Динамические системы, 2015, том 5(33), №3-4, 149–167

УДК 517.929

Асимптотическое интегрирование линейных систем функционально-дифференциальных уравнений

П. Н. Нестеров

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль 150003. *E-mail: p.nesterov@uniyar.ac.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются методы построения асимптотических формул для решений систем функционально-дифференциальных уравнений при стремлении независимой переменной к бесконечности.

Ключевые слова: асимптотика, функционально-дифференциальные уравнения, колебательно убывающие коэффициенты, теорема Левинсона, метод усреднения.

1. Введение

Известно, что получение явных формул для решений линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с переменными коэффициентами представляет собой задачу, решаемую лишь в очень редких случаях. Применительно к системам функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) общего вида такая задача, как правило, даже не рассматривается. Тем не менее, качественная и количественная информация о поведении решений в окрестности бесконечности имеет принципиальное значение для теории устойчивости, теории колебаний и других прикладных разделов, связанных с изучением динамики решений дифференциальных уравнений. В этой связи вопросы, касающиеся разработки методов получения асимптотических формул (асимптотическое интегрирование) для решений в окрестности бесконечности, выходят на передний план.

В работе излагается один из подходов к решению задачи асимптотического интегрирования, связанный с приведением исходной системы к некоторому специальному виду и последующему использованию асимптотической теоремы Н. Левинсона, а также ее функционально-дифференциально аналога. Описываются полученные автором результаты, позволяющие существенно упростить процесс редукции исходной системы или попросту сделать такую редукцию возможной.

2. Основные асимптотические теоремы

Ставший уже классическим результат об асимптотическом представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений был сформулирован Н. Левинсоном в работе [37] применительно к системам вида

$$\dot{x} = \big[A_0 + V(t) + R(t)\big]x, \quad x \in \mathbb{C}^m. \tag{2.1}$$

Относительно квадратных матриц A_0, $V(t)$ и $R(t)$ предполагаются выполненными следующие условия:

А.1. Все собственные числа постоянной матрицы A_0 различны.

А.2. Матрица $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

А.3. Матрица $\dot{V}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \|\dot{V}(t)\| dt < \infty,$$

где $\|\cdot\|$ — какая-либо матричная норма.

А.4. Матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$.

Теорема Левинсона базируется на двух основных утверждениях, первый из которых известен как лемма о диагонализации переменной матрицы (см., например, [1]).

Лемма 1. *Пусть выполнены условия А.1 – А.3. Тогда при достаточно больших t существует невырожденная матрица $C(t)$ такая, что:*

(i) *по столбцам этой матрицы расположены собственные векторы матрицы $A_0 + V(t)$ и $C(t) \to C_0$ при $t \to \infty$. Постоянная матрица C_0 составлена из собственных векторов матрицы A_0;*

(ii) $\dot{C}(t) \in L_1[t_0, \infty)$*;*

(iii) *она приводит матрицу $A_0 + V(t)$ к диагональному виду, т. е.*

$$C^{-1}(t)\big[A_0 + V(t)\big]C(t) = \Lambda(t),$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)\big)$ — диагональная матрица, составленная из собственных чисел матрицы $A_0 + V(t)$.

В системе (2.1) осуществим замену

$$x(t) = C(t)y(t), \tag{2.2}$$

где $C(t)$ — матрица из леммы 1. Эта замена приводит систему (2.1) к так называемому L-диагональному виду:

$$\dot{y} = \big[\Lambda(t) + R_1(t)\big]y, \tag{2.3}$$

где

$$R_1(t) = C^{-1}(t)R(t)C(t) - C^{-1}(t)\dot{C}(t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы $C(t)$ и условия А.4 матрица $R_1(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. Оказывается, что остаточный член $R_1(t)$ не влияет в главном на асимптотику решений системы (2.3) в предположении некоторой регулярности относительно поведения функций $\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)$. Эта регулярность задается следующим условием дихотомии: для каждой пары индексов (i, j) имеет место либо неравенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \le K_1, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_*, \tag{2.4}$$

либо неравенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \ge K_2, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_*, \tag{2.5}$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Основной результат, полученный Левинсоном, состоит в следующем (см. [37, 4, 27]).

Теорема 1 (**Levinson**). *Пусть выполнено условие дихотомии* (2.4), (2.5). *Тогда фундаментальная матрица L-диагональной системы* (2.3) *допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:*

$$Y(t) = \big(I + o(1)\big) \exp\Big\{ \int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s) ds \Big\}. \tag{2.6}$$

Возвращаясь к системе (2.1) с помощью замены (2.2) и учитывая свойство (i) матрицы $C(t)$, заключаем, что фундаментальная матрица этой системы имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$X(t) = \big(C_0 + o(1)\big) \exp\Big\{ \int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s) ds \Big\}. \tag{2.7}$$

Среди первых результатов в области асимптотического интегрирования систем ФДУ отметим приведенные в известной книге Р. Беллмана и К. Кука [2] асимптотические теоремы о поведении решений скалярных уравнений с запаздывающим аргументом (см. также обзор в [10, Глава 9]). Существенные результаты в области исследования асимптотического поведения решений систем ФДУ были затем получены в работах R.D. Driver [26], J.R. Haddock и R.J. Sacker [29], в цикле работ O. Arino, I. Győri и M. Pituk [15, 16, 18, 28, 39], а также в работах S. Ai [13], J.S. Cassel и Z. Hou [22, 23, 34]. Одно из направлений в решении задачи асимптотического интегрирования систем ФДУ связано с получением аналога теоремы 1. Наиболее полно, на наш взгляд, эта задача решена в статье [22]. Сформулируем далее полученные авторами этой работы результаты.

Рассмотрим следующую линейную систему ФДУ:

$$\dot{x} = \Lambda(t)x(t) + R(t, x_t). \tag{2.8}$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \le \theta \le 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h,0],\mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{-h \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|.$$

Далее, $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)\big)$ — диагональная матрица, элементами которой являются локально интегрируемые на $[t_0, \infty)$ функции со значениями в $\mathbb{C}$; $R(t,\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ такой, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функция $R(t,\varphi)$ измерима по Лебегу при $t \ge t_0$ и для всех $\varphi \in C_h$

$$|R(t,\varphi)| \le \gamma(t)\|\varphi\|, \qquad \gamma(t) \in L_1[t_0,\infty). \tag{2.9}$$

Операторы с такими свойствами будем в дальнейшем называть операторами из класса $\mathcal{L}_1^h[t_0,\infty)$. По аналогии с системами ОДУ системы ФДУ вида (2.8) будем называть $\mathcal{L}$-диагональными.

Говорят, что некоторая функция $x(t)$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ удовлетворяет системе (2.8) при $t \ge T$, если $x(t)$ непрерывна на множестве $[T-h,\infty)$, абсолютно непрерывна на множестве $[T, \infty)$ и равенство (2.8) выполнено почти всюду на $[T, \infty)$. При сформулированных условиях для любого $\varphi \in C_h$ и любого $T \geq t_0$ существует единственная функция $x(t)$, которая удовлетворяет системе (2.8) с начальным условием $x_T = \varphi$ (см. [10]). Функцию $x(t)$ называют решением системы (2.8) с начальным условием $x_T = \varphi$.

Имеет место следующая теорема (см. [22, Теорема 2], а также замечание после этой теоремы) — вариант теоермы Левинсона для случая систем ФДУ.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие дихотомии* (2.4), (2.5), *а также для любого* $j = 1, \ldots, m$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_t^{t+\tau} \operatorname{Re} \lambda_j(s) ds \geq K_3 \qquad t \geq t_0, \quad 0 \leq \tau \leq h, \tag{2.10}$$

где K_3 *— некоторая постоянная. Тогда при достаточно больших* $T \geq t_0$ *и любом* $j = 1, \ldots, m$ *существует непрерывная на полуинтервале* $[T-h, \infty)$ *функция* $x_j(t)$, *которая удовлетворяет системе уравнений* (2.8) *при* $t \geq T$ *и допускает следующее асимптотическое представление при* $t \to \infty$:

$$x_j(t) = \bigl[e_j + o(1)\bigr] \exp\Bigl\{\int\limits_T^t \lambda_j(s) ds\Bigr\}, \tag{2.11}$$

где $e_j = (0, \ldots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \ldots, 0)$.

Асимптотика произвольного решения системы (2.8) при $t \to \infty$ описывается следующей теоремой [22, Теорема 5].

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда, если функция* $x(t)$ *удовлетворяет системе* (2.8) *при* $t \geq T$, *то существуют константы* $c_1, \ldots, c_m$ *такие, что*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} c_j\, x_j(t) + o\bigl(e^{-\beta t}\bigr), \qquad t \to \infty, \tag{2.12}$$

где функции $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ *имеют асимптотику вида* (2.11) *и* $\beta > 0$ *— произвольное действительное число.*

3. Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования

Основной проблемой в использовании теоремы Левинсона и ее функционально-дифференциального аналога является необходимость приведения исходной системы к специальном виду (см. формулы (2.1), (2.3), (2.8)). Для систем ОДУ соответствующая методика, применимая к довольно широкому классу систем, описана в работах [31, 32, 33]. Сегодня эту технику приведения систем к L-диагональному виду называют методом Харриса–Латса. В основе этого метода лежит последовательность замен переменных, близких к тождественным, называемых Q-преобразованиями. Одним из преимуществ метода Харриса–Латса является то обстоятельство, что для его использования требуется знать лишь весьма общие свойства матрицы коэффициентов системы (типа абсолютной или условной сходимости некоторых интегралов). Это преимущество является одновременно и недостатком, поскольку при наличии дополнительной информации о структуре матрицы коэффициентов метод Харриса–Латса не позволяет ей воспользоваться. Процесс преобразования исходной системы по этой причине становится весьма трудоемким или, вообще, нереализуемым. Примером такого рода задач, для которых метод Харриса–Латса оказывается малоэффективным, являются системы ОДУ со сложным колебательным поведением элементов матрицы коэффициентов. Впервые на возможность использования усредняющих замен переменных вместо Q-преобразований для систем, коэффициенты которых колебательным образом убывают на бесконечности, указали В.Ш. Бурд и В.А. Каракулин в работе [3]. Предложенный авторами метод является аналогом усредняющей замены, использованной И.З. Штокало [11, 12] для исследования устойчивости решений некоторого класса систем с малым параметром. Этот метод получил свое развитие в работе [5], где был использован для упрощения так называемых систем с колебательно убывающими коэффициентами. Опишем основной результат, полученный в упомянутой работе.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \Big[A_0 + \sum_{i=1}^{n} v_i(t)A_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)A_{i_1i_2}(t) + \dots \\ + \sum_{1\le i_1\le\dots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)A_{i_1\dots i_k}(t) + R(t)\Big]x, \quad x\in\mathbb{C}^m. \quad (3.1)$$

Здесь A_0, $A_{i_1\dots i_l}(t)$, $R(t)$ — квадратные матрицы, а $v_1(t),\dots,v_n(t)$ — абсолютно непрерывные на полуинтервале $[t_0,\infty)$ скалярные функции. Потребуем, чтобы были выполнены следующие условия:

B.1. A_0 — постоянная матрица с действительными собственными значениями;

B.2. $v_1(t)\to 0, v_2(t)\to 0,\dots,v_n(t)\to 0$ при $t\to\infty$;

B.3. $\dot{v}_1(t),\dot{v}_2(t),\dots,\dot{v}_n(t)\in L_1[t_0,\infty)$;

B.4. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\dots v_{i_{k+1}}(t)\in L_1[t_0,\infty)$ для любого набора $1\le i_1\le i_2\le \dots\le i_{k+1}\le n$;

B.5. Элементами матриц $A_{i_1\dots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены, т. е.

$$A_{i_1\dots i_l}(t) = \sum_{j=1}^{M}\beta_j^{(i_1\dots i_l)}e^{\mathrm{i}\lambda_j t}, \quad (3.2)$$

где λ_j — произвольные действительные числа, а $\beta_j^{(i_1\dots i_l)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные матрицы;

B.6. Матрица $R(t)\in L_1[t_0,\infty)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия B.1 — B.6. Тогда система* (3.1) *при достаточно больших t заменой*

$$x = \Big[I + \sum_{i=1}^{n} v_i(t)Y_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)Y_{i_1i_2}(t) + \dots \\ + \sum_{1\le i_1\le\dots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)Y_{i_1\dots i_k}(t)\Big]y, \quad (3.3)$$

где I — единичная матрица, а элементами матриц $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду

$$\dot{y} = \Big[A_0 + \sum_{i=1}^{n} v_i(t)A_i + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)A_{i_1 i_2} + \ldots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)A_{i_1\ldots i_k} + R_1(t)\Big]y, \quad (3.4)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ и матрицей $R_1(t)\in L_1[t_0,\infty)$.

Усредненная система (3.4), вообще говоря, не содержит осциллирующих коэффициентов в главной части, и в этом смысле она проще исходной системы (3.1). Во-многих случаях для приведения системы (3.4) к L-диагональному виду удается воспользоваться леммой 1 и заменой вида (2.2). Как правило, для построения асимптотики решений системы (3.4) достаточно вычислить лишь несколько первых постоянных матриц. По этой причине приведем здесь для них явные формулы. Имеем,

$$A_i = \mathrm{M}\big[A_i(t)\big], \qquad i=1,\ldots,n. \quad \left(\mathrm{M}\big[F(t)\big] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s)ds\right) \quad (3.5)$$

Далее,

$$A_{ij} = \mathrm{M}\big[A_{ij}(t) + A_i(t)Y_j(t) + A_j(t)Y_i(t)\big], \quad 1\le i<j\le n$$

и

$$A_{ii} = \mathrm{M}\big[A_{ii}(t) + A_i(t)Y_i(t)\big], \quad i=1,\ldots,n. \quad (3.6)$$

Матрицы $Y_i(t)$ с нулевым средним значением определяются как решения матричных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{Y}_i - A_0Y_i + Y_iA_0 = A_i(t) - A_i, \qquad i=1,\ldots,n. \quad (3.7)$$

Задача асимптотического интегрирования систем линейных ОДУ довольно глубоко изучена. Отметим здесь замечательные монографии [27, 20], из которых читатель может узнать современное состояние вопроса. Если для систем ОДУ приведение исходной задачи к L-диагональному виду (2.3) во-многих случаях представляется стандартной, пусть даже и трудоемкой процедурой, то для систем ФДУ приведение исходной системы к виду (2.8) не является типичной рекомендацией. В этой связи возникает вопрос, для каких систем ФДУ такое сведение все-таки возможно. Как оказалось, в решении этой задачи могут быть полезны усредняющие замены переменных вида (3.3). Эффективность таких замен была продемонстрирована в работе [38] при решении задачи асимптотического интегрирования следующей системы ФДУ:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)B_i(t,x_t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)B_{i_1 i_2}(t,x_t) + \ldots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)B_{i_1\ldots i_k}(t,x_t) + R(t,x_t). \quad (3.8)$$

В этой системе $B_{i_1\dots i_l}(t,\cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$, относительно которых предполагается, что либо все эти операторы периодичны по переменной t с периодом $\omega > 0$, т.е.

$$B_{i_1\dots i_l}(t+\omega,\varphi) \equiv B_{i_1\dots i_l}(t,\varphi), \qquad \varphi \in C_h, \tag{3.9}$$

либо

$$B_{i_1\dots i_l}(t,\varphi) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j^{(i_1\dots i_l)}(t)\ell_j^{(i_1\dots i_l)}(\varphi), \qquad \varphi \in C_h. \tag{3.10}$$

В формуле (3.10) $\ell_j^{(i_1\dots i_l)}(\varphi)$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t, и действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$, а $\Gamma_j^{(i_1\dots i_l)}(t)$ — матрицы вида (3.2). В том случае, если имеет место равенство (3.9), предполагается, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функция $B_{i_1\dots i_l}(t,\varphi)$ измерима по Лебегу и для всех $\varphi \in C_h$ и $t \in \mathbb{R}$

$$|B_{i_1\dots i_l}(t,\varphi)| \le K\|\varphi\|, \tag{3.11}$$

где K — некоторая постоянная. Очевидно, что неравенство (3.11) заведомо выполнено, если оператор $B_{i_1\dots i_l}(t,\varphi)$ имеет вид (3.10). Наконец, $R(t,\cdot)$ — оператор из класса $\mathcal{L}_1^h[t_0,\infty)$, а скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции $v_1(t),\dots,v_n(t)$ удовлетворяют условиям В.2 — В.4.

Система (3.8) с помощью некоторой процедуры, суть которой мы опишем чуть позже, может быть приведена к виду

$$\begin{aligned}\dot{x} = \Bigg(\sum_{i=1}^{n} v_i(t)A_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)A_{i_1 i_2}(t) + \ldots +\\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)A_{i_1\dots i_k}(t)\Bigg)x(t) + R_1(t,x_t).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь $(m\times m)$-матрицы $A_{i_1\dots i_l}(t)$ — это либо ω-периодические матрицы, либо матрицы вида (3.2). Далее, $R_1(t,\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $C_{(k+1)h}$ непрерывных на отрезке $[-(k+1)h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ в пространство $\mathbb{C}^m$ и принадлежащий классу $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$. Этот класс вводится точно также, как и класс $\mathcal{L}_1^h[t_0,\infty)$, с той лишь разницей, что областью определения операторов из класса $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0,\infty)$ является пространство $C_{(k+1)h}$. Система (3.12), в некотором смысле, — это система (3.8) в расширенном фазовом пространстве $C_{(k+1)h}$. Системы уравнений (3.8) и (3.12), вообще говоря, не являются эквивалентными (например, их фазовые пространства различны). Тем не менее, как показано в работе [38], решения этих систем имеют в главном одинаковое асимптотическое представление при $t\to\infty$.

Система (3.12) в главной части является системой ОДУ и в этом смысле она проще исходной задачи (3.8). Для ее приведения к $\mathcal{L}$-диагональному виду (2.8) можно воспользоваться преобразованиями, используемыми для систем ОДУ. В частности, с помощью замены (3.3) система (3.12) при достаточно больших t приводится к виду

$$\dot{y} = \Bigg(\sum_{i=1}^{n} v_i(t)A_i + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)A_{i_1i_2} + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)A_{i_1\ldots i_k}\Bigg)y(t) + R_2(t,y_t) \quad (3.13)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ и оператором $R_2(t,y_t)$ из класса $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$. Предположим, что в главной части системы (3.13) можно выделить так называемый ведущий член, и этим членом является матрица $A_{i_1\ldots i_s}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)$. Это означает, что систему (3.13) можно записать в виде

$$\dot{y} = v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)\big[A_{i_1\ldots i_s} + V(t)\big]y(t) + R_2(t,y_t), \quad (3.14)$$

где $(m\times m)$-матрица $V(t)$ удовлетворяет условиям A.2 и A.3 леммы 1. Тогда, если все собственные числа матрицы $A_{i_1\ldots i_s}$ различны, то заменой $y(t) = C(t)z(t)$, где $C(t)$ — матрица из леммы 1, система (3.14) приводится к $\mathcal{L}$-диагональному виду

$$\dot{z} = v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)\Lambda(t)z(t) + R_3(t,z_t), \quad (3.15)$$

где диагональная матрица $\Lambda(t)$ составлена из собственных чисел матрицы $A_{i_1\ldots i_s} + V(t)$ и

$$R_3(t,z_t) = -C^{-1}(t)\dot{C}(t)z(t) + C^{-1}(t)R_2(t, C(t+\theta)z_t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы $C(t)$ оператор $R_3(t,z_t)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$. Для построения асимптотики решений системы (3.15) остается лишь воспользоваться теоремами 2 и 3.

Остановимся теперь на описании процедуры, которая позволяет привести систему (3.8) к виду (3.12). Ради простоты изложения сделаем это на примере системы (3.8), в которой $n = 1$ и все операторы $B_{i_1\ldots i_l}(t,x_t)$, кроме $B_1(t,x_t)$, нулевые:

$$\dot{x} = v_1(t)B_1(t,x_t) + R(t,x_t). \quad (3.16)$$

Представим оператор $B_1(t,x_t)$ в следующем виде:

$$B_1(t,x_t) = B_1\big(t,x(t)\big) - B_1\big(t,x(t)-x_t\big). \quad (3.17)$$

Очевидно, что в силу наложенных на оператор $B_1(t,\varphi)$ условий

$$B_1\big(t,x(t)\big) = A_1(t)x(t), \quad (3.18)$$

где $(m\times m)$-матрица $A_1(t)$ является либо ω-периодической, либо ее элементами являются тригонометрические многочлены, т.е. она имеет вид (3.2). Заметим далее, что

$$x(t) - x_t = \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s)ds, \qquad -h\le\theta\le 0. \quad (3.19)$$

Учтем, что при $t \geq T$ величина $\dot{x}(s)$ определяется из системы (3.16). Следовательно,

$$x(t) - x_t = \int\limits_{t+\theta}^{t} \big[v_1(s)B_1(s, x_s) + R(s, x_s)\big]ds, \tag{3.20}$$

если $t \geq T + h$ и $-h \leq \theta \leq 0$. Подставим представление (3.20) во второе слагаемое в формуле (3.17) и воспользуемся линейностью оператора $B_1(t, \varphi)$. Имеем,

$$B_1\big(t, x(t) - x_t\big) = B_1\Bigg(t, \int\limits_{t+\theta}^{t} v_1(s)B_1(s, x_s)ds\Bigg) + B_1\Bigg(t, \int\limits_{t+\theta}^{t} R(s, x_s)ds\Bigg). \tag{3.21}$$

Изучим сначала слагаемое

$$B_1\Bigg(t, \int\limits_{t+\theta}^{t} R(s, x_s)ds\Bigg) = B_1\Bigg(t, \int\limits_{\theta}^{0} R(s + t, x_{s+t})ds\Bigg). \tag{3.22}$$

Будем рассматривать выражение (3.22) как линейный оператор

$$L\big(t, \varphi\big) = B_1\Bigg(t, \int\limits_{\theta}^{0} R(s + t, \varphi_s)ds\Bigg), \qquad -h \leq \theta \leq 0, \tag{3.23}$$

действующий из пространства $C_{2h} \equiv C\big([-2h, 0], \mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-2h, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ в пространство $\mathbb{C}^m$. Здесь, как и ранее, $\varphi_s(\theta_1) = \varphi(s + \theta_1)$ $(-h \leq \theta_1 \leq 0)$ — элемент пространства C_h. Покажем, что оператор $L(t, \varphi)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_1^{2h}[t_0 + h, \infty)$. Ясно, что в проверке нуждается лишь выполнимость условия (2.9). Учитывая неравенства (2.9) и (3.11), легко установить, что

$$|L\big(t, \varphi\big)| \leq \Bigg(K \int\limits_{t-h}^{t} \gamma(s)ds\Bigg)\|\varphi\|, \qquad \|\varphi\| = \sup_{-2h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|. \tag{3.24}$$

Осталось заметить, что функция $\int\limits_{t-h}^{t} \gamma(s)ds$ принадлежит классу $L_1[t_0 + h, \infty)$ в силу того, что $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Действительно, меняя порядок интегрирования, получаем,

$$\int\limits_{t_0+h}^{\infty} \Bigg(\int\limits_{t-h}^{t} \gamma(s)ds\Bigg)dt = \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \Bigg(\int\limits_{t_0+h}^{s+h} \gamma(s)dt\Bigg)ds + \int\limits_{t_0+h}^{\infty} \Bigg(\int\limits_{s}^{s+h} \gamma(s)dt\Bigg)ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \gamma(s)(s - t_0)ds + h \int\limits_{t_0+h}^{\infty} \gamma(s)ds. \tag{3.25}$$

Рассмотрим теперь в формуле (3.21) первое слагаемое. Имеем,

$$B_1\left(t, \int\limits_{t+\theta}^{t} v_1(s)B_1(s,x_s)ds\right) = B_1\left(t, \int\limits_{t+\theta}^{t} \big[v_1(t) - v_1(t) + v_1(s)\big]B_1(s,x_s)ds\right) =$$

$$= v_1(t)B_1\left(t, \int\limits_{t+\theta}^{t} B_1(s,x_s)ds\right) + B_1\left(t, \int\limits_{t+\theta}^{t} \big[v_1(s) - v_1(t)\big]B_1(s,x_s)ds\right). \qquad (3.26)$$

Исследуем сначала в выражении (3.26) член вида

$$B_1\left(t, \int\limits_{t+\theta}^{t} B_1(s,x_s)ds\right) = B_1\left(t, \int\limits_{\theta}^{0} B_1(s+t,x_{s+t})ds\right). \qquad (3.27)$$

Будем рассматривать выражение (3.27) как оператор

$$B_2(t,\varphi) = B_1\left(t, \int\limits_{\theta}^{0} B_1(s+t,\varphi_s)ds\right), \qquad -h \le \theta \le 0, \qquad (3.28)$$

действующий из пространства C_{2h} в пространство $\mathbb{C}^m$. Здесь, как и ранее, $\varphi_s(\theta_1) = \varphi(s+\theta_1)$ $(-h \le \theta_1 \le 0)$ — элемент пространства C_h. Оператор $B_2(t,\varphi)$ обладает теми же свойствами, что и оператор $B_1(t,\varphi)$ в исходной системе (3.16). Именно, из (3.28) следует, что если для оператора $B_1(t,\varphi)$ имеет место тождество (3.9), то, очевидно, для оператора $B_2(t,\varphi)$ $(\varphi \in C_{2h})$ это тождество остается справедливым. Далее, несложно показать, что, если оператор $B_1(t,\varphi)$ имеет вид (3.10), то и оператор $B_2(t,\varphi)$ $(\varphi \in C_{2h})$ имеет аналогичную структуру. Отличие состоит лишь в том, что вместо операторов $\ell_j^{(1)}(\varphi)$ в представлении (3.10) для оператора $B_2(t,\varphi)$ находятся некоторые линейные ограниченные операторы $\ell_j^{(2)}(\varphi)$, не зависящие от t, и действующие из пространства C_{2h} в пространство $\mathbb{C}^m$. Наконец, из (3.11) и (3.28) следует, что для оператора $B_2(t,\varphi)$ имеет место неравенство (3.11), где $\varphi \in C_{2h}$, а $\|\varphi\|$ определена в (3.24).

Рассмотрим теперь в формуле (3.26) слагаемое вида

$$B_1\left(t, \int\limits_{t+\theta}^{t} \big[v_1(s) - v_1(t)\big]B_1(s,x_s)ds\right) = B_1\left(t, \int\limits_{\theta}^{0} \big[v_1(s+t) - v_1(t)\big]B_1(s+t,x_{s+t})ds\right)$$

которое мы будем считать оператором

$$\tilde{L}(t,\varphi) = B_1\left(t, \int\limits_{\theta}^{0} \Big[v_1(s+t) - v_1(t)\Big]B_1(s+t,\varphi_s)ds\right), \qquad (3.29)$$

действующим из пространства C_{2h} в пространство $\mathbb{C}^m$. По-прежнему, $\varphi_s(\theta_1) = \varphi(s+\theta_1)$ $(-h \le \theta_1 \le 0)$ — элемент пространства C_h. Из неравенства (3.11) и представления (3.29) следует, что

$$|\tilde{L}(t,\varphi)| \le \left(\tilde{K} \int\limits_{-h}^{0} \big|v_1(s+t) - v_1(t)\big|ds\right)\|\varphi\|, \quad \varphi \in C_{2h},$$

где $\tilde{K}$ — некоторая постоянная, а $\|\varphi\|$ определена в (3.24). Наконец, осталось заметить, что оператор $\tilde{L}(t,\varphi)$, определяемый формулой (3.29), принадлежит классу $\mathcal{L}_1^{2h}[t_0+h,\infty)$. Действительно, пользуясь абсолютной непрерывностью функции $v_1(t)$ и меняя порядок интегрирования, имеем

$$\int\limits_{-h}^{0}\big|v_1(s+t)-v_1(t)\big|ds=\int\limits_{-h}^{0}\Big|\int\limits_{s+t}^{t}\dot{v}_1(\tau)d\tau\Big|ds\le\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{s+t}^{t}\big|\dot{v}_1(\tau)\big|d\tau ds=$$
$$=\int\limits_{t-h}^{t}\int\limits_{-h}^{\tau-t}\big|\dot{v}_1(\tau)\big|dsd\tau\le h\int\limits_{t-h}^{t}\big|\dot{v}_1(\tau)\big|d\tau.$$

Для доказательства того факта, что интеграл в правой части этой цепочки неравенств принадлежит классу $L_1[t_0+h,\infty)$, достаточно заметить, что функция $\dot{v}_1(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$ (условие B.2), и воспользоваться преобразованиями (3.25).

Используя далее формулы (3.17), (3.18), (3.21), (3.23), (3.28), равенство

$$B_1\bigg(t,\int\limits_{t+\theta}^{t}v_1(s)B_1(s,x_s)ds\bigg)=v_1(t)B_2(t,x_t)+\tilde{L}(t,x_t),$$

и свойства операторов $L(t,\varphi)$ и $\tilde{L}(t,\varphi)$ перейдем от исходной системы (3.16) к следующей системе ФДУ:

$$\dot{x}=v_1(t)A_1(t)x(t)-v_1^2(t)B_2(t,x_t)+\tilde{R}(t,x_t). \tag{3.30}$$

Здесь $B_2(t,\varphi)$ — оператор той же структуры, что и оператор $B_1(t,\varphi)$ в исходной системе (3.16), но действующий из пространства C_{2h} в пространство $\mathbb{C}^m$. Этот оператор определяется формулой (3.28). Кроме того, $\tilde{R}(t,x_t)$ — некоторый оператор из класса $\mathcal{L}_1^{2h}[t_0+h,\infty)$.

Дальнейшие действия состоят в том, чтобы проделать указанную процедуру в общей сложности k раз, где параметр k определяется таким образом, что $v_1^{k+1}(t)\in L_1[t_0,\infty)$. Преобразуем на s-м шаге алгоритма оператор $B_s(t,x_t)$, где $x_t\in C_{sh}$, согласно формуле

$$B_s(t,x_t)=B_s\big(t,x(t)\big)-B_s\big(t,x(t)-x_t\big)$$

и используем равенства (3.19) и (3.20), в которых $-sh\le\theta\le 0$, а операторы $B_1(t,\cdot)$ и $R(t,\cdot)$ суть операторы из исходной системы (3.16). В результате последовательности таких преобразований мы приходим к системе ФДУ вида (3.12):

$$\dot{x}=\big[v_1(t)A_1(t)+v_1^2(t)A_2(t)+\ldots+v_1^k(t)A_k(t)\big]x(t)+R_*(t,x_t). \tag{3.31}$$

В системе (3.31) $(m\times m)$-матрицы $A_l(t)$ — это либо ω-периодические матрицы, либо матрицы вида (3.2), а $R_*(t,\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $C_{(k+1)h}$ в пространство $\mathbb{C}^m$ и принадлежащий классу $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$.

Изложенный в этом разделе метод асимптотического интегрирования ФДУ использовался в работе [38] для построения асимптотики решений при $t\to\infty$ следующего уравнения с запаздыванием:

$$\ddot{x}+x+\frac{a\sin\lambda t}{t^\rho}x(t-h)=0, \tag{3.32}$$

где $a, \lambda \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ и $h > 0$. В работе [8] с помощью данного метода построена асимптотика решений еще для некоторых уравнений вида (3.32).

4. Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования

Описанный в предыдущем разделе метод асимптотического интегрирования ФДУ применим лишь для построения асимптотики решений систем, близких при $t \to \infty$ к системам ОДУ. Собственно, это обстоятельство обусловлено и видом системы (2.8), к которой приводится исходная задача. Таким образом, для систем дифференциальных уравнений, являющихся в определенном смысле существенно функциональными, предложенный метод не работает. Одно из возможных направлений в решении задачи асимптотического интегрирования систем ФДУ связано с изучением систем вида

$$\dot{x} = B_0 x_t + G(t, x_t), \tag{4.1}$$

рассматриваемых как возмущение системы ФДУ с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = B_0 x_t. \tag{4.2}$$

Здесь B_0 — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ и не зависящий от t, а оператор $G(t, x_t)$ является в некотором смысле «малым» возмущением. Такой подход к исследованию систем ФДУ используется, например, в работах [15, 16, 28, 39, 13, 23, 24, 25, 40, 41, 14]. На таком пути в работе [24] получен еще один из возможных вариантов теоремы Левинсона для систем ФДУ, применимый, правда, к довольному узкому классу задач.

Предположим, что характеристическое уравнение

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \qquad \Delta(\lambda) = \lambda I - B_0(e^{\lambda \cdot} I), \tag{4.3}$$

имеет N корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ на мнимой оси с учетом их кратностей, а вещественные части остальных корней отрицательны. Данное обстоятельство позволяет для асимптотического интегрирования системы (4.1) воспользоваться идеологией известного метода центральных многообразий (см. [14, 21, 17, 19]). Адаптации этого метода к задаче асимптотического интегрирования системы (4.1) посвящены работы [6, 7]. Существенная роль при этом отводится технике усреднения, изложенной в предыдущем разделе. В настоящем разделе излагаются основные этапы предложенного автором метода асимптотического интегрирования систем ФДУ.

Изложим сначала некоторые результаты теории линейных автономных систем ФДУ, необходимые нам в дальнейшем. Известно, что линейная автономная система (4.2) для $t \geq 0$ порождает в C_h сильно непрерывную полугруппу операторов $T(t)$: $C_h \to C_h$. Оператор $T(t)$, называемый оператором сдвига вдоль траекторий системы (4.2), определяется следующим образом: $T(t)\varphi = x_t^{\varphi}(\theta)$, где $\varphi \in C_h$ и $x_t^{\varphi}(\theta)$ — решение системы (4.2) с начальным условием $x_0^{\varphi}(\theta) = \varphi(\theta)$. Инфинитезимальный производящий оператор A этой полугруппы задается равенством $A\varphi = \varphi'(\theta)$, где $\varphi \in D(A)$. Область определения оператора A

$$D(A) = \{\varphi \in C_h \mid \varphi'(\theta) \in C_h, \ \ \varphi'(0) = B_0\varphi\}$$

плотна в C_h. Имеют место следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}T(t)\varphi = T(t)A\varphi = AT(t)\varphi, \qquad \varphi \in D(A). \tag{4.4}$$

Пусть оператор B_0 определяется своим представлением Рисса

$$B_0\varphi = \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)\varphi(\theta), \tag{4.5}$$

где $(m \times m)$-матричная функция $\eta(\theta)$ имеет ограниченную вариацию на $[-h, 0]$. С системой (4.2) можно связать так называемую формально сопряженную систему

$$\dot{y} = -\int\limits_{-h}^{0} y(t-\theta)d\eta(\theta), \tag{4.6}$$

где $y(t)$ — комплекснозначная вектор-строка длины m. Фазовым пространством для системы (4.6) является множество $C'_h \equiv C\big([0, h], \mathbb{C}^{m*}\big)$, где $\mathbb{C}^{m*}$ — пространство вектор-строк длины m. Для любых $\psi \in C'_h$ и $\varphi \in C_h$ определим билинейную форму

$$\big(\psi(\xi), \varphi(\theta)\big) = \psi(0)\varphi(0) - \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta} \psi(\xi-\theta)d\eta(\theta)\varphi(\xi)d\xi. \tag{4.7}$$

Пусть

$$\Lambda = \big\{\lambda_i \in \mathbb{C} \;\big|\; \det\Delta(\lambda_i) = 0,\ i = 1, \ldots, N\big\}, \tag{4.8}$$

тогда пространство C_h можно разложить в прямую сумму двух подпространств

$$C_h = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda. \tag{4.9}$$

Здесь P_Λ — прямая сумма обобщенных собственных подпространств оператора A, отвечающих собственным значениям из Λ, а Q_Λ — некоторое дополнительное пространство такое, что $T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$. Для того чтобы охарактеризовать эти подпространства более точно, определим $(m \times N)$-матрицу $\Phi(\theta)$, по столбцам которой расположены обобщенные собственные функции $\varphi_1(\theta), \ldots, \varphi_N(\theta)$ оператора A, отвечающие собственным числам из Λ. Таким образом, столбцы матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис подпространства P_Λ. Далее, пусть $\Psi(\xi)$ — $(N \times m)$-матрица, по строкам которые расположены базисные функции $\psi_1(\xi), \ldots, \psi_N(\xi)$ прямой суммы обобщенных собственных подпространств P_Λ^T оператора A^*, формально сопряженного к A относительно билинейной формы (4.7). Матрицы $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\xi)$ могут быть выбраны таким образом, что

$$\big(\Psi(\xi), \Phi(\theta)\big) = \big\{\big(\psi_i(\xi), \varphi_j(\theta)\big)\big\}_{1 \le i,j \le N} = I. \tag{4.10}$$

Поскольку $\Phi(\theta)$ — базис P_Λ и $AP_\Lambda \subseteq P_\Lambda$, то существует такая $(N \times N)$-матрица D, спектром которой является множество Λ, что $A\Phi(\theta) = \Phi(\theta)D$. Тогда, учитывая определение оператора A, а также соотношения (4.4), имеем

$$\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{D\theta}, \qquad T(t)\Phi(\theta) = \Phi(\theta)e^{Dt} = \Phi(0)e^{D(t+\theta)}, \tag{4.11}$$

где $-h \leq \theta \leq 0$ и $t \geq 0$. Аналогично для матрицы $\Psi(\xi)$ получаем

$$\Psi(\xi) = e^{-D\xi}\Psi(0), \tag{4.12}$$

где $0 \leq \xi \leq h$. Матрицы $\Phi(0)$ и $\Psi(0)$ выбираются из следующих соображений. Столбцы матрицы $\Phi(\theta)$ являются обобщенными собственными векторами инфинитезимального производящего оператора A, а, следовательно, они принадлежат $D(A)$. Значит,

$$\Phi'(0) = \Phi(0)D = B_0\Phi = \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)\Phi(0)e^{D\theta}. \tag{4.13}$$

Аналогично, учитывая (4.6) и (4.12), выводим

$$\Psi'(0) = -D\Psi(0) = -\int\limits_{-h}^{0} e^{D\theta}\Psi(0)d\eta(\theta). \tag{4.14}$$

Возвращаясь теперь к разложению (4.9), мы можем описать пространства P_Λ и Q_Λ следующим образом:

$$\begin{aligned} P_\Lambda &= \big\{\varphi \in C_h \;\big|\; \varphi(\theta) = \Phi(\theta)a,\ a \in \mathbb{C}^N\big\}, \\ Q_\Lambda &= \big\{\varphi \in C_h \;\big|\; (\Psi, \varphi) = 0\big\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Разложим теперь решение $x_t(\theta)$ системы (4.1) с начальным условием $x_{t_0} = \varphi$, используя представление (4.9). Имеем,

$$x_t(\theta) = x_t^{P_\Lambda} + x_t^{Q_\Lambda}, \quad \varphi(\theta) = \varphi^{P_\Lambda} + \varphi^{Q_\Lambda}, \quad t \geq t_0. \tag{4.16}$$

Можно показать (см. [10, 30]), что если

$$x_t^{P_\Lambda}(\theta) = \Phi(\theta)u(t), \qquad u(t) \in \mathbb{C}^N, \tag{4.17}$$

то функция $u(t)$ удовлетворяет системе ОДУ

$$\dot{u} = Du + \Psi(0)G(t, x_t), \qquad t \geq t_0 \tag{4.18}$$

с начальным условием $u(t_0) = (\Psi, \varphi)$.

Будем считать, что оператор $G(t, x_t)$ в формуле (4.1) допускает представление в виде

$$G(t, x_t) = B(t, x_t) + R(t, x_t), \tag{4.19}$$

где $B(t, \cdot)$ и $R(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$. Кроме того, оператор $R(t, \cdot)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_1^h[t_0, \infty)$, а оператор $B(t, \varphi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} B(t, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)B_i(t, \varphi) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)B_{i_1 i_2}(t, \varphi) + \ldots + \\ + \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t)B_{i_1 \ldots i_k}(t, \varphi), \qquad \varphi \in C_h. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Здесь $B_{i_1 \ldots i_l}(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы вида (3.10), действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$. Относительно скалярных абсолютно непрерывных на $[t_0, \infty)$ функций $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ предполагаются выполненными условия B.2 — B.4.

Определение 1. Множество $\mathcal{W}(t) \subset C_h$ при $t \geq t_* \geq t_0$ называется критическим многообразием для системы (4.1), если выполнены следующие условия:

1. Существует $(m \times N)$-матрица $H(t,\theta)$ непрерывная по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$ такая, что ее столбцы принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \geq t_*$ и, кроме того, $\|H(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$, где

$$\|H(t,\cdot)\|_{C_h} = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |H(t,\theta)|$$

и $|\cdot|$ — некоторая матричная норма в пространстве $(m \times N)$-матриц;

2. Множество $\mathcal{W}(t)$ для $t \geq t_*$ задается формулой

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{\varphi(\theta) \in C_h \mid \varphi(\theta) = \Phi(\theta)u + H(t,\theta)u, \ u \in \mathbb{C}^N\Big\}, \tag{4.21}$$

где столбцы $(m \times N)$-матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис в пространстве P_Λ из (4.9);

3. Множество $\mathcal{W}(t)$ при $t \geq t_*$ положительно инвариантно относительно траекторий системы (4.1), т. е. если $x_T \in \mathcal{W}(T)$, $T \geq t_*$, то $x_t \in \mathcal{W}(t)$ для всех $t \geq T$.

Основные результаты о свойствах критического многообразия для системы (4.1) и способе его построения изложены в работах [6, 7].

Теорема 5. *При достаточно больших t у системы* (4.1) *существует критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, определяемой формулой* (4.21).

Пусть $x(t)$ — решение системы (4.1) с начальным условием при $t = T$. Тогда при $t + \theta \geq T$ справедливы равенства

$$\frac{d}{dt}x_t(\theta) = \begin{cases} \dfrac{d}{d\theta}x_t(\theta), & -h \leq \theta < 0, \\ B_0 x_t + G(t, x_t), & \theta = 0. \end{cases} \tag{4.22}$$

Предположим, что в начальный момент $t = T$ вектор-функция $x_T(\theta)$ принадлежит многообразию $\mathcal{W}(T)$. В силу положительной инвариантности $\mathcal{W}(t)$ имеем

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u(t) + H(t,\theta)u(t), \qquad t \geq T, \quad u(t) \in \mathbb{C}^N. \tag{4.23}$$

Заметим, что формула (4.23) представляет собой разложение (4.16) и, следовательно, функция $u(t)$ в силу (4.18) удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = \Big[D + \Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\Big]u, \qquad t \geq T. \tag{4.24}$$

Эту систему будем называть проекций системы (4.1) на критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ или, короче, системой на критическом многообразии. Подставим разложение (4.23) в (4.22). Получим при $t + \theta \geq T$

$$\big(\Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\dot{u}(t) + \frac{\partial H}{\partial t}u = \begin{cases} \Big[\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \dfrac{\partial H}{\partial \theta}\Big]u, & -h \leq \theta < 0, \\ \big[B_0\Phi + B_0 H + G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\big]u, & \theta = 0. \end{cases}$$

Подставим в это выражение представление для $\dot{u}$ из (4.24) и учтем (4.11), (4.13). Окончательно получаем

$$\Phi(\theta)\Psi(0)G\big(t,\Phi(\theta)+H(t,\theta)\big)+H(t,\theta)\left(D+\Psi(0)G\big(t,\Phi(\theta)+H(t,\theta)\big)\right)+ \\ +\frac{\partial H}{\partial t}=\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial \theta}, & -h\le\theta<0,\\ B_0H+G\big(t,\Phi(\theta)+H(t,\theta)\big), & \theta=0.\end{cases} \tag{4.25}$$

В работе [6] показано, что существует матрица

$$\hat{H}(t,\theta)=\sum_{i=1}^{n}v_i(t)H_i(t,\theta)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)H_{i_1i_2}(t,\theta)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)H_{i_1\ldots i_k}(t,\theta), \tag{4.26}$$

которая удовлетворяет системе (4.25) с точностью до слагаемых $\hat{R}(t,\theta)$ таких, что $\|\hat{R}(t,\cdot)\|_{C_h}\in L_1[t_0,\infty)$. Здесь элементы $(m\times N)$-матриц $H_{i_1\ldots i_l}(t,\theta)$ являются тригонометрическими многочленами переменной t и непрерывно дифференцируемы по $\theta\in[-h,0]$, а величина $k\in\mathbb{N}$ определяется условием $B.4$ функций $v_1(t),\ldots,v_n(t)$. Кроме того, столбцы матриц $H_{i_1\ldots i_l}(t,\theta)$ принадлежат пространству Q_Λ при всех $t\in\mathbb{R}$. Как оказывается, проблема нахождения матриц $H_{i_1\ldots i_l}(t,\theta)$ сводится к решению некоторых функционально-краевых задач для линейных систем ОДУ. Матрица $\hat{H}(t,\theta)$ является в определенном смысле приближением для матрицы $H(t,\theta)$, описывающей многообразие $\mathcal{W}(t)$ согласно формуле (4.21). Именно, справедлива следующая теорема об аппроксимации.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие системы* (4.1)*, существующее согласно теореме 5 при достаточно больших t. Тогда найдется такое достаточно большое t_*, что при $t\ge t_*$ матрица $H(t,\theta)$ из* (4.21) *допускает представление в виде*

$$H(t,\theta)=\hat{H}(t,\theta)+Z(t,\theta),\qquad t\ge t_*\ge t_0,\quad -h\le\theta\le 0. \tag{4.27}$$

Здесь матрица $\hat{H}(t,\theta)$, определяемая формула (4.26)*, удовлетворяет системе* (4.25) *с точностью до слагаемы $\hat{R}(t,\theta)$ таких, что $\|\hat{R}(t,\cdot)\|_{C_h}\in L_1[t_0,\infty)$, а $(m\times N)$-матрица $Z(t,\theta)$ такова, что $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h}\to 0$ при $t\to\infty$ и $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h}\in L_1[t_*,\infty)$.*

Асимптотика всех решений системы (4.1) определяется в главном асимптотикой решений системы на критическом многообразии (4.24) в силу следующей теоремы о свойстве глобального притяжения многообразия $\mathcal{W}(t)$.

Теорема 7. *Пусть $x(t)$ — решение системы* (4.1)*, определенное при $t\ge T\ge t_0$. Тогда найдется такое достаточно большое $t_*\ge T$, что при $t\ge t_*$ имеет место следующее асимптотическое представление:*

$$x_t(\theta)=\Phi(\theta)u_H(t)+H(t,\theta)u_H(t)+O\big(e^{-\beta t}\big),\qquad t\to\infty. \tag{4.28}$$

Здесь $u_H(t)$ $(t\ge t_*)$ — некоторое решение системы на критическом многообразии (4.24) *и $\beta>0$ — некоторое действительное число.*

Пусть $u^{(1)}(t), \ldots, u^{(N)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии (4.24), а $x(t)$ — произвольное решение системы (4.1), определенное при $t \geq T$. Тогда в силу теоремы 7 имеет место следующее асимптотическое представление:

$$x(t) = x_t(0) = \big(\Phi(0) + H(t, 0)\big) \sum_{i=1}^{N} c_i u^{(i)}(t) + O\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t \to \infty, \tag{4.29}$$

где $c_1, \ldots, c_N$ — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число. Учитывая формулы (4.26) и (4.27), заключаем, что система (4.24) является системой ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами, т. е. системой вида (3.1). Асимптотика ее фундаментальных решений $u^{(1)}(t), \ldots, u^{(N)}(t)$ строится с помощью техники, изложенной в предыдущем разделе.

С помощью изложенного выше метода могут быть получены, в частности, асимптотические формулы для решений уравнения

$$\dot{x} = \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{t} + \frac{\sin(e^t)}{t^2}\right] x(t-1), \quad t > 0, \tag{4.30}$$

иллюстрирующего в работе [24] использование некоторого варианта теоремы Левинсона для систем ФДУ.

5. Заключение

Дальнейшие развитие изложенных в этой работе результатов может быть связано с разработкой методов асимптотического интегрирования систем дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, содержащих частные производные. Такого рода задачи представляют не только теоретический, но и практический интерес (см., например, [35, 36, 9]). Возможность использования для решения таких задач некоторых стандартных подходов представляется весьма перспективной. Создание подобных методов позволит существенно расширить область применения классических асимптотических теорем, а также получить ряд новых результатов.

Список цитируемых источников

1. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1954.

   Bellman, R. (1953). Stability theory of differential equations. New York: McGraw-Hill.

2. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.

   Bellman, R., & Cooke, K. L. (1963). Differential-difference equations. New York: Academic Press.

3. *Бурд В. Ш., Каракулин В. А.* Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Матем. заметки. — 1998. — Т. 64, №5. — С. 658–666.

   Burd, V. Sh., & Karakulin, V. A. (1998). On the asymptotic integration of systems of linear differential equations with oscillatory decreasing coefficients. Math. Notes, 64(5), 571–578.

4. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.

   Coddington, E. A., & Levinson, N. (1955). Theory of ordinary differential equations. New York: McGraw-Hill.

5. *Нестеров П. Н.* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, №6. — С. 731–742.

   Nesterov, P. N. (2007). Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients. Differ. Equ., 43(6), 745–756.

6. *Нестеров П. Н.* Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. I // Модел. и анализ информ. систем. — 2014. — Т. 21, №3. — С. 5–34.

   Nesterov, P. N. (2014). Center manifold method in the asymptotic integration problem for functional differential equations with oscillatory decreasing coefficients. I. Model. Anal. Inform. Sist., 21(3), 5–34 (in Russian).

7. *Нестеров П. Н.* Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. II // Модел. и анализ информ. систем. — 2014. — Т. 21, №5. — С. 5–37.

   Nesterov, P. N. (2014). Center manifold method in the asymptotic integration problem for functional differential equations with oscillatory decreasing coefficients. II. Model. Anal. Inform. Sist., 21(5), 5–37 (in Russian).

8. *Нестеров П. Н., Агафончиков Е. Н.* Особенности колебания решений адиабатических осцилляторов с запаздыванием // Модел. и анализ информ. систем. — 2013. — Т. 20, №5. — С. 25–44.

   Nesterov, P. N., & Agafonchikov, E. N. (2015). Specific features of oscillations in adiabatic oscillators with delay. Automatic Control and Computer Sciences, 49(7), 582–596.

9. *Новиков Р. Г., Тайманов И. А., Царев С. П.* Двумерные потенциалы Вигнера–фон Неймана с кратным положительным собственным значением // Функц. анализ и его прил. — 2014. — Т. 48, №4. — С. 74–77.

   Novikov, R. G., Taimanov, I. A., & Tsarev, S. P. (2014). Two-dimensional von Neumann-Wigner potentials with a multiple positive eigenvalue. Funct. Anal. Appl., 48, 295–297.

10. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.

    Hale, J. K. (1977). Theory of functional differential equations. New York: Springer-Verlag.

11. *Штокало И. З.* Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами // Матем. сб. — 1946. — Т. 19(61), №2. — С. 263–286.

    Shtokalo, I. Z. (1946). A stability and instability criteria for solutions of linear differential equations with quasi-periodical coefficients. Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 19, 263–286 (in Russian).

12. *Штокало И. З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. — Киев: АН УССР, 1960.

    Shtokalo, I. Z. (1961). Linear differential equations with variable coefficients. New York: Gordon and Breach.

13. *Ai S.* Asymptotic integration of delay differential systems // J. Math. Anal. Appl. — 1992. — Vol. 165. — P. 71–101.

14. *Ait Babram M., Hbid M. L., Arino O.* Approximation scheme of a center manifold for functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1997. — Vol. 213. — P. 554–572.

15. *Arino O., Győri I.* Asymptotic integration of delay differential systems // J. Math. Anal. Appl. — 1989. — Vol. 138. — P. 311–327.

16. *Arino O., Győri I., Pituk M.* Asymptotically diagonal delay differential systems // J. Math. Anal. Appl. — 1996. — Vol. 204. — P. 701–728.

17. *Arino O., Hbid M. L., Ait Dads E. (Eds.)* Delay differential equations and applications. — Dordrecht: Springer, 2006.

18. *Arino O., Pituk M.* More on linear differential systems with small delays // J. Differential Equations. — 2001. — Vol. 170. — P. 381–407.

19. *Balachandran B., Kalmár-Nagy T., Gilsinn D. E. (Eds.)* Delay differential equations: recent advances and new directions. — New York: Springer, 2009.
20. *Bodine S., Lutz D. A.* Asymptotic integration of differential and difference equations. — Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015.
21. *Carr J.* Applications of centre manifold theory. — New York: Springer-Verlag, 1981.
22. *Cassel J. S., Hou Z.* Asymptotically diagonal linear differential equations with retardation // J. London Math. Soc. — 1993. — Vol. 47. — P. 473–483.
23. *Cassel J. S., Hou Z.* L^p-Perturbation of linear functional differential equations // Monatsh. Math. — 1999. — Vol. 128. — P. 211–226.
24. *Castillo S., Pinto M.* Levinson theorem for functional differential systems // Nonlinear Anal. — 2001. — Vol. 47, №6. — P. 3963–3975.
25. *Castillo S., Pinto M.* An asymptotic theory for nonlinear functional differential equations // Comput. Math. Appl. — 2002. — Vol. 44. — P. 763–775.
26. *Driver R. D.* Linear differential systems with small delays // J. Differential Equations. — 1976. — Vol. 21. — P. 148–166.
27. *Eastham M. S. P.* The asymptotic solution of linear differential systems. London Math. Soc. Monographs. — Oxford: Clarendon Press, 1989.
28. *Győri I., Pituk M.* L^2-Perturbation of a linear delay differential equation // J. Math. Anal. Appl. — 1995. — Vol. 195. — P. 415–427.
29. *Haddock J. R., Sacker R. J.* Stability and asymptotic integration for certain linear systems of functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1980. — Vol. 76. — P. 328–338.
30. *Hale J., Verduyn Lunel S. M.* Introduction to functional differential equations. Appl. Math. Sciences 99. — New York: Springer-Verlag, 1993.
31. *Harris W. A. Jr., Lutz D. A.* On the asymptotic integration of linear differential systems // J. Math. Anal. Appl. — 1974. — Vol. 48, №1. — P. 1–16.
32. *Harris W. A. Jr., Lutz D. A.* Asymptotic integration of adiabatic oscillators // J. Math. Anal. Appl. — 1975. — Vol. 51, №1. — P. 76–93.
33. *Harris W. A. Jr., Lutz D. A.* A Unified theory of asymptotic integration // J. Math. Anal. Appl. — 1977. — Vol. 57, №3. — P. 571–586.
34. *Hou Z., Cassel J. S.* Asymptotic solutions for mixed-type equations with a small deviation // Georgian Math. J. — 1998. — Vol. 5, №2. — P. 107–120.
35. *Kato T.* Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient // Comm. Pure Appl. Math. — 1959. — Vol. 12. — P. 403–425.
36. *Langer M., Kozlov V.* Asymptotics of solutions of a perturbed heat equation // J. Math. Anal. Appl. — 2013. — Vol. 397. — P. 481–493.
37. *Levinson N.* The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. — 1948. — Vol. 15, №1. — P. 111–126.
38. *Nesterov P.* Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients // Monatsh. Math. — 2013. — Vol. 171, №2. — P. 217–240.
39. *Pituk M.* The Hartman–Wintner theorem for functional differential equations // J. Differential Equations. — 1999. — Vol. 155. — P. 1–16.
40. *Pituk M.* A Perron type theorem for functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 316. — P. 24–41.
41. *Pituk M.* Asymptotic behavior and oscillation of functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 322. — P. 1140–1158.

Получена 20.09.2015