Динамические системы, 2015, том 5(33), №3-4, 215–223

УДК 532

О дрейфовом течении вблизи горизонтальной поверхности раздела двух жидкостей в условиях реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца

Д. Ф. Белоножко, А. А. Очиров

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль 150023. *e-mail: belonozhko@mail.ru*

Аннотация. В работе строится обобщение представлений о закономерностях реализации неустойчивости Кельвина-Гельмогольца, возникающей на горизонтальной границе раздела двух несмешивающихся идеальных жидкостей, участвующих в относительном сдвиговом смещении. Анализируется поведение дрейфовой составляющей движения индивидуальных жидких частиц, прилегающих к дестабилизированной границе раздела.

Ключевые слова: неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, дрейф Стокса, капиллярно-гравитационные волны.

Введение

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца [4]–[6] представляет собой неустойчивость волнового движения на горизонтальной поверхности раздела двух идеальных, несмешивающихся, движущихся относительно друг друга жидкостей. В классическом рассмотрении [4] верхняя жидкость считается менее плотной, чем нижняя; для обеих жидкостей учитывается действие вертикального поля силы тяжести, при этом поверхностным натяжением на границе раздела пренебрегается. Если жидкости неподвижны относительно друг друга, то система является устойчивой, но как только на поверхности раздела возникает тангенциальный скачок поля скоростей, происходит дестабилизация этой поверхности: амплитуды даже исчезающе малых волновых возмущений определенных длин становятся неограниченно растущими во времени.

Математическое описание неустойчивости Кельвина-Гельмгольца традиционно осуществляется в так называемом эйлеровом представлении поля скоростей, в котором рассчитываются не собственные скорости жидких частиц, а скорости течения, соотнесенные с точками пространства, через которые сменяя друг друга проходят различные частички среды. При таком подходе формулы, описывающие развитие неустойчивости, не раскрывают в должной мере закономерности движения отдельных частиц, прилегающих к границе раздела. В частности, остается непонятным, как изменяется дрейфовая компонента скорости движения этих частиц, отвечающая за их перенос вдоль направления распространения волнового возмущения.

Существование дрейфовой компоненты скорости у частиц среды, участвующей в волновом движении, установлено еще в позапрошлом веке в работах Дж. Дж. Стокса [8], а позже подтверждено наблюдениями [5]. В простейшем случае, когда периодическое волновое возмущение распространяется по поверхности идеальной бесконечно глубокой жидкости, ее частички вовлекаются в горизонтальное дрейфовое движение — Дрейф

© *Д. Ф. БЕЛОНОЖКО, А. А. ОЧИРОВ*

Стокса, сдвигающий среду вдоль направления распространения волны. Скорость дрейфа Стокса максимальна для частиц, расположенных непосредственно на поверхности. Ее величина пропорциональна квадрату амплитуды волны и экспоненциально уменьшается с глубиной. Причина возникновения дрейфа Стокса кроется в характере циклического движения индивидуальных жидких частиц. Если по поверхности распространяется периодическая бегущая волна, то жидкие частички, расположенные на этой поверхности совершают в вертикальной плоскости циклические движения, которые в первом приближении по амплитуде волны близки к окружностям с радиусом равным амплитуде волны [6], [7]. При более детальном анализе обнаруживается, что благодаря затуханию движения с глубиной нижняя часть витка петлеобразной траектории индивидуальной жидкой частички оказывается меньше, чем верхняя. В результате, через период волнового движения частичка возвращается не в исходное положение, а в несколько смещенное по отношению к нему в направлении распространения волны. С течением времени такие смещения накапливаются и образуют средний дрейф, называемый «Дрейф Стокса». Амплитуда петлеобразных движений частиц среды уменьшается с удалением от поверхности, по которой происходит распространение волны, и тоже самое происходит со скоростью дрейфового движения. Для расчета скорости Дрейфа Стокса необходимо переходить к рассмотрению задачи в лагранжевом представлении [1], [5], в котором поле скоростей сопоставляется именно индивидуальным частичкам среды.

В настоящей работе развивается идея взаимного соотнесения двух вышеописанных явлений, которые до настоящего времени подробно исследовались лишь по-отдельности, без надлежащего анализа возможной взаимосвязи. Рассматривается задача аналитического расчета горизонтальной скорости дрейфового движения в верхней и нижней жидкостях в условиях реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. В расчетах принималось, что верхняя жидкость является менее плотной, чем нижняя; учитывалось влияние поля силы тяжести и наличие поверхностного натяжения на границе раздела. Вопрос исследовался в рамках модели идеальных жидкостей, для которых поле скоростей на поверхности раздела терпит разрыв, что не позволяет напрямую использовать уравнения задачи, записанные в лагранжевом представлении [1]. Поэтому сначала строилось эйлерово поле скоростей, затем с помощью специальной расчетной процедуры картина течения пересчитывалась в переменные Лагранжа [5], в которых, наконец, выделялась горизонтальная дрейфовая составляющая скорости индивидуальных жидких частиц.

1. Полная математическая формулировка задачи

Пусть две идеальные несмешивающиееся жидкости заполняют в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с осью Oz, направленной вертикально вверх, полупространства $z > 0$ и $z < 0$. Верхняя менее плотная среда (например, воздух - «air») с плотностью ρ^a поступательно движется относительно нижней неподвижной жидкости (к примеру, воды - «water») вдоль оси Ox со скоростью U_0. Плотность нижней среды — $\rho^w > \rho^a$. На частицы обеих жидкостей действует поле силы тяжести $\mathbf{g}$, а поверхность их раздела характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения γ. Рассматривается периодическое волновое возмущение $\xi \equiv \xi(x,t)$ с волновым числом k, распространяющееся вдоль оси Ox. Задача состоит в исследовании устойчивости этого возмущения и оценке интенсивности инициируемого им в обеих жидкостях горизонтального дрейфового течения. Для простоты движение обеих сред считается независящим от второй горизонтальной координаты y.

Полная математическая формулировка задачи состоит из традиционных уравнений гидродинамики идеальной жидкости с соответствующими граничными условиями на границе раздела [4], [5]:

$$z > \xi : \qquad \Delta\varphi^a = 0; \tag{1.1}$$

$$P^a = p_0 - \rho^a g z - \rho^a \partial_t \varphi^a - \frac{\rho^a}{2}\left((\partial_x\varphi^a + U_0)^2 + (\partial_z\varphi^a)^2\right);$$

$$z < \xi : \qquad \Delta\varphi^w = 0;$$

$$P^w = p_0 - \rho^w g z - \rho^w \partial_t \varphi^w - \frac{\rho^w}{2}\left((\partial_x\varphi^w)^2 + (\partial_z\varphi^w)^2\right);$$

$$z = \xi : \qquad \partial_t\xi + \partial_x\varphi^w\,\partial_x\xi = \partial_z\varphi^w; \quad \partial_t\xi + (\partial_x\varphi^a + U_0)\partial_x\xi = \partial_z\varphi^a;$$

$$P^a - P^w = -\gamma\,\partial_{xx}\xi\,(1 + (\partial_x\xi)^2)^{-3/2};$$

$$z \to \infty : \qquad \nabla\varphi^a \to 0; \qquad z \to -\infty : \qquad \nabla\varphi^w \to 0.$$

Здесь t — время, а p_0 — постоянное внешнее давление, которое в реальной физической ситуации равно атмосферному давлению на поверхности вода-воздух. Величины P^a и P^w имеют смысл гидродинамических давлений внутри верхней и нижней жидкостей соответственно. В нижней жидкости поле скоростей полностью определяется градиентом гидродинамического потенциала φ^w, тогда, как в верхней среде градиент от φ^a описывает добавку к скорости $U_0\mathbf{e}_x$ общего горизонтального поступательного движения.

2. Задача первого порядка малости

В асимптотическом приближении, где неизвестные ξ, φ^a и φ^w вместе с их производными считаются малыми одного порядка малости, несложно перейти к задаче относительно величин первого порядка малости:

$$z > 0 : \qquad \Delta\varphi_1^a = 0; \qquad z < 0 : \qquad \Delta\varphi_1^w = 0; \tag{2.1}$$

$$z = 0 : \qquad \partial_t\xi_1 = \partial_z\varphi_1^w; \quad \partial_t\xi_1 + U_0\,\partial_x\xi_1 = \partial_z\varphi_1^a; \tag{2.2}$$

$$-\rho^w g\xi_1 - \rho^w\partial_t\varphi_1^w + \rho^a g\xi_1 + \rho^a\partial_t\varphi_1^a + \rho^a\,\partial_x\varphi_1^a\,U_0 = -\gamma\,\partial_{xx}\xi_1; \tag{2.3}$$

$$z \to \infty : \qquad \nabla\varphi_1^a \to 0; \qquad z \to -\infty : \qquad \nabla\varphi_1^w \to 0. \tag{2.4}$$

Здесь нижний индекс «1» указывает на то, что соответствующие функции являются лишь первым приближением точного решения. Снесение граничных условий с искривленной поверхности $z = \xi(x, z, t)$ на уровень $z = 0$ выполнено посредством представления значений заданных на поверхности функций через их степенное разложение в ряд по величине отклонения поверхности от уровня $z = 0$ в заданной точке (с сохранением лишь линейных по отклонению слагаемых). Известно, [4], [7], [6], что решение задачи первого порядка малости, хорошо описывает реальную физическую ситуацию в условиях, когда амплитуда волнового возмущения существенно меньше длины волны. Соответствующее решение называется решением задачи в линейном приближении по амплитуде волны.

Для решения задачи (2.1)-(2.4) неизвестные искались в виде бегущей волны, т.е. считались пропорциональными $\exp(i(\omega t - kx))$, в частности полагалось:

$$\xi_1 = \zeta\exp(i(\omega t - kx)); \qquad \zeta = const.$$

Чтобы удовлетворить уравнениям Лапласа (2.1) и условиям на бесконечности (2.4) выражения для потенциалов записывались в следующей форме:

$$\varphi_1^a = A\exp(i(\omega t - kx))exp(-kz); \qquad \varphi_1^w = W\exp(i(\omega t - kx))exp(kz);$$

$$A, W = const.$$

Подставляя выписанные выражения для ξ_1, φ_1^a, φ_1^w в граничные условия (2.2) и (2.3), несложно получить однородную систему трех линейных алгебраических уравнений относительно констант ζ, A, W. Условие разрешимости этой системы сводится к дисперсионному уравнению, связывающему круговую частоту волнового возмущения ω с волновым числом k:

$$\omega = \frac{1}{\rho^a + \rho^w}\left(k\,U_0\,\rho^a \pm \sqrt{k^3\,\gamma(\rho^a + \rho^w) + g\,k((\rho^w)^2 - (\rho^a)^2) - k^2\rho^a\rho^w U_0^2}\right). \tag{2.5}$$

Разрешив построенную систему линейных уравнений, несложно выписать и само решение задачи первого порядка малости, в котором все величины оказываются линейными по амплитуде волны:

$$\xi_1 = \zeta\exp(i(\omega t - kx)); \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} u_1^a &= -\zeta(\omega - kU_0)\exp(i(\omega t - kx))\exp(-kz);\\ v_1^a &= i\,\zeta(\omega - kU_0)\exp(i(\omega t - kx))\exp(-kz); \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} u_1^w &= \zeta\omega\exp(i(\omega t - kx))\exp(kz);\\ v_1^w &= -i\,\zeta\omega\exp(i(\omega t - kx))\exp(kz). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь представлены выражения для горизонтальных $u_1^a = \partial_x\varphi_1^a$, $u_1^w = \partial_x\varphi_1^w$ и вертикальных $v_1^a = \partial_z\varphi_1^a$, $v_1^w = \partial_z\varphi_1^w$ компонент поля скоростей. Физический смысл несут лишь действительные части комплекснозначных выражений (2.6)-(2.8). В дальнейшем будет исследовано поведение решения, в котором дисперсионное соотношение (2.5) будет вычисляться с использованием на месте символа «±» знака «+». В этом случае мы имеем дело с волной, которая при всех значениях прочих параметров распространяется вдоль направления движения верхней среды (вдоль оси Ox).

Анализ построенного решения (2.5)-(2.8) показывает, что неустойчивость волнового возмущения с заданным волновым числом k, распространяющегося вдоль направления движения верхней среды, имеет пороговый характер. Пока скорость верхней среды меньше критического значения:

$$U_0 < U_*; \tag{2.9}$$

$$U_*^2 = \frac{k^2\gamma(k^2\gamma(\rho^a + \rho^w) - g(((\rho^a)^2 - (\rho^w)^2)))}{k\rho^a\rho^w}, \tag{2.10}$$

бегущая волна, благодаря отсутствию диссипации, имеет возможность распространения с неизменной амплитудой.

Если же скорость верхней жидкости достаточно велика, т. е.

$$U_0 > U_*, \tag{2.11}$$

то подъемная сила, действующая на гребни волн, оказывается достаточной для преодоления поля силы тяжести и превращения возмущения в прогрессивную волну с экспоненциально нарастающей по времени амплитудой. При этом в выражении для циклической частоты (2.5) появляется мнимая составляющая со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от выбора корня дисперсионного уравнения. Нарастающему по амплитуде решению соответствует корень с отрицательной мнимой частью. При выполнении условия (2.11), формула (2.6) описывает всего лишь начальную стадию развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Как только амплитуда становится достаточно большой, линейное по амплитуде волны приближение становится несправедливым.

Исследуя зависимость (2.10) критического значения скорости верхней среды от волнового числа k, несложно установить наличие минимума при

$$k = k_* = \frac{g(\rho^w - \rho^a)}{\gamma}; \qquad U_{*min} = \frac{2\sqrt{\gamma\, g((\rho^w)^2 - (\rho^a)^2)}}{\rho^w \rho^a}. \tag{2.12}$$

Следовательно, пока выполняется условие

$$U_0 < U_{*min},$$

волновые возмущения всех возможных длин волн являются устойчивыми. Как только скорость верхней среды достигает значения $U_0 = U_{*min}$, в общем спектре выделяется возмущение с волновым числом k_*, которое оказывается неограниченно растущим по амплитуде при любом сколь угодно малом превышении $U_0 > U_{*min}$. Интересно отметить, что в классическом варианте Неустойчивости Кельвина-Гельмголца поверхностное натяжение на границе раздела сред не учитывается и минимальное пороговое значение скорости равно нулю, $U_{*min} = 0$, и достаточно неустойчивые длинно-волновые возмущения обязательно неустойчивы.

Решение упрощенной задачи (2.1)-(2.4) является лишь первым приближением точного решения, но может служить отправной точкой для построения поправочных добавок более высоких порядков. Для построения следующей уточняющей поправки необходимо представить неизвестные величины в виде разложений:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2; \qquad \varphi^a = \varphi^a_1 + \varphi^a_2; \qquad \varphi^w = \varphi^w_1 + \varphi^w_2$$

и подставить эти соотношения в задачу (1.1) вместе с действительными выражениями для ξ_1, φ^a_1, φ^w_1, найденными в результате решения задачи первого порядка малости. После выделения главных ненулевых компонент всех соотношений получится задача для определения величин ξ_2 φ^a_2, φ^w_2. Новая задача будет отличаться от предыдущей (2.1)–(2.4) наличием неоднородностей в правых частях граничных условий (2.2), (2.3). При этом сами неоднородности окажутся пропорциональными квадрату амплитуды волны и будут выражаться через произведения уже определенных на предыдущем этапе решения величин первого порядка малости и произведения производных от этих величин. Таким образом, отправляясь от решения задачи первого порядка малости, несложно построить и решить задачу второго порядка, решение которой будет пропорционально квадрату амплитуды волны. Можно идти и дальше: последовательно строить все более высокие приближения, избавляясь, если нужно, от возникающих секулярных членов.

3. Принцип расчета дрейфовых движений индивидуальных жидких частиц

Исходная задача (1.1) сформулирована и решена в первом приближении по амплитуде волны в эйлеровом представлении, в котором поле скоростей связано с точками пространства, а не с частичками среды. Чтобы следить за движением отдельных частичек, необходимо перейти к лагранжевой форме описания течения. Для осуществления такого перехода в задачах с волновым движением на поверхности жидкости используется известная приближенная формула, выписанная, например, в работе [5]:

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{r},t) = \mathbf{V}_E(\mathbf{r},t) + \left(\int\limits_0^t \mathbf{V}_E(\mathbf{r},\tau)d\tau \cdot \nabla\right)\mathbf{V}_E(\mathbf{r},t) \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{V}_L(\mathbf{r},t)$ — лагранжева (собственная) скорость индивидуальной жидкой частицы, которая при $t=0$ располагалась точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$, а $\mathbf{V}_E(\mathbf{r},t)$ — эйлерова скорость течения в той же пространственной точке. Формула (3.1) является асимптотической и справедлива лишь во втором порядке малости относительно амплитуды волнового движения (порядок малости следует понимать в смысле, описанном в конце предыдущего раздела).

В нашем случае при расчете собственной горизонтальной скорости частички среды формула (3.1) сводится к выражению:

$$\begin{gathered} u_L(x,z,t) \approx u_1(x,z,t) + u_2(x,z,t) + \\ \int\limits_0^t u_1(x,z,\tau)d\tau\, \partial_x u_1(x,z,t) + \int\limits_0^t v_1(x,z,\tau)d\tau\, \partial_z v_1(x,z,t) \end{gathered} \tag{3.2}$$

В правую часть (3.2) входит горизонтальная компонента скорости второго порядка малости, которая выше не определялась. На самом деле для расчета дрейфовой компоненты течения вычисление $u_2(x,z,t)$ не требуется. Дело в том, что задача второго порядка малости, отличающаяся от задачи первого порядка наличием неоднородностей в граничных условиях, обладает тем свойством, что ее неоднородности содержат только циклические по времени слагаемые. Тем же свойством будет обладать и эйлерово решение задачи второго порядка малости. В частности, выражение для $u_2(x,z,t)$ будет содержать только циклические по времени слагаемые, которые не дают никакого вклада в дрейфовое течение. На основании формул (2.7) и (2.8) тоже самое можно сказать и о слагаемом $u_1(x,z,t)$ (неважно о верхней или нижней жидкостях идет речь). Таким образом, для описания горизонтального дрейфового движения во втором приближении по амплитуде волны главное — вычислить интегральные слагаемые в правой части формулы (3.2). Эти слагаемые выражаются через решение задачи первого порядка малости, которое было построено в предыдущем пункте. Таким образом, для расчета дрейфового течения в нижней жидкости необходимо взять действительные части выражений (2.8), подставить их в интегральные слагаемые правой части (3.2) и отделить от получившего выражения нециклическую часть, отвечающую только за горизонтальное дрейфовое смещение. В случае устойчивого волнового возмущения, для которого выполняется условие (2.9), описанные действия приведут к следующему соотношению для скорости горизонтального дрейфа:

$$V_S^w = \zeta^2 k\omega \exp(2kz).$$

Выписанная формула практически совпадает с выражением для дрейфа Стокса [8], с той лишь разницей, что под ω подразумевается не частота чисто гравитационной периодической волны, а величина, рассчитанная по формуле (2.5).

Между тем непосредственное применение формулы (3.1) для расчета собственной скорости жидкой частички в верхней области совершенно неприемлемо. Дело в том, что соотношение (3.1) получено в результате разложения лагранжевой скорости индивидуальной жидкой частички по степеням малого параметра, в качестве которого выступает отклонение положения этой частички от начального состояния или некой средней позиции. В нижней жидкости главная составляющая движения — циклическая: поверхностная частичка за характерное время движения $2\pi/\omega$ не удаляется от своего среднего положения на расстояние больше амплитуды волны (а для частички, удаленной от поверхности, это отклонение еще меньше). Если же говорить о движении верхней среды, то в системе координат $Oxyz$ все ее частицы участвуют в общем горизонтальном движении и за конечное время смещаются на значительное расстояние. Для корректного использования формулы (3.1) сначала нужно перейти в систему отсчета, перемещающуюся вместе с верхней жидкостью с горизонтальной скоростью U_0. В эйлеровом представлении такой переход связан с модификацией свойств волнового процесса: в выражениях типа бегущей волны $\exp(i(\omega t - kx))$ круговая частота при переходе к новой системе координат изменит свое значение. В соответствии с эффектом Доплера в движущейся системе отсчета волновое движение будет происходить с частотой: $\sigma = \omega - kU_0$. В этой новой системе отсчета формула (3.1) уже работает. С помощью следующего из нее из нее соотношения (3.2) несложно найти собственную скорость жидкой частички. При этом важно понимать, что в лагранжневом представлении выражение вида $\exp(i(\sigma t - kx_0))$ описывает не распределенный в пространстве волновой процесс, а локальное колебательное движение жидкой частички, поскольку координата x_0 в этом описании имеет смысл начальной координаты частички в момент времени $t = 0$. В результате, возвращение в исходную систему координат, связанную с нижней жидкостью, не будет сопровождается каким-либо изменением частоты.

Для не участвующего в развитии неустойчивости волнового возмущения, действуя в отношении поля скоростей в верхней области согласно вышеописанному плану, несложно получить, что в неподвижной системе координат $Oxyz$ будет наблюдаться не только горизонтальное движение частиц верхней среды со скоростью U_0, но и добавочный горизонтальный дрейф со скоростью

$$V_S^a = \zeta^2 k(\omega - kU_0)\exp(-2kz).$$

4. Дрейфовое движение в условиях неустойчивости

Если скорость верхней среды достаточно велика, и выполняется условие (2.11), то волновое возмущение вовлекается в развитие Неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. В терминах решения задачи первого порядка малости (2.1)-(2.4) это означает, что форма поверхности раздела сред начинает эволюционировать, как прогрессивная волна с экспоненциально нарастающей амплитудой:

$$\xi_1 = \zeta\cos(\Omega t - kx)\exp(rt);$$

$$\Omega = \frac{kU_0\rho^a}{\rho^a + \rho^w}; \qquad r = \frac{\sqrt{k^2\rho^a\rho^w U_0^2 - k^3\,\gamma(\rho^a + \rho^w) - g\,k((\rho^w)^2 - (\rho^a)^2)}}{\rho^a + \rho^w}.$$

В рамках эйлерова подхода обнаруживается нарастание искажения поверхности раздела, как геометрического места точек, разделяющих две жидкости. При этом характерные черты собственного движения жидких частиц остаются «за кадром». Качественно понятно, что частички обеих сред совершают в вертикальной плоскости циклические движения с нарастающей амплитудой, но только переход к лагранжевому описанию позволяет составить представление о том, что при этом происходит с дрейфовым движением индивидуальных жидких частиц. Для расчета дрейфовой скорости следует использовать методику, описанную в предыдущем пункте. В нижней области скорость дрейфа определяется непосредственно с помощью формулы (3.2). Расчет дрейфа в верхней жидкости осуществляется посредством перехода в горизонтально движущуюся со скоростью U_0 систему координат, учета эффекта Доплера, расчета лагранжевой скорости в новой координатной системе и, наконец, возвращения в исходную систему. В результате для скоростей горизонтального дрейфа в верхней и нижней областях течения получаются следующие соотношения:

$$V_D^a = -\zeta^2 k(kU_0 - \Omega)\exp(-2kz)\exp(rt); \qquad V_D^w = \zeta^2 k\Omega\exp(2kz)\exp(2rt).$$

Несложно заметить, что амплитудный множитель скорости дрейфа в верхней жидкости $\zeta^2 k(\Omega - kU_0)$ меньше нуля, тогда как для нижней жидкости он положителен. Дрейф в нижней области происходит в направлении движения верхней среды (верхняя жидкость как бы увлекает приповерхностные частицы нижней), а добавочный к общему движению со скоростью U_0 дрейф в верхней жидкости имеет противоположное направление (верхняя среда «тормозится» нижней). Скорость дрейфа в обоих случаях пропорциональна квадрату амплитуды возмущения, уменьшается с удалением от поверхности раздела сред и экспоненциально нарастает со временем, уменьшая скорость относительного смещения жидкостей.

5. Заключение

Общепринятое представление о начальной стадии развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца как неустойчивости волнового возмущения границы раздела двух сред, участвующих в относительном сдвиговом движении, не учитывает важные детали этого явления. Традиционно, главное внимание уделяется лишь нарастанию амплитуды искажения границы раздела сред и фактически не затрагивается вопрос о свойствах сдвигового течения. Это связано с тем, что в классическом подходе течение исследуется лишь в эйлеровом представлении поля скоростей. При переходе к собственным скоростям жидких частиц, обнаруживается, что в процессе развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в граничащих средах возникает дрейфовая добавка к общему сдвиговому течению. Скорости добавочных дрейфовых течений в обеих средах направлены вдоль поверхности раздела, нарастают с течением времени, пропорциональны квадрату амплитуды волнового возмущения и уменьшаются с удалением от поверхности раздела. Направления добавочных дрейфовых течений — встречное: проявляется тенденция к уменьшению скорости относительного смещения жидкостей.

Развитая в работе методика перехода от эйлеровой формы записи решения к лагранжевой может быть применена и для анализа других задач, связанных с расчетом собственных движений частичек среды вблизи возмущенной поверхности раздела жидких сред. Сама же разобранная задача является показательным примером того, что эйлеров подход к описанию движения жидкости может оказаться недостаточным для обнаружения некоторых важных свойств течения, которые успешно обнаруживаются благодаря переходу к лагранжевой форме описания явления.

Список цитируемых источников

1. *Абрашкин, А. А., Якубович, Е. И.* Вихревая динамика в лагранжевом описании. — Москва: Физматлит, 2006. — 176 с.

   Abrashkin, A. A, & Yakubovich, E. I. (2006). Vortex dynamics in Lagrange‘s description. Moscow: Fizmatlit.

2. *Белоножко, Д. Ф., Козин, А. В.* О расчете скорости переноса вещества периодическими волнами, распространяющимися по поверхности вязкой жидкости // ЖТФ. — 2010. — Т.80, №4 — С. 32–40.

   Belonozhko,D.F., & Kozin,A.V. (2010). Calculation of the Velocity of Mass Transfer by Periodic Waves Propagating over a Viscous Fluid Surface. Zh. Tekhn. Fiz. 80(4), 32-40.

3. *Белоножко, Д. Ф., Козин, А. В.* Об особенностях строения дрейфового течения, инициируемого периодическими волнами, распространяющимися по поверхности вязкой жидкости // Изв. РАН МЖГ. — 2011. №2 — С. 112–120.

   Belonozhko,D.F., & Kozin,A.V. (2011). Structure of the drift flow initiated by periodic waves traveling over a viscous fluid surface (in Russian). Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk, Mekhanika Zhidkosti i Gaza. 46(2), 112-120.

4. *Дразин, Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости: Пер.с англ. Г. Г. Цыпкина. — Москва: Физматлит, 2005. —288 с.

   Drazin P.G. (2002). Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge University Press.

5. *Ле Блон, П., Майсек, Л.* Волны в океане. Ч.1.: Пер. с англ. Е. Н. Амбарцумяна и др. — Москва: Мир, 1981. — 480 с.

   Le Blond, P. H.,& Mysak, L. A. (1978). Waves in Ocean, Amsterdam: Elsevier.

6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: учебное пособие в 10 томах. Т.VI Гидродинамика. Изд.3 — Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 736 с.

   Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1987). Fluid Mechanics. Oxford: Pergamon Press.

7. *Левич, В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. 2-е изд. — Москва: ГИФМЛ., 1959. — 699 с.

   Levich, V. G. Physicochemical Hydrodynamics. (1962). Prentice-Hall. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

8. *Stoks, G. G.* On the theory of of oscillatory waves // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. — 1847. — V. 8, №4 — P. 441–455.

Получена 15.11.2015