремальном элементе:*

$$F_*(u_0) = \max_{M(t) \in S(l(T))} F(u_0).$$

Отметим, что согласно (44): $\lim_{t \rightarrow 0} l(T) = \infty$, $\lim_{T \rightarrow \infty} l(T) = 0$.

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $l(T) = L$.

Утверждение 4. *Решение задачи 2 дает пара $(T^*, M^*(t))$, где $M^*(t)$ определяется формулой (47), в которой $T = T^*$.*

Рассмотрим алгоритм построения элемента $u^*(t)$, определенного в (44).

Произвольный линейный непрерывный функционал в пространстве $L_2(0, T)$ запишем в виде

$$F_2(u) = (u(t), M(t))_{L_2(0, T)}, \quad M(t) \in L_2(0, T), \quad \|F_2\| = \|M(t)\|_{L_2(0, T)}. \quad (48)$$

Сформулируем следующую проблему моментов в пространстве $L_2(0, T)$.

Задача. Найти функционал вида (48), удовлетворяющий условиям

$$F_2(\varphi_j(t)) = \alpha_j(T) \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (49)$$

и имеющий минимальную норму $\|F_2\|_{min} = m_{2T}$.

По системе функций $\varphi_j(t)$ построим ортонормированную в $L_2(0, T)$ систему функций $\psi_j(t)$, используя ортогонализацию Шмидта (см., например, [1]). Для этого положим

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1(t) &= \varphi_1(t), \psi_1(t) = \bar{\psi}_1(t)/\eta_1, \bar{\psi}_2(t) = \varphi_2(t) - \alpha_{21}\psi_1(t), \psi_2(t) = \bar{\psi}_2(t)/\eta_2, \dots \\ \bar{\psi}_n(t) &= \varphi_n(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\psi_j(t), \psi_n(t) = \bar{\psi}_n(t)/\eta_n, \alpha_{nj} = \\ &= (\varphi_n(t), \psi_j(t))_{L_2(0, T)}, \eta_n = \|\bar{\psi}_n(t)\|_{L_2(0, T)}. \end{aligned} \quad (50)$$

Введем в рассмотрение величины $\beta_n(T)$ по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \beta_1(T) &= \alpha_1(T)/\eta_1, \beta_2(T) = (\alpha_2(T) - \alpha_{21}\beta_1(T))/\eta_2, \dots \\ \beta_n(T) &= (\alpha_n(T) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\beta_j(T))/\eta_n. \end{aligned}$$

Эти соотношения определяют бесконечномерную нижнюю треугольную матрицу $B(T) = \{B_{ij}(T)\}_{i,j=1,\dots,\infty}$, которая согласно (43), (46) задает ограниченный и

ограниченно обратимый в пространстве l_2 оператор $\beta(T) = B(T)\alpha(T)$ $\beta(T) = (\beta_1(T), \beta_2(T), \dots)$, $\alpha(T) = (\alpha_1(T), \alpha_2(T), \dots)$. Непосредственно вычисляя, находим

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= T^{-1/2}, \psi_2(t) = 3^{1/2}(-T^{-1/2} + 2 \cdot T^{-3/2}t), \dots \\ \beta_1(T) &= T^{-1/2}\alpha_1(T), \beta_2(T) = 3^{1/2}(-T^{-1/2}\alpha_1(T) + 2T^{-3/2}\alpha_2(T)), \dots \end{aligned}$$

Отметим, что остальные $\beta_n(T)$ имеют аналогичную зависимость от T : $\lim_{T \rightarrow 0} \beta_n(T) = \infty$, $\lim_{T \rightarrow \infty} \beta_n(T) = 0$. В связи с этим

$$m(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2(T) \right)^{1/2} < \infty, \quad \lim_{T \rightarrow 0} m(T) = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} m(T) = 0. \quad (51)$$

Теорема 4. *Существует единственная функция*

$$M^{**}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(T)\psi_n(t), \quad (52)$$

удовлетворяющая условию

$$\|M^{**}(t)\|_{L_2(0,T)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2(T) \right)^{1/2} = m_{2T}. \quad (53)$$

Доказательство. Представим $L_2(0, T) = Q_2(0, T) \oplus P_2(0, T)$, где $P_2(0, T) = \{u(t) \in L_2(0, T), (u(t), \psi_j(t))_{L_2(0,T)} = 0, j = 1, 2, \dots\}$. Условия (49) эквивалентны условиям

$$F_2(\psi_j(t)) = \beta_j(T) \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (54)$$

Произвольная функция $M(t) \in L_2(0, T)$, определяющая (48) и удовлетворяющая условиям (54) имеет вид $M(t) = M^*(t) + P(t)$, где $p(t) \in P_2(0, T)$, но $\|M(t)\|_{L_2(0,T)}^2 = \|M^*(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \|P(t)\|_{L_2(0,T)}^2$. Отсюда $\min \|M(t)\|_{L_2(0,T)} = \|M^*(t)\|_{L_2(0,T)} = m_{2T}$. \square

Отметим, что $Q_2(0, T) \subset Q_1(0, T)$. Рассмотрим функцию

$$v^*(t) = M^{**}(t)/m_{2T}^2.$$

На основании (45), (50) имеем

$$F(v^*(t)) = F\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(T)\psi_j(t)\right)/m_{2T}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^2(T)/m_{2T}^2 = 1.$$

Таким образом, $v^*(t)$ является решением (44) и $\|v^*(t)\|_{L_1(0,T)} = l^{-1}(T)$. Следовательно,

$$M^*(t) = l^{-1}(T)\text{sign}(v^*(t)). \quad (55)$$

Пример. В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из диска радиуса $r = 7.5 \times 10^{-2}$ м, толщины $h = 5 \times 10^{-2}$ м с упругим стержнем длины $l = 7.5 \times 10^{-1}$ м и диаметра d , который будет варьироваться.

Параметры материала: $\rho = 7.8 \times 10^3$ кг/м³, $E = 2 \times 10^{11}$ Н/м² (сталь). Система поворачивается из начального положения $\theta_0 = 0$, $y_0(x) \equiv \dot{y}_0(x) \equiv 0$ в конечное $\theta_T = \pi/2$, $\dot{\theta}_T = 0$. $y_T(x) \equiv 0$, $\dot{y}_T(x) = 90x^2$ (с ударом) за время $T = 0.1$ с. На рис. 1–4 приведены графики функций $M^*(t)$ (в безразмерных переменных) для разных значений диаметра d .

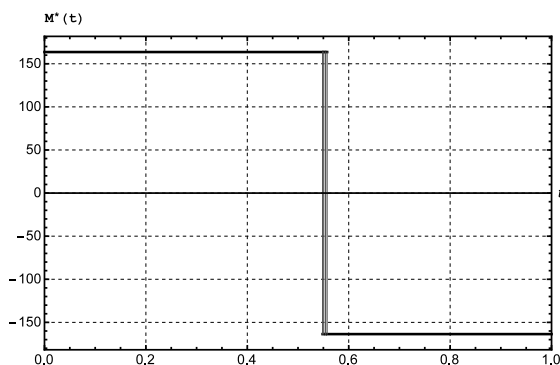


Рис. 1. $d = 2.5 \times 10^{-2}$ м

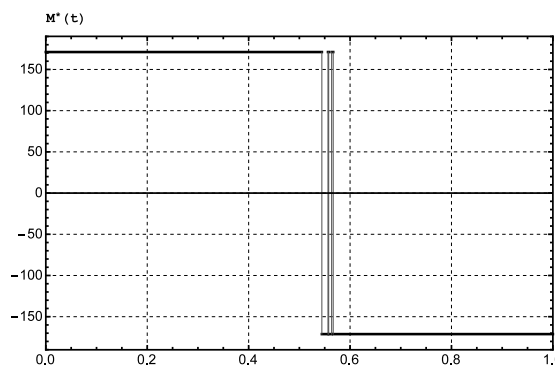


Рис. 2. $d = 1.5 \times 10^{-2}$ м

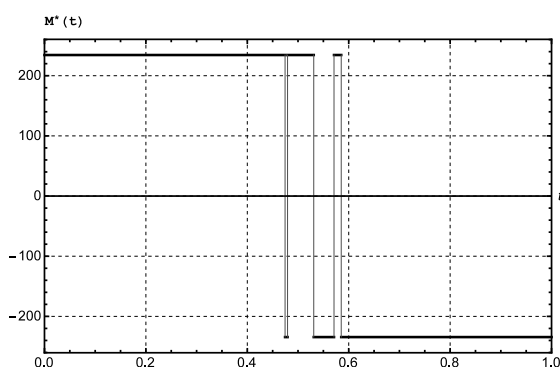


Рис. 3. $d = 6 \times 10^{-3}$ м

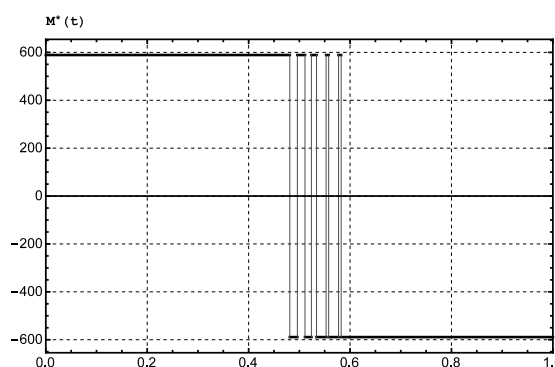


Рис. 4. $d = 2.5 \times 10^{-3}$ м

Из графиков видно, что наблюдается эффект нарастания числа переключений при уменьшении d . Переключения отмечены вертикальными сплюснутыми линиями.

Список цитируемых источников

1. Ахизер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 544 с.

Akhiezer N. I., Glazman I. M. (1993). Theory of linear operators in Hilbert space. 2 ed. Dover.

2. *Бербюк В. Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. — Киев: Наумова думка, 1989. — 192 с.
Verbyuk V. E. (1989) Dynamics and optimization of robotics systems (in Russian). Kyiv: Naukova Dumka.
3. *Вибрации в технике: Справочник.* — М.: Машиностроение, 1978. — 362 с.
Vibration in technics: handbook (in Russian). (1978). Moscow: Mashinostroenie.
4. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. — М.: Наука, 1967. — 414 с.
Vulikh B. Z. (1963) Introduction to Functional Analysis for Scientists and Technologists. Elsevier Science and Technology.
5. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973. — 554 с.
Krein M. G., Nudelman A. A. (1977). The Markov moment problem and extremal problems. Ideas and problems of P.L. Chebyshev and A.A. Markov and their future development // Translations of Mathematical Monographs. Vol. 50. American Mathematical Society, Providence, R.I.
6. *Кубышкин Е. П.* Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // Прикладная математика и механика — 1992. — Т. 56, №1. — С. 240–249.
Kubyshkin Ye. P. (1992). Optimal control of the rotation of a solid with a flexible rod. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 56:2, 205-214.
7. *Кубышкин Е. П.* Оптимальное управление поворотом системы двух тел, соединенных упругим стержнем // ПММ. — 2014. — Т. 78, №5. — С. 656–670.
Kubyshkin Ye. P. (2014). Optimal control of the rotation of a system of two bodies connected by an elastic rod. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 78:5, 468-479.
8. *Кубышкин Е. П., Трыахов М. С.* Optimal control of the behavior of solutions of an initial boundary value problem simulating rotation of a solid with an elastic rod // Automatic Control and Computer Sciences. —2015. — Vol. 49, №7. — P. 597–607.

Получена 12.05.2016