Динамические системы, 2015, том 5(33), №1-2, 85–92

УДК 517.98

Аналоги теоремы о неподвижных точках с использованием специальных свойств непрерывности[1]

Ф. С. Стонякин

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь. *E-mail: fedyor@mail.ru*

Аннотация. В работе получены новые версии теоремы о неподвижной точке для отображений выпуклых ограниченных подмножеств банахова пространства в себя без требования предкомпактности его образа. В банаховых пространствах, имеющих счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов, введены специальные аналоги понятия непрерывности отображений. Для отображений, заданных на выпуклом ограниченном множестве и удовлетворяющих одному из таких условий, доказана возможность единственного продолжения по непрерывности на банахово пространство, порождённое антикомпактом, содержащее исходное пространство. При этом такое продолжение будет иметь неподвижную точку. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие разные случаи расположения этой точки по отношению к исходному пространству. Доказаны аналоги некоторых основных результатов в произвольных банаховых пространствах.

Ключевые слова: неподвижная точка, теорема Шаудера, банахово пространство, антикомпакт, равномерная непрерывность.

Введение

Хорошо известна теорема Шаудера, утверждающая существование неподвижной точки всякого отображения $f\colon B \to B$, где B — выпуклый компакт в банаховом пространстве E. Если же выпуклое множество B замкнуто и ограничено в E, то результат остаётся верным в случае предкомпактности $f(B)$. Эти результаты активно используются в приложениях и ввиду этого разные их модификации исследуются и в наше время. Отметим, в частности, в этой связи недавние работы О. Э. Зубелевича [1] и Е. С. Половинкина [2].

В настоящей работе предлагается подход к теоремам о неподвижных точках для ограниченного замкнутого множества B в банаховом пространстве, но без требования предкомпактности образа $f(B)$ (что, естественно приводит к ограничениям нового типа). Наш подход к рассматриваемой проблеме, в частности, основан на понятии *антикомпактного множества* или *антикомпакта* в банаховых пространствах, которое введено и исследовано нами в [3]. Замкнутое выпуклое симметричное подмножество C' банахова пространства E есть антикомпакт, если пространство E инъективно и компактно вложено в другое банахово пространство $E_{C'} = (span\ C', \|\cdot\|_{C'} = p_{C'}(\cdot))$ ($p_{C'}$ — функционал Минковского множества C). В [4] нами показано, что банахово пространство имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда оно имеет счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов. Такой подход даёт возможность рассматривать достаточно широкий класс пространств.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-41-01005

Работа состоит из введения, трёх основных разделов и заключения. В первых двух разделах мы показываем, как с использованием антикомпактов можно получить аналоги теоремы о неподвижных точках (теоремы 1 и 2), построены примеры отображений, к которым применимы эти результаты (примеры 1 и 2). Мы вводим в этих разделах специальные условия непрерывности отображений, связанные с понятием антикомпакта. При этом, как оказалось, отображение может быть разрывным в обычном смысле (см. пример 3). Последний разделе работы посвящён аналогам некоторых результатов первых двух разделов в произвольных банаховых пространствах (которые не обязательно имеют антикомпакт).

1. Аналог теоремы о неподвижных точках в банаховых пространствах с использованием $E_{C'}$-равномерной непрерывности

В этом разделе мы получим аналог теоремы Шаудера, использующие ранее предложенное понятие антикомпакта в банаховых пространствах, которое предложено нами ранее в [3]. Напомним, что замкнутое выпуклое симметричное множество C' в банаховом пространстве E называется антикомпактом, если в пространстве $E_{C'} = (span\, C', ||\cdot||_{C'})$ ($||\cdot||_{C'} = p_{C'}(\cdot)$ — функционал Минковского; $E_{C'}$ пополнено относительно $||\cdot||_{C'}$) содержится и предкомпактно всякое ограниченное множество $B \subset E$. Иными словами, E инъективно компактно вложено в $E_{C'}$. Под $\mathcal{C}'(E)$ мы понимаем набор антикомпактов в пространстве E. В [4] показано, что E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда в пространстве E существует счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^*$: $\ell_n(x) = \ell_n(y)\, \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow x = y$ (здесь и всюду далее будем полагать, что $||\ell_n||_{E^*} \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$). Примером антикомпактов, соответствующих T_0 в таких пространствах E может служить система множеств:

$$C_\varepsilon = \left\{ x \in E \,\middle|\, \sup_k \left| \frac{\ell_k(x)}{\varepsilon_k} \right| \leq 1 \right\}, \tag{1.1}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к $+\infty$ [3, 4].

Перейдём к изложению полученных результатов. Условимся всюду далее через $\overline{B_{E_{C'}}}$ мы будем обозначать замыкание множества $B \subset E \subset E_{C'}$ в пространстве $E_{C'}$. Сначала отметим практически очевидный факт, вытекающий из обычный теоремы Шаудера в в пространстве $E_{C'}$.

Предложение 1. Пусть B — ограниченное выпуклое подмножество в банаховом пространстве E, $f : B \to B$ и существует антикомпакт $C' \in \mathcal{C}'(E)$: $\overline{B_{E_{C'}}} = B$ и $f : B \to B$ непрерывно в пространстве $E_{C'}$. Тогда существует $x_0 \in B$: $f(x_0) = x_0$.

Однако условия $\overline{B_{E_{C'}}} = B$ и непрерывности f в пространстве $E_{C'}$ выглядят несколько искусственными и трудно проверяемыми. Введём следующее понятие.

Определение 1. Для выпуклого ограниченного множества $B \subset E$ будем называть отображение $f : B \to B$ $E_{C'}$*-равномерно непрерывным*, если $\forall x, y \in B$

$$\forall L > 0\, \exists \delta > 0 :\ ||x - y||_{C'} < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)||_{C'} < L.$$

Теорема 1. *Пусть B — выпукло и ограничено в банаховом пространстве E, $\mathcal{C}'(E)$ непусто, $f : B \to B$ $E_{C'}$-равномерно непрерывно при некотором $C' \in \mathcal{C}'(E)$. Тогда f можно единственным образом по непрерывности продолжить на $\overline{B_{E_{C'}}} \subset E_{C'}$ (продолжение будем обозначать через f) и существует $x_0 \in \overline{B_{E_{C'}}} : f(x_0) = x_0$.*

Доказательство. $\overline{B_{E_{C'}}}$ — компакт в $E_{C'}$ по построению. Если $x \in \overline{B_{E_{C'}}} \backslash B$, то $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \subset B : \lim\limits_{n\to\infty} ||x - x_n||_{C'} = 0$. При этом по условию $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ и поэтому $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ предкомпактна в $E_{C'}$. Из $E_{C'}$-равномерной непрерывности f и фундаментальности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ следует фундаментальность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ в $E_{C'}$, то есть $\exists f_x := \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n), f_x \in E_{C'}$ и сходимость в пространстве $E_{C'}$. Также из $E_{C'}$-равномерной непрерывности следует, что f_x не зависит от выбора $x_n \to x$. Поэтому f можно единственным образом продолжить на $\overline{B_{E_{C'}}}$: $\forall x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ в пространстве $E_{C'}$, $x_n \in B$ $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ в пространстве $E_{C'}$, $f(x) \in \overline{B_{E_{C'}}}$. Ввиду компактности $B_{E_{C'}}$ в $E_{C'}$ можно применить к $f : \overline{B_{E_{C'}}} \to \overline{B_{E_{C'}}}$ обычную теорему Шаудера, что завершает доказательство. □

Естественно возникает вопрос конкретных примеров отображений f, к которым применима теорема 1.

Пример 1. Пусть $f : B \to B$, B — замкнутый единичный шар с центром в нуле в пространстве $E = c_0$ $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in B$ $f(x) := (1, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in B$. Если рассмотреть последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_k = k > 0)_{k=1}^{\infty}$, то множество

$$C_\varepsilon = \left\{ x \in c_0 \,\middle|\, \sup_k \left| \frac{x_k}{\varepsilon_k} \right| \le 1 \right\} \tag{1.2}$$

антикомпактно в c_0, поскольку $\overline{B_{E_{C_\varepsilon}}}$ равномерно ограничено последовательностью $(1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots) \in c_0$, то есть $\overline{B_{E_{C_\varepsilon}}}$ — компакт в E_{C_ε}. E_{C_ε}-равномерная непрерывность f вытекает из следующих выкладок $\forall x = (x_k)_{k=1}^{\infty}, y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in B$:

$$||f(x) - f(y)||_{C_\varepsilon} = \sup_k \left| \frac{x_k - y_k}{\varepsilon_{k+1}} \right| = \sup_k \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}} \left| \frac{x_k - y_k}{\varepsilon_k} \right| \le$$

$$\le \sup_k \left| \frac{x_k - y_k}{k} \right| = ||x - y||_{C_\varepsilon} \quad \forall x, y \in B. \tag{1.3}$$

По теореме 1 $\exists x_0 \in \overline{B_{C_\varepsilon}} : f(x_0) = x_0$. Ясно, что $x_0 = (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots) \in \ell_\infty \backslash c_0$, то есть $x_0 \notin B$. Это иллюстрирует ситуацию, когда $x_0 \in \overline{B_{E_{C'}}} \backslash B$.

Пример 2. Возможно также, что $x_0 \in B$. Чтобы это показать, зададим $f : B \to B$ в пространстве ℓ_∞, B — замкнутый единичный шар в ℓ_∞ с центром в нуле. Будем рассматривать аналогичную (1.2) систему антикомпактов C_ε. При такой замене оказывается, что $\overline{B_{C_\varepsilon}} = B$. Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x_0||_{C_\varepsilon} = 0$, где $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B, x_0 \in E_{C_\varepsilon}$, то $x_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\right)$, $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, \ldots\right)$ и

$$0 = \lim_{n\to\infty} ||x_n - x_0||_{C_\varepsilon} = \lim_{n\to\infty} \sup_k \left| \frac{x_k^{(n)} - x_k^{(0)}}{\varepsilon_k} \right|,$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и в силу $|x_k^{(n)}| \le 1$ $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $|x_k^{(0)}| \le 1$, то есть $x_0 \in B$. E_{C_ε}-непрерывность f вытекает из выкладок (1.3). По предложению 1 $\exists x_0 \in B$: $f(x_0) = x_0$ (в данном случае $x_0 = (1, 1, 1, \ldots)$).

2. Аналог теоремы о неподвижных точках в банаховых пространствах с использованием T_0-равномерной непрерывности

Оказывается, при выборе системы антикомпактов (1.1) можно в теореме 1 заменить условие E_{C_ε}-равномерной непрерывности $f : B \to B$ (где B — ограниченное множество в пространстве E) на следующее более строгое условие T_0-равномерной непрерывности в E, связанное с соответствующим (1.1) счётным тотальным в E множеством $T_0 \subset E^*$.

Определение 2. Пусть $B \subset E$ ограничено. Будем называть $f : B \to B$ *T_0-равномерно непрерывным*, если при всякого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m_n \in \mathbb{N}$, что

$$\forall L > 0\,\exists \delta > 0 :\ |\ell_{m_n}(x-y)| < \delta \Rightarrow |\ell_n(f(x)-f(y))| < L.$$

Переформулируем теорему 1 в терминах T_0-равномерной непрерывности f.

Теорема 2. *Если B выпукло и ограничено в $E, f : B \to B$ T_0-равномерно непрерывно, то существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \ell(f(x_n)) \quad \forall \ell \in T_0$;

(ii) для любой возрастающей последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)$, сходящейся к $+\infty$ f можно единственным образом по непрерывности продолжить (продолжение мы тоже обозначим f) на $\overline{B_{E_{C_\varepsilon}}} \subset E_{C_\varepsilon}$, C_ε удовлетворяет (1.1). *При этом существует $x_0 \in \overline{B_{E_{C_\varepsilon}}}$ такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x_0||_{C_\varepsilon} = 0$ и верно $f(x_0) = x_0$.*

Доказательство. Достаточно показать, что T_0-равномерная непрерывность f влечет E_{C_ε}-равномерную непрерывность f при выборе C_ε из (1.1) для произвольной последовательности ε, сходящейся к $+\infty$. Пусть $x, y \in B$. Тогда $||x||, ||y|| \le K$ и поэтому $|\ell_n(x)|, |\ell_n(y)| \le K\ \forall n \in \mathbb{N}$, $|\ell_n(x-y)| \le |\ell_n(x)| + |\ell_n(y)| \le 2K$, то есть для достаточно больших $n\ \forall k \ge n\ \left|\frac{\ell_k(x-y)}{\varepsilon_k}\right| < \delta$ для всякого фиксированного числа $K > 0$. Это означает, что для условия $||x-y||_{C_\varepsilon} < \delta$ достаточно $\left|\frac{\ell_k(x-y)}{\varepsilon_k}\right| < \delta$ при $k < n$ (не уменьшая общности, можно полагать, что $m_k \le k$ при $k < n$). Итак, для фиксированного числа $C > 0$ выбираем $\delta := \min\left(\frac{\delta_1}{\varepsilon_1}, \frac{\delta_2}{\varepsilon_2}, \ldots, \frac{\delta_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}},\right)$. Тогда при $||x-y||_{C_\varepsilon} < \delta \quad ||f(x)-f(y)||_{C_\varepsilon} < KL$, где $K = \sup\left(\frac{1}{\varepsilon_1}, \ldots, \frac{1}{\varepsilon_{n-1}},\right)$. Итак, f E_{C_ε}-равномерно непрерывно. Доказываемое утверждение вытекает из теоремы 1. $\square$

Сделаем замечание по поводу связи T_0-равномерной непрерывности (или $E_{C'}$-равномерной непрерывности, $C' \in \mathcal{C}'(E)$) $f : B \to B$ с обычной равномерной непрерывностью: *T_0-равномерно непрерывное отображение f может быть разрывным в E.* Это показывает, что полученные нами аналоги теоремы Шаудера возможно использовать для некоторых разрывных (в сильном и в слабом смысле) отображений.

Пример 3. Пусть $E = \ell_\infty$, $f : B \to B$.

$$B = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_\infty \,\middle|\, x_k \ge 0\,\forall k \in \mathbb{N}, \sup_k |x_k| \le 1 \right\}.$$

Определим

$$f((x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)) := (x_1, \sqrt{x_2}, \sqrt[3]{x_3}, \ldots, \sqrt[n]{x_n}, \ldots).$$

Если $x^{(N)} = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}, \ldots\right) \in B$ (здесь $N \in \mathbb{N}$), то $\lim\limits_{N\to\infty} ||x^{(N)}||_E = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} = 0$, но $f(x^{(N)}) = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt[3]{N}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[n]{N}}, \ldots\right) \in B$. Однако $||f(x^{(N)})||_E = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt[k]{N}} = 1$, поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{N} = 1$ при фиксированном $N \in \mathbb{N}$. Итак, $x^{(N)} \to 0$ но $f(x^{(N)}) \not\to 0 = f(0)$ при $N \to \infty$, то есть f разрывно на B.

Если выбрать $T_0 = \{\ell_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^*$: $\ell_k((x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)) := x_k$ — координатные функционалы, то f T_0-равномерно непрерывна на B ввиду того, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\ell_n((x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)) = x_n, \ell_n(f(x)) = \sqrt[n]{x_n}$ и равномерной непрерывности числовой функции $\varphi(t) = \sqrt[n]{t}, \quad t \in [0;1]$ при фиксированном $n \in \mathbb{N}$.

Обратим внимание на ещё одно обстоятельство: *неподвижная точка, существующая на $E_{C'}$ при некотором $C' \in \mathcal{C}'(E)$ по теореме 2 может не лежать в B и даже в пространстве E*. Тем не менее, сделаем такие замечания по этому поводу.

1. Если E рефлексивно и имеет антикомпакт, то всякое замкнутое ограниченное выпуклое множество $B \subset E$ слабо секвенциально компактно, то есть из любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность: $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $x \in B$: $\lim\limits_{k\to\infty} \ell(x_{n_k}) = \ell(x) \quad \forall \ell \in E^*$ и, в частности, последнее равенство верно $\forall \ell \in T_0$, $T_0 \subset E^*$ — счётное тотальное в E множество. Положим $||T_0||_{E^*} = 1$ и рассмотрим введённую выше систему антикомпактов C_ε. В таком случае $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x_0||_{C_\varepsilon} = 0$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \ell(x_0)$ $\forall \ell \in T_0), \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$. Далее, не уменьшая общности рассуждений, можно полагать, что $x_n \to x \in E \subset E_{C_\varepsilon}$, то есть $x_0 = x$ ввиду инъективности вложения E в E_{C_ε}.

Итак, *если E рефлексивно и имеет антикомпакт, $f : B \to B$, B ограничено, замкнуто и выпукло, то в условиях теоремы 1 можно утверждать существование такого $x_0 \in B$, что $f(x_0) = x_0$, если $C' = C_\varepsilon \in \mathcal{C}'(E)$.*

2. *Принадлежность $x_0 = f(x_0) \in B$ в случае замкнутого B возможна и в нерефлексивных пространствах.* Например, для $E = \ell_\infty$ можно показать в случае E_{C_ε}-непрерывности $f : B \to B$, что $x_0 \in E$ ($\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n)$ ограничено $\forall \ell \in T_0$ ввиду ограниченности B), причем $||x_0|| \le ||B|| = \sup\{||b|| \,|\, b \in B\}$. Однако при этом x_0 не обязательно лежит в B: если $B = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \,|\, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$ и $f((x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)) = (1, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $x_0 = (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots) \in E$, но $x_0 \notin B$.

3. Случай произвольного банахова пространства

В предыдущих разделах мы существенно использовали существование в банаховых пространствах антикомпактов. Оказывается, в части полученных ранее результатов несущественна инъективность вложения E в $E_{C'}$. Например, утверждение теоремы 2 (i) можно доказать для любого счетного $T_0 \subset E^*$, $||T_0||_* \le 1$ и, более того, для всякого компакта $K \subset E^*$, причем в любом банаховом пространстве E (не обязательно имеющем антикомпакты). При этом, однако, изменится утверждение теоремы 2 (ii), в котором существенна инъективность вложения E в $E_{C'}$. Данный пункт работы посвящён обсуждению возможностям получения аналогов результатов предыдущих пунктов на случай произвольного банахова пространства, не обязательно имеющего антикомпакт.

Рассмотрим пару банаховых пространств (E, E^*) в двойственности

$$< x, \ell >:= \ell(x) \quad \forall \ell \in E^*,\, x \in E.$$

Тогда для любого компакта $K \subset E^*$ (в топологии, порожденной нормой $||\cdot||_*$ в сопряжённом пространстве E^*) существует поляра $K^0 \subset E$:

$$K^0 = \left\{ x \in E \,\middle|\, \sup_{\ell \in K} |\ell(x)| \leq 1 \right\}.$$

Ясно, что K^0 выпукло и симметрично в E. Для всякого выпуклого и симметричного множества $C \subset E$ можно рассмотреть фактор-пространство $E_C = E/ker\|\cdot\|_C = (spanC, \|\cdot\|_C)$, пополненное по $||\cdot||_C$, где $\|\cdot\|_C = p_C(\cdot)$ — функционал Минковского C.

Пусть $K_0 = \overline{co_{E^*}(K-K)} \subset E^*$ — поляра K^0. Тогда можно рассмотреть банахово пространство $E_{K_0} = (spanK_0, ||\cdot||_{K_0})$ с компактным вложением $\varphi : E_{K_0} \to E^*$: $\varphi(\ell) = \ell$ $\forall \ell \in E_{K_0}$. Тогда по теореме Шаудера о компактности сопряженного оператора вложение $\varphi^* : E \to E_{K^0}$ компактно (φ^* — сопряжённый оператор к φ). Поэтому для любого ограниченного $B \subset E$ $\varphi^*(B)$ — предкомпакт в новом банаховом пространстве E_{K^0}. При этом заметим, что φ^* инъективно тогда и только тогда, когда $K_0 \in \mathcal{C}'(E)$.

Теперь перейдем к аналогам теоремы Шаудера с использованием компактности вложения $\varphi^* : E \to E_{K^0}$. Пусть B выпукло ограниченно в E, $f : B \to B$.

Определение 3. Для всякого компакта $K \subset E^*$ будем называть f *K-равномерно непрерывным* на B, если

$$\forall K > 0\, \exists \delta > 0 : \quad \sup_{\ell \in K} |\ell(x-y)| < \delta \Rightarrow \sup_{\ell \in K} |\ell(f(x) - f(y))| < K.$$

Легко видеть, что $\sup\limits_{\ell \in K} |\ell(x)| = \sup\limits_{\ell \in K_0} |\ell(x)|$ $\forall x \in E$. Аналогично схеме доказательства теоремы 1 доказывается существование отображения $\widetilde{f} : \overline{\varphi^*(B)} \to \overline{\varphi^*(B)}$ такого, что $\widetilde{f}(\varphi^*(x)) = \varphi^*(x)$ $\forall x \in B$. При этом из K-равномерной непрерывности f вытекает непрерывность $\widetilde{f}(x^*)$, $x^* \in \overline{\varphi^*(B)}$ в пространстве E_{K^0}. Из обычной теоремы Шаудера, применённой к $\widetilde{f} : \overline{\varphi^*(B)} \to \overline{\varphi^*(B)}$ в пространстве E_{K^0}, вытекает следующая

Теорема 3. *Пусть K — компакт в E^*, множество B выпукло и ограничено в E, отображение $f : B \to B$ K-равномерно непрерывно. Тогда для некоторого компактного вложения $\varphi^* : E \to E_{K^0}$ существует отображение $\widetilde{f} : \overline{\varphi^*(B)} \to \overline{\varphi^*(B)}$: $\widetilde{f}(\varphi^*(x)) = \varphi^*(x)$ $\forall x \in B$, причем $\exists x_0^* \in \overline{\varphi^*(B)} : \widetilde{f}(x_0^*) = x_0^*$.*

С точки зрения отображения $f : B \to B$ в исходном пространстве E верно

Следствие 1. *В условиях предыдущей теоремы существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\ell \in K} |\ell(x_n) - \ell(f(x_n))| = 0.$$

Рассмотрим случай произвольного счётного набора функционалов $T = \{\ell_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение 4. Будем называть f *T-равномерно непрерывным* на B, если для всех $\ell \in T$ и $x, y \in B$

$$\forall L > 0 \quad \exists \delta > 0 : |\ell(x-y)| < \delta \Rightarrow |\ell(f(x) - f(y))| < L.$$

Если T счётно в E^*, то при соответствующем выборе последовательности положительных чисел $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \varepsilon_k = +\infty$ вместо системы T можно рассмотреть $K = \left\{\frac{\ell_k}{\varepsilon_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset E^*$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{||\ell_k||}{\varepsilon_k} = 0$, то есть K — компакт в E^*. Если $f : B \to B$ K-равномерно непрерывно, то f E_{K^0}-равномерно непрерывно (то есть $\forall L > 0 \quad \exists \delta > 0 : ||x - y||_{K^0} < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)||_{K^0} < L$). Отметим, что при этом

$$||x||_{K^0} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{\ell_k(x)}{\varepsilon_k}\right|. \tag{3.1}$$

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 2. *Пусть T счётно в E^*, множество B ограничено и выпукло в E, отображение $f : B \to B$ T-равномерно непрерывно. Тогда для некоторого компактного вложения $\varphi^* : E \to E_{K^0}$ существует отображение $\widetilde{f} : \overline{\varphi^*(B)} \to \overline{\varphi^*(B)}$: $\widetilde{f}(\varphi^*(x)) = \varphi^*(x)$ $\forall x \in B$, причем $\exists x_0^* \in \overline{\varphi^*(B)} : \widetilde{f}(x_0^*) = x_0^*$.*

Равенство (3.1) позволяет сформулировать

Следствие 3. *В условиях предыдущего следствия существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$:*

$$\lim_{n\to\infty} \ell(x_n) = \lim_{n\to\infty} \ell(f(x_n)) \quad \forall \ell \in T.$$

Заключение

Настоящая работа — развитие наших предыдущих исследований, связанных с предложенной ранее системой антикомпактных множеств. В классе банаховых пространств, имеющих такие системы (что равносильно наличию счётного тотального множества линейных непрерывных функционалов), в статье получены аналоги теоремы о неподвижных точках. При этом рассматриваются отображения $f : B \to B$, где B — выпуклое замкнутое ограниченное множество без требования предкомпактности $f(B)$. Это привело к специальным аналогам понятия непрерывности отображений $f : B \to B$. Для отображений, удовлетворяющих одному из таких условий непрерывности, доказана возможность единственного продолжения по непрерывности на специальное пространство, а также наличие неподвижной точки у этого продолжения. Показано, что эта неподвижная точка может как лежать, так и не лежать в исходном пространстве. Приведён пример разрывного в обычном смысле отображения, к которым применимы полученные нами результаты. Доказано, что часть результатов работы может выполняться в произвольных банаховых пространствах (не обязательно имеющих антикомпакты).

Список цитируемых источников

1. *О. Э. ЗУБЕЛЕВИЧ*. Теорема Шаудера-Тихонова в счётно-нормированном пространстве. // Математические заметки. — Т. 90: 2 (2011) — С. 310-312.

   O. E. ZUBELEVICH, Shauder-Tykhonov Theorem in countable-normed space., *Math. Notes*, **90**: 2 (2011), P. 288-290.
2. *Е. С. ПОЛОВИНКИН*. Об одном следствии теоремы Шаудера. // Математические заметки. — 2014. — Т.96: 6. — С. 953-954.

   E. S. POLOVINKIN, On a Consequence of the Shauder theorem, *Math. Notes*, **96**: 6 (2014), P. 1020 – 1021.

3. *Ф. С. СТОНЯКИН*. Аналог теоремы Ула о выпуклости образа векторной меры. // Динамические системы — Т.3(31), № 3-4 (2013), С. 281–288.

   F. S. STONYAKIN, Analogue of Uhl Theorem on Convexity of vector measure's range, *Dynamical Systems*, **3(31)**: 3 – 4 (2013), , P. 281 – 288. (in Russian)
4. *Ф. С. СТОНЯКИН* Секвенциальные аналоги теорем Ляпунова и Крейна-Мильмана в пространствах Фреше. // Современная математика. Фундаментальные направления. — т. 57 (2015). — С. 162 – 183.

   Stonyakin F.S. Sequential analogs of Lyapunov and Krein-Milman Theorems in Frechet spaces (in Russian) // Contemporary Math. Fund. Directions. — 2015. **57** (), P. 162-183. ()

Получена 20.06.2015